MECÁNICA DE FLUIDOS

FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

YUNUS A. ÇENGEL
JOHN M. CIMBALA





MAGNITUD	SISTEMA MÉTRICO	SISTEMA INGLÉS
Viscosidad, cinemática	$1\ m^2/s = 10^4\ cm^2/s$ $1\ stoke = 1\ cm^2/s = 10^{-4}\ m^2/s$	$1\ m^2/s = 10.764\ ft^2/s = 3.875 \times 10^4\ ft^2/h$ $1\ m^2/s = 10.764\ ft^2/s$
Volumen	$1\ m^3 = 1000\ L = 10^6\ cm^3$ (cc)	$1\ m^3 = 6.1024 \times 10^4\ in^3 = 35.315\ ft^3$ = 264.17 gal (U.S.) 1 galón de EUA = 231 in^3 = 3.7854 L 1 onza líquida = 29.5735 cm^3 = 0.0295735 L 1 galón de EUA = 128 fl onzas líquidas
Flujo volumétrico	$1\ m^3/s = 60\ 000\ L/min = 10^6\ cm^3/s$	$1\ m^3/s = 15\ 850\ gal/min = 35.315\ ft^3/s$ $= 2\ 118.9\ ft^3/min$ (CFM)

*Factor de conversión exacto entre unidades métricas e inglesas.

Algunas constantes físicas

CONSTANTE FÍSICA	SISTEMA MÉTRICO	SISTEMA INGLÉS
Aceleración gravitacional estándar	$g = 9.80665\ m/s^2$	$g = 32.174\ ft/s^2$
Presión atmosférica estándar	$P_{atm} = 1\ atm = 101.325\ kPa$ = 1.01325 bar = 760 mm Hg (0°C) = 10.3323 m H_2O (4°C)	$P_{atm} = 1\ atm = 14.696\ psia$ $= 2116.2\ lbf/ft^2$ = 29.9213 pulg Hg (32°F) = 406.78 pulg H_2O (39.2°F)
Constante universal de los gases	$R_u = 8.31447\ kJ/kmol \cdot K$ $= 8.31447\ kN \cdot m/kmol \cdot K$	$R_u = 1.9859\ Btu/lbmol \cdot R$ $= 1\ 545.37\ ft \cdot lbf/lbmol \cdot R$

Propiedades de uso común

PROPIEDAD	SISTEMA MÉTRICO	SISTEMA INGLÉS
Aire a 20°C (68°F) y 1 atm		
Constante específica del gas*	$R_{aire} = 0.2870\ kJ/kg \cdot K$ $= 287.0\ m^2/s^2 \cdot K$	$R_{aire} = 0.06855\ Btu/lbm \cdot R$ $= 53.34\ ft \cdot lbf/lbm \cdot R$ $= 1716\ ft^2/s^2 \cdot R$
Razón de calores específicos	$k = c_P/c_v = 1.40$	$k = c_P/c_v = 1.40$
Calores específicos	$c_P = 1.007\ kJ/kg \cdot K$ $= 1007\ m^2/s^2 \cdot K$ $c_v = 0.7200\ kJ/kg \cdot K$ $= 720.0\ m^2/s^2 \cdot K$	$c_P = 0.2404\ Btu/lbm \cdot R$ $= 187.1\ ft \cdot lbf/lbm \cdot R$ $= 6\ 019\ ft^2/s^2 \cdot R$ $c_v = 0.1719\ Btu/lbm \cdot R$ $= 133.8\ ft \cdot lbf/lbm \cdot R$ $= 4\ 304\ ft^2/s^2 \cdot R$
Velocidad del sonido	$c = 343.2\ m/s = 1236\ km/h$	$c = 1\ 126\ ft/s = 767.7\ mi/h$
Densidad	$\rho = 1.204\ kg/m^3$	$\rho = 0.07518\ lbm/ft^3$
Viscosidad	$\mu = 1.825 \times 10^{-5}\ kg/m \cdot s$	$\mu = 1.227 \times 10^{-5}\ lbm/ft \cdot s$
Viscosidad cinemática	$\nu = 1.516 \times 10^{-5}\ m^2/s$	$\nu = 1.632 \times 10^{-4}\ ft^2/s$
Agua líquida a 20°C (68°F) y 1 atm		
Calor específico ($c = c_P = c_v$)	$c = 4.182\ kJ/kg \cdot K$ $= 4\ 182\ m^2/s^2 \cdot K$	$c = 0.9989\ Btu/lbm \cdot R$ $= 777.3\ ft \cdot lbf/lbm \cdot R$ $= 25\ 009\ ft^2/s^2 \cdot R$
Densidad	$\rho = 998.0\ kg/m^3$	$\rho = 62.30\ lbm/ft^3$
Viscosidad dinámica	$\mu = 1.002 \times 10^{-3}\ kg/m \cdot s$	$\mu = 6.733 \times 10^{-4}\ lbm/ft \cdot s$
Viscosidad cinemática	$\nu = 1.004 \times 10^{-6}\ m^2/s$	$\nu = 1.081 \times 10^{-5}\ ft^2/s$

* Independiente de la temperatura o la presión

MECÁNICA DE FLUIDOS

FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

MECÁNICA DE FLUIDOS

FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

YUNUS A. ÇENGEL
Departamento de Ingeniería Mecánica
University of Nevada, Reno

JOHN M. CIMBALA
Departamento de Ingeniería Mecánica y Nuclear
The Pennsylvania State University

Traducción
Víctor Campos Olguín
Traductor profesional

Revisión técnica
Sofía Fadeeva Sknarina
Profesora de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, CEM



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
LISBOA • MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Director editorial: Ricardo A. del Bosque Alayón
Editor sponsor: Pablo Eduardo Roig Vázquez
Editora de desarrollo: Paula Montaño González
Supervisor de producción: Zeferino García García

MECÁNICA DE FLUIDOS
Fundamentos y aplicaciones



A Subsidiary of ***The McGraw-Hill*** *Companies, Inc.*
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

Imagen de portada: © Getty/Eric Meola, Niagara Falls

ISBN 970-10-5612-4

Traducido de la primera edición de: FLUID MECHANICS. FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS.

0-07-247236-7

1234567890 09875432106

Impreso en México *Printed in Mexico*

Dedicatoria

A todos los estudiantes: con la esperanza de aumentar su deseo y entusiasmo por explorar el funcionamiento de nuestro maravilloso universo, del cual la mecánica de fluidos es una parte pequeña pero fascinante; nuestra esperanza es que este libro haga crecer su amor por el aprendizaje, no sólo de la mecánica de fluidos sino también de la vida.

ACERCA DE LOS AUTORES

Yunus A. Çengel es profesor emérito de Ingeniería Mecánica de la University of Nevada, Reno. Recibió su B. S. en Ingeniería Mecánica del Istanbul Technical University, su M. S. y su Ph. D. en Ingeniería Mecánica de la North Carolina State University. Sus áreas de investigación son la energía renovable, la desalinización, el análisis exergético, el mejoramiento de la transferencia de calor, la transferencia de calor por radiación y la conservación de la energía. Ha prestado sus servicios como director del Industrial Assessment Center (IAC) de University of Nevada, Reno, desde 1996 hasta el 2000. Ha dirigido equipos de estudiantes de Ingeniería en numerosas instalaciones de fabricación en el norte de Nevada y en California, con el fin de realizar evaluaciones industriales y presentar a las mismas informes relacionados con la conservación de la energía, la minimización de los desechos y el mejoramiento de la productividad.

El doctor Çengel es coautor de *Thermodynamics: An Engineering Approach*, 4a. ed. (2002), publicado por McGraw-Hill, el cual ha sido adoptado ampliamente como libro de texto; también es autor del libro de texto *Heat Transfer: A Practical Approach,* 2a. ed. (2003) y coautor del libro de texto *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciencies*, 2a. ed. (2005), ambos publicados por McGraw-Hill. Algunos de sus libros de texto han sido traducidos al chino, japonés, coreano, castellano, turco, italiano y griego.

El doctor Çengel ha recibido varios premios sobresalientes como profesor y además el ASEE Meriam/Wiley Distinguished Author Award a su excelencia como autor en 1992 y en 2000.

El doctor Çengel es Professional Engineer registrado en el estado de Nevada y miembro de la American Society for Engineering Education (ASEE).

John M. Cimbala es profesor de Ingeniería Mecánica en The Pennsylvania State University, University Park. Recibió su B. S. en Ingeniería Aeroespacial de Penn State y su M. S. en Aeronáutica del California Institute of Technology (CalTech). Recibió su Ph.D. en Aeronáutica del CalTech en 1984, bajo la supervisión del profesor Anatol Roshko, de quien está por siempre agradecido. Sus áreas de investigación incluyen la mecánica de fluidos experimental y computacional, la transferencia de calor, la turbulencia, el modelado de la turbulencia, la turbomaquinaria, la calidad del aire en interiores y el control de la contaminación del aire. Durante el año académico de 1993-1994, el profesor Cimbala tomó un periodo sabático de la universidad y trabajó en el NASA Langley Research Center, en donde aumentó sus conocimientos sobre la dinámica computacional de fluidos (CFD, *computational fluid dynamics*) y el modelado de la turbulencia.

El doctor Cimbala es coautor del libro de texto *Indoor Air Quality Engineering: Environmental Health and Control of Indoor Pollutants* (2003), publicado por Marcel-Dekker, Inc. También ha contribuido en otros libros y es autor o coautor de docenas de artículos para revistas así como de conferencias. Mayor información se puede hallar en www.mne.psu.edu/cimbala.

El profesor Cimbala ha recibido varios premios sobresalientes con relación a la enseñanza y ve su actividad de escribir libros como una extensión de su amor por ésta. Es miembro del American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), de la American Society of Mechanical Engineers (ASME), de la American Society for Engineering Education (ASEE) y de la American Physical Society (APS).

RESUMEN DEL CONTENIDO

Contenido

CAPÍTULO SIETE
ANÁLISIS DIMENSIONAL Y MODELADO 269

CAPÍTULO OCHO
FLUJO EN TUBERÍAS 321

CAPÍTULO NUEVE
ANÁLISIS DIFERENCIAL DE FLUJO DE FLUIDOS 399

CAPÍTULO DIEZ

SOLUCIONES APROXIMADAS DE LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES 471

CAPÍTULO ONCE

FLUJO SOBRE CUERPOS: ARRASTRE Y SUSTENTACIÓN 561

CAPÍTULO DOCE

FLUJO COMPRESIBLE 611

APÉNDICE 1
TABLAS Y GRÁFICAS DE PROPIEDADES (UNIDADES SI) 885

APÉNDICE 2
TABLAS Y GRÁFICAS DE PROPIEDADES (UNIDADES INGLESAS) 903

PREFACIO

ASPECTOS FUNDAMENTALES

La mecánica de fluidos es una materia excitante y fascinante, con un número ilimitado de aplicaciones prácticas que van desde sistemas biológicos microscópicos hasta automóviles, aviones y propulsión de las naves espaciales. Sin embargo, la mecánica de fluidos ha sido una de las materias que presentan mayores desafíos a estudiantes de licenciatura. A diferencia de las primeras materias del primero y segundo años de estudios, como la física, la química y la mecánica para ingeniería, en donde a menudo los estudiantes aprenden las ecuaciones y, a continuación, las "teclean y se las sorben de un trago" en sus calculadoras, el análisis adecuado en la mecánica de fluidos requiere mucho más. En primer lugar deben valorar el problema, establecer suposiciones y/o aproximaciones y justificarlas, aplicar las leyes físicas pertinentes en sus formas apropiadas y resolver las ecuaciones resultantes antes de que puedan teclear algún número en sus calculadoras. Muchos problemas de la mecánica de fluidos requieren más que únicamente conocer la materia, también exigen intuición física y experiencia. Tenemos esperanza en que este libro, a través de sus explicaciones cuidadosas de los conceptos y mediante su uso de numerosos ejemplos prácticos, esquemas, figuras y fotografías, tienda el puente entre el conocimiento y la aplicación adecuada del mismo.

La mecánica de fluidos es una materia madura; las ecuaciones y aproximaciones básicas se encuentran establecidas adecuadamente y se pueden hallar en numerosas obras de introducción a la misma. Los libros se distinguen entre sí por la manera en que se presenta el material. Un libro accesible sobre mecánica de fluidos debe presentar el material en *orden progresivo*, desde lo sencillo hasta lo más difícil, donde cada capítulo posterior se encuentre firmemente establecido sobre los fundamentos que se presentaron en los capítulos anteriores. De esta manera, incluso los aspectos de la materia que por lo general representan un reto mayor se pueden aprender con efectividad. Por su propia naturaleza, la mecánica de fluidos es —de manera preponderante— una materia que debe ilustrarse, de esta forma los estudiantes la aprenden con más facilidad mediante la simulación visual. Por lo tanto, resulta imperativo que un buen libro sobre mecánica de fluidos presente figuras, fotografías y material visual adicional de calidad que ayuden a explicar la importancia y el significado de las expresiones matemáticas.

OBJETIVOS

Se pretende que este libro se use como texto durante el primer curso de mecánica de fluidos para estudiantes de licenciatura de ingeniería, en su tercero o cuarto años de estudios. Se asume que los estudiantes cuentan con bases adecuadas en cálculo, física, mecánica para ingeniería y termodinámica. Los objetivos de este texto son:

- Cubrir los *principios y ecuaciones básicos* de la mecánica de fluidos.
- Presentar numerosos y diversos *ejemplos aplicados a la ingeniería* del mundo real con el fin de crear en los estudiantes cierta sensación acerca de cómo se aplica la mecánica de fluidos en la ingeniería.
- Desarrollar una *comprensión intuitiva* de la mecánica de fluidos cuando se resalte la física y proporcionar figuras y ayuda visual atractiva para reforzar esta última.

El texto contiene material suficiente que ofrece flexibilidad a los profesores acerca de los temas en los cuales quiere hacer hincapié. Por ejemplo, los profesores de ingeniería aeronáutica y aeroespacial puede ser que destaquen el flujo potencial, la resistencia al movimiento y la sustentación, el flujo compresible, la turbomaquinaria y la DFC; en tanto que los profesores de ingeniería mecánica y civil es posible que elijan resaltar los flujos en tubos y canales abiertos, respectivamente. El libro se ha escrito con amplitud suficiente en la cobertura como para que, si se desea, se pueda usar en una sucesión de dos cursos sobre mecánica de fluidos.

FILOSOFÍA Y META

Hemos adoptado la misma filosofía que se aplicó en los textos *Thermodynamics: An Engineering Approach*, de Y. A. Çengel y M. A. Boles; *Heat Transfer: A Practical Approach*, de Y. A. Çengel; *Fundamentals of Termal-Fluid Sciencies*, de Y. A. Çengel y R. H. Turner, publicados por McGraw-Hill; nuestra meta es ofrecer un libro de ingeniería que:

- Se comunique directamente con el pensamiento de los ingenieros del mañana de una manera *sencilla y, sin embargo, precisa*.
- Conduzca a los estudiantes hacia una comprensión clara y una captación firme de los *principios básicos* de la mecánica de fluidos.
- Aliente el *pensamiento creativo* y el desarrollo de una *comprensión más profunda* y una *sensación intuitiva* para la mecánica de fluidos.
- Los estudiantes *lo lean* con *interés* y *entusiasmo* y no sólo como una ayuda para resolver problemas.

Nuestra filosofía consiste en inculcar que la mejor manera de aprender es por medio de la práctica. De esta manera, se hizo un esfuerzo especial a través de todo el libro para fortalecer el aprendizaje del material que se presenta con anterioridad (tanto al principio del capítulo como en los capítulos anteriores). Podemos observar que muchos de los problemas de ejemplos ilustrados y los que se encuentran al final del capítulo son *detallados*, lo que fuerza al estudiante a repasar los conceptos aprendidos en los capítulos anteriores.

A lo largo del libro se muestran ejemplos generados por medio de la *dinámica de fluidos computacional* (CFD, *computational fluid dynamics*) y suministramos un capítulo de introducción sobre esta última. Nuestra meta no es enseñar los detalles acerca de los algoritmos numéricos asociados con la CFD (esto se presenta de manera más apropiada en otro curso, por lo general en el nivel de postgrados). Nuestro intento es presentar a los estudiantes de licenciatura las capacidades y limitaciones de la CFD como una *herramienta de ingeniería*. Usamos las soluciones de la CFD de manera muy semejante a como usamos los resultados experimentales provenientes de una prueba con el túnel de viento; es decir, reforzar la comprensión de la física de los flujos de fluidos y proporcionar visualizaciones cualitativas del flujo que ayuden a explicar el comportamiento del fluido.

CONTENIDO Y ORGANIZACIÓN

Este libro está organizado en quince capítulos, comienza con los conceptos fundamentales de los fluidos y de los flujos de fluidos y finaliza con una introducción a la dinámica de fluidos computacional, aplicación que se está volviendo con mayor rapidez en una disciplina común, incluso en el nivel de licenciatura.

- En el capítulo 1 se da una introducción básica a los fluidos, las clasificaciones del flujo de fluidos, el volumen de control en función de las formulaciones del

sistema, las dimensiones, las unidades, los dígitos significativos y las técnicas de resolución de problemas.

- El capítulo 2 está dedicado a las propiedades de los fluidos como la densidad, la presión de vapor, los calores específicos, la viscosidad y la tensión superficial.
- El capítulo 3 trata de la estática de fluidos y la presión, se incluyen los manómetros y los barómetros, las fuerzas hidrostáticas sobre superficies sumergidas, flotación y estabilidad y fluidos en el movimiento de cuerpo rígido.
- En el capítulo 4 se exponen temas relacionados con la cinemática de fluidos, como las diferencias entre las descripciones lagrangiana y euleriana de los flujos de fluidos, los patrones de flujo, la visualización del flujo, la vorticidad y la rotacionalidad, así como el teorema del transporte de Reynolds.
- En el capítulo 5 se presentan las leyes fundamentales de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía, se resalta el uso apropiado de las ecuaciones de conservación de masa, de Bernoulli y de la energía, así como las aplicaciones en la ingeniería de estas ecuaciones.
- En el capítulo 6 se aplica el teorema del transporte de Reynolds a la cantidad de movimiento lineal y al momento angular y se hace hincapié en las aplicaciones prácticas de ingeniería del análisis finito de la cantidad de movimiento del volumen de control.
- En el capítulo 7 se refuerza el concepto de homogeneidad dimensional y se presenta el teorema Pi de Buckigham del análisis dimensional, la semejanza dinámica y el método de las variables de repetición (material que resulta útil a lo largo del resto del libro y en muchas disciplinas en la ciencia y la ingeniería).
- El capítulo 8 está dedicado al flujo en tubos y ductos. Se discuten las diferencias entre flujo laminar y flujo turbulento, las pérdidas por fricción en los tubos y ductos y las pérdidas menores en las redes de tuberías. También se explica cómo seleccionar de manera adecuada una bomba o un ventilador para acoplarlo a una red de tuberías. Por último, se discuten diversos dispositivos de experimentación que se usan para medir el gasto y la velocidad.
- El capítulo 9 trata del análisis diferencial del flujo de fluidos e incluye la deducción y aplicación de la ecuación de continuidad, la ecuación de Cauchy y la ecuación de Navier-Stokes. También se presenta la función de corriente y se describe su utilidad en el análisis de los flujos de fluidos.
- En el capítulo 10 se discuten varias *aproximaciones* de la ecuación de Navier-Stokes y se proporcionan soluciones ejemplo para cada aproximación, que incluye el flujo de Stokes, el flujo no-viscoso, el flujo irrotacional (potencial) y las capas límite.
- En el capítulo 11 se cubren las fuerzas sobre los cuerpos (arrastre y sustentación), se explica la distinción entre la resistencia al movimiento debida a la fricción y resistencia al movimiento debida a la presión y se suministran los coeficientes de arrastre para numerosas configuraciones geométricas comunes. En este capítulo se destaca la aplicación práctica de las mediciones en el túnel de viento acopladas con los conceptos de semejanza dinámica y de análisis dimensional presentados al principio del capítulo 7.
- En el capítulo 12 se amplía el análisis de flujo de fluidos hacia el flujo compresible, en donde el comportamiento de los gases resulta afectado en mucho por el número de Mach y se presentan los conceptos de ondas de expansión, ondas de choque normales y oblicuas así como el fenómeno de bloqueo.
- El capítulo 13 trata del flujo en canal abierto y de algunas características únicas asociadas con el flujo de líquidos con una superficie libre, como las ondas superficiales y los saltos hidráulicos.

- En el capítulo 14 se examina la turbomaquinaria con más detalle, se incluyen las bombas, los ventiladores y las turbinas. Se destaca el funcionamiento de las bombas y las turbinas, en lugar de detallar su diseño únicamente, tema que se discute con base en los análisis de las leyes de semejanza dinámica y de los vectores de velocidad.
- En el capítulo 15 se describen los conceptos fundamentales de la dinámica de fluidos computacional (CFD) y se muestra a los estudiantes cómo usar los paquetes comerciales de la DFC para resolver problemas complejos de mecánica de fluidos. Se resalta la *aplicación* de la DFC en lugar del algoritmo aplicado en sus paquetes.

Al final de cada capítulo se incluye una gran cantidad de problemas de tarea, adecuados para que los utilicen los profesores. La mayor parte de los problemas que implican cálculos se encuentran en unidades SI, pero aproximadamente el 20 por ciento están escritos en unidades inglesas. Por último, se suministra un juego detallado de apéndices donde se dan las propiedades térmicas y de los fluidos de varios materiales, no sólo del aire y del agua como en la mayor parte de los textos de introducción a los fluidos. En muchos de los problemas al final del capítulo se requiere emplear las propiedades que se encuentran en estos apéndices.

HERRAMIENTAS DE APRENDIZAJE

ÉNFASIS EN LA FÍSICA

Una característica distintiva de este libro es la importancia que brinda en los aspectos de la materia, además de las representaciones y manipulaciones matemáticas. Los autores creen que el esfuerzo principal en la educación para licenciatura debe permanecer en *desarrollo de un sentido de los mecanismos físicos subyacentes* y en *dominio de la resolución de problemas prácticos*, que es probable que un ingeniero encare en el mundo real. El desarrollo de una comprensión intuitiva también debe lograr que el curso sea para los estudiantes una experiencia motivadora y que valga la pena.

USO EFECTIVO DE LA ASOCIACIÓN

Una mente observadora no debe tener dificultad en entender las ciencias de ingeniería. Después de todo, los principios de estas ciencias están basados en nuestras *experiencias cotidianas* y en *observaciones experimentales*. Por lo tanto, a través de este texto, se aplica un enfoque físico intuitivo. Con frecuencia, *se trazan paralelas* entre la materia y las experiencias cotidianas de los estudiantes, de modo que puedan relacionarla con lo que ya conocen.

AUTODIDÁCTICA

El material del texto se presenta en un nivel que un estudiante promedio puede seguir con comodidad. Habla *a* los estudiantes, no por *encima* de los estudiantes. De hecho, es *autodidáctico*. Cuando se nota que los principios de la ciencia se basan en observaciones experimentales, la mayor parte de las deducciones en este texto se basan en gran parte en argumentos físicos y, por lo tanto, son fáciles de seguir y entender.

EXTENSO APOYO DE ILUSTRACIONES

Las figuras son herramientas importantes de aprendizaje que ayudan a los estudiantes a “captar la imagen”, y en el texto se hace un uso eficaz de gráficas. Contiene más figuras e ilustraciones que cualquier otro libro en su categoría. Las figuras atraen la atención y estimulan la curiosidad y el interés. Se pretende que la mayor parte de éstas sirvan como un medio para hacer resaltar algunos conceptos clave que, de lo contrario, pasarían inadvertidos; varias sirven como resúmenes de la página.

ENTRADA DE CAPÍTULO Y RESUMEN DE CAPÍTULO

Cada capítulo inicia con un panorama del material que se va a cubrir. Al final de cada capítulo se incluye un *resumen* donde se da un repaso rápido de los conceptos básicos y de las relaciones importantes, así como se señala la relevancia del contenido.

NUMEROSOS EJEMPLOS RESUELTOS CON UN PROCEDIMIENTO SISTEMÁTICO DE RESOLUCIÓN

Cada capítulo contiene varios *ejemplos* resueltos que aclaran el contenido e ilustran el uso de los principios básicos. Se utiliza un enfoque *intuitivo* y *sistemático* en la resolución de los problemas de ejemplo, al mismo tiempo se mantiene un estilo informal de conversación. En primer lugar, se enuncia el problema y se identifican los objetivos. Enseguida, se expresan las suposiciones, junto con sus justificaciones. Por separado, se da una lista de las propiedades necesarias para resolver el problema. Se usan valores numéricos junto con sus unidades para esclarecer que los números sin unidades no tienen significado, y que las manipulaciones de las unidades son tan importantes como la manipulación de los valores numéricos con una calculadora. Enseguida de las resoluciones, se discute el significado de los hallazgos. Este procedimiento también se aplica de manera uniforme en las resoluciones presentadas en el manual de soluciones del profesor.

ABUNDANCIA DE PROBLEMAS BASADOS EN SITUACIONES DE LA VIDA REAL AL FINAL DEL CAPÍTULO

Los problemas al final del capítulo están agrupados según temas específicos para que su selección sea más fácil tanto para los profesores como para los estudiantes. Dentro de cada grupo de problemas se encuentran las *Preguntas conceptuales*, indicadas por una "C", para comprobar el nivel de comprensión de los estudiantes de los conceptos básicos. Los problemas con el rubro de *Problemas de repaso* son de naturaleza más detallada y no se encuentran ligados de alguna sección específica de un capítulo (en algunos casos, requieren el repaso del material aprendido en capítulos anteriores). Se pretende que los problemas designados como *Diseño y ensayo* alienten a los estudiantes a realizar juicios de ingeniería, con el fin de conducir la exploración independiente de temas de interés y comunicar sus hallazgos de una manera profesional. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas, y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el símbolo se resuelven con el uso del EES y las soluciones completas, junto con estudios paramétricos, están incluidas en el DVD adjunto a este texto. Los problemas con el símbolo son de naturaleza detallada y están elaborados para que se resuelvan con computadora, de preferencia utilizando el software del EES que acompaña a este texto. En el libro, se encuentran incorporados varios problemas relacionados con los aspectos económicos y de seguridad, con el fin de acrecentar la conciencia de los costos y la seguridad entre los estudiantes de ingeniería. Para conveniencia de los estudiantes, los problemas seleccionados cuentan con una lista de respuestas.

USO DE UNA NOTACIÓN COMÚN

El uso de una notación diferente para las mismas cantidades en distintos cursos de ingeniería, ha sido durante mucho tiempo una fuente de descontento y confusión. Un estudiante que, por ejemplo, está cursando tanto mecánica de fluidos como transferencia de calor tiene que usar la notación Q para designar el gasto volumétrico en uno de los cursos y para designar la transferencia de calor en el otro. Con frecuencia se destaca la necesidad de unificar la notación en la educación en ingeniería, incluso en algunos informes de conferencias patrocinadas por la National Science Foundation, a través de coaliciones de las fundaciones pero, hasta la fecha, es poco el esfuerzo al respecto. Por ejemplo, consúltese el informe final de la "Mini-conferencia sobre las innovaciones en el tronco de la energía, mayo 18 y 29 de 2003 en la University of Wisconsin". En este texto se realiza un esfuerzo consciente para

minimizar este conflicto mediante la adopción de la conocida notación de la termodinámica $\dot{V}$ para el gasto volumétrico, reservando de este modo la notación Q para la transferencia de calor. Asimismo, de manera uniforme usamos un punto arriba para denotar la rapidez en relación con el tiempo. Pensamos que los profesores y los estudiantes apreciarán este esfuerzo para promover una notación común.

SELECCIÓN DE UNIDADES SI O SI/INGLESAS

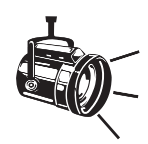
Como reconocimiento al hecho de que las unidades inglesas todavía se utilizan con amplitud en algunas industrias, en este libro se usan unidades SI e inglesas, con énfasis en las SI. El contenido del texto se puede cubrir con unidades SI/inglesas combinadas o sólo unidades SI, dependiendo de la preferencia del profesor. Las tablas y diagramas de propiedades que se encuentran en el Apéndice están presentadas en ambos tipos de unidades, excepto las que comprenden cantidades adimensionales. Los problemas, tablas y diagramas en unidades inglesas se designan mediante la letra "I", colocada después del número para facilitar su reconocimiento e ignorarlos con facilidad por los usuarios del SI.

COBERTURA COMBINADA DE LAS ECUACIONES DE BERNOULLI Y DE LA ENERGÍA

La ecuación de Bernoulli es de las empleadas con más frecuencia en la mecánica de fluidos, pero también es de las que más se usan indebidamente. Por lo tanto, es importante resaltar las limitaciones en el uso de esta ecuación idealizada y mostrar cómo toma en cuenta de manera apropiada las imperfecciones y las pérdidas irreversibles. En el capítulo 5 se hace esto mediante la introducción de la ecuación de la energía, justo después de la de Bernoulli y se demuestra de qué manera las soluciones de muchos problemas prácticos de la ingeniería difieren de las que se obtienen con la aplicación de la ecuación de Bernoulli. Esto ayuda a los estudiantes a desarrollar una visión realista de esta última.

UN CAPÍTULO SEPARADO SOBRE LA DFC

Los paquetes comerciales de la *dinámica de fluidos computacional* (DFC) se utilizan con amplitud en la práctica de la ingeniería, en el diseño y análisis de sistemas de flujo, y se ha vuelto excesivamente importante para los ingenieros tener una sólida comprensión de los aspectos fundamentales, las capacidades y las limitaciones de la DFC. Se reconoce que en la mayor parte de los currículos de ingeniería del nivel licenciatura no hay lugar para un curso completo sobre DFC, sin embargo, aquí se incluye un capítulo separado para compensar esta deficiencia y dar a los estudiantes la información adecuada sobre la fuerza y las debilidades de la misma.



PROYECTORES DE APLICACIONES

A través de todo el libro se hacen resaltar ejemplos llamados *Proyectores de aplicaciones*, en donde se muestra una aplicación en el mundo real de la mecánica de fluidos. Una característica única de estos ejemplos especiales es que han sido escritos por *autores invitados*. Los Proyectores de aplicaciones están diseñados para mostrar a los estudiantes de qué manera la mecánica de fluidos tiene aplicaciones diversas en una amplia variedad de campos. También se incluyen fotografías provenientes de la investigación de los autores invitados.

GLOSARIO DE TÉRMINOS DE MECÁNICA DE FLUIDOS

En los capítulos, cuando se presenta y define un término o concepto fundamental, éste aparece destacado con **negritas** y también se encuentran en un glosario detallado al final del libro, mismo que fuera desarrollado por el profesor James Brasseur de The Pennsylvania State University. Este glosario **único** es una excelente herramienta de aprendizaje y repaso para los estudiantes a medida que avanzan en su estudio de la mecánica de fluidos. Además, pueden poner a prueba su conocimiento acerca de estos términos fundamentales mediante el uso de las tarjetas instantáneas y otros

recursos que se localizan en nuestro sitio Web acompañante, cuya información se presenta en inglés (www.mhhe.com/cengel).

FACTORES DE CONVERSIÓN

A menudo se usan factores de conversión y constantes físicas, y en las páginas interiores de la cubierta, para facilitar su consulta, se da una lista de las propiedades de uso frecuente del aire y el agua a 20°C y la presión atmosférica.

NOMENCLATURA

En las páginas interiores de la cubierta posterior del libro, para facilitar su consulta, se da otra lista con los símbolos, subíndices y superíndices principales que se usan en el texto.

SUPLEMENTOS

Para quienes adopten este libro, se cuenta con los siguientes suplementos:

DVD DE RECURSOS PARA EL ESTUDIANTE

Adjunto a cada ejemplar nuevo se encuentra un DVD, éste proporciona abundantes recursos para los estudiantes, incluye Fluid Mechanics Videos (videos relacionados con la mecánica de fluidos), una CFD Animations Library (biblioteca de animaciones CFD) y el EES Software.

CENTRO DE APRENDIZAJE EN LÍNEA

El libro cuenta con apoyo en la Web en nuestro Online Learning Center, en www.mhhe.com/cengel. Visítese este robusto sitio para obtener información acerca del libro y los suplementos, las erratas, información de autores y recursos adicionales para los profesores y estudiantes.

ENGINEERING EQUATION SOLVER (EES)

Desarrollado por Sanford Klein y William Beckman de la University of Wisconsin-Madison, en este software se combinan la capacidad de resolución de ecuaciones y datos propios de ingeniería. El EES puede realizar la optimización, el análisis paramétrico y la regresión lineal y no-lineal, y cuenta con capacidad para trazado de gráficas con la calidad empleada en las publicaciones. Están integradas las propiedades termodinámicas y de transporte para el aire, el agua y otros numerosos fluidos y el EES permite que el usuario introduzca datos de propiedades o relaciones funcionales.

SOFTWARE FLUENT FLOWLAB® Y LAS APLICACIONES

Como parte integral del capítulo 15, "Introducción a la dinámica de fluidos computacional", proporcionamos el acceso a un paquete de software CFD, amigable para el estudiante, desarrollado por Fluent Inc. Además, suministramos más de 40 aplicaciones de FLUENT FLOWLAB para complementar los problemas al final del capítulo 15. Estos problemas y aplicaciones son únicos ya que están diseñados teniendo en mente tanto un *objetivo de aprendizaje de la mecánica de fluidos* como un *objetivo de aprendizaje de DFC*.

Además, esta obra cuenta con interesantes complementos que fortalecen los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como la evaluación de éstos. Mismos que se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información y conocer la política de entrega de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill o envíe un correo electrónico a marketinghe@mcgraw-hill.com

RECONOCIMIENTOS

A los autores les gustaría reconocer con aprecio los numerosos y valiosos comentarios, sugerencias, críticas constructivas y elogios de los evaluadores y revisores siguientes:

Mohammad Ali
Kettering University

Darryl Alofs
University of Missouri, Rolla

Farrukh Alvi
Florida A & M University & Florida State University

Ryoichi Amano
University of Wisconsin–Milwaukee

Michael Amitay
Rensselaer Polytechnic Institute

T. P. Ashokbabu
National Institute of Technology, India

Idirb Azouz
Southern Utah University

Kenneth S. Ball
University of Texas at Austin

James G. Brasseur
The Pennsylvania State University

Glenn Brown
Oklahoma State University

John Callister
Cornell University

Frederick Carranti
Syracuse University

Kevin W. Cassel
Illinois Institute of Technology

Haris Catrakis
University of California, Irvine

Louis N. Cattafesta III
University of Florida

Soyoung Cha
University of Illinois at Chicago

Tiao Chang
Ohio University

Young Cho
Drexel University

Po-Ya (Abel) Chuang
The Pennsylvania State University

William H. Colwill
American Hydro Corporation

A. Terrence Conlisk Jr.
The Ohio State University

Daniel Cox
Texas A&M University

John Crepeau
University of Idaho

Jie Cui
Tennessee Technological University

Lisa Davids
Embry-Riddle Aeronautical University

Jerry Drummond
The University of Akron

Dwayne Edwards
University of Kentucky

Richard Figliola
Clemson University

Charles Forsberg
Hofstra University

Fred K. Forster
University of Washington

Rong Gan
The University of Oklahoma

Philip Gerhart
University of Evansville

Fred Gessner
University of Washington

Sam Han
Tennessee Technological University

Mark J. Holowach
Ballston Spa, NY

Neal Houze
Purdue University

Barbara Hutchings
Fluent Incorporated

Niu Jianlei
Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong

David Johnson
University of Waterloo

Matthew Jones
Brigham Young University

Zbigniew J. Kabala
Duke University

Fazal Kauser
California State Polytechnic University, Pomona

Pirouz Kavehpour
University of California, Los Angeles

Jacob Kazakia
Lehigh University

Richard Keane
University of Illinois at Urbana–Champaign

Jamil Khan
University of South Carolina

N. Nirmala Khandan
New Mexico State University

Jeyhoon Khodadadi
Auburn University

Subha Kumpaty
Milwaukee School of Engineering

James A. Liburdy
Oregon State University

Chao-An Lin
Universidad Nacional de Tsing Hua, Taiwan

Kraemer Luks
The University of Tulsa

G. Mahinthakumar
North Carolina State University

Saeed Manafzadeh
University of Illinois at Chicago

Daniel Maynes
Brigham Young University

James M. McDonough
University of Kentucky

Richard S. Miller
Clemson University

Shane Moeykens
Fluent Incorporated

Joseph Morrison
NASA Langley Research Center

Karim Nasr
Kettering University

C. O. Ng
University of Hong Kong, Hong Kong

Wing Ng
Virginia Polytechnic Institute

Tay Seow Ngie
Nanyang Technological University, Singapore

John Nicklow
Southern Illinois University at Carbondale

Nagy Nosseir
San Diego State University

Emmanuel Nzewi
North Carolina A&T State University

Ali Ogut
Rochester Institute of Technology

Michael Olsen
Iowa State University

Roger Pawlowski
Lawrence Technological University

Bryan Pearce
The University of Maine

Blair Perot
University of Massachusetts Amherst

Alexander Povitsky
The University of Akron

Guy Riefler
Ohio University

Kurt Rosentrater
Northern Illinois University

Subrata Roy
Kettering University

Joseph Sai
Texas A&M University–Kingsville

Gregory Selby
Old Dominion University

Gary S. Settles
The Pennsylvania State University

Winoto SH
National University of Singapore, Singapore

Muhammad Sharif
The University of Alabama

Mark Stone
Washington State University

Chelakara Subramanian
Florida Institute of Technology

Constantine Tarawneh
The University of Texas–Pan American

Sahnaz Tigrek
Middle East Technical University

Hsu Chin Tsau
Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong M.

Erol Ulucakli
Lafayette College

Oleg Vasilyev
University of Missouri

Zhi Jian Wang
Michigan State University

Timothy Wei
Rutgers, The State University of New Jersey

Minami Yoda
Georgia Institute of Technology

Mohd Zamri Yusoff
Universiti Tenaga Nasional, Malasia

Los autores también manifiestan su reconocimiento a los autores invitados, quienes contribuyeron con fotografías y reseñas para los Proyectores de aplicaciones:

Michael L. Billet
The Pennsylvania State University

James G. Brasseur
The Pennsylvania State University

Werner J. A. Dahm
University of Michigan

Brian Daniels
Oregon State University

Michael Dickinson
California Institute of Technology

Gerald C. Lauchle
The Pennsylvania State University

James A. Liburdy
Oregon State University

Anupam Pal
The Pennsylvania State University

Ganesh Raman
Illinois Institute of Technology

Gary S. Settles
The Pennsylvania State University

Lorenz Sigurdson
University of Alberta

En especial, damos las gracias al Profesor Gary Settles y a sus asociados en Penn State (Lori Dolson-Dreibelbis, J. D. Miller y Gabrielle Tremblay) por la creación de excitantes "clips" de video narrados en inglés, que se encuentran en el DVD que acompaña a este libro. De manera semejante, los autores expresan su agradecimiento a varias personas de Fluent Inc., quienes ayudaron a lograr que se contara con las maravillosas animaciones DFC que también se encuentran en el DVD y en las aplicaciones de FLUENT FLOWLAB que están disponibles para su descarga en el sitio Web del libro: Shane Moeykens, Barbara Hutchings, Liz Marshall, Ashish Kulkarni, Ajay Parihar y R. Murali Krishnan. Los autores también agradecen al profesor James Brasseur de Penn State, por la creación del preciso glosario de términos de mecánica de fluidos, al profesor Glenn Brown de Oklahoma State, por proporcionar numerosos artículos de interés histórico a través de todo el texto, al profesor Mehmet Kanoglu de Gaziantep University, por la preparación de las soluciones de los problemas EES, y al profesor Tahsin Engin de Skarya University, por contribuir con varios problemas al final de cada capítulo.

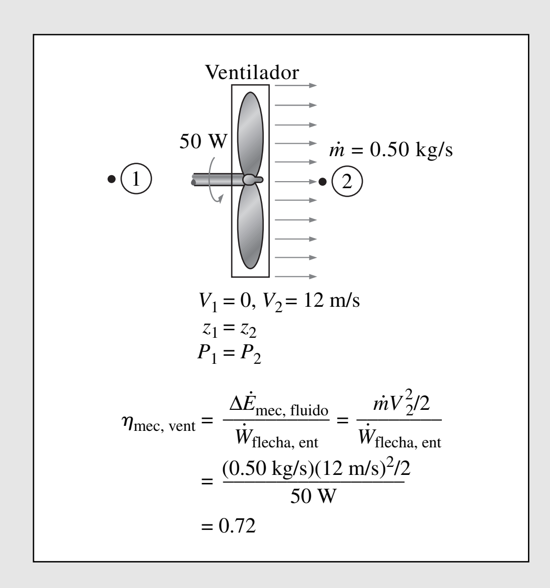
Por último, gracias especiales para nuestras familias, principalmente a nuestras esposas, Zehra Çengel y Suzanne Cimbala, por su continua paciencia, comprensión y apoyo durante toda la preparación de este libro, la cual comprendió muchas horas largas cuando tuvieron que manejar los intereses familiares por sí mismas, debido a que los rostros de sus esposos estaban pegados a un monitor de computadora.

Yunus A. Çengel
John M. Cimbala

Recorrido guiado

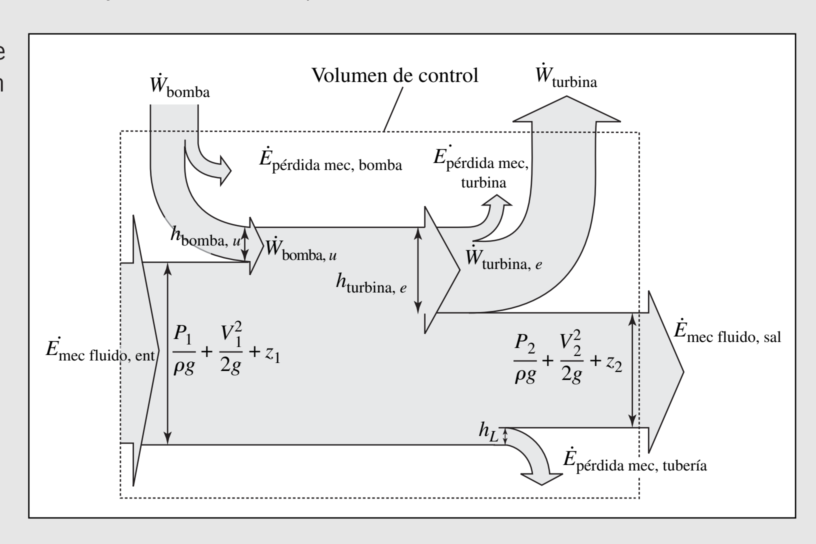
La mecánica de fluidos es un tema intensamente **visual** y nuestro texto presenta más **ilustraciones** y **fotografías** que cualquier otra obra sobre mecánica de fluidos. Hemos incluido muchas de las fotografías clásicas que se encuentran en el *Album of Fluid Motion* de Van Dyke. Además, tenemos un programa sobresaliente de medios que incluye **videos** y una **biblioteca de animaciones**.





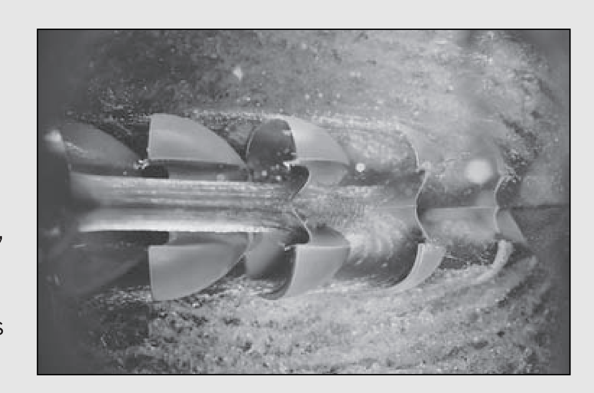
En nuestro texto se destacan los **aspectos físicos de la mecánica de fluidos**, además de las representaciones y manipulaciones matemáticas. Los autores creen que el esfuerzo principal en la educación para licenciatura debe permanecer en desarrollo de un sentido de los mecanismos físicos subyacentes y en dominio de la resolución problemas prácticos que son probables que un ingeniero encare en el mundo real.

Las **ecuaciones de Bernoulli** y **de la energía** se usan con frecuencia (y, a menudo, se usan de forma indebida) en la mecánica de fluidos. Los autores introducen la ecuación de la energía justo después de la de Bernoulli y demuestran de qué manera las soluciones de muchos problemas prácticos de la ingeniería difieren de los que se obtienen con la aplicación de la ecuación de Bernoulli. Esto ayuda a los estudiantes a desarrollar una visión realista de esta última.



Recorrido guiado

Mecánica de fluidos: fundamentos y aplicaciones concede a los instructores **flexibilidad en los temas**. Por ejemplo, después de cubrir los aspectos básicos, los profesores de ingeniería mecánica pueden elegir enfocarse sobre el análisis del volumen de control, el análisis dimensional, los flujos en tubos y la turbomaquinaria. Los profesores de ingeniería civil pueden elegir destacar los flujos en tubos, los flujos en canales abiertos y en muchos ejemplos de "río y bote", en tanto que los profesores de ingeniería aeronáutica y aeroespacial pueden enfocarse sobre el flujo potencial, la fuerza de arrastre y la sustentación, el flujo compresible, la turbomaquinaria y la DFC.

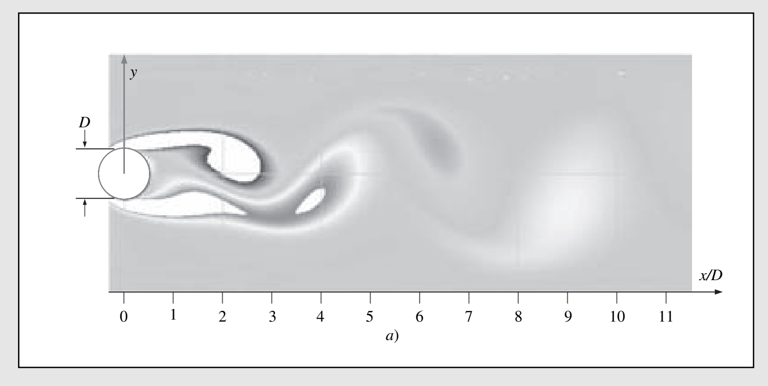




Un material abundante sobre la **historia de la mecánica de fluidos** está integrado a lo largo de todo el texto, incluye:

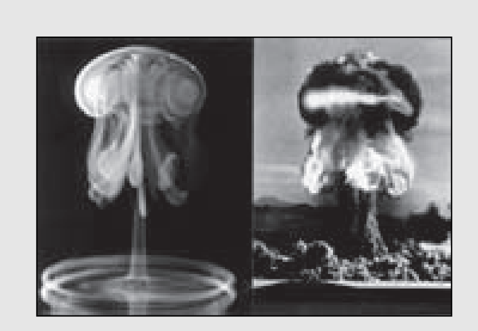
- La sección "Una breve historia de la mecánica de fluidos", en el capítulo 1 presenta puntos sobresalientes en el desarrollo de la teoría y la práctica. Va más allá de una lista de nombres y datos para proporcionar una perspectiva de cómo la mecánica de fluidos ha desempeñado un papel importante en la historia.
- En el capítulo 7 aparece una lista de las personas a quienes se ha rendido honor con parámetros adimensional nombrados. Esta compilación es única y no se encuentra impresa en otro libro.
- En el texto se da crédito a individuos que han hecho contribuciones significativas. Todos los créditos se han verificado con referencias históricas para lograr exactitud e imparcialidad.
- En el capítulo 11, un momento cumbre histórico relacionado con los hermanos Wright proporciona una imagen fugaz de su grandeza.

A lo largo de todo el libro se tienen ejemplos generados por medio de la **dinámica de fluidos computacional (DFC)** y suministramos un capítulo de introducción a ella. Nuestra meta es presentar a los estudiantes de licenciatura las capacidades y limitaciones de la DFC como una *herramienta de ingeniería*.



Recorrido guiado

En todo el libro se encuentran presentaciones especiales llamadas **Proyector de aplicaciones**, en donde se muestra una aplicación del mundo real de la mecánica de fluidos. Una característica única de estos ejemplos es que están escritos por autores reconocidos invitados. Los temas seleccionados de los proyectores incluyen:



- ¿Cómo vuela una mosca?
- Formación de las gotas de lluvia
- Un estómago virtual
- ¿Qué tienen en común las explosiones nucleares y las gotas de lluvia?

> **Cinemática** [122]: en contraste con la *dinámica*, los aspectos cinemáticos de un flujo de fluidos son aquellos en los que no interviene de manera directa el balance de fuerzas de la segunda Ley de Newton. La cinemática se refiere a descripciones y deducciones matemáticas basadas únicamente en la conservación de la masa (ecuación de continuidad) y las definiciones relacionadas con el flujo y la deformación.

Los términos fundamentales de la mecánica de fluidos destacan en tipo negro en todo el texto y estos términos se encuentran al final del libro en el Glosario desarrollado por el profesor James Brasseur de The Pennsylvania State University.

Cada capítulo contiene **problemas de ejemplo** del mundo real resueltos. Los autores aplican un **enfoque uniforme en la resolución de problemas**, manteniendo al mismo tiempo su estilo informal de conversación. Este procedimiento de resolución de los problemas también se aplica en todas las resoluciones presentadas en el manual del profesor.

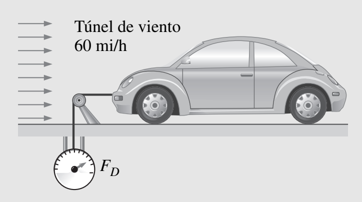


FIGURA 11-9
Esquema para el ejemplo 11-1.

EJEMPLO 11-1 Medición del coeficiente de arrastre de un automóvil

Se debe determinar experimentalmente el coeficiente de arrastre de un automóvil en las condiciones de diseño de 1 atm, 70°F y 60 mi/h, en un gran túnel de viento en una prueba a escala completa (Fig. 11-9). El área frontal del automóvil es de 22.26 ft^2. Si la fuerza que actúa sobre el automóvil en la dirección del flujo se mide en 68 lbf, determine el coeficiente de arrastre de este automóvil.

SOLUCIÓN En un túnel de viento se mide la fuerza de arrastre que actúa sobre un automóvil. Se debe determinar el coeficiente de arrastre del automóvil en condiciones de prueba.

Suposiciones **1** El flujo de aire es estacionario e incompresible. **2** La sección transversal del túnel es lo suficientemente grande como para simular flujo libre sobre el automóvil. **3** El fondo del túnel también se mueve con la velocidad del aire para aproximar condiciones de manejo reales o este efecto es despreciable.

Propiedades La densidad del aire a 1 atm y 70°F es $\rho = 0.07489$ lbm/ft^3.

Análisis La fuerza de arrastre que actúa sobre un cuerpo y el coeficiente de arrastre están dados por:

$$F_D = C_D A \frac{\rho V^2}{2} \qquad \text{y} \qquad C_D = \frac{2F_D}{\rho A V^2}$$

donde A es el área frontal. Al sustituir y notar que 1 mi/h = 1.467 ft/s, se determina que el coeficiente de arrastre del automóvil es:

$$C_D = \frac{2 \times (68 \text{ lbf})}{(0.07489 \text{ lbm/ft}^3)(22.26 \text{ ft}^2)(60 \times 1.467 \text{ ft/s})^2}\left(\frac{32.2 \text{ lbm} \cdot \text{ft/s}^2}{1 \text{ lbf}}\right) = \mathbf{0.34}$$

Discusión Note que el coeficiente de arrastre depende de las condiciones del diseño y su valor puede ser distinto en diferentes condiciones, como el número de Reynolds.

Suplementos de aprendizaje

DVD DE RECURSOS PARA EL ESTUDIANTE

Adjunto y sin ningún costo, en cada ejemplar se encuentra un DVD, éste suministra recursos abundantes para los estudiantes.

- **VIDEOS SOBRE MECÁNICA DE FLUIDOS:** desarrollados a través del apoyo de The National Science Foundation y por el Gas Dynamics Laboratory de The Pennsylvania State University, bajo la dirección de Gary Settles, estos videos son herramientas de visualización multimedia narrados en inglés —según lo último en estos medios—, para los estudiantes que estén cursando mecánica de fluidos. Los videos incluyen tanto partes de video experimental como CFD (dinámica de fluidos computacional), están íntimamente ligados al contenido del texto.



- **BIBLIOTECA DE ANIMACIONES CFD:** usada con autorización de la compañía líder en mercado mundial Computational Fluid Dynamics (CFD), Fluent Inc. Esta biblioteca contiene docenas de animaciones creadas con CFD.



- **ENGINEERING EQUATION SOLVER (EES):** EES es un poderoso programa para resolver ecuaciones con tablas de funciones y propiedades integradas para propiedades termodinámicas y de transporte, así como capacidad de verificación automática de unidades. Los estudiantes pueden resolver problemas de tarea con EES, el cual es fácil de usar y fácil de aprender. Se dan soluciones seleccionadas resueltas con EES, con comentarios detallados y ayuda en línea

MECÁNICA DE FLUIDOS

FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

CAPÍTULO

1

INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

En este capítulo de introducción se presentan los conceptos básicos de uso común en el análisis del flujo de fluidos. Inicia con un estudio de los estados de la materia y las numerosas maneras de clasificación del flujo de fluidos, como *regiones de flujo viscosas en comparación con las no-viscosas*, *flujo interno en comparación con el externo*, *flujo compresible en comparación con el incompresible*, *flujo laminar en comparación con el turbulento*, *flujo natural en comparación con el forzado* y *flujo estacionario en comparación con el no-estacionario*. También se discute la condición de no-deslizamiento en las interfaces sólido-fluido y se presenta una historia breve del desarrollo de la mecánica de fluidos.

Después de mostrar los conceptos de sistema y de volumen de control, se repasan los *sistemas de unidades* que se usarán. Enseguida se comenta cómo se preparan los modelos matemáticos para los problemas de ingeniería y cómo interpretar los resultados que se obtienen del análisis de esos modelos. A lo anterior le sigue la presentación de una *técnica para la resolución de problemas* sistemática e intuitiva, que se puede utilizar como un modelo en la resolución de problemas de ingeniería. Por último, se discuten la exactitud, la precisión y los dígitos significativos en las mediciones y cálculos de ingeniería.

OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de

- Entender los conceptos básicos de la mecánica de fluidos y reconocer los diversos tipos de problemas de flujo de fluidos que se presentan en la práctica
- Modelar problemas de ingeniería y resolverlos de una manera sistemática
- Tener un conocimiento funcional de exactitud, precisión y dígitos significativos así como reconocer la importancia de la homogeneidad dimensional en los cálculos de ingeniería



FIGURA 1-1
La mecánica de fluidos trata de los líquidos y los gases en movimiento o en reposo.
© Vol. 16/Photo Disc.

1-1 ▪ INTRODUCCIÓN

La **mecánica** es la ciencia física más antigua que trata tanto de los cuerpos en reposo así como de aquellos en movimiento bajo la influencia de fuerzas. La rama de la mecánica que trata los cuerpos en reposo se llama **estática**, y la que trata de los cuerpos en movimiento se llama **dinámica.** La subcategoría **mecánica de fluidos** se define como la ciencia que estudia el comportamiento de los fluidos en reposo (*estática de fluidos*) o en movimiento (*dinámica de fluidos*), y la interacción de éstos con sólidos o con otros fluidos en las fronteras. La mecánica de fluidos también se menciona como **dinámica de fluidos** al considerar a los fluidos en reposo como un caso especial con velocidad cero (Fig. 1-1).

La mecánica de fluidos también se divide en varias categorías. El estudio del movimiento de fluidos que son prácticamente incompresibles (como los líquidos, en especial el agua y los gases a bajas velocidades) suele mencionarse como **hidrodinámica**. Una subcategoría de ésta es la **hidráulica**, que estudia los flujos de líquidos en tubos y canales abiertos. La **dinámica de gases** trata del flujo de fluidos que sufren cambios significativos en la densidad, como el flujo de gases a través de toberas a altas velocidades. La categoría **aerodinámica** se ocupa del flujo de gases (en especial del aire) sobre cuerpos como aviones, cohetes y automóviles a altas o bajas velocidades. Algunas otras categorías como la **meteorología**, la **oceanografía** y la **hidrología** tratan de flujos que ocurren de manera natural.

¿Qué es un fluido?

El lector recordará, por lo aprendido en física, que una sustancia existe en tres estados de agregación: sólido, líquido y gas. (A temperaturas muy elevadas también existe como plasma.) Una sustancia en la fase líquida o en la gaseosa se conoce como **fluido**. La diferencia entre un sólido y un fluido se hace con base en la capacidad de la sustancia para oponer resistencia a un esfuerzo cortante (o tangencial) aplicado que tiende a cambiar su forma. Un sólido puede oponer resistencia a un esfuerzo cortante aplicado por medio de la deformación, en tanto que un fluido se deforma de manera continua bajo la influencia del esfuerzo cortante, sin importar lo pequeño que sea. En los sólidos, el esfuerzo es proporcional a la *deformación*, pero en los fluidos el esfuerzo es proporcional a la *razón de deformación*. Cuando se aplica un esfuerzo cortante constante, llega un momento en que un sólido, a un cierto ángulo fijo, deja de deformarse, en tanto que un fluido nunca deja de deformarse y tiende a cierta razón de deformación.

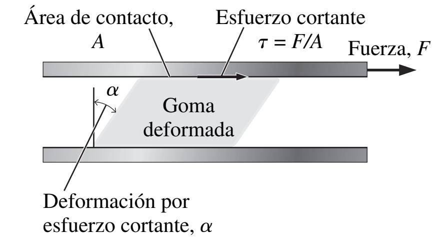
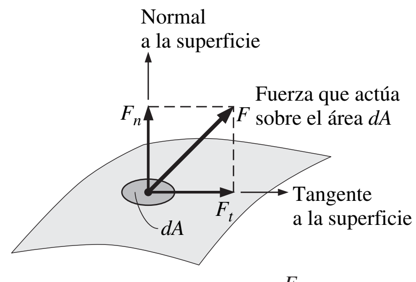


FIGURA 1-2
Deformación de una goma para borrar colocada entre dos placas paralelas bajo la influencia de una fuerza cortante.

Considérese un bloque rectangular de hule colocado de manera apretada entre dos placas. Conforme se tira de la placa superior con una fuerza F mientras se mantiene fija la placa inferior, el bloque de hule se deforma, como se muestra en la figura 1-2. El ángulo de deformación α (llamado *deformación por esfuerzo cortante* o *desplazamiento angular*) aumenta en proporción a la fuerza aplicada F. Si se supone que no existe deslizamiento entre el hule y las placas, la superficie superior del hule se desplaza en una cantidad igual al desplazamiento de la placa superior, en tanto que la superficie inferior permanece fija. En el equilibrio, la fuerza neta que actúa sobre la placa en la dirección horizontal debe ser cero y, por consiguiente, una fuerza igual y opuesta a F debe estar actuando sobre esa placa. Esta fuerza en oposición que se desarrolla en la interfaz placa-hule, debida a la fricción, se expresa como $F = \tau A$, en donde τ es el esfuerzo cortante y A es el área de contacto entre la placa superior y el hule. Cuando se elimina la fuerza, el hule regresa a su posición original. También se observaría este fenómeno con otros sólidos, como un bloque de acero, siempre que la fuerza aplicada no sobrepase el rango elástico. Si se repitiera este experimento con un fluido (por ejemplo, con dos placas paralelas colocadas en una masa grande de agua), la capa de fluido en contacto con la placa superior se movería con ésta en forma continua, a la velocidad de ella, sin importar lo pequeña que sea la fuerza F. La velocidad

del fluido disminuye con la profundidad debido a la fricción entre las capas del mismo, llegando a cero en la placa inferior.

El lector recordará, por lo aprendido en estática, que el **esfuerzo** se define como fuerza por unidad de área y se determina cuando se divide la fuerza entre el área sobre la cual actúa. La componente normal de una fuerza que actúa sobre una superficie, por unidad de área, se llama **esfuerzo normal**, y la componente tangencial de una fuerza que actúa sobre una superficie, por unidad de área, se llama **esfuerzo cortante** (Fig. 1-3). En un fluido en reposo, el esfuerzo normal se llama **presión**. Las paredes del recipiente no ejercen el esfuerzo cortante al fluido en reposo y, de este modo, un fluido en reposo se encuentra en un estado de cero esfuerzo cortante. Cuando se quitan las paredes o se inclina un recipiente con líquido, se desarrolla una fuerza cortante y el líquido salpica o se mueve hasta formar una superficie libre horizontal.



$$\text{Esfuerzo normal: } \sigma = \frac{F_n}{dA}$$

$$\text{Esfuerzo cortante: } \tau = \frac{F_t}{dA}$$

FIGURA 1-3
Esfuerzo normal y esfuerzo cortante en la superficie de un elemento de fluido. Para los fluidos en reposo, el esfuerzo cortante es cero y la presión es el único esfuerzo normal.

En un líquido se pueden mover cantidades grandes de moléculas en relación con las otras, pero el volumen permanece relativamente constante debido a las intensas fuerzas de cohesión entre ellas. Como resultado, un líquido toma la forma del recipiente que lo contiene y forma una superficie libre en un recipiente más grande que esté en un campo gravitacional. Por otra parte, un gas se expande hasta que encuentra las paredes del recipiente y llena el espacio completo del que dispone. Esto se debe a que las moléculas de un gas están espaciadas con amplitud y las fuerzas de cohesión entre ellas son débiles. A diferencia de los líquidos, los gases no pueden formar una superficie libre (Fig. 1-4).

Aun cuando los sólidos y los fluidos se distinguen con facilidad en la mayor parte de los casos, esta diferencia no es clara en algunos casos límite. Por ejemplo, el *asfalto* A tiene la apariencia de un sólido y se comporta como tal, ya que opone resistencia al esfuerzo cortante durante periodos cortos. Pero se deforma con lentitud y se comporta como un fluido cuando estas fuerzas se ejercen durante periodos amplios. Algunos plásticos, el plomo y las mezclas de pastas aguadas exhiben un comportamiento semejante. Esos casos límite se encuentran más allá del alcance de este libro. Sin embargo, los fluidos que se tratarán en éste se podrán reconocer con facilidad.

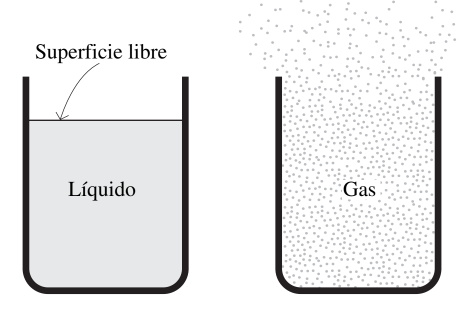
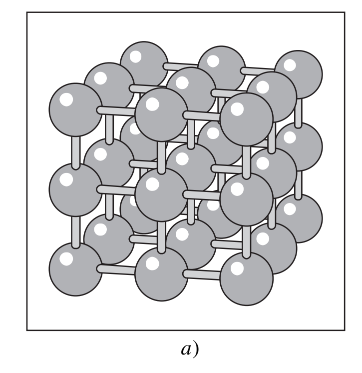


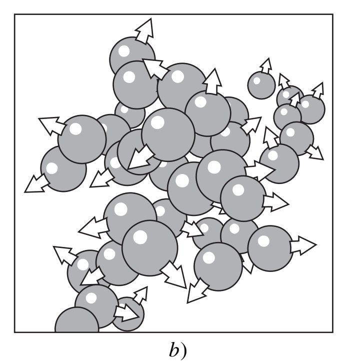
FIGURA 1-4
A diferencia de un líquido, un gas no forma una superficie libre y se expande hasta llenar todo el espacio del que dispone.

Los enlaces intermoleculares son los más fuertes en los sólidos y los más débiles en los gases. Una razón es que las moléculas en los sólidos están muy próximas entre sí, en tanto que en los gases están separadas por distancias relativamente grandes (Fig. 1-5).

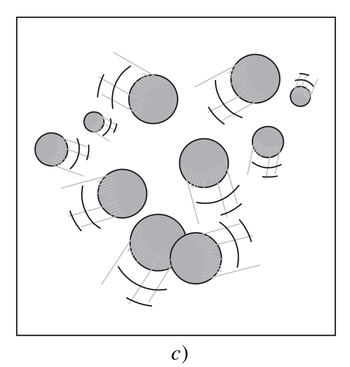
En un sólido las moléculas están dispuestas en un patrón que se repite en toda su extensión. En virtud de las distancias pequeñas entre las moléculas en un sólido, las fuerzas de atracción que ejercen éstas sobre cada una de las demás son grandes y las mantienen en posiciones fijas. El espaciamiento molecular en



a)



b)



c)

FIGURA 1-5
Disposición de los átomos en fases diferentes: *a*) las moléculas se encuentran en posiciones relativamente fijas en un sólido, *b*) grupos de moléculas se mueven unos respecto a otros en la fase líquida y *c*) las moléculas se mueven en todas direcciones al azar en la fase gaseosa.

la fase líquida no es muy diferente al de la fase sólida, excepto que las moléculas ya no se encuentran en posiciones fijas con relación a cada una de las demás y pueden girar y trasladarse con libertad. En un líquido, las fuerzas intermoleculares son más débiles respecto a las de los sólidos, pero no obsatnte fuertes en comparación con las de los gases. En general, las distancias entre las moléculas aumentan ligeramente cuando un sólido se vuelve líquido, siendo el agua una excepción notable.

En la fase gaseosa las moléculas están demasiado alejadas entre sí y no existe un orden molecular. Las moléculas se mueven en todas direcciones al azar, chocan continuamente con cada una de las demás y contra las paredes del recipiente en el cual están contenidas. En particular a bajas densidades, las fuerzas intermoleculares son muy débiles y las colisiones constituyen el único modo de interacción entre las moléculas. Éstas, en la fase gaseosa, están en un nivel de energía considerablemente más alto que en el de la fase líquida o sólida. Por lo tanto, el gas debe liberar una cantidad grande de su energía antes de que pueda condensarse o congelarse.

Con frecuencia *gas* y *vapor* se usan como sinónimos. A la fase de vapor de una sustancia se le acostumbra dar el nombre de *gas* cuando se encuentra por arriba de la temperatura crítica. Por *vapor* suele implicarse a un gas que no se encuentra lejos de un estado de condensación.

En las aplicaciones prácticas cualquier sistema de fluido consta de un gran número de moléculas y las propiedades de ese sistema por consiguiente dependen del comportamiento de ellas. Por ejemplo, la presión de un gas en un recipiente es el resultado de la transferencia de cantidad de movimiento entre las moléculas y las paredes de tal recipiente. Sin embargo, no es necesario conocer el comportamiento de las moléculas del gas para determinar la presión en el recipiente. Bastaría con colocar un manómetro sujeto al recipiente (Fig. 1-6). Este procedimiento macroscópico o e*stadístico* más elaborado, basado en el comportamiento promedio de grupos grandes de moléculas, se usa poco en este texto y está relacionado con él sólo con el papel de apoyo.

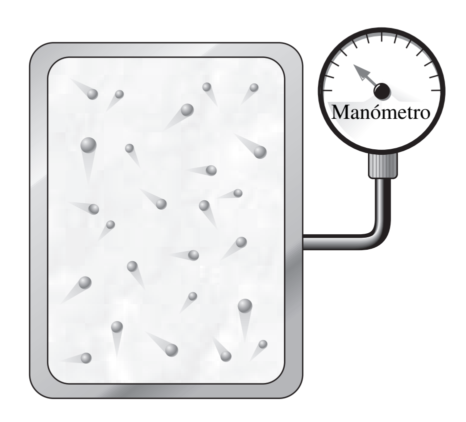


FIGURA 1-6
En una escala microscópica, la presión se determina por la interacción de las moléculas del gas por separado. Sin embargo, se puede medir la presión a una escala macroscópica con un manómetro.

Áreas de aplicación de la mecánica de fluidos

La mecánica de fluidos es ampliamente utilizada en actividades cotidianas y en el diseño de sistemas modernos de ingeniería, desde aspiradoras hasta aviones supersónicos. Por lo tanto, resulta importante desarrollar una comprensión adecuada de sus principios básicos.

Para empezar, la mecánica de fluidos tiene un papel vital en el cuerpo humano. El corazón bombea constantemente sangre a todas las partes del cuerpo a través de las arterias y venas, y los pulmones son las regiones de flujo de aire en direcciones alternadas. Es innecesario decir que los corazones artificiales, las máquinas de respiración y los sistemas de diálisis están diseñados con base en la aplicación de la mecánica de fluidos.

Una casa común es, en algunos aspectos, una sala de exhibición llena con aplicaciones de la mecánica de fluidos. Los sistemas de tubos para el agua fría, el gas natural y las aguas de desecho para cada una de las casas y toda una ciudad están diseñados en forma fundamental sobre la base de la mecánica de fluidos. Lo mismo también es cierto para la red de tuberías y ductos de los sistemas de calefacción y acondicionamiento del aire. Un refrigerador contiene tubos por los que fluye el refrigerante, un compresor que eleva la presión de éste y dos intercambiadores de calor en donde el refrigerante absorbe y rechaza el calor. La mecánica de fluidos desempeña un papel importante en el diseño de todos estos componentes. Incluso la operación de los grifos ordinarios se basa en esta mecánica.

También se pueden ver numerosas aplicaciones de la mecánica de fluidos en un automóvil. Todos los componentes asociados con el transporte del combustible del tanque de éste hacia los cilindros —la línea de suministro del combus-

tible, la bomba, los inyectores o el carburador— así como la mezcla del combustible con el aire en los cilindros y el purgado de los gases de combustión en los tubos de escape se analizan aplicando la mecánica de fluidos. Ésta también se aplica en el diseño del sistema de calefacción y acondicionamiento del aire, de los frenos hidráulicos, de la dirección hidráulica, de la transmisión automática y los sistemas de lubricación, del sistema de enfriamiento del monobloque que incluye el radiador y la bomba de agua, además de los neumáticos. La suave forma aerodinámica de automóviles de modelo reciente es resultado de los esfuerzos por minimizar la fuerza de arrastre mediante la aplicación de un extenso análisis del flujo sobre superficies.

A una escala más amplia, la mecánica de fluidos desempeña una parte importante en el diseño y análisis de aviones, barcos, submarinos, cohetes, motores de propulsión a chorro, turbinas de viento, aparatos biomédicos, sistemas de enfriamiento de componentes electrónicos y ductos de transporte de agua, petróleo crudo y gas natural. También se considera para el diseño de edificios, puentes e incluso de vallas publicitarias para asegurar que las estructuras puedan soportar la intensidad del viento. Numerosos fenómenos naturales como el ciclo de lluvias, los patrones meteorológicos, la elevación del agua del suelo hasta la punta de los árboles, los vientos, las olas del océano y las corrientes en las grandes masas de agua también son regidos por los principios de la mecánica de fluidos (Fig. 1-7).



Flujos naturales y el estado del tiempo
© Vol. 16/Photo Disc.



Barcos
© Vol. 5/Photo Disc.



Aviones y naves espaciales
© Vol. 1/Photo Disc.



Plantas generadoras
© Vol. 57/Photo Disc.



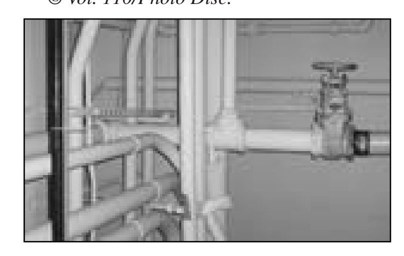
Cuerpo humano
© Vol. 110/Photo Disc.



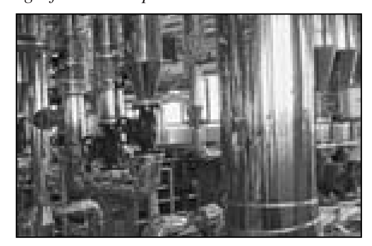
Automóviles
Fotografía tomada por John M. Cimbala.



Turbinas de viento
© Vol. 17/Photo Disc.



Sistemas de tubos y plomería
Fotografía tomada por John M. Cimbala.



Aplicaciones industriales
Cortesía de UMDE Engineering, Contracting, and Trading. Reproducida con autorización.

FIGURA 1-7
Algunas áreas de aplicación de la mecánica de fluidos.

1-2 ▪ CONDICIÓN DE NO-DESLIZAMIENTO

El flujo de fluidos con frecuencia se encuentra limitado por superficies sólidas y resulta importante entender de qué manera la presencia de estas superficies afecta el flujo. Se conoce que el agua en un río no puede fluir a través de rocas grandes y las rodea. Es decir, la velocidad normal del agua hacia la superficie de la roca debe ser cero y el agua que se aproxima a esa superficie en forma normal llega a detenerse por completo en ésta. Lo que no es tan obvio es que el agua que se aproxima a la roca, desde cualquier ángulo, también llega a detenerse por completo en la superficie de ella y, por consiguiente, la velocidad tangencial del agua en la superficie también es cero.

Considérese el flujo de un fluido en un tubo estacionario o sobre una superficie sólida que es no porosa (es decir, impermeable al fluido). Todas las observaciones experimentales indican que un fluido en movimiento llega a detenerse por completo en la superficie y adquiere una velocidad cero con relación a ella. Esto es, un fluido en contacto directo con un sólido "se pega" a la superficie debido a los efectos viscosos y no hay deslizamiento. A esta característica se le conoce como la **condición de no-deslizamiento**.

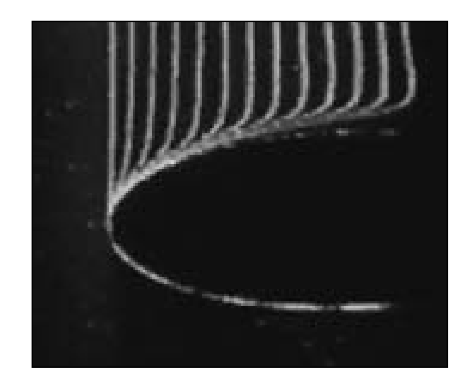


FIGURA 1-8
Desarrollo de un perfil de velocidad debido a la condición de no-deslizamiento conforme un fluido fluye sobre el cuerpo de la parte delantera obtusa.

"Hunter Rouse: Laminar and Turbulent Flow Film". Copyright IIHR-Hydroscience & Engineering, The University of Iowa. Reproducida con autorización.

En la fotografía de la figura 1-8, obtenida de un video, se muestra con claridad la evolución de un gradiente de velocidad como resultado de la adherencia del fluido a la superficie de un cuerpo de la parte delantera obtusa. La capa que se pega a la superficie desacelera la capa adyacente de fluido, debido a las fuerzas viscosas entre las capas de ese fluido, la cual desacelera a la capa siguiente y así sucesivamente. Por lo tanto, la condición de no-deslizamiento es responsable del desarrollo del perfil de velocidad. La región del fluido adyacente a la pared, en la cual los efectos viscosos (y, por consiguiente, los gradientes de velocidades) son significativos se llama **capa límite**. La propiedad del fluido responsable de la condición de no-deslizamiento y del desarrollo de la capa límite es la *viscosidad* y se discute en el capítulo 2.

Una capa de fluido adyacente a una superficie en movimiento tiene la misma velocidad que ésta. Una consecuencia de la condición de no-deslizamiento es que todos los perfiles de velocidades deben tener valores de cero respecto a la superficie en los puntos de contacto entre un fluido y una superficie sólida (Fig. 1-9). Otra consecuencia de la condición de no-deslizamiento es la resistencia *al movimiento de una superficie*, la cual es la fuerza que un fluido ejerce sobre una superficie en la dirección del flujo.

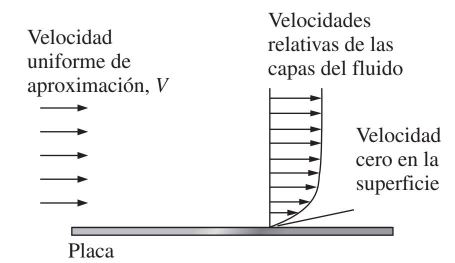


FIGURA 1-9
Un fluido que fluye sobre una superficie en reposo llega a detenerse por completo en ésta, debido a la condición de no-deslizamiento.

Cuando se fuerza a un fluido a moverse sobre una superficie curva, como el lado posterior de un cilindro, con una velocidad suficientemente elevada, la capa límite ya no puede permanecer adherida a la superficie y, en algún punto, se separa de ella; este fenómeno se conoce como **separación del flujo** (Fig. 1-10). Se hace notar que la condición de no-deslizamiento se aplica *en todas partes* a lo largo de la superficie, incluso corriente abajo del punto de se-paración. La separación del flujo se comenta con mayor detalle en el capítulo 10.

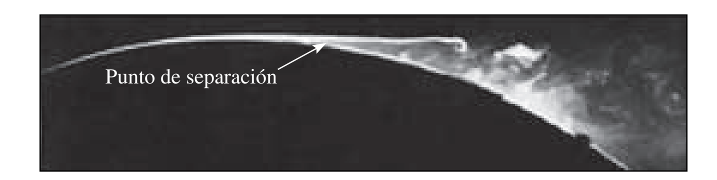


FIGURA 1-10
Separación del flujo durante un flujo sobre una superficie curva.

Tomado de G. M. Homsy y otros, "Multi-Media Fluid Mechanics", Cambridge Univ. Press (2001). ISBN 0-521-78748-3. Reproducida con autorización.

Ocurre un fenómeno semejante para la temperatura. Cuando se ponen en contacto dos cuerpos a temperaturas diferentes, se tiene transferencia de calor hasta que los dos cuerpos adquieren la misma temperatura en los puntos de contacto. A este efecto se le llama **condición de no-salto en la temperatura**.

1-3 ▪ BREVE HISTORIA DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS[1]

Uno de los primeros problemas de ingeniería que enfrentó la humanidad a medida que se desarrollaban las ciudades consistió en el suministro de agua para el uso doméstico y la irrigación de los cultivos. Nuestros estilos urbanos de vida sólo se pueden mantener con agua abundante y se ve con claridad, con base en la arqueología, que todas las civilizaciones sobresalientes de la prehistoria invirtieron en construcción y mantenimiento de sistemas acuíferos. Los acueductos romanos, algunos de los cuales todavía están en uso, son los mejores ejemplos conocidos. No obstante, quizá la ingeniería más impresionante desde el punto de vista técnico se realizó en la ciudad helénica de Pergamón, en la Turquía actual. Allí, desde los años 283 a 133 a.C. se construyeron una serie de tuberías de plomo y arcilla (Fig. 1-11), hasta de 45 km de largo, que operaban a presiones que sobrepasaban los 1.7 MPa (180 m de carga). Por desgracia, los nombres de casi todos estos primeros constructores se perdieron para la historia. Las colaboraciones más antiguas reconocidas a la teoría de la mecánica de fluidos las hizo el matemático griego Arquímedes (285-212 a.C.). Este matemático formuló y aplicó el principio de la flotación en la primera prueba no-destructiva de la historia, para determinar el contenido de oro en la corona del rey Herón I. Los romanos construyeron grandes acueductos y educaron a muchos de los pueblos conquistados en relación con los beneficios del agua limpia pero, en conjunto, tuvieron una mala comprensión de la teoría de los fluidos. (Quizá no debieron de haber matado a Arquímedes cuando saquearon Siracusa.)



FIGURA 1-11
Segmento de la línea de tubos de Pergamón. Cada sección de tubo de arcilla tenía de 13 a 18 cm de diámetro.
Cortesía de Gunther Garbrecht. Reproducida con autorización.

Durante la Edad Media, el empleo de la maquinaria con aplicación de los fluidos se expandió con lentitud, pero paulatinamente. Se diseñaron elegantes bombas de émbolo para desaguar las minas, se perfeccionaron la rueda hidráulica y el molino de viento para moler granos, forjar metal y otras tareas. Por primera vez en la historia humana registrada se realizó trabajo significativo sin la potencia de un músculo proporcionada por una persona o animal y, en general, estas invenciones recibieron el crédito cuando permitieron la Revolución industrial. Una vez más, se desconoce a los creadores de la mayor parte del progreso, aunque los aparatos fueron documentados adecuadamente por varios escritores técnicos, como Georgius Agricola (Fig. 1-12).

El Renacimiento trajo el desarrollo continuo de los sistemas y máquinas con base en los fluidos pero, lo que es más importante, se perfeccionó el método científico y se adoptó en toda Europa. Simon Stevin (1548-1617), Galileo Galilei (1564-1642), Edme Mariotte (1620-1684) y Evangelista Torricelli (1608-1647) estuvieron entre los primeros en aplicar el método a los fluidos a medida que investigaban las distribuciones de la presión hidrostática y los vacíos. Ese trabajo lo integró y refinó el brillante matemático Blaise Pascal (1623-1762). El monje italiano Benedetto Castelli (1577-1644) fue la primera persona en publicar un enunciado del principio de continuidad para los fluidos. Junto con la formulación de sus ecuaciones del movimiento para los sólidos, sir Isaac Newton (1643-1727) aplicó sus leyes a los fluidos y examinó la inercia y la resistencia de éstos, los chorros libres y la viscosidad. El suizo Daniel Bernoulli (1700-1782) y su asociado Leonard Euler (1707-1783) le pusieron bases a ese esfuerzo. En conjunto, su trabajo definió las ecuaciones de la energía y de la cantidad de movimiento. El

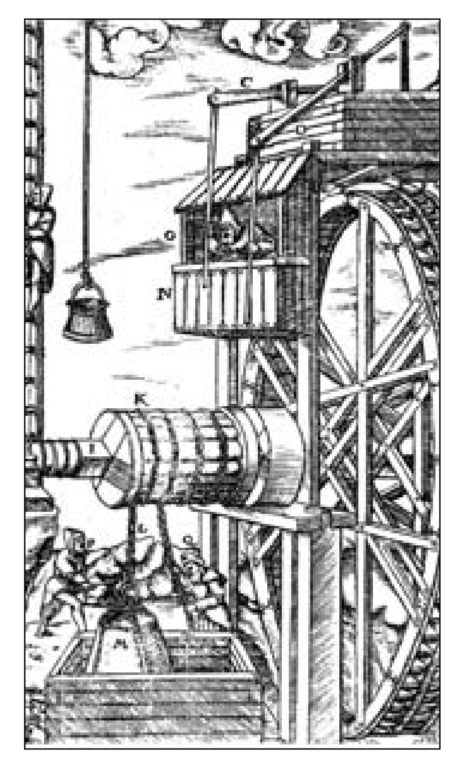


FIGURA 1-12
Malacate de una mina impulsado por una rueda hidráulica reversible.
G. Agricola, De Re Metalica, *Basel, 1556.*



[1] Esta sección es una colaboración del profesor Glenn Brown de Oklahoma State University.

tratado clásico de Bernoulli, *Hydrodynamica* (1738), puede considerarse el primer texto sobre mecánica de fluidos. Por último, Jean d'Alembert (1717-1789) desarrolló la idea de componentes de la velocidad y de la aceleración, una expresión diferencial de la continuidad y su "paradoja" de la resistencia cero para el movimiento uniforme estacionario.

El desarrollo de la teoría de la mecánica de fluidos hasta el final del siglo XVIII tuvo poco impacto sobre la ingeniería, ya que las propiedades y los parámetros de los fluidos estaban mal cuantificados y la mayor parte de las teorías eran abstracciones que no se podrían cuantificar para fines de diseño. Esto iba a cambiar con el desarrollo de la escuela francesa de ingeniería dirigida por Riche de Prony (1755-1839). Prony (todavía conocido por su freno para medir la potencia) y sus asociados en París, en la Ecole Polytechnic y la Ecole Ponts et Chaussees, fueron los primeros en integrar el cálculo y la teoría científica en el currículo de ingeniería, el cual se convirtió en el modelo para el resto del mundo. (Por consiguiente, el estudiante sabe a quién culpar por su doloroso primer año de licenciatura.) Antonie Chezy (1718-1798), Louis Navier (1785-1836), Gaspard Coriolis (1792-1843), Henry Darcy (1803-1858) y muchos otros colaboradores a la ingeniería y teoría de los fluidos fueron estudiantes así como profesores de las escuelas.

A mediados del siglo XIX, se fueron presentando avances fundamentales. El físico Jean Poiseuille (1799-1869) había medido con exactitud el flujo en tubos capilares para múltiples fluidos, mientras que, en Alemania, Gothilf Hagen (1797-1884) había establecido la diferencia entres el flujo laminar y el turbulento en tubos. En Inglaterra, Lord Osborn Reynolds (1842-1912) continuó ese trabajo y desarrolló el número adimensional que lleva su nombre. De manera análoga, en paralelo al primer trabajo de Navier, George Stokes (1819-1903) completó las ecuaciones generales del movimiento de los fluidos con fricción que tomaron sus nombres. William Froude (1810-1879), casi sin ayuda, desarrolló los procedimientos y constató el valor de las pruebas físicas en modelos. La pericia de los estadounidenses había igualado a la de los europeos, según quedó demostrado con el trabajo pionero de James Francis (1815-1892) y Lester Pelton (1829-1908) en las turbinas y la invención de Clemens Herschel (1842-1930) del medidor Venturi.

El final del siglo XIX fue notable por la expansión de la teoría de los fluidos realizada por científicos e ingenieros irlandeses e ingleses que incluía, además de a Reynolds y Stokes, a William Thomson, Lord Kelvin (1824-1907), William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919) y sir Horace Lamb (1849-1934). Estos individuos investigaron un gran número de problemas, inclusive el análisis dimensional, el flujo irrotacional, el movimiento de vórtices, la cavitación y las ondas. En un sentido más amplio, su trabajo también profundizó en los enlaces entre la mecánica de fluidos, la termodinámica y la transferencia de calor.



FIGURA 1-13
Los hermanos Wright emprenden el vuelo en Kitty Hawk.
National Air and Space Museum/Smithsonian Institution.

El amanecer del siglo XX trajo dos desarrollos monumentales. En primer lugar, en 1903, los autodidactas hermanos Wright (Wilbur, 1867-1912; Orville, 1871-1948) a través de la aplicación de la teoría y determinada experimentación perfeccionaron el aeroplano. Su primitiva invención fue completa y contuvo todos los aspectos importantes de las naves modernas (Fig. 1-13). Las ecuaciones de Navier-Stokes tuvieron poco uso hasta esta época, debido a que eran demasiado difíciles de resolver. En una publicación que abrió el camino, en 1904, el alemán Ludwig Prandtl (1875-1953) demostró que los flujos de fluidos se pueden dividir en una capa cercana a las paredes, la *capa límite*, en donde los efectos de la fricción son significativos, y una capa exterior, en donde esos efectos son despreciables y se pueden aplicar las ecuaciones simplificadas de Euler y Bernoulli. Sus estudiantes, Theodore von Kármán (1881-1963), Paul Blasius (1883-1970), Johann Nikuradse (1894-1979) y otros se basaron en esa teoría en aplicaciones tanto a la hidráulica como a la aerodinámica. (Durante la Segunda Guerra Mundial, ambos bandos se beneficiaron de la teoría, ya que Prandtl per-

maneció en Alemania en tanto que su mejor estudiante, Theodore von Kármán, nacido en Hungría, trabajó en Estados Unidos.)

La mitad del siglo XX podría considerarse como la edad de oro de las aplicaciones de la mecánica de fluidos. Las teorías existentes fueron adecuadas para las tareas que tenían que emprenderse y se definieron las propiedades y los parámetros de los fluidos. Estos acuerdos apoyaron una enorme expansión de los sectores aeronáutico, químico, industrial y de recursos acuíferos; donde cada uno dirigió a la mecánica de fluidos en nuevas direcciones. La investigación y el trabajo realizado en ella a finales del siglo XX fueron elementos dominados por el desarrollo de la computadora digital en Estados Unidos. La capacidad para resolver grandes problemas complejos, como el modelado del clima global, o para optimizar el diseño de un álabe de turbina, ha beneficiado a nuestra sociedad en tal manera que los desarrolladores del siglo XVIII de la mecánica de fluidos nunca pudieron haber imaginado (Fig. 1-14). Los principios que se presentan en las páginas siguientes se han aplicado en un rango muy amplio desde los flujos a escala microscópica de un momento de duración hasta los flujos simulados para un periodo de 50 años, para una cuenca completa de un río. En verdad es increíble.

¿Hacia dónde se dirigirá la mecánica de fluidos en el siglo XXI? Francamente, o inclusive una extrapolación limitada más allá del presente sería un completo desatino. No obstante, si la historia nos dice algo, es que los ingenieros estarán aplicando los conocimientos para beneficiar a la sociedad, investigando lo que no saben y consumiendo una gran cantidad de tiempo durante este proceso.



FIGURA 1-14
El Oklahoma Wind Power Center (Centro de Energía Eólica), cerca de Woodward, consta de 68 turbinas, de 1.5 MW cada una.

Cortesía de Steve Stadler, Oklahoma Wind Power Initiative. Reproducida con autorización.

1-4 ▪ CLASIFICACIÓN DE LOS FLUJOS DE FLUIDOS

Al principio se definió *mecánica de fluidos* como la ciencia que trata del comportamiento de los fluidos en reposo o en movimiento, así como de la interacción con sólidos u otros fluidos, en las fronteras. Existe una amplia variedad de problemas del flujo de fluidos que se encuentran en la práctica y suele ser conveniente clasificarlos sobre la base de algunas características comunes, para que sea factible estudiarlos en grupos. Existen muchas maneras de clasificar los problemas del flujo de fluidos y, enseguida, se presentan algunas categorías generales.

Regiones viscosas de flujo en comparación con las no-viscosas

Cuando dos capas de fluido se mueven una en relación con la otra, se desarrolla una fuerza de fricción entre ellas y la capa más lenta trata de desacelerar a la más rápida. Esta resistencia interna al flujo se cuantifica mediante la propiedad de *viscosidad* del fluido, la cual es una medida de la adherencia interna de éste. La viscosidad es causada por las fuerzas de cohesión entre las moléculas, en los líquidos, y por las colisiones moleculares en los gases. No existe fluido con viscosidad cero y, en consecuencia, en todos los flujos de fluidos intervienen los efectos viscosos en cierto grado. Los flujos en donde los efectos de la fricción son significativos se llaman **flujos viscosos**. Pero, en muchos flujos de interés práctico, se tienen regiones (por lo general regiones que no están cercanas a superficies sólidas) en donde las fuerzas viscosas son despreciablemente pequeñas en comparación con las fuerzas de inercia o de presión. Despreciar los términos viscosos en esas **regiones no-viscosas de flujo** simplifica mucho el análisis, sin pérdida considerable en la exactitud.

En la figura 1-15 se muestra el desarrollo de regiones viscosas y no-viscosas de flujo como resultado de la inserción de una placa plana paralela al flujo en una corriente de fluido de velocidad uniforme. El fluido se pega a la placa en ambos lados debido a la condición de no-deslizamiento y la delgada capa límite en la cual los

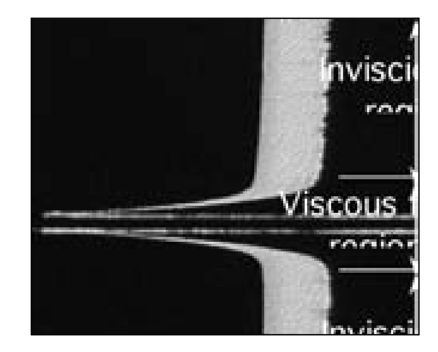


FIGURA 1-15
Flujo de una corriente de fluido, originalmente uniforme, sobre una placa plana y las regiones de flujo viscoso (próximas a la placa en ambos lados) y de flujo no-viscoso (lejos de la placa).

Fundamentals of Boundary Layers, National Committee from Fluid Mechanics Films, © Education Development Center.

efectos viscosos son significativos, cercana a la superficie de la placa es la *región de flujo viscoso*. La región de flujo en ambos lados, lejana a la placa y que no es afectada por la presencia de ésta es la *región de flujo no-viscoso*.

Flujo interno en comparación con el externo

Un flujo de un fluido se clasifica como interno o externo, dependiendo de si a ese fluido se le obliga a fluir en un canal confinado o sobre una superficie. El flujo de un fluido no limitado sobre una superficie, como una placa, un alambre o un tubo, es **flujo externo.** El flujo en un tubo o ducto es **flujo interno** si el fluido queda por completo limitado por las superficies sólidas. Por ejemplo, el flujo de agua en un tubo es flujo interno y el flujo de aire sobre una pelota o sobre un tubo expuesto durante un día de viento constante es flujo externo (Fig. 1-16). El flujo de líquidos en un ducto se conoce como *flujo en canal abierto* si ese ducto sólo está lleno en forma parcial con el líquido y se tiene una superficie libre. Los flujos de agua en los ríos y zanjas de irrigación son ejemplos de estos flujos.

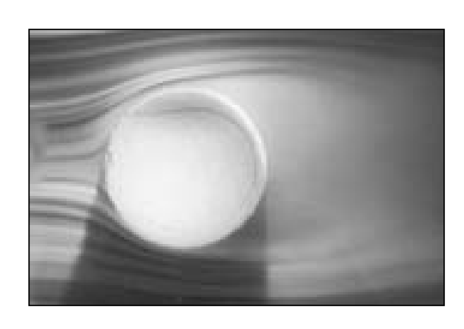


FIGURA 1-16
Flujo externo sobre una pelota de tenis y la región de la estela turbulenta que se encuentra detrás de ella.
Cortesía de la NASA y Cislunar Aerospace, Inc.

Los flujos internos están dominados por la influencia de la viscosidad en todo el campo de flujo. En los flujos externos, los efectos viscosos quedan limitados a la capa límite cercana a las superficies sólidas y a las regiones de la estela corriente abajo de los cuerpos.

Flujo compresible en comparación con el incompresible

Un flujo se clasifica como *compresible* o *incompresible*, dependiendo del nivel de variación de la densidad del fluido durante ese flujo. La incompresibilidad es una aproximación y se dice que el flujo es **incompresible** si la densidad permanece aproximadamente constante a lo largo de todo el flujo. Por lo tanto, el volumen de todas las porciones del fluido permanece inalterado sobre el curso de su movimiento cuando el flujo (o el fluido) es incompresible.

En esencia, las densidades de los líquidos son constantes y, así, el flujo de ellos es típicamente incompresible. Por lo tanto, se suele decir que los líquidos son *sustancias incompresibles.* Por ejemplo, una presión de 210 atm hace que la densidad del agua líquida a 1 atm cambie en sólo 1 por ciento. Por otra parte, los gases son intensamente compresibles. Por ejemplo, un cambio de presión de sólo 0.01 atm causa un cambio de 1 por ciento en la densidad del aire atmosférico.

Cuando se analizan los cohetes, las naves espaciales y otros sistemas en los que intervienen flujos de gas a velocidades altas, la velocidad del flujo a menudo se expresa en términos del **número adimensional** de **Mach** que se define como

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} = \frac{\text{Velocidad del flujo}}{\text{Velocidad del sonido}}$$

en donde c es la **velocidad del sonido** cuyo valor es de 346 m/s en el aire a temperatura ambiente al nivel del mar. Se dice que un flujo es **sónico** cuando Ma = 1, **subsónico** cuando Ma $<$ 1, **supersónico** cuando Ma $>$ 1, e **hipersónico** cuando Ma $\gg$ 1.

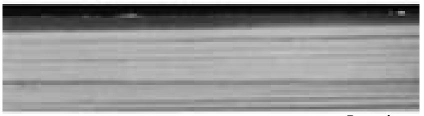
Los flujos de líquidos son incompresibles hasta un nivel alto de exactitud, pero el nivel de variación en la densidad en los flujos de gases y el nivel consecuente de aproximación que se hace cuando se modelan estos flujos como incompresibles depende del número de Mach. Con frecuencia, los flujos de gases se pueden aproximar como incompresibles si los cambios en la densidad se encuentran por debajo del 5 por ciento, lo cual suele ser el caso cuando Ma $<$ 0.3. Por lo tanto, los efectos de la compresibilidad del aire se pueden despreciar a velocidad por debajo de alrededor de 100 m/s. Nótese que el flujo de un gas no es necesariamente uno compresible.

Los pequeños cambios en la densidad de los líquidos correspondientes a cambios grandes en la presión todavía pueden tener consecuencias importantes. Por

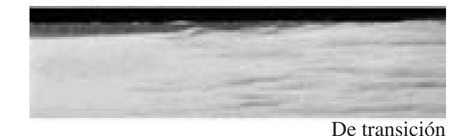
ejemplo, el irritante "golpe de ariete" en un tubo de agua es causado por las vibraciones del tubo generadas por la reflexión de ondas de presión que se presentan después del cierre repentino de las válvulas.

Flujo laminar en comparación con el turbulento

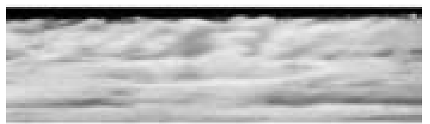
Algunos flujos son suaves y ordenados en tanto que otros son considerados caóticos. El movimiento intensamente ordenado de un fluido, caracterizado por capas no-alteradas de éste se menciona como **laminar**. La palabra *laminar* proviene del movimiento de partículas juntas adyacentes del fluido, en "láminas". El flujo de los fluidos intensamente viscosos, como los aceites a bajas velocidades, por lo general es laminar. El movimiento intensamente desordenado de un fluido, que es común se presente a velocidades altas y se caracteriza por fluctuaciones en la velocidad se llama **turbulento** (Fig. 1-17). El flujo de fluidos de baja viscosidad, como el aire a velocidades altas es por lo común turbulento. El régimen de flujo influye significativamente en la potencia requerida para el bombeo. Un flujo que se alterna entre laminar y turbulento se conoce como **de transición**. Los experimentos conducidos por Osborn Reynolds en la década de 1880 dieron como resultado el establecimiento del **número adimensional de Reynolds**, **Re**, como el parámetro clave para determinar el régimen de flujo en los tubos (Cap. 8).



Laminar



De transición



Turbulento

FIGURA 1-17
Flujos laminar, de transición y turbulento.
Cortesía de ONERA, fotografía tomada por Werlé.

Flujo natural (o no-forzado) en comparación con el forzado

Se dice que el flujo de un fluido es natural o forzado, dependiendo de cómo se inicia el movimiento de ese fluido. En el **flujo forzado**, un fluido se obliga a fluir sobre una superficie o en un tubo por medio de medios externos, como una bomba o un ventilador. En los **flujos naturales**, cualquier movimiento del fluido se debe a medios naturales, como el efecto de flotación, el cual se manifiesta como la elevación del fluido más caliente (y por consiguiente, más ligero) y la caída del fluido más frío (y por tanto, el más denso) (Fig. 1-18). Por ejemplo, en los sistemas de celdas solares para agua caliente, es común que se aplique el efecto de termosifón para reemplazar las bombas cuando se coloca el tanque de agua lo suficientemente arriba de los colectores solares.



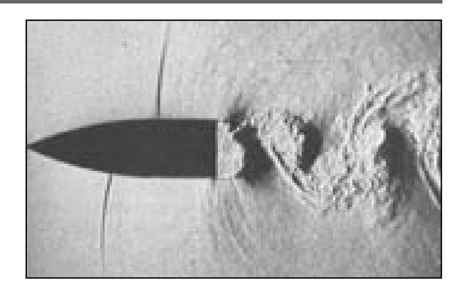
FIGURA 1-18
En esta imagen en la que se captan las venas del flujo turbulento de un fluido transparente, de una muchacha en traje de baño, la subida del aire más caliente y más ligero adyacente a su cuerpo indica que los humanos y los animales de sangre caliente están rodeados por nubes de aire cálido que sube.
G. S. Settles, Gas Dynamics Lab, Penn State University. Reproducida con autorización.

Flujo estacionario en comparación con el no-estacionario

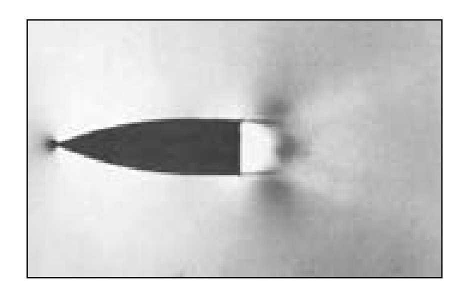
Con frecuencia, en ingeniería, se usan los términos *estacionario* y *uniforme*; en consecuencia, es importante entender con claridad sus significados. El término **estacionario** implica que *no hay cambio en un punto con el tiempo.* Lo opuesto a estacionario es **no-estacionario**. El término **uniforme** implica que *no hay cambio con el lugar* sobre una región especificada. Estos significados son coherentes con su uso cotidiano (amiga fiel, estacionaria estable, distribución uniforme, etcétera).

A menudo se usan los términos *no-estacionario* y *transitorio* de manera intercambiable, sin embargo no son sinónimos. En mecánica de fluidos, *no-estacionario* es el término más general que se aplica a cualquier flujo que no sea estacionario, pero **transitorio** es común aplicarlo para flujos en desarrollo. Por ejemplo, cuando se dispara un cohete, se tienen efectos transitorios (la presión se desarrolla en el interior del motor del cohete, el flujo se acelera, etcétera) hasta que el motor se estabiliza y opera en forma estacionaria. El término **periódico** se refiere a la clase de flujo no-estacionario en el cual éste oscila en torno a una media estacionaria.

Muchos equipos, como las turbinas, los compresores, las calderas, los condensadores y los intercambiadores de calor operan durante largos periodos en las mismas condiciones y se clasifican como *equipos de flujo estacionario.* (Nótese que, por supuesto, el campo de flujo cercano a las álabes rotatorias de una turbomáquina es no-estacionario, pero se considera el campo total de flujo en lugar



a)



b)

FIGURA 1-19
Estela oscilante de un cuerpo aerodinámico de parte posterior obtusa a un número de Mach de 0.6. La fotografía *a*) es una imagen instantánea, en tanto que la *b*) es una imagen de larga exposición (promediada respecto al tiempo).

a) *Dyment, A., Flodrops, J. P. y Gryson, P. 1982 en* Flow Visualization II, *W. Merzkirch, ed., 331-336. Washington:* Hemisphere. *Reproducida con autorización de Arthur Dyment.*

b) *Dyment, A. y Gryson, P. 1978 en* Inst. Mèc. Fluides Lille, *No. 78-5. Reproducida con autorización de Arthur Dyment.*

de los detalles en algunos lugares cuando se clasifican los equipos.) Durante el flujo estacionario, las propiedades del fluido pueden cambiar de punto a punto dentro de un equipo, pero en cualquier punto fijo permanecen constantes. Por lo tanto, el volumen, la masa y la energía total de un equipo de flujo estacionario o sección de flujo permanecen constantes en la operación estacionaria.

Las condiciones de flujo estacionario pueden lograr aproximarse en equipos cuyo propósito es la operación continua, como las turbinas, las bombas, las calderas, los condensadores y los intercambiadores de calor de las plantas generadoras de energía o de los sistemas de refrigeración. Algunos equipos cíclicos, como los motores o compresores reciprocantes, no satisfacen las condiciones del flujo estacionario, ya que el flujo en las entradas y salidas es pulsante y no-estacionario. Sin embargo, las propiedades del fluido varían con el tiempo de una manera periódica y el flujo en estos equipos todavía se puede analizar como un proceso de flujo estacionario, utilizando los valores de las propiedades promediados respecto al tiempo.

Algunas visualizaciones fascinantes del flujo de fluidos se encuentran en el libro *An Album of Fluid Motion* de Milton Van Dyke (1982). En la figura 1-19 se muestra una bella ilustración de un campo de flujo no-estacionario, tomada del libro de Van Dyke. La figura 1-19*a* es una imagen instantánea de un movimiento a alta velocidad; ésta revela grandes remolinos que se alternan, y que son vertidos, revueltos y turbulentos, hacia la estela periódicamente oscilante desde el borde posterior del objeto. Los remolinos producen ondas de choque que se mueven corriente arriba de manera alternada sobre las superficies superior e inferior del cuerpo aerodinámico, de modo no-estacionario. En la figura 1-19*b* se muestra el *mismo* campo de flujo, pero la película está expuesta durante un tiempo más largo, de modo que la imagen está promediada respecto al tiempo sobre 12 ciclos. El campo resultante de flujo promediado respecto al tiempo parece "estacionario", ya que, en la larga exposición, se han perdido los detalles de las oscilaciones no-estacionarias.

Uno de los trabajos más importantes de un ingeniero es determinar si, para solucionar el problema basta con estudiar sólo las características de flujo "estacionario" promediadas respecto al tiempo o si se necesita un estudio más detallado de las características no-estacionarias. Si el ingeniero estuviera interesado sólo en las propiedades del campo total de flujo (como el coeficiente de arrastre promediado respecto al tiempo, la velocidad media y los campos de presión) serían suficientes una descripción promediada respecto al tiempo como la de la figura 1-19*b*, mediciones experimentales promediadas respecto al tiempo o un cálculo analítico o numérico del campo de flujo promediado respecto al tiempo. No obstante, si el ingeniero estuviera interesado en los detalles acerca del campo de flujo no-estacionario, como las vibraciones inducidas por el flujo, las fluctuaciones de la presión no-estacionaria o las ondas sonoras emitidas por los remolinos turbulentos o las ondas de choque, sería insuficiente una descripción del campo de flujo promediada respecto al tiempo.

La mayor parte de los ejemplos analíticos o computacionales que se dan en este libro tratan de flujos estacionarios o promediados respecto al tiempo, y aun cuando en ocasiones resulta adecuado, también se señalan algunas características del flujo no-estacionario.

Flujos unidimensional, bidimensional y tridimensional

Un campo de flujo se caracteriza de la mejor manera mediante la distribución de velocidad y, por consiguiente, se dice que un flujo es unidimensional, bidimensional o tridimensional si la velocidad del flujo varía en una, dos o tres dimensiones, respectivamente. Un flujo típico de un fluido comprende una configuración geométrica tridimensional y la velocidad puede variar en las tres dimensiones, y dar lugar al flujo tridimensional [$\vec{V}(x, y, z)$ en coordenadas rectangulares, o $\vec{V}(r, \theta, z)$ en coordenadas cilíndricas]. Sin embargo, la variación de la velocidad en cier-

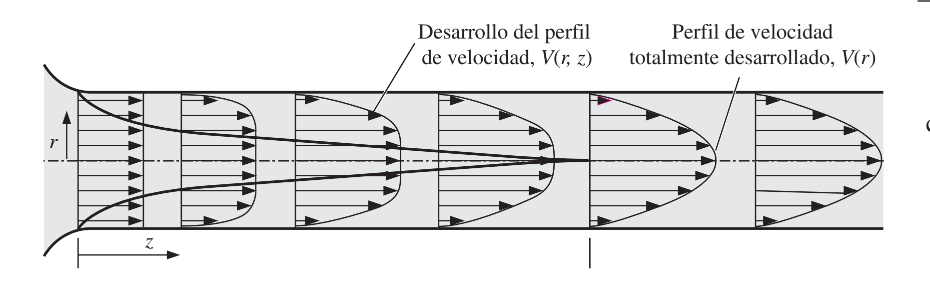


FIGURA 1-20
Desarrollo del perfil de velocidad en un tubo circular. $V = V(r, z)$ y, por consiguiente, el flujo es bidimensional en la región de entrada y se convierte en unidimensional corriente abajo, cuando el perfil de velocidad se desarrolla totalmente y permanece inalterado en la dirección del flujo, $V = V(r)$.

tas direcciones puede ser pequeña en relación con la variación en otras y se pueden ignorar con error despreciable. En esos casos, el flujo se puede modelar de modo conveniente como unidimensional, el cual es más fácil de analizar.

Considérese el flujo estacionario de un fluido por un tubo circular sujeto a un tanque grande. La velocidad del fluido en todos los puntos sobre la superficie del tubo es cero, debido a la condición de no-deslizamiento, y el flujo es bidimensional en la región de entrada de ese tubo dado que la velocidad cambia tanto en la dirección r- como en la z-. El perfil de velocidad se desarrolla plenamente y permanece inalterado más allá de cierta distancia de la entrada (alrededor de 10 diámetros de tubo en el flujo turbulento y menos en el laminar, como se muestra en la Fig. 1-20) y se dice que, en esta región, se encuentra *totalmente desarrollado*. El flujo totalmente desarrollado en un tubo circular es *unidimensional* ya que la velocidad varía en la dirección radial, pero no en las direcciones angular θ- o axial z-, como se muestra en la figura 1-20. Es decir, el perfil de velocidad es el mismo en cualquier ubicación axial z- y es simétrico respecto al eje del tubo.

Nótese que la dimensionalidad del flujo también depende de la selección del sistema de coordenadas y de su orientación. Por ejemplo, el flujo en un tubo que se discutió es unidimensional en coordenadas cilíndricas, pero bidimensional en cartesianas (lo que ilustra la importancia de la selección del sistema de coordenadas más apropiado). Nótese también, que incluso en este flujo sencillo, la velocidad no puede ser uniforme a través de la sección transversal del tubo debido a la condición de no-deslizamiento. Pero, en una entrada bien redondeada al tubo, el perfil de velocidad se puede aproximar como si fuera casi uniforme a través del tubo, ya que la velocidad es casi constante en todos los radios, excepto muy cerca de la pared del tubo.

Un flujo se puede tomar aproximadamente como *bidimensional* cuando una de sus dimensiones es mucho más grande que la otra y el flujo no cambia de manera apreciable a lo largo de la dimensión de mayor longitud. Por ejemplo, el flujo del aire sobre la antena de un automóvil se puede considerar como bidimensional, excepto cerca de sus extremos, ya que la longitud de la antena es mucho mayor que su diámetro y el flujo de aire que choca contra ella es bastante uniforme (Fig. 1-21).



FIGURA 1-21
El flujo sobre la antena de un automóvil es aproximadamente bidimensional, excepto cerca de la punta y del extremo inferior de la misma.

EJEMPLO 1-1 Flujo asimétrico sobre una bala

Considere una bala que atraviesa por un aire en calma. Determine si el flujo del aire, promediado respecto al tiempo, sobre la bala es unidimensional, bidimensional o tridimensional (Fig. 1-22).

SOLUCIÓN Se debe determinar si el flujo del aire sobre una bala es unidimensional, bidimensional o tridimensional.
Hipótesis No se tienen vientos significativos y la bala no está girando en torno a su eje.
Análisis La bala posee un eje de simetría y, por lo tanto, es un cuerpo axialmente simétrico. El flujo del aire corriente arriba de la bala es paralelo a este eje y es de esperar que el flujo promediado respecto al tiempo sea simétrico en relación con su rotación alrededor del eje (se dice que un flujo de este tipo es axial-

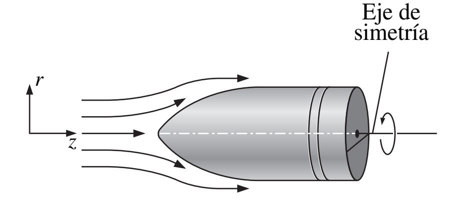


FIGURA 1-22
Flujo axialmente simétrico sobre una bala.

mente simétrico). En este caso, la velocidad varía con la distancia axial z y la radial r, pero no con el ángulo θ. Por consiguiente, el flujo del aire, promediado respecto al tiempo, sobre la bala es **bidimensional**.

Discusión Aun cuando el flujo del aire, promediado respecto al tiempo, es axialmente simétrico, el flujo *instantáneo* del aire no lo es, como se ilustra en la figura 1-19.

1-5 ▪ SISTEMA Y VOLUMEN DE CONTROL

Un **sistema** se define como una *cantidad de materia o una región en el espacio elegidas para su estudio*. La masa o región que se encuentran afuera del sistema se conocen como los **alrededores**. La superficie real o imaginaria que separa el sistema de sus alrededores se llama **frontera** (Fig. 1-23). La frontera de un sistema puede ser *fija* o *movible.* Nótese que la frontera es la superficie de contacto compartida, tanto por el sistema como por los alrededores. Hablando en términos matemáticos, la frontera tiene espesor cero y, de este modo, no puede contener masa ni ocupar algún volumen en el espacio.

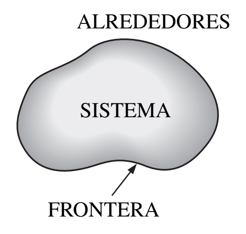


FIGURA 1-23
Sistema, alrededores, frontera.

Se puede considerar que los sistemas son *cerrados* o *abiertos*, dependiendo de si se elige una masa o un volumen en el espacio fijos para el estudio. Un **sistema cerrado** (también conocido como **masa de control**) consta de una cantidad fija de masa y ninguna masa puede cruzar su frontera. Pero la energía, en forma de calor o trabajo, puede cruzar la frontera y el volumen de un sistema cerrado no tiene que ser fijo. Como un caso especial, cuando no se permite que la energía cruce la frontera, ese sistema se conoce como **sistema aislado**.

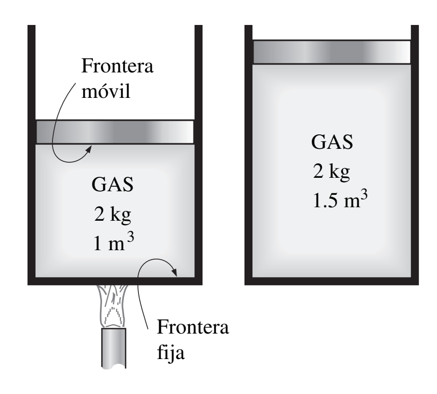


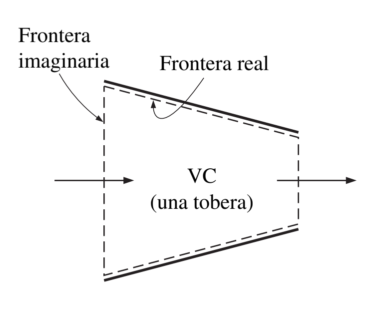
FIGURA 1-24
Sistema cerrado con una frontera móvil.

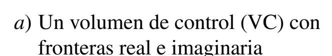
Considérese el dispositivo cilíndrico con émbolo que se muestra en la figura 1-24. Digamos que nos gustaría averiguar lo que sucede al gas encerrado cuando se calienta. Dado que se está enfocando la atención en el gas, éste es el sistema. Las superficies interiores del émbolo y del cilindro forman la frontera y supuesto que nada de masa está cruzándola, es un sistema cerrado. Nótese que la energía puede cruzar la frontera y parte de ésta (la superficie interior del émbolo, en este caso) se puede mover. Todo lo que se encuentra afuera del gas, incluyendo el émbolo y el cilindro, constituye los alrededores.

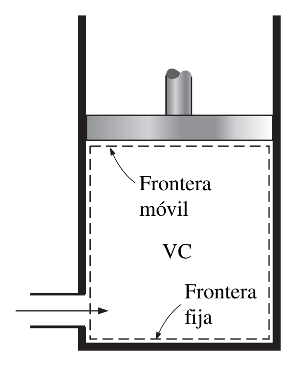
Un **sistema abierto**, o **volumen de control**, como es frecuente llamarlo, es una región seleccionada de modo adecuado en el espacio. Suele encerrar un aparato que está relacionado con flujo de masa, como un compresor, una turbina o una tobera. El flujo por estos aparatos se estudia apropiadamente cuando se selecciona la región que se encuentra dentro de ellos como el volumen de control. Tanto masa como energía pueden cruzar la frontera de un volumen de control.

Un gran número de problemas de ingeniería se relacionan con flujo de masa hacia adentro y hacia afuera de un sistema y, como consecuencia, se modelan como *volúmenes de control*. Un calentador de agua, un radiador de un automóvil, una turbina y un compresor están relacionados con flujo de masa y deben de analizarse como volúmenes de control (sistemas abiertos), en lugar de masa de control (sistemas cerrados). En general, *cualquier región arbitraria en el espacio* se puede seleccionar como volumen de control. No existen reglas concretas para la selección de volúmenes de control, pero es evidente que la elección adecuada hace que el análisis sea mucho más fácil. Si, por ejemplo, se fuera a analizar el flujo de aire por una tobera, una buena elección del volumen de control sería la región dentro de ella.

Un volumen de control puede ser de tamaño y forma fijos, como en el caso de una tobera, o bien, puede comprender una frontera móvil, como se muestra en la figura 1-25. No obstante, la mayor parte de los volúmenes de control tienen fronteras fijas y, como consecuencia, no comprenden fronteras móviles. Un volumen







b) Un volumen de control (VC) con fronteras fija y móvil

FIGURA 1-25
Un volumen de control puede comprender fronteras fijas, móviles, reales e imaginarias.

de control también puede estar relacionado con interacciones de calor y trabajo, precisamente como un sistema cerrado, además de la interacción de masa.

1-6 ■ IMPORTANCIA DE LAS DIMENSIONES Y DE LAS UNIDADES

Cualquier cantidad física se puede caracterizar mediante las **dimensiones**. Las magnitudes asignadas a las dimensiones se llaman **unidades**. Algunas dimensiones básicas, como la masa *m*, la longitud *L*, el tiempo *t*, y la temperatura *T* se seleccionaron como **dimensiones primarias** o **fundamentales**, en tanto que otras, como la velocidad *V*, la energía *E*, y el volumen *V* se expresan en términos de las dimensiones primarias y se llaman **dimensiones secundarias** o **dimensiones derivadas**.

Con el transcurso de los años se han desarrollado varios sistemas de unidades. A pesar de intensos esfuerzos de la comunidad científica y de ingeniería para unificar al mundo con un solo sistema de unidades, en la actualidad todavía son de uso común dos conjuntos de éstas: el **sistema inglés**, el cual también se conoce como *United States Customary System* (USCS, sistema de uso común en Estados Unidos), y el sistema métrico **SI** (por *Le Système International d' Unités*), el cual también es conocido como *Sistema Internacional*. El SI es un sistema sencillo y lógico basado en una relación decimal entre las diversas unidades y se usa para el trabajo científico y de ingeniería en la mayor parte de las naciones industrializadas, inclusive Inglaterra. Sin embargo, el sistema inglés no tiene una aparente base numérica sistemática y en este sistema diversas unidades están relacionadas entre sí en una forma un tanto arbitraria (12 in = 1 ft, 1 mile = 5 280 ft, 4 qt = 1 gal, etcétera), lo cual lo hace confuso y difícil de aprender. Estados Unidos es el único país industrializado que todavía no ha realizado una conversión completa hacia el sistema métrico.

Los esfuerzos sistemáticos para desarrollar un sistema de unidades universalmente aceptable se remontan hasta 1790, cuando la Asamblea Nacional Francesa encargó a la Academia Francesa de Ciencias presentar un sistema de unidades de ese tipo. Pronto se desarrolló en Francia una primera versión del sistema métrico, pero no halló una aceptación universal hasta 1875, cuando 17 naciones, inclusive. Estados Unidos, prepararon y firmaron el *Tratado de la Convención Métrica*. En este tratado internacional se establecieron el metro y el gramo como las unidades métricas de longitud y masa, respectivamente, y se estableció una *Conferencia General de Pesos y Medidas* (CGPM) que se iba a reunir cada seis años. En 1960, la CGPM produjo el SI, el cual se basó en seis

TABLA 1-1

Las siete dimensiones fundamentales (o primarias) y sus unidades en el SI

Dimensión	Unidad
Longitud	metro (m)
Masa	kilogramo (kg)
Tiempo	segundo (s)
Temperatura	kelvin (K)
Corriente eléctrica	ampere (A)
Cantidad de luz	candela (cd)
Cantidad de materia	mole (mol)

TABLA 1-2

Prefijos estándar en las unidades SI

Múltiplo	Prefijo
10^{12}	tera, T
10^{9}	giga, G
10^{6}	mega, M
10^{3}	kilo, k
10^{2}	hecto, h
10^{1}	deca, da
10^{-1}	deci, d
10^{-2}	centi, c
10^{-3}	mili, m
10^{-6}	micro, μ
10^{-9}	nano, n
10^{-12}	pico, p

cantidades fundamentales, y sus unidades se adoptaron en 1954, en la Décima Conferencia General de Pesos y Medidas: *metro* (m) para longitud, *kilogramo* (kg) para masa, *segundo* (s) para tiempo, *ampere* (A) para corriente eléctrica, *grado Kelvin* (°K) para temperatura y *candela* (cd) para intensidad luminosa (cantidad de luz). En 1971, la CGPM añadió una séptima cantidad y unidad fundamental: *mole* (mol) para cantidad de materia.

Con base en el esquema de notación introducido en 1967, oficialmente se eliminó el símbolo de grado de la unidad de temperatura absoluta y todos los nombres de unidades se iban a escribir en minúsculas, aun cuando provinieran de nombres propios (Tabla 1-1). Sin embargo, la abreviatura de una unidad se iba a escribir con letra mayúscula, si esa unidad provenía de un nombre propio. Por ejemplo, la unidad SI de fuerza, la cual se nombró en honor de sir Isaac Newton (1647-1723), es el *newton* (no Newton) y se abrevia como N. Asimismo, se puede pluralizar el nombre completo de una unidad, pero su abreviatura no. Por ejemplo, la longitud de un objeto puede ser de 5 m o 5 metros, *no* de 5 ms o 5 metro. Por último, ningún punto se debe usar en las abreviaturas de unidades, a menos que aparezcan al final de una oración. Por ejemplo, la abreviatura de metro es m (no ms).

El movimiento reciente hacia el sistema métrico en Estados Unidos parece haberse iniciado en 1968, cuando el Congreso, como respuesta a lo que estaba sucediendo en el resto del mundo, aprobó una Metric Study Act (Ley de estudio del sistema métrico). El Congreso continuó promoviendo un cambio voluntario hacia el sistema métrico, cuando aprobó la Metric Conversion Act (Ley de conversión al sistema métrico), en 1975. Un proyecto de ley para el cambio aprobado por el Congreso en 1988 fijó como fecha límite septiembre de 1992, para que todas las oficinas federales hicieran la conversión al sistema métrico. Sin embargo, las fechas límite se relajaron posteriormente sin que existieran planes claros para el futuro.

Las industrias que están ligadas fuertemente en el comercio internacional (como la automotriz, la de bebidas sin alcohol y la de licores) han apresurado la conversión hacia el sistema métrico por razones económicas (tener un solo diseño a escala mundial, menores tallas e inventarios más reducidos, etc.). En la actualidad, casi todos los automóviles fabricados en Estados Unidos son métricos. Es probable que la mayor parte de los propietarios de automóviles no se den cuenta de esto hasta que intenten usar una llave de cubo del sistema inglés en un perno métrico. No obstante, la mayoría de las industrias se resistieron al cambio, retardando de este modo el proceso de conversión.

En la actualidad, la sociedad estadounidense se desenvuelve en un sistema dual y permanecerá de esa manera hasta que se concluya la transición hacia el sistema métrico. Esto pone una carga adicional sobre los estudiantes de ingeniería de hoy, ya que se espera que retengan su comprensión del sistema inglés al mismo tiempo que aprendan, piensen y trabajen en términos del SI. Dada la posición de los ingenieros en el periodo de transición, en este libro se usan los dos sistemas de unidades, aunque en particular se resalta el empleo de las unidades SI.

Como se señaló, el SI se basa en una relación decimal entre las unidades. En la tabla 1-2 se da una lista de los prefijos usados para expresar los múltiplos de las diversas unidades. Son estándar para todas las unidades y se recomienda al estudiante que los memorice debido a su uso generalizado (Fig. 1-26).

Algunas unidades SI e inglesas

En el SI las unidades de masa, longitud y tiempo son el kilogramo (kg), el metro (m) y el segundo (s), respectivamente. Las unidades correspondientes en el sistema inglés son la libra masa (lbm), el pie (ft) y el segundo (s). El símbolo de li-

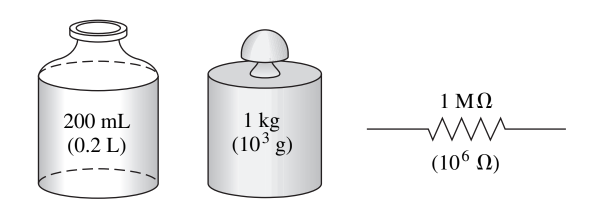


FIGURA 1-26
Los prefijos de las unidades SI se usan en todas las ramas de la ingeniería.

bra *lb* en realidad es la abreviatura de *libra*, la cual fue la antigua unidad romana para el peso. El sistema inglés retuvo este símbolo, incluso después de finalizar la ocupación romana de la Gran Bretaña, en el año 410. Las unidades de masa y longitud de los dos sistemas están relacionadas entre sí por

$$1 \text{ lbm} = 0.45359 \text{ kg}$$

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

En el sistema inglés, la fuerza suele considerarse como una de las dimensiones primarias y se le asigna una unidad no-derivada. Ésta es una fuente de confusión y de error que hace que se necesite el uso de una constante dimensional (g_c) en muchas fórmulas. Con el fin de evitar esta molestia, se considera la fuerza como una dimensión secundaria cuya unidad se obtiene a partir de la segunda ley de Newton; es decir,

$$\text{Fuerza} = (\text{Masa})\,(\text{Aceleración})$$

o

$$F = ma \tag{1–1}$$

En el SI, la unidad de fuerza es el newton (N) y se define como la *fuerza requerida para acelerar una masa de 1 kg a razón de 1 m/s²*. En el sistema inglés, la unidad de fuerza es la **libra-fuerza** (lbf) y se define como la *fuerza requerida para acelerar una masa de 32.174 lbm (1 slug) a razón de 1 ft/s²* (Fig. 1-27). Es decir,

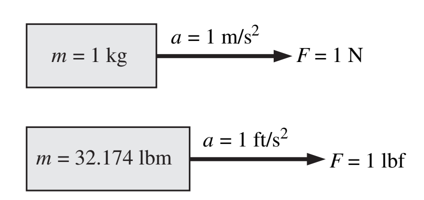


FIGURA 1-27
Definición de las unidades de fuerza.

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

$$1 \text{ lbf} = 32.174 \text{ lbm} \cdot \text{ft/s}^2$$

Una fuerza de 1 N es en forma aproximada equivalente al peso de una manzana pequeña ($m = 102$ g), en tanto que una fuerza de 1 lbf es aproximadamente equivalente al peso de cuatro manzanas medianas ($m_{\text{total}} = 454$ g), como se muestra en la figura 1-28. Otra unidad de fuerza de uso común en muchos países europeos es el *kilogramo-fuerza* (kgf), el cual es el peso de 1 kg masa a nivel del mar (1 kgf = 9.807 N).

Es frecuente usar el término **peso** de modo incorrecto para expresar masa, en particular por los "vigilantes del peso" (*weight watchers*). A diferencia de la masa, el peso W es una fuerza. Es la fuerza gravitacional aplicada a un cuerpo y su magnitud se determina con base en la segunda ley de Newton,

$$W = mg \quad (\text{N}) \tag{1–2}$$

en donde m es la masa del cuerpo y g es la aceleración gravitacional local (g es de 9.807 m/s² o 32.174 ft/s² a nivel del mar y 45° de latitud). En una báscula común para baño se mide la fuerza gravitacional que actúa sobre un cuerpo. El peso de la unidad de volumen de una sustancia se llama **peso específico** γ y se determina a partir de $\gamma = \rho g$, en donde ρ es la densidad.

La masa de un cuerpo continúa siendo la misma sin importar su ubicación en el universo. Sin embargo, el peso cambia debido a un cambio en la aceleración gravitacional. Un cuerpo pesa menos en la cima de una montaña, ya que g

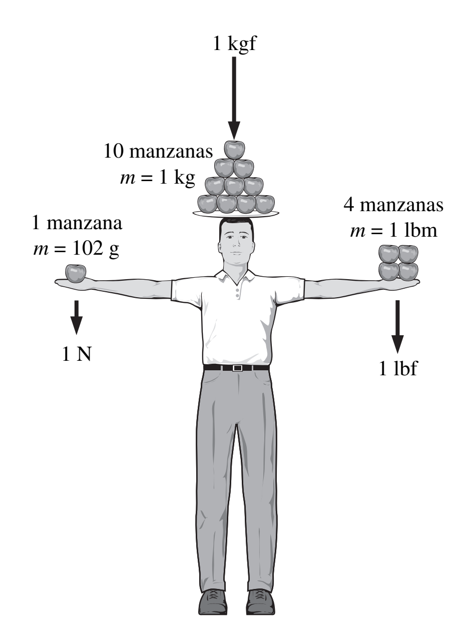


FIGURA 1-28
Magnitudes relativas de las unidades de fuerza newton (N), kilogramo-fuerza (kgf) y libra-fuerza (lbf).



FIGURA 1-29
Un cuerpo que pesa 150 lbf sobre la Tierra pesará sólo 25 lbf sobre la Luna.

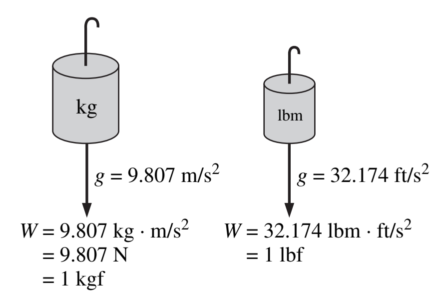


FIGURA 1-30
Peso de una unidad de masa a nivel del mar.

decrece con la altitud. Sobre la superficie de la Luna, un(a) astronauta pesa alrededor de la sexta parte de lo que él o ella pesan sobre la Tierra (Fig. 1-29).

A nivel del mar, una masa de 1 kg pesa 9.807 N, como se ilustra en la figura 1-30. Sin embargo, una masa de 1 lbm pesa 1 lbf, lo cual conduce de manera equivocada a la gente a creer que libra-masa y libra-fuerza se pueden usar en forma intercambiable como libra (lb), lo cual constituye una fuente importante de error en el sistema inglés.

Se debe destacar que la *fuerza de gravedad* que actúa sobre una masa se produce por la *atracción* entre las masas y, como consecuencia, es proporcional a las magnitudes de éstas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Por lo tanto, la aceleración gravitacional g en un lugar depende de la *densidad local* de la corteza terrestre, la *distancia* al centro de la Tierra y, en menor extensión, de las posiciones de la Luna y del Sol. El valor de g varía con el lugar desde 9.8295 m/s^2 a 4 500 m por debajo del nivel del mar hasta 7.3218 m/s^2 a 100 000 m arriba de ese nivel. No obstante, a altitudes de hasta 30 000 m, la variación de g respecto del valor a nivel del mar de 9.807 m/s^2 es menor de 1 por ciento. Por lo tanto, para la mayoría de los fines prácticos se puede suponer que la aceleración gravitacional es *constante* en 9.81 m/s^2. Resulta interesante resaltar que en lugares por abajo del nivel del mar alcanza un máximo de alrededor de 4 500 m y, a mayor profundidad, empieza a disminuir. (¿Cuál piensa el lector que sea el valor de g en el centro de la Tierra?)

La causa principal de confusión entre la masa y el peso es que aquélla suele medirse *en forma indirecta* cuando se mide la *fuerza de gravedad* que ejerce. Con este enfoque también se supone que las fuerzas ejercidas por otros efectos como la flotación en el aire y el movimiento de los fluidos son despreciables. Esto es como medir la distancia a una estrella midiendo el desplazamiento hacia el rojo, o medir la altitud de un avión midiendo la presión barométrica. Estas dos también son mediciones indirectas. La manera *directa* correcta de medir la masa es compararla con una masa conocida. Sin embargo, esto es tedioso y se aplica principalmente para calibración y medición de metales preciosos.

El *trabajo*, el cual es una forma de energía, se define sencillamente como la fuerza multiplicada por la distancia; por lo tanto, tiene la unidad de “newton-metro (N · m)”, la cual se llama joule (J); es decir,

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \tag{1–3}$$

Una unidad más común para la energía en el SI es el kilojoule (1 kJ = 10^3 J). En el sistema inglés, la unidad de energía es la **Btu** (British thermal unit; unidad térmica británica), la cual se define como la energía requerida para elevar la temperatura de 1 lbm de agua a 68°F en 1°F. En el sistema métrico, la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua a 14.5°C en 1°C se define como 1 **caloría** (cal), y 1 cal = 4.1868 J. Las magnitudes del kilojoule y la Btu son casi idénticas (1 Btu = 1.0551 kJ).



FIGURA 1-31
Para ser dimensionalmente homogéneo, todos los términos en una ecuación deben tener la misma unidad.

Homogeneidad dimensional

Todos saben, por lo aprendido en la escuela primaria, que manzanas no se suman con naranjas. Pero, de alguna manera, logramos hacerlo (por equivocación, por supuesto). En ingeniería, todas las ecuaciones deben ser *dimensionalmente homogéneas.* Es decir, todos los términos en una ecuación deben tener la misma unidad (Fig. 1-31). Si, en alguna etapa de un análisis, nos encontramos en posición de tener que sumar dos cantidades cuyas unidades son diferentes, es una clara indicación de que hemos cometido un error en una de las primeras etapas. De modo que la verificación de las dimensiones puede servir como una herramienta valiosa para señalar los errores.

EJEMPLO 1-2 Señalamiento de errores basándose en incoherencias en las unidades

Cuando se resuelve un problema, una persona finaliza con la siguiente ecuación en cierta etapa:

$$E = 25 \text{ kJ} + 7 \text{ kJ/kg}$$

en donde E es la energía total y tiene la unidad de kilojoules. Determine cómo corregir el error y discuta qué puede haberlo causado.

SOLUCIÓN Durante un análisis se obtiene una relación con unidades incoherentes. Se debe hallar una corrección y determinarse la causa probable del error.
Análisis Los dos términos del segundo miembro no tienen las mismas unidades y, por lo tanto, no se pueden sumar para obtener la energía total. Si se multiplica el último término por la masa, se eliminarán los kilogramos que se encuentran en el denominador y la ecuación completa se volverá dimensionalmente homogénea; es decir, todos los términos en ella tendrán la misma unidad.
Discusión Es obvio que este error fue causado en una de las primeras etapas, cuando se olvidó que debía multiplicarse el último término por la masa.

Todos saben, con base en la experiencia, que las unidades pueden provocar dolores terribles de cabeza si no se usan con cuidado cuando se resuelve un problema. Sin embargo, con cierta atención y habilidad, se pueden usar las unidades para lograr ventaja. Se pueden usar para comprobar fórmulas; inclu-si-ve se pueden usar para deducir fórmulas, como se explica en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 1-3 Obtención de fórmulas basándose en consideraciones relativas a las unidades

Se llena un tanque con aceite cuya densidad es $\rho = 850$ kg/m^3. Si el volumen del tanque es $V = 2$ m^3, determine la cantidad de masa m en el tanque.

SOLUCIÓN Se da el volumen de un tanque de aceite. Se debe determinar la masa del aceite.
Hipótesis El aceite es una sustancia incompresible y, por consiguiente, su densidad es constante.
Análisis En la figura 1-32 se da un esquema del sistema que acaba de describirse. Suponga que se olvidó la fórmula que relaciona la masa con la densidad y el volumen. Pero se sabe que la masa no tiene la unidad de kilogramos. Es decir, cualesquiera que sean los cálculos que se hagan, debe de finalizarse con la unidad de kilogramos. Si se pone en perspectiva la información dada, se tiene:

$$\rho = 850 \text{ kg/m}^3 \quad \text{y} \quad V = 2 \text{ m}^3$$

Resulta obvio que se puede eliminar m^3 y terminar con kg al multiplicar estas dos cantidades. Como consecuencia, la fórmula que se está buscando debe de ser

$$m = \rho V$$

De donde,

$$m = (850 \text{ kg/m}^3)(2 \text{ m}^3) = \mathbf{1\,700 \text{ kg}}$$

Discusión Nótese que este procedimiento puede ser que no funcione para fórmulas más complicadas.

ACEITE

$V = 2$ m^3
$\rho = 850$ kg/m^3
$m = ?$

FIGURA 1-32
Esquema para el ejemplo 1-3.

El estudiante debe de tener presente que una fórmula que no es dimensionalmente homogénea es errónea definitivamente, pero una fórmula dimensionalmente homogénea no necesariamente es correcta.

Razones para conversión de unidades

Así como se pueden formar todas las dimensiones no-primarias, mediante combinaciones adecuadas de las dimensiones primarias, *todas las unidades no-primarias* (***unidades secundarias***) *se pueden formar por combinaciones de las unidades primarias*. Por ejemplo, las unidades de fuerza se pueden expresar como

$$\text{N} = \text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{y} \quad \text{lbf} = 32.174\ \text{lbm}\,\frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$$

También se pueden expresar en forma más conveniente como **razones para conversión de unidades** como

$$\frac{\text{N}}{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\text{lbf}}{32.174\ \text{lbm}\cdot\text{ft/s}^2} = 1$$

Las razones para la conversión de unidades son idénticamente iguales a 1 y no tienen unidades y, de este modo, esas razones (o sus inversas) se pueden insertar de modo conveniente en cualquier cálculo para convertir de manera apropiada las unidades. Se alienta a los estudiantes a usar siempre las razones para conversión de unidades, como las que se dan aquí, al realizar esas conversiones. En algunos libros de texto se inserta la arcaica constante gravitacional g_c definida como $g_c = 32.174\ \text{lbm}\cdot\text{ft/lbf}\cdot\text{s}^2 = \text{kg}\cdot\text{m/N}\cdot\text{s}^2 = 1$ en las ecuaciones para forzar que se ajusten las unidades. Esta práctica conduce a confusiones innecesarias y los autores de este libro rechazan de manera enérgica su uso. Se recomienda que, en lugar de ello, los estudiantes utilicen las razones para conversión de unidades.



FIGURA 1-33
Una masa de 1 lbm pesa 1 lbf sobre la Tierra.

EJEMPLO 1-4 **Peso de una libra-masa**

Usando sólo las razones para conversión de unidades, demuestre que 1.00 lbm pesa 1.00 lbf sobre la Tierra (Fig. 1.33).

Solución Se sujeta una masa de 1.00 lbm a la gravedad terrestre estándar. Se debe determinar su peso en lbf.
Hipótesis Se suponen las condiciones estándar a nivel del mar.
Propiedades La constante gravitacional es $g = 32.174\ \text{ft/s}^2$.
Análisis Se aplica la segunda ley de Newton para calcular el peso (fuerza) que corresponde a la masa y aceleración conocidas. El peso de cualquier objeto es igual a su masa multiplicada por el valor local de la aceleración gravitacional. Donde:

$$W = mg = (1.00\ \text{lbm})(32.174\ \text{ft/s}^2)\left(\frac{1\ \text{lbf}}{32.174\ \text{lbm}\cdot\text{ft/s}^2}\right) = \mathbf{1.00\ lbf}$$

Discusión La masa es la misma sin importar su ubicación. Sin embargo, en algún otro planeta, con un valor diferente de la aceleración gravitacional, el peso de 1 lbm diferiría del que se calcula aquí.

Cuando el lector compra una caja de cereal para el desayuno, en el empaque puede leerse "peso neto: una libra (454 gramos)". (Fig. 1-34). Técnicamente, esto significa que el cereal que se encuentra dentro de la caja pesa 1.00 lbf sobre

la Tierra y tiene una *masa* de 453.6 g (0.4536 g). Si se aplica la segunda ley de Newton, el peso real del cereal en la Tierra, en el sistema métrico, es

$$W = mg = (453.6 \text{ g})(9.81 \text{ m/s}^2)\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1 \text{ kg}}{1\,000 \text{ g}}\right) = 4.49 \text{ N}$$

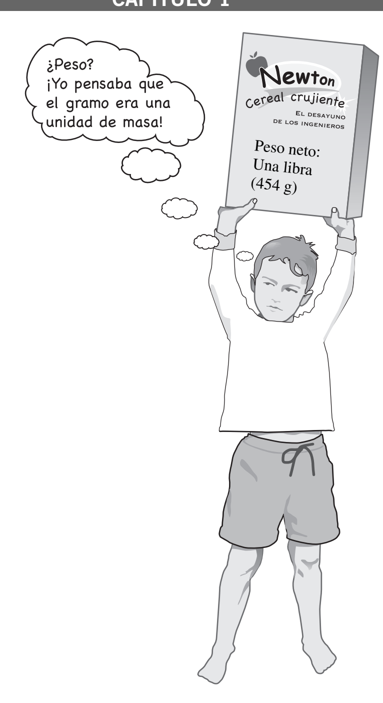


FIGURA 1-34
Una peculiaridad del sistema métrico de unidades.

1-7 ▪ MODELADO MATEMÁTICO DE LOS PROBLEMAS DE INGENIERÍA

Un dispositivo o proceso de ingeniería se puede estudiar *experimentalmente* (haciendo pruebas y tomando mediciones) o *analíticamente* (por medio de análisis o cálculos). El enfoque experimental tiene la ventaja de que trata con el sistema físico real y la cantidad deseada se determina por medición, dentro de los límites del error experimental. No obstante, este procedimiento es caro, tardado y, a menudo, poco práctico. Además, el sistema que se está estudiando, incluso puede no existir. Por ejemplo, los sistemas completos de calefacción y de plomería de un edificio, por lo común deben dimensionarse *antes* de que en realidad se construya ese edificio sobre la base de las especificaciones dadas. El procedimiento analítico (incluye el numérico también) tiene la ventaja de que es rápido y no caro, pero los resultados obtenidos están sujetos a la exactitud de las hipótesis, aproximaciones e idealizaciones establecidas en el análisis. En los estudios de ingeniería, con frecuencia se logra un término medio mediante la reducción de las posibles suposiciones a sólo unas cuantas por medio del análisis y, a continuación, verificando los resultados en forma experimental.

Modelado en la ingeniería

Las descripciones de la mayor parte de los problemas científicos comprenden ecuaciones que relacionan los cambios entre sí en algunas variables clave. Por lo general, cuanto más pequeño sea el incremento elegido en las variables cambiantes, más general y exacta es la descripción. En el caso límite de cambios infinitesimales o diferenciales en las variables, se obtienen *ecuaciones diferenciales* que suministran formulaciones matemáticas precisas para los principios físicos y leyes para representar las razones de cambio como *derivadas.* Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales se usan para investigar una amplia variedad de problemas en las ciencias y la ingeniería (Fig. 1-35). No obstante, muchos problemas que se encuentran en la práctica se pueden resolver sin recurrir a las ecuaciones diferenciales y las complicaciones asociadas con ellas.

El estudio de los fenómenos físicos comprende dos pasos importantes. En el primero se identifican todas las variables que afectan a los fenómenos, se establecen hipótesis y aproximaciones razonables y se estudia la interdependencia de estas variables. Se apela a las leyes físicas y los principios pertinentes y el problema se formula en términos matemáticos. La propia ecuación resulta muy instructiva, ya que muestra el grado de dependencia de algunas variables en relación con otras y la importancia de los diversos términos. En el segundo paso el problema se resuelve aplicando un procedimiento adecuado y se interpretan los resultados.

Muchos procesos que parecen ocurrir en la naturaleza de manera aleatoria y sin orden alguno, de hecho están siendo gobernados por algunas leyes físicas visibles o no tan visibles. Si se advierten o no, estas leyes están allí, gobernando de manera firme y predecible lo que parecen ser sucesos comunes. La mayoría de estas leyes están definidas adecuadamente y bien comprendidas por los científicos. Esto hace posible predecir el curso de un suceso antes de que en

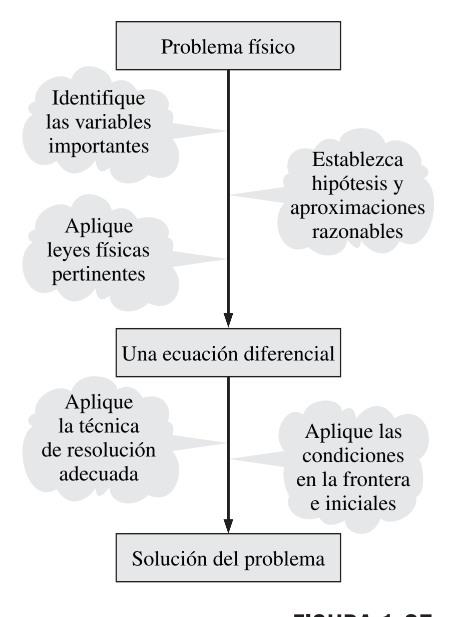


FIGURA 1-35
Modelado matemático de los sistemas físicos.

realidad ocurra o estudiar de manera matemática varios aspectos de un suceso sin llevar a cabo en realidad experimentos caros y tardados. En esto se fundamenta el poder del análisis. Se pueden obtener resultados muy exactos para problemas prácticos significativos, con relativamente poco esfuerzo mediante la aplicación de un modelo matemático adecuado y realista. La preparación de esos modelos requiere un conocimiento adecuado de los fenómenos naturales que intervienen y las leyes pertinentes, así como un juicio sólido. Es obvio que un modelo no-realista producirá resultados inexactos y, por consiguiente, inaceptables.

Un o una analista que trabaja en un problema de ingeniería, a menudo se encuentra en una posición en que debe elegir entre un modelo muy exacto, pero complejo, y uno sencillo, pero no tan exacto. La elección correcta depende de la situación que se viva. La elección correcta suele ser el modelo más sencillo que produzca los resultados satisfactorios. Asimismo, es importante considerar las condiciones reales de operación cuando se seleccione el equipo.

La preparación de modelos muy exactos, pero complejos, en ocasiones no es tan difícil. Pero esos modelos no los usa con frecuencia un analista si son muy difíciles y tardados para resolver. Por lo mínimo, el modelo debe reflejar las características esenciales del problema físico que representa. Existen numerosos problemas significativos del mundo real que se pueden analizar con un modelo sencillo. Pero siempre se debe tener presente que los resultados obtenidos de un análisis son, en el mejor de los casos, tan exactos como las hipótesis establecidas en la simplificación del problema. Por tanto, la solución obtenida no debe aplicarse a situaciones donde las hipótesis originales no se cumplen.

Una solución que no sea suficientemente coherente con la naturaleza observada del problema indica que el modelo matemático que se empleó es demasiado incipiente. En ese caso, debe prepararse un modelo más realista mediante la eliminación de una o más de las hipótesis cuestionables. Esto conducirá a un problema más complejo que, por supuesto, es difícil de resolver. De este modo, cualquier solución para un problema debe interpretarse dentro del contexto de su formulación.

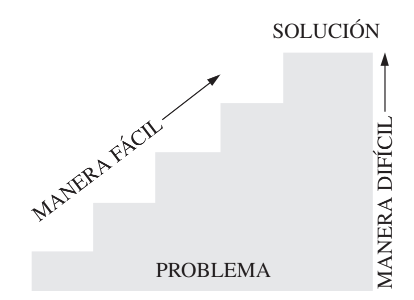


FIGURA 1-36
Un procedimiento paso a paso puede simplificar mucho la resolución de los problemas.

1-8 ▪ TÉCNICA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El primer paso en el aprendizaje de cualquier ciencia es captar los fundamentos y adquirir un conocimiento sólido de ella. El paso siguiente es dominar los fundamentos cuando se prueba este conocimiento. Esto se hace resolviendo problemas significativos del mundo real. La resolución de esos problemas, en especial los complicados, demanda un procedimiento sistemático. Por la aplicación de un procedimiento paso a paso, un ingeniero puede reducir la resolución de un problema complicado en la resolución de problemas simples (Fig. 1-36). Cuando se está resolviendo un problema, recomendamos que se apliquen los pasos siguientes, con tanto celo como sea posible. Esto ayudará a evitar algunas de las dificultades comunes asociadas con la resolución de problemas.

Paso 1: Enunciado del problema

Con palabras propias enuncie el problema con brevedad, dada la información clave y las cantidades que se deben encontrar. Esto es para verificar que se entendió el problema y los objetivos, antes de intentar la resolución de tal problema.

Paso 2: Esquema

Dibuje un esquema realista del sistema físico del que se trata y haya una lista de la información pertinente sobre la figura. El esquema no tiene que ser elaborado, sino debe semejarse al sistema real y mostrar las características clave. Indique cualesquiera interacciones de la energía y la masa con los alrededores. Colocar una lista de la información dada sobre el esquema ayuda a visualizar el problema completo de una sola vez. Asimismo, determine las propiedades que permanecen constantes durante un proceso (como la temperatura durante un proceso isotérmico) e indique sobre el esquema.

Paso 3: Hipótesis y aproximaciones

Exponga cualesquiera hipótesis y aproximaciones apropiadas que se establezcan para simplificar el problema y hacer posible la obtención de una solución. Justifique las hipótesis cuestionables. Suponga valores razonables para las cantidades faltantes que sean necesarias. Por ejemplo, a falta de datos específicos para la presión atmosférica, se puede tomar que sea de 1 atm. No obstante, se debe destacar en el análisis que la presión atmosférica disminuye cuando aumenta la elevación. Por ejemplo, en Denver (elevación de 1 610 m) cae hasta 0.83 atm (Fig. 1-37).

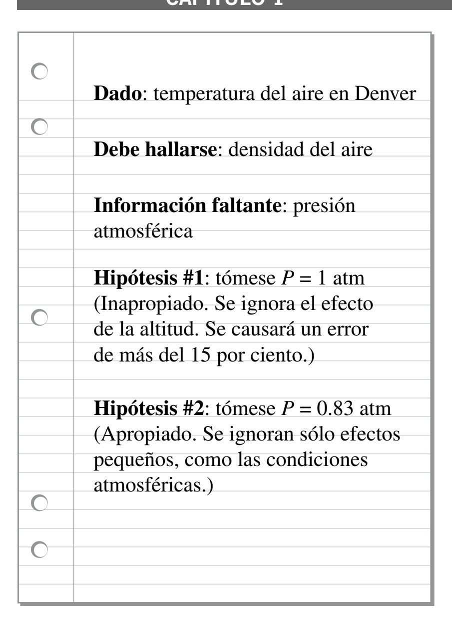


FIGURA 1-37
Las hipótesis que se establezcan cuando se resuelva un problema de ingeniería deben ser razonables y justificables.

Paso 4: Leyes físicas

Aplique todas las leyes y principios físicos básicos pertinentes (como la conservación de la masa) y reduzca hasta su forma más sencilla mediante la aplicación de las hipótesis establecidas. Sin embargo, en primer lugar, debe identificarse con claridad la región a la cual se aplica la ley física. Por ejemplo, se analiza el incremento en la velocidad del agua que fluye por una tobera mediante la aplicación de la conservación de la masa entre la entrada y la salida de la misma.

Paso 5: Propiedades

Determine las propiedades desconocidas, en estados conocidos, necesarias para resolver el problema con base en relaciones o tablas de las propiedades. Realice una lista por separado de las propiedades e indique su origen, si es aplicable.

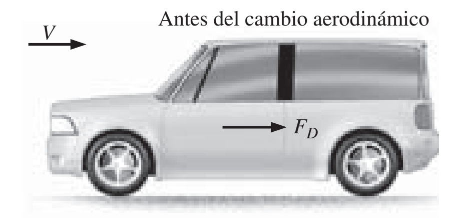
Paso 6: Cálculos

Sustituya las cantidades conocidas en las relaciones simplificadas y realice los cálculos para determinar las incógnitas. Ponga atención a las unidades y a las cancelaciones de éstas, y recuerde que una cantidad dimensional sin una unidad no tiene significado. Asimismo, no se dé una implicación falsa de alta precisión copiando todos los dígitos que aparecen en la pantalla de la calculadora (redondee el resultado hasta un número apropiado de dígitos significativos (Sección 1-10).

Paso 7: Razonamiento, verificación y comentario

Haga la comprobación para verificar que los resultados obtenidos son razonables e intuitivos, y compruebe la validez de las hipótesis cuestionables. Repita los cálculos que den por resultado valores cuestionables. Por ejemplo, en las mismas condiciones de prueba, la fuerza de arrastre que actúa sobre un automóvil *no* debe de incrementarse después de que se hizo más aerodinámica la forma de ese automóvil (Fig. 1-38).

También, señale el significado de los resultados y comente sus implicaciones. Exprese las conclusiones a que se puede llegar de los resultados y cualesquiera recomendaciones que se puedan hacer con base en ellos. Destaque las limitaciones bajo las cuales los resultados son aplicables y tome las precauciones contra cualesquiera malentendidos posibles y el uso de los resultados en situaciones en



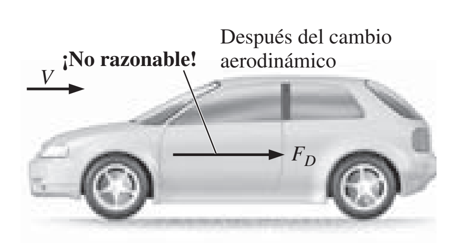


FIGURA 1-38
Los resultados obtenidos a partir de un análisis ingenieril se deben comprobar respecto a que sean razonables.

donde no son aplicables las hipótesis anteriores. Por ejemplo, si se determina que usar un tubo de diámetro más grande en una línea costará 5 000 dólares más en materiales, pero se reducirán los costos anuales de bombeo en 3 000 dólares, indique que la línea de diámetro más grande compensará la diferencial en su costo, por la electricidad que ahorra, en menos de dos años. No obstante, diga también que, en el análisis, sólo se consideran los costos adicionales del material relacionados con la línea de diámetro más grande.

Recuerde que las soluciones que se presenten a sus profesores, y cualquier análisis de ingeniería que se muestre a otros, es una forma de comunicación. Por lo tanto, la nitidez, la organización, el acabado y el aspecto visual son de lo más importantes para lograr la efectividad máxima. Además, la nitidez también sirve como una útil herramienta de verificación, ya que es muy fácil señalar los errores y las incoherencias en un trabajo limpio. La falta de cuidado y omitir pasos para ahorrar tiempo, a menudo terminan con un consumo mayor de tiempo y una ansiedad innecesaria.

El procedimiento que se describe en los párrafos anteriores se aplica en los problemas de ejemplo resueltos, sin mencionar de manera explícita cada paso, así como en el Manual de soluciones de este texto. Para algunos ejemplos, varios de los pasos pueden no ser aplicables o necesarios. Por ejemplo, con frecuencia no es práctico hacer una lista por separado de las propiedades. Sin embargo, no se puede hacer resaltar en exceso la importancia de seguir un procedimiento lógico y ordenado para resolver los problemas. La mayoría de las dificultades que se encuentran cuando se debe resolver un problema no se deben a una falta de conocimientos; más bien, se deben a una falta de organización. Se recomienda con intensidad al lector que siga estos pasos en la resolución de los problemas hasta que desarrolle su procedimiento propio que le funcione mejor.

1-9 ▪ PAQUETES DE SOFTWARE PARA INGENIERÍA

El lector puede preguntarse por qué estamos a punto de abordar un estudio a profundidad de los fundamentos de otra ciencia de ingeniería. Después de todo, aquellos problemas que probablemente se encuentren en la práctica se pueden resolver aplicando uno de varios elaborados paquetes de software de los que se dispone con facilidad en el mercado actual. Estos paquetes no sólo dan los resultados numéricos deseados, sino también los proporcionan en forma gráfica a color para presentaciones impresionantes. No se puede concebir la práctica de la ingeniería en la actualidad sin el uso de alguno de estos paquetes. Este tremendo poder de la computación del que se dispone con sólo oprimir un botón es tanto una bendición como una maldición. Es evidente que permite a los ingenieros resolver problemas con facilidad y rapidez, pero también abre la puerta para los abusos y la mala información. En manos de gente con falta de preparación, estos paquetes de software son tan peligrosos como las poderosas armas de sofisticada tecnología en manos de soldados mal entrenados.

Pensar que una persona que puede utilizar los paquetes de software para ingeniería sin la capacitación apropiada sobre los fundamentos de ésta pueda practicar la ingeniería es como pensar que una persona que puede usar una llave de tuercas pueda trabajar como mecánico de automóviles. Si fuera cierto que los estudiantes de ingeniería no necesitan estos cursos fundamentales que están tomando porque prácticamente todo se puede hacer por medio de las computadoras, con rapidez y facilidad, entonces también sería cierto que los empresarios ya no necesitarían a los ingenieros con salarios elevados, ya que cualquier persona que sabe cómo usar un programa de procesamiento de textos también puede aprender cómo usar esos paquetes de software. Sin embargo, las estadísticas hacen ver que la necesidad de contar con ingenieros va en aumento y no declinando, a pesar de la disponibilidad de estos poderosos paquetes.

Siempre debe de recordarse que el poder de la computación y los paquetes de software de los que se dispone en la actualidad, son sólo herramientas y tienen únicamente significado en manos de los maestros. Contar con el mejor programa para el procesamiento de textos no hace que una persona sea un buen escritor, pero es evidente que hace que el trabajo de un buen escritor sea mucho más fácil y, por consiguiente, lo hace más productivo (Fig. 1-39). Las calculadoras manuales no eliminaron la necesidad de enseñar a los niños cómo sumar o restar, y los elaborados paquetes de Software para medicina no ocuparon el lugar de la capacitación en las escuelas de medicina. Tampoco los paquetes de software para ingeniería reemplazarán a la educación tradicional en ésta. Sencillamente causarán un cambio del enfoque de los cursos de las matemáticas hacia la física. Es decir, se consumirá más tiempo en el salón de clases discutiendo los aspectos físicos de los problemas con mayor detalle y menor tiempo en la mecánica de los procedimientos de resolución.

Todas estas herramientas malévolas y poderosas con las que se cuenta hoy ponen una carga adicional sobre los ingenieros de la actualidad. Todavía deben tener una comprensión completa de los fundamentos, desarrollar una “sensación” de los fenómenos físicos, ser capaces de poner los datos en una perspectiva apropiada y hacer juicios sólidos de ingeniería, precisamente como sus antecesores. Pero deben hacerlo mucho mejor y mucho más rápido, usando modelos con mayor realismo debido a las poderosas herramientas de que se dispone en la actualidad. Los ingenieros de antes tenían que apoyarse en los cálculos a mano, las reglas de cálculo y, posteriormente, en las calculadoras manuales y las computadoras. Hoy, se apoyan en los paquetes de software. El fácil acceso a ese poder y la posibilidad de una simple y mala comprensión o mala interpretación, causa un grave daño, por ello hacen que sea más importante que nunca en estos tiempos tener una capacitación sólida en los fundamentos de ingeniería. A través de este libro se hace un esfuerzo adicional para subrayar una comprensión intuitiva y física de los fenómenos naturales, en lugar de los detalles matemáticos de los procedimientos de resolución.



FIGURA 1-39
Un excelente programa de procesamiento de textos no hace que una persona sea un buen escritor; sencillamente hace que un buen escritor sea más eficiente.

Engineering Equation Solver (EES) (Programa para resolver ecuaciones de ingeniería)

EES es un programa que resuelve sistemas de ecuaciones algebraicas o diferenciales, lineales o no-lineales, en forma numérica. Tiene una biblioteca extensa de funciones integradas de propiedades termodinámicas, así como de funciones matemáticas, y permite al usuario suministrar los datos adicionales de las propiedades. A diferencia de algunos paquetes de software, EES no resuelve problemas de ingeniería; sólo resuelve ecuaciones que suministra el usuario. Por lo tanto, el usuario debe entender el problema y formularlo por medio de la aplicación de cualesquiera leyes y relaciones físicas pertinentes. EES le ahorra un tiempo y esfuerzo considerables sencillamente al resolver las ecuaciones matemáticas resultantes. Esto hace que sea posible intentar problemas significativos de ingeniería, que no son adecuados para los cálculos a mano, y conducir estudios paramétricos con rapidez y de manera conveniente. EES es un programa con una capacidad muy amplia y sin embargo intuitivo que es muy fácil de usar, como se muestra en el ejemplo 1-5. El uso y las capacidades del EES se explican en el apéndice 3 y en el DVD que acompaña a este libro.

EJEMPLO 1-5 **Resolución de un sistema de ecuaciones con EES**

La diferencia entre dos números es 4 y la suma de los cuadrados de estos dos números es igual a la suma de los números más 20. Determine estos dos números.

SOLUCIÓN Se dan relaciones para la diferencia y la suma de los cuadrados de dos números. Deben determinarse esos números.

Análisis Se corre el programa EES haciendo doble "clic" sobre su icono, se abre un archivo nuevo y se escribe lo siguiente sobre la pantalla vacía que aparece:

x–y=4

x^2+y^2=x+y+20

lo cual es una representación matemática exacta del enunciado del problema, denotando con x y y los números desconocidos. Se obtiene la solución de este sistema de dos ecuaciones no-lineales con dos incógnitas al hacer un solo "clic" sobre el icono de "calculadora" que se encuentra en la barra de tareas. Esto da:

$$\mathbf{x = 5} \quad \text{y} \quad \mathbf{y = 1}$$

Discusión Nótese que todo lo que se hizo fue formular el problema como se haría sobre un papel; EES se hizo cargo de todos los detalles matemáticos de la resolución. Obsérvese también que las ecuaciones pueden ser lineales o no-lineales y se pueden colocar sin importar el orden con las incógnitas en cualquiera de los dos miembros. Los programas amigables para resolver ecuaciones, como el EES, permiten que el usuario se concentre en la física del problema, sin preocuparse acerca de las complejidades matemáticas asociadas con la resolución del sistema resultante de ecuaciones.

FLUENT

FLUENT es un paquete computacional de la dinámica de fluidos (CFD) que se usa con amplitud para las aplicaciones de modelado de flujos. El primer paso en el análisis es un procesamiento previo, el cual comprende la construcción de un modelo o la importación de uno de un paquete CAD, aplicando una malla basada en volúmenes finitos y haciendo entrar los datos. Una vez que se prepara el modelo numérico, FLUENT realiza los cálculos necesarios y produce los resultados deseados. El paso final en el análisis es un procesamiento posterior, el cual comprende la organización y la interpretación de los datos y las imágenes. También existen paquetes desarrollados para aplicaciones específicas, como el enfriamiento de componentes electrónicos, los sistemas de ventilación y el mezclado. FLUENT puede manejar flujos subsónicos o supersónicos, flujos estacionarios o transitorios, flujos laminares o turbulentos, flujos newtonianos o no-newtonianos, flujos de una sola fase o fases múltiples, reacciones químicas incluso la combustión, flujo a través de medios porosos, transferencia de calor y vibraciones inducidas por los flujos. La mayor parte de las soluciones numéricas que se presentan en este texto se obtienen con el empleo de FLUENT, y la CFD se discute con más detalle en el capítulo 15.

1-10 ▪ EXACTITUD, PRECISIÓN Y DÍGITOS SIGNIFICATIVOS

En los cálculos de ingeniería, la información suministrada no se conoce hasta más allá de un cierto número de dígitos significativos, por lo común tres. Como consecuencia, los resultados que se obtengan posiblemente no puedan ser precisos hasta más dígitos significativos. Informar de los resultados con más dígitos significativos implica que existe mayor precisión y debe de evitarse.

Sin importar el sistema de unidades que se emplee, los ingenieros deben estar conscientes de tres principios que rigen el uso apropiado de los números: exactitud, precisión y dígitos significativos. Para las mediciones de ingeniería se definen como sigue:

- **Error de exactitud** (*inexactitud*) es el valor de una lectura menos el valor verdadero. En general, la exactitud de un conjunto de mediciones se refiere a lo cercano de la lectura promedio al valor verdadero. En general, la exactitud está asociada con errores fijos que pueden repetirse.
- **Error de precisión** es el valor de una lectura menos el promedio de las lecturas. En general, la precisión de un conjunto de mediciones se refiere a lo fino de la resolución y a la capacidad de repetición del instrumento. En general, la precisión está asociada con errores aleatorios que no pueden repetirse.
- **Dígitos significativos** son los dígitos que son relevantes y tienen significado.

Una medición o un cálculo pueden ser muy precisos sin ser muy exactos y viceversa. Por ejemplo, supóngase que el valor verdadero de la velocidad del viento es de 25.00 m/s. Dos anemómetros A y B toman cinco lecturas de la velocidad del viento cada uno:

Anemómetro A: 25.50, 25.69, 25.52, 25.58, y 25.61 m/s. Promedio de todas las lecturas = 25.58 m/s.

Anemómetro B: 26.3, 24.5, 23.9, 26.8, y 23.6 m/s. Promedio de todas las lecturas = 25.02 m/s.

Es evidente que el anemómetro A es más preciso, ya que ninguna de las lecturas difiere en más de 0.11 m/s del promedio. Sin embargo, el promedio es 25.58 m/s, 0.50 m/s mayor que la velocidad verdadera del viento; esto indica un **error por desviación**, significativo, también llamado **error constante** o **error sistemático**. Por otro lado, el anemómetro B no es muy preciso, ya que sus lecturas oscilan con amplitud respecto del promedio; pero su promedio global es mucho más cercano al valor verdadero. De donde, el anemómetro B es más exacto que el A, al menos para este conjunto de lecturas, aun cuando es menos preciso. La diferencia entre exactitud y precisión se puede ilustrar de manera efectiva por analogía con el disparo de una pistola hacia un blanco, como se muestra esquemáticamente en la figura 1-40. El tirador A es muy preciso, pero no muy exacto, en tanto que el B tiene mejor exactitud global, pero menos precisión.

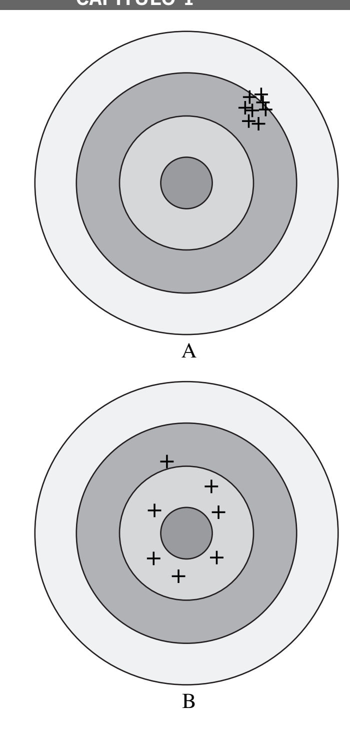


FIGURA 1-40
Ilustración de la exactitud en comparación con la precisión. El tirador A es más preciso, pero menos exacto; en tanto que el B es más exacto, pero menos preciso.

Muchos ingenieros no ponen una atención apropiada al número de dígitos significativos en sus cálculos. El numeral menos significativo en un número implica la precisión de la medición o cálculo. Por ejemplo, un resultado escrito como 1.23 (tres dígitos significativos) *implica* que el resultado es preciso hasta menos de un dígito en la segunda cifra decimal; es decir, el número está en alguna parte entre 1.22 y 1.24. Expresar este número con cualesquiera más dígitos sería un engaño. El número de dígitos significativos se evalúa de manera más fácil cuando el número se escribe en notación exponencial; entonces se puede contar con sencillez el número de dígitos significativos, incluyendo los ceros. En la tabla 1-3 se muestran algunos ejemplos.

TABLA 1-3

Dígitos significativos

Número	Notación exponencial	Número de dígitos significativos
12.3	1.23×10^1	3
123 000	1.23×10^5	3
0.00123	1.23×10^{-3}	3
40 300	4.03×10^4	3
40 300	4.0300×10^4	5
0.005600	5.600×10^{-3}	4
0.0056	5.6×10^{-3}	2
0.006	$6. \times 10^{-3}$	1

Cuando se realizan cálculos o manipulaciones de varios parámetros, en general el resultado sólo es tan preciso como el parámetro menos preciso que se tenga en el problema. Por ejemplo, suponga que se multiplican A y B para obtener C. Si A =2.3601 (cinco dígitos significativos) y $B = 0.34$ (dos dígitos significativos), entonces $C = 0.80$ (sólo dos dígitos son significativos en el resultado final). Note que la mayor parte de los estudiantes se sienten tentados a escribir $C = 0.802434$, con seis dígitos significativos, ya que eso es lo que se

presenta en la pantalla de una calculadora después de multiplicar estos dos números.

Vamos a analizar con cuidado este sencillo ejemplo. Suponga que el valor exacto de B es 0.3350, lo cual se lee en el instrumento como 0.34. Asimismo, observe que A es exactamente 2.3601, según se mide por medio de un instrumento más exacto y más preciso. En este caso, $C = A \times B = 0.79066$ hasta cinco dígitos significativos. Note que la primera respuesta, $C = 0.80$ está desviada en un dígito en la segunda cifra decimal. La cuestión principal aquí es que 0.80 (hasta dos dígitos significativos) es lo mejor que se puede esperar con base en esta multiplicación ya que, para empezar, uno de los valores sólo tenía dos dígitos significativos. Otra manera de mirar esto es decir que más allá de los dos primeros dígitos significativos de la respuesta, el resto de los dígitos no tienen significado o no son significativos. Por ejemplo, si se informa que la calculadora presenta 2.3601 multiplicado por 0.34 igual a 0.802434, los últimos cuatro dígitos *no solamente no tienen significado*. pero además confunden al lector ya que hacen que él piense en una mayor precisión de la que realmente está presente.

Como otro ejemplo, considérese un recipiente de 3.75 L lleno con gasolina cuya densidad es de 0.845 kg/L y determínese su masa. Es probable que el primer pensamiento que venga a la mente del lector sea multiplicar el volumen por la densidad para obtener 3.16875 kg como la masa, la cual implica con falsedad que la masa así determinada es precisa hasta seis dígitos significativos. Sin embargo, en realidad, la masa no se puede dar con más precisión que con tres dígitos significativos, ya que tanto el volumen como la densidad sólo son precisos hasta tres dígitos significativos. Por lo tanto, el resultado debe de redondearse hasta estos tres dígitos y la masa debe de darse como 3.17 kg, en lugar de lo que presenta la calculadora (Fig. 1-41). El resultado de 3.16875 kg sólo sería correcto si el volumen y la densidad fueran 3.75000 L y 0.845000 kg/L, respectivamente. El valor de 3.75 L implica que estamos seguros de que el valor de volumen es preciso dentro de $\pm$0.01 L, y no puede ser 3.74 o 3.76 L. No obstante, el volumen puede ser de 3.746, 3.750, 3.753, etcétera, ya que todos se redondean a 3.75 L.

Dado: Volumen: $V = 3.75$ L
Densidad: $\rho = 0.845$ kg/L

(3 dígitos significativos)

Asimismo, $3.75 \times 0.845 = 3.16875$

Hállese: Masa: $m = \rho V = 3.16875$ kg

Redondeando hasta 3 dígitos significativos: $m = 3.17$ kg

FIGURA 1-41
Un resultado con más dígitos significativos que los dígitos de los datos que se dan implica falsamente una mayor precisión.

El lector también tiene que darse cuenta de que, a veces, con pleno conocimiento se introducen pequeños errores para evitar el problema de buscar datos más exactos. Por ejemplo, cuando se trata con agua líquida a menudo se usa el valor de 1 000 kg/m^3 para la densidad, el cual es el valor de la densidad del agua pura a 0°C. Si se usa este valor a 75°C, se tendrá por resultado un error del 2.5 por ciento, ya que la densidad a esta temperatura es de 975 kg/m^3. Los minerales y las impurezas que se tengan en el agua introducirán un error adicional. Siendo este el caso, no se debe de tener reservas para redondear los resultados finales hasta un número razonable de dígitos significativos. Además, tener un pequeño porcentaje de incertidumbre en los resultados de los análisis de ingeniería suele ser lo normal, no la excepción.

Cuando se escriben resultados intermedios en un cálculo, resulta recomendable conservar varios dígitos "adicionales" para evitar los errores por redondeo; sin embargo, el resultado final debe escribirse con el número de dígitos significativos tomados en consideración. El lector también debe tener presente que cierto número de dígitos significativos de precisión en el resultado no implica la necesidad del mismo número de dígitos en la *exactitud* total. Por ejemplo, el error por desviación en una de las lecturas puede reducir de modo significativo la exactitud total del resultado, incluso, quizá conduciendo a que el último dígito significativo no tenga significado y reduciendo en uno el número total de dígitos confiables. Los valores que se determinan en forma experimental están sujetos a errores de medición y esos errores se reflejan en los resultados que se

obtengan. Por ejemplo, si la densidad de una sustancia tiene una incertidumbre del 2 por ciento, entonces la masa que se determine usando este valor de la densidad también tendrá una incertidumbre del 2 por ciento.

Por último, cuando se desconoce el número de dígitos significativos, el estándar aceptado en ingeniería es el de tres de estos dígitos. Por lo tanto, si la longitud de un tubo se da como de 40 m, se supondrá que es de 40.0 m, para justificar el uso de tres dígitos significativos en los resultados finales.

EJEMPLO 1-6 Dígitos significativos y el gasto volumétrico

Josefina está realizando un experimento en el que usa agua de enfriamiento de una manguera de jardín. Para calcular el gasto volumétrico que pasa por la manguera, ve cuánto tarda en llenarse un recipiente (Fig. 1-42). El volumen del agua reunida es $V = 1.1$ gal en un periodo $\Delta t = 45.62$ s, según se mide con un cronómetro. Calcule el gasto volumétrico del agua que pasa por la manguera en las unidades de metros cúbicos por minuto.

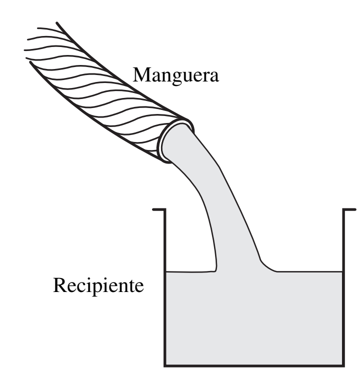


FIGURA 1-42
Esquema para el ejemplo 1-6, para la medición del gasto volumétrico.

SOLUCIÓN Se debe determinar el gasto volumétrico a partir de las mediciones del volumen y el periodo.

Hipótesis **1** Josefina registró sus mediciones con propiedad, en tal forma que la medición del volumen es precisa hasta dos dígitos significativos, en tanto que el periodo es preciso hasta cuatro dígitos significativos. **2** No se pierde agua debido a salpicadura hacia fuera del recipiente.

Análisis El gasto $\dot{V}$ es el volumen desplazado por unidad de tiempo y se expresa como:

Gasto volumétrico:
$$\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Si se sustituyen los valores medidos, se determina que el gasto volumétrico es

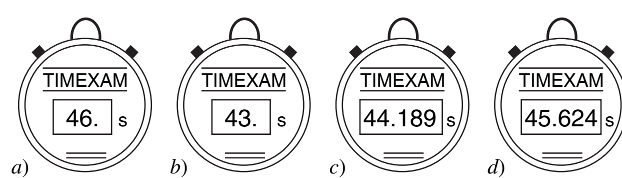
$$\dot{V} = \frac{1.1 \text{ gal}}{45.62 \text{ s}}\left(\frac{3.785 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{1 \text{ gal}}\right)\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) = \mathbf{5.5 \times 10^{-3}\ m^3/min}$$

Discusión El resultado final se da hasta dos dígitos significativos, ya que no se puede tener confianza en alguna mayor precisión que ésa. Si éste fuera un paso intermedio en cálculos subsiguientes, se llevarían unos cuantos dígitos adicionales para evitar el error acumulado por redondeo. En ese caso, el gasto se escribiría como: $\dot{V} = 5.4759 \times 10^{-3}$ m^3/min. Con base en la información dada, no se puede decir algo más acerca de la *exactitud* del resultado, puesto que no se tiene información acerca de los errores sistemáticos en la medición del volumen ni en la del tiempo.

También tenga presente que la precisión correcta no garantiza la buena exactitud. Por ejemplo, si las baterías del cronómetro estuvieran bajas, su exactitud podría ser bastante mala, sin embargo, la lectura se seguiría presentando con cuatro dígitos significativos de precisión.

En la práctica común, a menudo la precisión se asocia con la *resolución*, la cual es una medida que muestra con cuánta fineza el instrumento puede dar la medición. Por ejemplo, se dice que un voltímetro digital con cinco dígitos en su pantalla es más preciso que uno digital con sólo tres. Sin embargo, el número de dígitos que se exhiban nada tienen que ver con la *exactitud* total de la medición. Un instrumento puede ser muy preciso sin ser muy exacto cuando se tienen errores significativos por desviación. Del mismo modo, un instrumento con muy pocos dígitos en su pantalla puede ser más exacto que uno con más dígitos (Fig. 1-43).

FIGURA 1-43
Un instrumento con numerosos dígitos de resolución (cronómetro *c*) puede ser menos exacto que uno con menos dígitos (cronómetro *a*). ¿Qué puede decir el lector acerca de los cronómetros *b*) y *d*)?



RESUMEN

En este capítulo se presentaron y discutieron algunos conceptos básicos de la mecánica de fluidos. Una sustancia en la fase líquida o gaseosa se menciona como *fluido*. La *mecánica de fluidos* es la ciencia que trata del comportamiento de los fluidos en reposo o en movimiento y de su interacción con sólidos u otros fluidos en las fronteras.

El flujo de un fluido ilimitado sobre una superficie es *flujo externo*, y el flujo en un tubo o ducto es *flujo interno* si el fluido está por completo limitado por superficies sólidas. El flujo de un fluido se clasifica como *compresible* o *incompresible*, dependiendo de la variación de densidad durante el flujo. Las densidades de los líquidos son en esencia constantes y, por consiguiente, lo normal es que el flujo de líquidos sea incompresible. El término *estacionario* implica *ningún cambio con el tiempo*. Lo opuesto a estacionario es *no-estacionario,* o *transitorio.* El término *uniforme* implica *ningún cambio con el lugar* sobre una región especificada. Se dice que un flujo es *unidimensional* cuando la velocidad cambia sólo en una dimensión. Un fluido en contacto directo con una superficie sólida se pega a esta superficie y no se desliza. Esto se conoce como la *condición de no-deslizamiento*, la cual conduce a la formación de las *capas límite* a lo largo de las superficies sólidas.

Un sistema de masa fija se conoce como *sistema cerrado*, y uno en el que interviene transferencia de masa a través de sus fronteras se llama *sistema abierto* o *volumen de control*. Un gran número de problemas de ingeniería se relacionan con flujo de masa hacia dentro y hacia fuera de un sistema y, por lo tanto, se modelan como *volúmenes de control*.

En los cálculos de ingeniería, es importante poner atención particular en las unidades de las cantidades, para evitar errores causados por unidades incoherentes, y seguir un procedimiento sistemático. También es importante reconocer que la información obtenida no se conoce sino hasta más de un cierto número de dígitos significativos y los resultados que se obtengan es posible que no puedan ser exactos hasta más dígitos significativos. En todo este libro se utilizarán la información dada en dimensiones y unidades, la técnica de resolución de problemas, y la exactitud, la precisión y los dígitos significativos.

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. American Society for Testing y Materials, *Standards for Metric Practice*, ASTM E 380-79, enero 1980.

2. C. T. Crowe, J. A. Roberson y D. F. Elger, *Engineering Fluid Mechanics*, 7a. ed. Nueva York: Wiley, 2001.

3. R. W. Fox y A. T. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics*, 5a. ed. Nueva York: Wiley, 1999.

4. G. M. Homsy, H. Aref, K. S. Breuer, S. Hochgreb, J. R. Koseff, B. R. Munson, K. G. Powell, C. R. Robertson y S. T. Thoroddsen, *Multi-Media Fluid Mechanics* (CD), Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

5. M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.



PROYECTOR DE APLICACIONES ■ ¿Qué tienen en común las explosiones?

Autor invitado: Lorenz Sigurdson, Vortex Fluid Dynamics Lab, University of Alberta

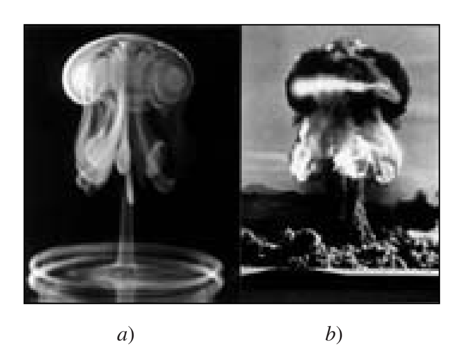
¿Por qué las dos imágenes de la figura 1-44 se miran semejantes? En la figura 1-44*b* se muestra una prueba nuclear arriba del suelo realizada por el U. S. Department of Energy en 1957. Una explosión atómica creó una bola de fuego del orden de 100 m de diámetro. La expansión es tan rápida que se presenta una característica del flujo compresible: una onda de choque esférica en expansión. La imagen que se muestra en la figura 1-44*a* es un evento cotidiano inocuo: una imagen *invertida* de una gota de agua teñida, después de que se ha dejado caer en un estanque de agua, mirándola desde abajo de la superficie del estanque. Podía haber caído de la cuchara de alguien en una taza de café, o ser una salpicadura secundaria después de que una gota de lluvia choca contra un lago. ¿Por qué existe una fuerte semejanza entre estos dos sucesos con tanta diferencia? La aplicación de los principios fundamentales de la mecánica de fluidos que se aprenda en este libro ayudará al lector a entender gran parte de la respuesta, aunque no pueda avanzar más profundo.

El agua tiene una *densidad* más alta (Cap. 2) que el aire, de modo que la gota ha experimentado un *empuje* negativo (Cap. 3) conforme ha caído a través del aire antes del impacto. La bola de fuego de gas caliente es menos densa que el aire frío que la rodea, de modo que tiene un empuje positivo y se eleva. La *onda de choque* (Cap. 12) que se refleja del suelo también imparte una fuerza positiva hacia arriba a la bola de fuego. La estructura primaria de la parte superior de cada una de las imágenes se llama *anillo de vórtices*. Este anillo es un minitornado de *vorticidad* (Cap. 4) concentrada, con los extremos del tornado haciendo un circuito alrededor para cerrarse sobre sí mismo. Las leyes de la *cinemática* (Cap. 4) hacen ver que este anillo de vórtices acarreará el fluido en una dirección hacia la parte superior de la página. Esto es de esperarse en los dos casos debido a las fuerzas aplicadas y a la ley de conservación de la cantidad de movimiento aplicadas a través de un *análisis del volumen de control* (Cap. 5). Se pudo analizar este problema con aplicación del *análisis diferencial* (Caps. 9 y 10) o con la *dinámica computacional de fluidos* (Cap. 15). Pero, ¿por qué la *forma* del material trazador se ve tan semejante? Esto ocurre si existe *semejanza geométrica* y *cinemática* (Cap. 7) aproximadas y si es semejante la técnica de *visualización del flujo* (Cap. 4). Los trazadores pasivos de calor y polvo para la bomba y de tinte fluorescente para la gota se introdujeron de manera semejante, como se observa en la captación de las figuras.

Un conocimiento adicional de la cinemática y de la dinámica de los vórtices puede ayudar a explicar la semejanza de la estructura de vórtices que se aprecia en las imágenes con mucho más detalle, como lo discuten Sigurdson (1997) y Peck y Sigurdson (1994). Mire los lóbulos colgando debajo del anillo primario de vórtices, las estrías en el “tallo” y el anillo en la base de cada estructura. También existe semejanza topológica de esta estructura con otras estructuras de vórtices que se presentan en la turbulencia. La comparación de la gota y la bomba ha dado una mejor comprensión de cómo se crean y evolucionan las estructuras turbulentas. ¿Cuáles otros secretos de la mecánica de fluidos quedan por revelarse en la explicación de la semejanza entre estos dos flujos?

Bibliografía

Peck, B. y Sigurdson, L.W., “The Three-Dimensional Vortex Structure of an Impacting Water Drop”, *Phys. Fluids*, 6(2) (parte 1), p. 564, 1994.
Peck, B., Sigurdson, L.W., Faulkner, B. y Buttar, I., “An Apparatus to Study Drop-Formed Vortex Rings”, *Meas. Sci. Tech.*, 6, p. 1538, 1995.
Sigurdson, L.W., “Flow Visualization in Turbulent Large-Scale Structure Research”, capítulo 6 en *Atlas of Visualization*, vol. III, Flow Visualization Society of Japan, eds., CRC Press, pp. 99-113, 1997.



a) *b*)

FIGURA 1-44
Comparación de la estructura de vórtice creada por: *a*) una gota de agua después de hacer impacto contra un estanque de agua (invertida, tomada de Peck y Sigurdson, 1994) y *b*) una prueba nuclear arriba del suelo en Nevada, en 1957 (U. S. Department of Energy). La gota de 2.6 mm se tiñó con un trazador fluorescente y se iluminó por medio de un destello estroboscópico 50 ms después de que había caído 35 mm y había hecho impacto contra el estanque transparente. La gota era aproximadamente esférica en el instante del impacto contra el estanque transparente de agua. Se usó la interrupción de un rayo láser por la gota que caía para disparar un medidor de tiempo que controló la duración del destello después del impacto de la gota. Los detalles del cuidadoso procedimiento experimental necesario para crear la fotografía de la gota los dan Peck y Sigurdson (1994) y Peck y otros (1995). En el caso de la bomba, principalmente calor y polvo cumplieron las funciones de los trazadores añadidos al flujo para filmar la gota. El calor proviene de la bola de fuego original, la cual para esta prueba en particular (el caso “Priscilla” de la Operation Plumbob) fue suficientemente grande como para llegar hasta el suelo desde donde la bomba estuvo inicialmente suspendida. Por lo tanto, la condición geométrica inicial del trazador fue una esfera intersecándose con el suelo.

a) *De Peck B. y Sigurdson, L. W.,* Phys. Fluids, *6(2)(Parte 1), 564, 1994. Reproducida con autorización del autor.*

b) *United States Department of Energy. Fotografía tomada por Lorenz Sigurdson.*

PROBLEMAS*

Introducción, clasificación y sistema

1-1C Defina flujos interno, externo y en canal abierto.

1-2C Defina flujo incompresible y fluido incompresible. ¿El flujo de masa de un fluido compresible de necesidad debe tratarse como compresible?

1-3C ¿Qué es la condición de no-deslizamiento? ¿Qué la causa?

1-4C ¿Qué es flujo forzado? ¿En qué difiere del flujo natural? ¿El flujo causado por los vientos es forzado o natural?

1-5C ¿Qué es una capa límite? ¿Qué causa el desarrollo de una capa límite?

1-6C ¿Cuál es la diferencia entre los enfoques clásico y el estadístico?

1-7C ¿Qué es un proceso de flujo estacionario?

1-8C Defina esfuerzo, esfuerzo normal, esfuerzo cortante y presión.

1-9C ¿Qué son sistema, alrededores y frontera?

1-10C ¿Cuándo un sistema es cerrado y cuándo es un volumen de control?

Masa, fuerza y unidades

1-11C ¿Cuál es la diferencia entre libra-masa y libra-fuerza?

1-12C ¿Cuál es la diferencia entre kg-masa y kg-fuerza?

1-13C ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre un automóvil que avanza a una velocidad constante de 70 km/h *a*) sobre una carretera horizontal y *b*) sobre una carretera cuesta arriba?

1-14 Un tanque de plástico de 3 kg, que tiene un volumen de 0.2 m^3 se llena con agua líquida. Suponga que la densidad del agua es de 1 000 kg/m^3 y determine el peso del sistema combinado.

1-15 Determine la masa y el peso del aire contenido en un cuarto cuyas dimensiones son de 6 m × 6 m × 8 m. Suponga que la densidad del aire es de 1.16 kg/m^3. *Respuestas:* 334.1 kg, 3 277 N

1-16 A una latitud de 45°, la aceleración gravitacional, como función de la elevación *z* sobre el nivel del mar, se expresa por $g = a - bz$, en donde $a = 9.807$ m/s^2 y $b = 3.32 \times 10^{-6}$ s^{-2}. Determine la altura sobre el nivel del mar en donde el peso de un objeto disminuirá en 1 por ciento. *Respuesta:* 29 539 m

1-17I Un astronauta de 150 lbm llevó su báscula del baño (una báscula de resortes) y una balanza de balancín (compara masas) a la Luna, en donde la gravedad local es $g = 5.48$ ft/s^2. Determine cuánto pesará *a*) en la báscula de resortes y *b*) en la balanza de balancín. *Respuestas: a*) 25.5 lbf; *b*) 150 lbf

1-18 A veces, la aceleración de los aviones de alta velocidad se expresa en *g* (en múltiplos de la aceleración estándar de la gravedad). Determine la fuerza neta hacia arriba, en N, que un hombre de 90 kg experimentaría en un avión cuya aceleración es de 6 *g*.

1-19 Se lanza una roca de 5 kg hacia arriba con una fuerza de 150 N, en un lugar en donde la aceleración gravitacional local es de 9.79 m/s^2. Determine la aceleración de la roca, en m/s^2.

1-20 Resuelva el problema 1-19 usando el software de EES (o cualquier otro). Imprima la solución completa, incluya los resultados numéricos con unidades apropiadas.

1-21 El valor de la aceleración gravitacional *g* decrece con la elevación de 9.807 m/s^2 a nivel del mar, hasta 9.767 m/s^2 a una altitud de 13 000 m en donde se desplazan los grandes aviones de pasajeros. Determine el porcentaje de reducción en el peso de un avión que viaja a 13 000 m, en relación con su peso a nivel del mar.

Modelado y resolución de problemas de ingeniería

1-22C ¿Cuál es la diferencia entre precisión y exactitud? ¿Puede una medición ser muy precisa pero inexacta? Explique.

1-23C ¿Cuál es la diferencia entre el enfoque analítico y el experimental para los problemas de ingeniería? Discuta las ventajas y desventajas de cada uno.

1-24C ¿Cuál es la importancia del modelado en la ingeniería? ¿Cómo se preparan los modelos matemáticos para los procesos de ingeniería?

1-25C Cuando se modela un proceso de ingeniería, ¿cómo se hace la elección correcta entre un modelo simple pero incipiente y uno complejo pero exacto? ¿Siempre el modelo complejo es una elección mejor ya que es más exacto?

1-26C ¿Cómo surgen las ecuaciones diferenciales en el estudio de un problema físico?

1-27C ¿Cuál es el valor de los paquetes de software para ingeniería en *a*) la educación en ingeniería y *b*) la práctica de la ingeniería?

1-28 Determine una raíz real positiva de esta ecuación, utilice EES:

$$2x^3 - 10x^{0.5} - 3x = -3$$

1-29 Resuelva este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, utilice EES:

$$x^3 - y^2 = 7.75$$

$$3xy + y = 3.5$$

* Los problemas designados por una "C" son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

1-30 Resuelva este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, utilice EES:

$$2x - y + z = 5$$
$$3x^2 + 2y = z + 2$$
$$xy + 2z = 8$$

1-31 Resuelva este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, utilice EES:

$$x^2y - z = 1$$
$$x - 3y^{0.5} + xz = -2$$
$$x + y - z = 2$$

Problemas de repaso

1-32 El peso de los cuerpos puede cambiar ligeramente de un lugar a otro, como resultado de la variación de la aceleración gravitacional g con la elevación. Tome en cuenta esta variación, use la relación del problema 1-16 y determine el peso de una persona de 80 kg a nivel del mar (z = 0), en Denver (z = 1 610 m), y en la cima del Monte Everest (z = 8 848 m).

1-33 Un hombre va a un mercado tradicional a comprar un trozo de filete para la cena. Encuentra un filete de 12 oz (1 lbm = 16 oz) a un precio de 3.15 dólares. Entonces va al mercado internacional adyacente y encuentra un trozo de filete de 320 g, de idéntica calidad a un precio de 2.80 dólares. ¿Cuál de los dos trozos de filete es la mejor compra?

1-34 La fuerza de reacción desarrollada en un motor de propulsión a chorro para empujar un avión hacia adelante se llama empuje, y el desarrollado por el motor del Boeing 777 es de alrededor de 85 000 lbf. Exprese este empuje en N y kgf.

Problema de diseño y ensayo

1-35 Escriba un ensayo sobre los diversos instrumentos para medir la masa y el volumen que se han usado a través de toda la historia. Asimismo, explique el desarrollo de las unidades modernas para la masa y el volumen.

CAPÍTULO

2

PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

En este capítulo se estudian las propiedades que se encuentran en el análisis del flujo de fluidos. En primer lugar, se examinan las *propiedades intensivas* y *extensivas* y se definen *densidad* y *gravedad específica*. A estos temas les sigue una polémica de las propiedades de *presión de vapor*, *energía* y sus diversas formas, los *calores específicos* de los gases ideales y de sustancias incompresibles, así como el *coeficiente de compresibilidad*. Enseguida se analiza la propiedad de *viscosidad*, la cual tiene un papel dominante en la mayor parte de los aspectos del flujo de fluidos. Por último, se presenta la propiedad de *tensión superficial* y se determina el *ascenso por capilaridad* a partir de las condiciones de equilibrio estático. La propiedad de *presión* se estudia en el capítulo 3, junto con la estática de fluidos.

OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Tener un conocimiento funcional de las propiedades básicas de los fluidos y entender la aproximación del medio continuo
- Tener un conocimiento funcional de la viscosidad y de las consecuencias de los efectos de fricción en el flujo de fluidos
- Calcular los ascensos y descensos por capilaridad debidos al efecto de la tensión superficial

2-1 ▪ INTRODUCCIÓN

Cualquier característica de un sistema se conoce como **propiedad**. Algunas propiedades conocidas son la presión P, la temperatura T, el volumen V, y la masa m. La lista se puede extender hasta incluir unas menos conocidas como viscosidad, conductividad térmica, módulo de elasticidad, coeficiente de expansión térmica, resistividad eléctrica e, inclusive, la velocidad y la elevación.

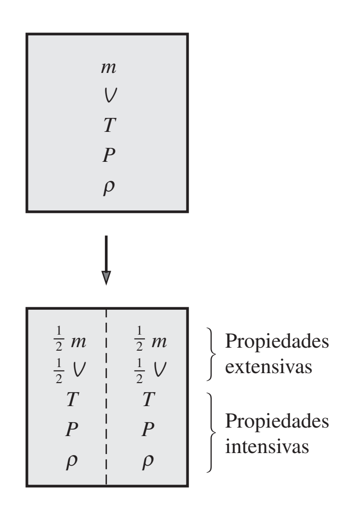


FIGURA 2-1
Criterios para diferenciar las propiedades intensivas de las extensivas.

Se considera que las propiedades son *intensivas* o *extensivas*. Las **propiedades intensivas** son independientes de la masa de un sistema, como la temperatura, la presión y la densidad. Las **propiedades extensivas** son aquellas cuyos valores dependen del tamaño, o extensión, del sistema. La masa total, el volumen total V, y la cantidad total de movimiento son ejemplos de propiedades extensivas. Una manera fácil de determinar si una propiedad es intensiva o extensiva es dividir el sistema en dos partes iguales con una separación imaginaria, como se muestra en la figura 2-1. Cada una de las partes tendrá el mismo valor de las propiedades intensivas que el del sistema original, pero la mitad del valor de las propiedades extensivas.

En general, se usan letras mayúsculas para denotar las propiedades extensivas (la masa m es una excepción importante) y minúsculas para las propiedades intensivas (las excepciones obvias son la presión P y la temperatura T).

Las propiedades extensivas por unidad de masa se llaman **propiedades específicas**. Algunos ejemplos de propiedades específicas son el volumen específico ($v = V/m$) y la energía total específica ($e = E/m$).

El estado de un sistema se describe por sus propiedades. Pero, con base en la experiencia, se conoce que no es necesario especificar todas las propiedades para identificar un estado. Después que se especifican los valores de una cantidad suficiente de propiedades, el resto de éstas toman ciertos valores. Es decir, la especificación de un número de propiedades es suficiente para identificar un estado. El número de propiedades necesario para identificar el estado de un sistema se expresa por medio del **postulado del estado**: *El estado de un sistema compresible simple queda por completo especificado por dos propiedades intensivas independientes*.

Dos propiedades son independientes si se puede hacer variar una de ellas mientras que la otra permanece constante. No todas las propiedades son independientes y algunas se definen en términos de otras, como se explica en la sección 2-2.

Medio continuo

En la fase gaseosa, la materia está formada por átomos espaciados con amplitud. Sin embargo, es muy conveniente descartar la naturaleza atómica de una sustancia y verla como una materia homogénea y continua, sin agujeros; es decir, un medio **continuo**. La idealización del medio continuo permite tratar las propiedades como funciones de punto y suponer que esas propiedades varían de manera continua en el espacio, sin discontinuidades por salto. Esta idealización es válida en tanto el tamaño del sistema con el que se trate sea grande en relación con el espacio entre las moléculas. Éste es el caso en prácticamente todos los problemas, excepto en algunos especializados. La idealización del medio continuo está implícita en muchos enunciados que se hacen, como "la densidad del agua en un vaso es la misma en cualquier punto".

Para tener cierta idea de las distancias que intervienen en el nivel molecular, considérese un recipiente lleno con oxígeno a las condiciones atmosféricas. El diámetro de la molécula de oxígeno es aproximadamente de 3×10^{-10} m y su masa es de 5.3×10^{-26} kg. Asimismo, el *recorrido libre medio* de la molécula de oxígeno a la presión de 1 atm y a 20° C es 6.3×10^{-8} m. Es decir, una molécula de oxígeno recorre, en promedio, una distancia de 6.3×10^{-8} m (alrededor de 200 veces su diámetro) antes de chocar contra otra.

También, se tiene alrededor de 2.5×10^{16} moléculas de oxígeno en el diminuto volumen de 1 mm^3 a la presión de 1 atm y a 20° C (Fig. 2-2). El modelo del medio continuo es aplicable en tanto la longitud característica del sistema (como su diámetro) sea mucho mayor que el recorrido libre medio de las moléculas. A vacíos muy altos o a elevaciones muy grandes, el recorrido libre medio puede volverse grande (por ejemplo, es de alrededor de 0.1 m para el aire atmosférico a una elevación de 100 km). Para esos casos, debe aplicarse la **teoría del flujo de gas rarificado** y se debe considerar el impacto de las moléculas por separado. En este libro se limitará nuestra consideración a las sustancias que se pueden modelar como un medio continuo.

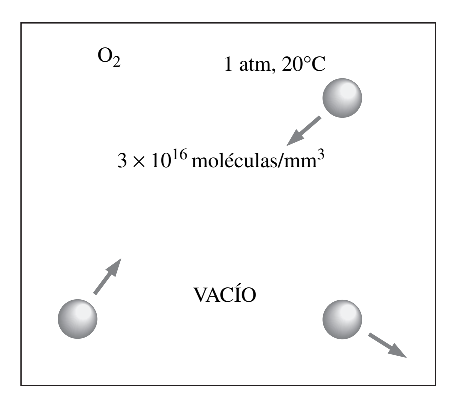


FIGURA 2-2
A pesar de los grandes espacios entre las moléculas, una sustancia se puede tratar como un medio continuo debido al número muy grande de moléculas, inclusive en un volumen en extremo pequeño.

2-2 ▪ DENSIDAD Y GRAVEDAD ESPECÍFICA

La **densidad** se define como *masa por unidad de volumen* (Fig. 2-3). Es decir,

Densidad: $$\rho = \frac{m}{V} \qquad (\text{kg/m}^3) \tag{2-1}$$

El recíproco de la densidad es el **volumen específico** v, el cual se define como *volumen por unidad de masa*. Es decir, $v = V/m = 1/\rho$. Para un elemento diferencial de volumen de masa δm y volumen δV, la densidad se puede expresar como $\rho = \delta m/\delta V$.

En general, la densidad de una sustancia depende de la temperatura y de la presión. La densidad de la mayoría de los gases es proporcional a la presión e inversamente proporcional a la temperatura. Por otro lado, los líquidos y sólidos en esencia son sustancias incompresibles y la variación de su densidad con la presión suele ser despreciable. Por ejemplo, a 20°C, la densidad del agua cambia de 998 kg/m^3 a 1 atm a 1 003 kg/m^3 a 100 atm, un cambio de sólo 0.5 por ciento, lo cual todavía se puede despreciar en muchos análisis de ingeniería.

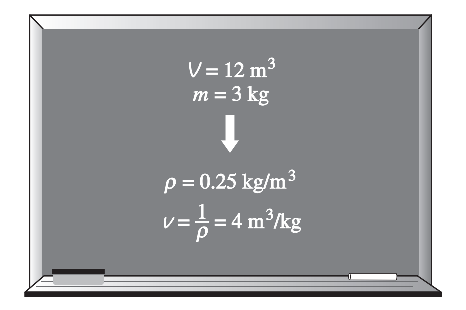


FIGURA 2-3
La densidad es masa por unidad de volumen; el volumen específico es volumen por unidad de masa.

A veces, la densidad de una sustancia se da en relación con la densidad de una sustancia conocida plenamente; entonces se le llama **gravedad específica** o **densidad relativa**, y se define como *la razón de la densidad de una sustancia a la densidad de alguna sustancia estándar, a una temperatura especificada* (por lo general, agua a 4°C, para la cual $\rho_{H_2O} = 1\,000$ kg/m^3). Esto es,

Gravedad específica: $$\text{GE} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \tag{2-2}$$

Nótese que la gravedad específica de una sustancia es una cantidad adimensional. Sin embargo, en unidades SI, el valor numérico de la gravedad específica de una sustancia es exactamente igual a su densidad en g/cm^3 o kg/L (o 0.001 multiplicado por la densidad en kg/m^3) ya que la densidad del agua a 4°C es 1 g/cm^3 = 1 kg/L = 1 000 kg/m^3. Por ejemplo, la gravedad específica del mercurio a 0°C es 13.6; por lo tanto, su densidad a 0° C es 13.6 g/cm^3 = 13.6 kg/L = 13 600 kg/m^3. En la tabla 2-1 se indican las cantidades correspondientes para la gravedad específica de algunas sustancias a 0°C. Nótese que las sustancias con gravedad específica menores que 1 son más ligeras que el agua y, en consecuencia, flotarían en ella.

El peso de una unidad de volumen de una sustancia se llama **peso específico** y se expresa como:

Peso específico: $$\gamma_s = \rho g \qquad (\text{N/m}^3) \tag{2-3}$$

en donde g es la aceleración gravitacional.

TABLA 2-1
Gravedades específicas de algunas sustancias a 0°C

Sustancia	GE
Agua	1.0
Sangre	1.05
Agua de mar	1.025
Gasolina	0.7
Alcohol etílico	0.79
Mercurio	13.6
Madera	0.3–0.9
Oro	19.2
Huesos	1.7–2.0
Hielo	0.92
Aire (a 1 atm)	0.0013

Recuerde, por lo visto en el capítulo 1, que las densidades de los líquidos son en esencia constantes y a menudo se pueden tomar de manera aproximada como si fueran sustancias incompresibles durante la mayoría de los procesos, sin mucho sacrificio en la exactitud.

Densidad de los gases ideales

Las tablas de propiedades proporcionan información muy exacta y precisa acerca de éstas; sin embargo, resulta conveniente contar con algunas relaciones sencillas entre las propiedades que sean suficientemente generales y exactas. Cualquier ecuación que relacione la presión, la temperatura y la densidad (o volumen específico) de una sustancia se llama **ecuación de estado**. La ecuación de estado más sencilla y conocida para sustancias en la fase gaseosa es la ecuación de estado del gas ideal, expresada como:

$$P v = RT \qquad \text{o} \qquad P = \rho RT \tag{2-4}$$

en donde P es la presión absoluta, v es el volumen específico, T es la temperatura termodinámica (absoluta), ρ es la densidad y R es la constante del gas. Esta constante R es diferente para cada gas y se determina a partir de $R = R_u/M$, en donde R_u es la **constante universal de los gases** cuyo valor es $R_u = 8.314$ kJ/kmol · K = 1.986 Btu/lbmol · R, y M es la masa molar (llamada también *peso molecular*) del gas. En la tabla A-1 se indican los valores de R y M para varias sustancias.

En el SI la escala de temperatura termodinámica es la **escala Kelvin**, y, en ella, la unidad de temperatura es el **kelvin**, K. En el sistema inglés, es la **escala Rankine**, y su unidad de temperatura es el **rankine**, R. Las diversas escalas de temperatura se interrelacionan por

$$T(\text{K}) = T(°\text{C}) + 273.15 \tag{2-5}$$

$$T(\text{R}) = T(°\text{F}) + 459.67 \tag{2-6}$$

Es práctica común redondear las constantes 273.15 y 459.67 a 273 y 460, respectivamente.

La ecuación 2-4 se llama **ecuación de estado del gas ideal**, o, sencillamente, **relación del gas ideal**: un gas que obedece esta relación se llama **gas ideal**. Para un gas ideal de volumen V, masa m, y número de moles $N = m/M$, la ecuación de estado del gas ideal también se puede escribir como $PV = mRT$ o $PV = NR_uT$. Para una masa fija m, si se escribe dos veces la relación de los gases ideales y se simplifican, las propiedades de un gas ideal en dos estados diferentes se interrelacionan por $P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2$.

Un gas ideal es una sustancia hipotética que obedece la relación $Pv = RT$. De manera experimental se ha observado que la relación aproxima con una buena precisión el comportamiento P-v-T de los gases reales a bajas densidades. A bajas presiones y altas temperaturas, la densidad de un gas decrece y tal gas se comporta como un gas ideal. En el rango del interés práctico, muchos gases conocidos como aire, nitrógeno, oxígeno, hidrógeno, helio, argón, neón y kriptón, e inclusive gases más pesados, entre ellos bióxido de carbono, se pueden tratar como gases ideales con error despreciable (a menudo, menor de 1 por ciento). Sin embargo, los gases densos, como el vapor de agua en las plantas generadoras y el vapor refrigerante empleado en los refrigeradores, no deben tratarse como gases ideales porque suelen existir en un estado cercano a la saturación.

EJEMPLO 2-1 Densidad, gravedad específica y masa del aire en un cuarto

Determine la densidad, la gravedad específica y la masa del aire en un cuarto cuyas dimensiones son 4 m × 5 m × 6 m a 100 kPa y 25°C (Fig. 2-4).

Solución Deben determinarse la densidad, la gravedad específica y la masa del aire que se encuentra en un cuarto.
Hipótesis A las condiciones especificadas, el aire se puede tratar como un gas ideal.
Propiedades La constante del gas del aire es $R = 0.287$ kPa · m^3/kg · K.
Análisis La densidad del aire se determina con base en la relación del gas ideal $P = \rho RT$ como:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{100 \text{ kPa}}{(0.287 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{K})(25 + 273) \text{ K}} = \mathbf{1.17 \text{ kg/m}^3}$$

Entonces la gravedad específica del aire es:

$$\text{GE} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \frac{1.17 \text{ kg/m}^3}{1\,000 \text{ kg/m}^3} = \mathbf{0.00117}$$

Por último, el volumen y la masa del aire que se encuentra en el cuarto son:

$$V = (4 \text{ m})(5 \text{ m})(6 \text{ m}) = 120 \text{ m}^3$$

$$m = \rho V = (1.17 \text{ kg/m}^3)(120 \text{ m}^3) = \mathbf{140 \text{ kg}}$$

Discusión Nótese que se convirtió la temperatura a la unidad K, partiendo de °C, antes de usarla en la relación del gas ideal.

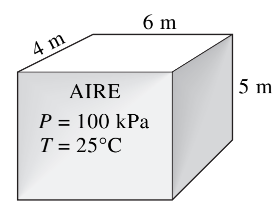


FIGURA 2-4
Esquema para el ejemplo 2-1.

2-3 ▪ PRESIÓN DE VAPOR Y CAVITACIÓN

Está adecuadamente establecido que la temperatura y la presión son propiedades dependientes para las sustancias puras durante los procesos de cambio de fase y existe una correspondencia uno a uno entre esas propiedades. A una presión determinada, la temperatura a la cual una sustancia pura cambia de fase se conoce como **temperatura de saturación** T_{sat}. De manera semejante, a una temperatura dada, la presión a la cual una sustancia pura cambia de fase se llama **presión de saturación** P_{sat}. Por ejemplo, a una presión absoluta de 1 atmósfera estándar (1 atm o 101.325 kPa), la temperatura de saturación del agua es de 100°C. Inversamente, a una temperatura de 100°C, la presión de saturación del agua es de 1 atm.

La **presión de vapor** P_v de una sustancia pura se define como *la presión ejercida por su vapor en equilibrio de fases con su líquido a una temperatura dada.* P_v es una propiedad de la sustancia pura y resulta ser idéntica a la presión de saturación P_{sat} del líquido ($P_v = P_{sat}$). Se debe tener cuidado en no confundir la presión de vapor con la *presión parcial*. La **presión parcial** se define como *la presión de un gas o vapor en una mezcla con otros gases*. Por ejemplo, el aire atmosférico es una mezcla de aire seco y vapor de agua, y la presión atmosférica es la suma de la presión parcial del aire seco y la presión parcial del vapor de agua. La presión parcial del vapor de agua constituye una fracción pequeña (por lo general, menor de 3 por ciento) de la presión atmosférica, ya que el aire es en su mayor parte nitrógeno y oxígeno. La presión parcial de un vapor debe ser menor que la presión de vapor, o igual a ésta, si no hubiera líquido presente. Sin embargo, cuando están presentes tanto el vapor y el líquido y el sistema está en equilibrio de fases, la presión parcial del vapor debe ser igual a la presión de vapor y se dice que el sistema está *saturado*. La rapidez de la evaporación desde masas abiertas de agua, como los lagos, es controlada por la diferencia entre la presión de vapor y la presión parcial. Por ejemplo, la presión de vapor del agua a 20°C es

TABLA 2-2

Presión de saturación (o de vapor) del agua a varias temperaturas

Temperatura T, °C	Presión de saturación P_{sat}, kPa
−10	0.260
−5	0.403
0	0.611
5	0.872
10	1.23
15	1.71
20	2.34
25	3.17
30	4.25
40	7.38
50	12.35
100	101.3 (1 atm)
150	475.8
200	1 554
250	3 973
300	8 581

de 2.34 kPa; por lo tanto, un cubo de agua a 20°C que se deje en un cuarto con aire seco a 1 atm continuará evaporándose hasta que suceda una de dos cosas: el agua se evapora por completo (no hay suficiente agua como para establecer el equilibrio de fases en el cuarto), o la evaporación se detiene cuando la presión parcial del vapor de agua en el cuarto se eleva hasta 2.34 kPa, punto en el que se establece el equilibrio de fases.

Para procesos de cambio de fase entre las fases líquida y de vapor de una sustancia pura, la presión de saturación y la de vapor son equivalentes, ya que el vapor es puro. Nótese que el valor de la presión sería el mismo si se mide en la fase de vapor o en la líquida (siempre que se mida en un lugar cercano a la interfaz líquido-vapor, con la finalidad de evitar los efectos hidrostáticos). La presión de vapor aumenta con la temperatura. Por lo tanto, una sustancia a temperaturas más altas hierve a presiones más elevadas. Por ejemplo, el agua hierve a 134°C en una olla a presión que opera a una presión absoluta de 3 atm, pero hierve a 93°C en una cacerola común a una elevación de 2 000 m, en donde la presión atmosférica es de 0.8 atm. En los apéndices 1 y 2 se dan las presiones de saturación (o vapor) para varias sustancias. Para facilitar la consulta, la 2-2 es una minitabla para el agua.

La razón del interés en la presión de vapor es la posibilidad de caída de la presión del líquido, en los sistemas de flujo de líquidos, por abajo de la presión de vapor en algunos lugares y la vaporización resultante no planeada. Por ejemplo, el agua a 10°C se evaporará de manera instantánea y formará burbujas en los lugares (como las regiones de las puntas o los lados de succión de las aspas de las bombas) donde la presión cae por abajo de 1.23 kPa. Las burbujas de vapor (llamadas **burbujas de cavitación** debido a que forman "cavidades" en el líquido) se desintegran conforme son barridas hacia fuera de las regiones de baja presión, con lo que se generan ondas de alta presión extremadamente destructivas. Este fenómeno, que es causa común de caída en el rendimiento e inclusive de la erosión de las aspas del impulsor, se llama **cavitación**, y constituye una consideración importante en el diseño de las turbinas y bombas hidráulicas (Fig. 2-5).

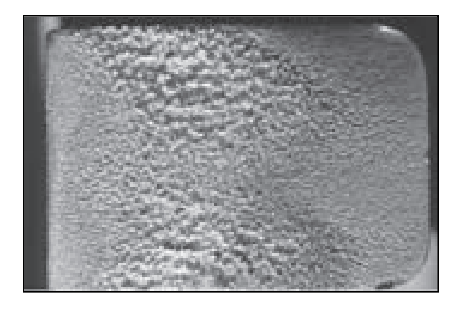


FIGURA 2-5
Daño por cavitación en una muestra de aluminio de 16 mm por 23 mm probada a 60 m/s durante 2.5 h. La muestra se colocó en la región de desintegración de las cavidades, corriente abajo de un generador de cavidades que se diseñó de forma específica para producir un elevado potencial de daño.
Fotografía tomada por David Stinebring, ARL/Pennsylvania State University. Reproducida con autorización.

La cavitación debe evitarse (o al menos minimizarse) en los sistemas de flujo, porque reduce el rendimiento, genera vibraciones y ruido molestos, y daña al equipo. Las puntas de presión resultantes del gran número de burbujas que se desintegran cerca de la superficie sólida durante un periodo largo pueden causar erosión, picadura de la superficie, falla por fatiga y la destrucción eventual de los componentes o la maquinaria. Se puede detectar la presencia de la cavitación en un sistema de flujo por su sonido característico de traquetear.

EJEMPLO 2-2 **Presión mínima para evitar la cavitación**

En un sistema de distribución de agua, se observa que la temperatura de ésta es de aproximadamente 30°C. Determine la presión mínima admisible en el sistema para evitar la cavitación.

SOLUCIÓN Debe determinarse la presión mínima en un sistema de distribución de agua, para evitar la cavitación.
Propiedades La presión de vapor del agua a 30°C es de 4.25 kPa.
Análisis Para evitar la cavitación, no debe permitirse que la presión en cualquier punto en el flujo caiga por abajo de la presión de vapor (o de saturación) a la temperatura dada; es decir:

$$P_{\text{mín}} = P_{\text{sat@30°C}} = \mathbf{4.25\ kPa}$$

Por lo tanto, la presión debe de mantenerse arriba de 4.25 kPa en todo punto en el flujo.

Discusión Nótese que la presión de vapor se incrementa cuando aumenta la temperatura y, en consecuencia, el riesgo de cavitación es mayor a temperaturas más altas del fluido.

2-4 ▪ ENERGÍA Y CALORES ESPECÍFICOS

La energía puede existir en numerosas formas: térmica, mecánica, cinética, potencial, eléctrica, magnética, química y nuclear, y su suma constituye la **energía total** E (o e con base en una unidad de masa) de un sistema. Las formas de la energía relacionadas con la estructura molecular de un sistema y el grado de actividad molecular se llaman *energía microscópica.* La suma de las formas microscópicas de la energía se conoce como **energía interna** de un sistema y se denota por U (o u con base en una unidad de masa).

La energía *macroscópica* de un sistema está relacionada con el movimiento y la influencia de algunos efectos externos: la gravedad, el magnetismo, la electricidad y la tensión superficial. La energía que un sistema tiene como resultado de su movimiento en relación con algún marco de referencia se llama **energía cinética.** Cuando todas las partes de un sistema se mueven con la misma velocidad, la energía cinética por unidad de masa se expresa como ec $= V^2/2$ en donde V denota la velocidad del sistema en relación con algún marco fijo de referencia. La energía que un sistema tiene como resultado de su elevación en un campo gravitacional se llama **energía potencial** y se expresa en términos de unidad de masa como ep $= gz$ donde g es la aceleración gravitacional y z es la elevación del centro de gravedad de un sistema en relación con algún plano de referencia seleccionado de manera arbitraria.

En la vida cotidiana se hace referencia a las formas sensible y latente de la energía interna como **calor** y se habla acerca del contenido de calor de los cuerpos. Sin embargo, en ingeniería, esas formas se conocen como **energía térmica** para impedir cualquier confusión con la *transferencia de calor*.

La unidad internacional de energía es el *joule* (J) o el *kilojoule* (1 kJ = 1 000 J). En el sistema inglés, la unidad de energía es la *unidad térmica británica* (Btu), definida como la energía necesaria para elevar la temperatura de 1 lbm de agua a 68°F en 1°F. Las magnitudes del kJ y la Btu son casi idénticas (1 Btu = 1.0551 kJ). Otra unidad ampliamente conocida de la energía es la *caloría* (1 cal = 4.1868 J), la cual se define como la energía necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua a 14.5°C en 1°C.

En el análisis de los sistemas en los que se tiene flujo de fluidos, con frecuencia se encuentra la combinación de las propiedades u y $P\nu$. Por conveniencia, esta combinación se conoce como **entalpía** h; es decir,

Entalpía: $$h = u + P\nu = u + \frac{P}{\rho} \qquad \textbf{(2-7)}$$

en donde P/ρ es la *energía de flujo*, también llamada *trabajo de flujo*, la cual es la energía por unidad de masa necesaria para mover el fluido y mantener el flujo. En el análisis de energía de los fluidos fluyentes, es conveniente tratar la energía de flujo como parte de la energía del fluido y representar la energía microscópica de una corriente de fluido por la entalpía h (Fig. 2-6). Nótese que la entalpía es una cantidad por unidad de masa y, en consecuencia, es una propiedad *específica.*

Un sistema que carece de efectos como el magnético, el eléctrico y la tensión superficial, se llama sistema compresible simple. La energía total de un sistema compresible simple consta de tres partes: energías interna, cinética y potencial.

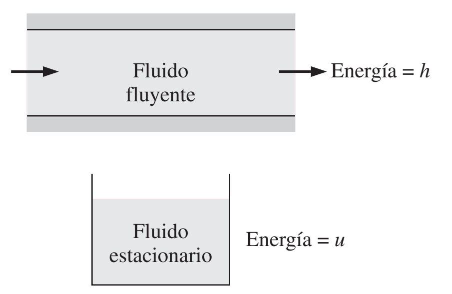


FIGURA 2-6
La *energía interna u* representa la energía microscópica de un fluido no-fluyente, por unidad de masa, en tanto que la *entalpía h* representa la energía microscópica de un fluido fluyente por unidad de masa.

En términos de una unidad de masa, se expresa como $e = u + \text{ec} + \text{ep}$. El fluido que entra o sale de un volumen de control tiene una forma adicional de energía: la *energía de flujo P/ρ*. Entonces la energía total de un **fluido fluyente** en términos de una unidad de masa es:

$$e_{\text{fluyente}} = P/\rho + e = h + \text{ec} + \text{ep} = h + \frac{V^2}{2} + gz \qquad \text{(kJ/kg)} \tag{2-8}$$

donde $h = P/\rho + u$ es la entalpía, V es la velocidad y z es la elevación del sistema en relación con algún punto externo de referencia.

Cuando se utiliza la entalpía, en lugar de la energía interna, con la finalidad de representar la energía de un fluido fluyente, no es necesario preocuparse acerca del trabajo de flujo. Con la entalpía se toma en cuenta, de manera automática, la energía asociada con la acción de empujar el fluido. De hecho, ésta es la razón principal para definir la propiedad entalpía.

Los cambios diferenciales y finitos en la energía interna y la entalpía de un *gas ideal* se pueden expresar en términos de los calores específicos como:

$$du = c_v\, dT \qquad \text{y} \qquad dh = c_p\, dT \tag{2-9}$$

donde c_v y c_p son los calores específicos a volumen constante y a presión constante del gas ideal. Si se utilizan los valores de los calores específicos en la temperatura promedio, los cambios finitos en la energía interna y la entalpía se pueden expresar de manera aproximada como:

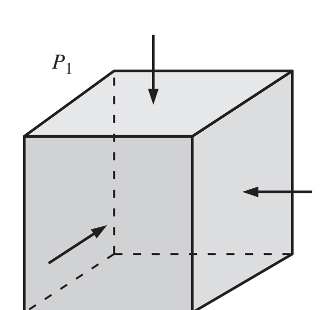
$$\Delta u = c_{v,\text{prom}}\, \Delta T \qquad \text{y} \qquad \Delta h = c_{p,\text{prom}}\, \Delta T \tag{2-10}$$

Para las *sustancias incompresibles*, los calores específicos a volumen constante y a presión constante son idénticos. Por lo tanto, $c_p \cong c_v \cong c$ para los líquidos y el cambio en la energía interna de éstos se puede expresar como $\Delta u = c_{\text{prom}}\, \Delta T$.

Nótese que ρ = constante para las sustancias incompresibles, la diferenciación de la entalpía $h = u + P/\rho$ da $dh = du + dP/\rho$. Si se integra, el cambio en la entalpía queda

$$\Delta h = \Delta u + \Delta P/\rho \cong c_{\text{prom}}\, \Delta T + \Delta P/\rho \tag{2-11}$$

Por lo tanto, $\Delta h = \Delta u \cong c_{\text{prom}}\, \Delta T$ para los procesos a presión constante y $\Delta h = \Delta P/\rho$ para los procesos a temperatura constante de los líquidos.



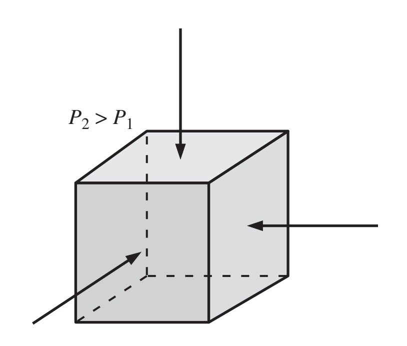


FIGURA 2-7
Los fluidos, como los sólidos, se comprimen cuando la presión aplicada se incrementa de P_1 a P_2.

2-5 ▪ COEFICIENTE DE COMPRESIBILIDAD

Por experiencia, se sabe que el volumen (o la densidad) de un fluido cambia respecto a una variación en su temperatura o su presión. Los fluidos suelen expandirse cuando se calientan o despresurizan, y se contraen cuando se enfrían o presurizan. Pero la cantidad del cambio de volumen es diferente para fluidos diferentes y se necesita definir las propiedades que relacionan los cambios en el volumen con los cambios en la presión y en la temperatura. Dos de esas propiedades son el módulo de elasticidad de volumen κ y el coeficiente de expansión volumétrica β.

Es una observación común que un fluido se contrae cuando se aplica más presión sobre él, y se expande cuando se reduce la presión que actúa sobre él (Fig. 2-7). Es decir, los fluidos actúan como sólidos elásticos respecto a la presión. Por lo tanto, de una manera análoga al módulo de elasticidad de Young de los sólidos, es apropiado definir un **coeficiente de compresibilidad** κ (llamado también **módulo de compresibilidad de volumen** o **módulo de elasticidad de volumen**) para los fluidos como

$$\kappa = -v\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = \rho\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \qquad \text{(Pa)} \tag{2-12}$$

También se puede expresar de manera aproximada en términos de cambios finitos como:

$$\kappa \cong -\frac{\Delta P}{\Delta v/v} \cong \frac{\Delta P}{\Delta \rho/\rho} \qquad (T = \text{constante}) \tag{2-13}$$

Nótese que si $\Delta v/v$ o $\Delta \rho/\rho$ son adimensionales, κ debe tener la dimensión de presión (Pa o psi). Asimismo, el coeficiente de compresibilidad representa el cambio en la presión correspondiente a un cambio relativo en el volumen o la densidad del fluido, mientras la temperatura permanezca constante. Entonces se llega a la conclusión de que el coeficiente de compresibilidad de una sustancia verdaderamente incompresible (v = constante) es infinito.

Un valor grande de κ indica que se necesita un cambio también grande en la presión para causar un pequeño cambio relativo en el volumen y, de este modo, un fluido con un κ grande en esencia es incompresible. Esto es típico para los líquidos y explica por qué éstos suelen considerarse como *incompresibles*. Por ejemplo, la presión del agua en condiciones atmosféricas normales debe elevarse hasta 210 atm para comprimirla en 1 por ciento, lo que corresponde a un valor del coeficiente de compresibilidad de $\kappa = 21\ 000$ atm.

Los cambios pequeños en la densidad de los líquidos, inclusive pueden causar fenómenos interesantes en los sistemas de tuberías, como el golpe de *ariete* (caracterizado por un sonido que semeja al que se produce cuando se "martillea" un tubo). Éste se presenta cuando un líquido en una red de tuberías encuentra una restricción abrupta del flujo (como una válvula cerrada) y se comprime de manera local. Las ondas acústicas producidas chocan contra las superficies del tubo, codos y válvulas conforme se propagan y se reflejan a lo largo de éste, lo hacen vibrar y que emita el conocido sonido.

Nótese que el volumen y la presión son inversamente proporcionales (el volumen decrece al aumentar la presión y, en consecuencia $\partial P/\partial v$ es una cantidad negativa) y el signo negativo en la definición (Ec. 2-12) garantiza que κ sea una cantidad positiva. También, al diferenciar $\rho = 1/v$ da $d\rho = -dv/v^2$, lo cual se puede reordenar como:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} \tag{2-14}$$

Esto es, los cambios relativos en el volumen específico y la densidad de un fluido son de igual magnitud, pero de signo opuesto.

Para un gas ideal, $P = \rho RT$ y $(\partial P/\partial \rho)_T = RT = P/\rho$, así,

$$\kappa_{\text{gas ideal}} = P \qquad (\text{Pa}) \tag{2-15}$$

Por lo tanto, el coeficiente de compresibilidad de un gas ideal es igual a su presión absoluta, y el coeficiente de compresibilidad del gas se incrementa cuando aumenta la presión. Si se hace la sustitución $\kappa = P$ en la definición del coeficiente de compresibilidad y se reordena se obtiene

Gas ideal:
$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta P}{P} \qquad (T = \text{constante}) \tag{2-16}$$

Por lo tanto, el incremento porcentual en la densidad de un gas ideal durante una compresión isotérmica es igual al incremento porcentual en la presión.

Para el aire a la presión de 1 atm, $\kappa = P = 1$ atm y una disminución de 1 por ciento en el volumen ($\Delta V/V = -0.01$) corresponde a un incremento de $\Delta P = 0.01$ atm en la presión. Pero, para el aire a 1 000 atm, $\kappa = 1\ 000$ atm y una disminución de 1 por ciento en el volumen corresponde a un incremento



FIGURA 2-8
Convección natural sobre la mano de una mujer.
G. S. Settles, Gas Dynamics Lab, Penn State University. Reproducida con autorización.

de $\Delta P = 10$ atm en la presión. En consecuencia, un pequeño cambio relativo en el volumen de un gas puede causar un cambio grande en la presión, a presiones muy altas.

El inverso del coeficiente de compresibilidad se llama **compresibilidad isotérmica** α y se expresa como:

$$\alpha = \frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \qquad \text{(1/Pa)} \tag{2-17}$$

La compresibilidad isotérmica de un fluido representa el cambio relativo en el volumen o la densidad correspondiente a un cambio unitario en la presión.

Coeficiente de expansión volumétrica

En general, la densidad de un fluido depende con mayor fuerza de la temperatura que de la presión, y la variación de la densidad con la temperatura causan numerosos fenómenos naturales, como los vientos, las corrientes en los océanos, el ascenso de columnas de humo de las chimeneas, el manejo de globos de aire caliente, la transferencia de calor por convección natural, e inclusive, el ascenso del aire caliente, y de allí la frase "el aire caliente sube" (Fig. 2-8). Para cuantificar estos efectos se necesita una propiedad que represente la *variación de la densidad de un fluido con la temperatura a presión constante*.

La propiedad que suministra esa información es el **coeficiente de expansión volumétrica** (o expansividad volumétrica) β, definido como (Fig. 2-9)

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \qquad \text{(1/K)} \tag{2-18}$$

También se puede expresar de manera aproximada en términos de cambios finitos como:

$$\beta \approx \frac{\Delta v/v}{\Delta T} = -\frac{\Delta\rho/\rho}{\Delta T} \qquad \text{(a } P \text{ constante)} \tag{2-19}$$

Un valor grande de β para un fluido significará también un cambio considerable en la densidad con la temperatura, y el producto $\beta\,\Delta T$ representa la fracción de cambio en el volumen de un fluido que corresponde a un cambio en la temperatura de ΔT a presión constante.

Se puede demostrar con facilidad que el coeficiente de expansión volumétrica de un *gas ideal* ($P = \rho RT$) a una temperatura T equivale al inverso de la temperatura:

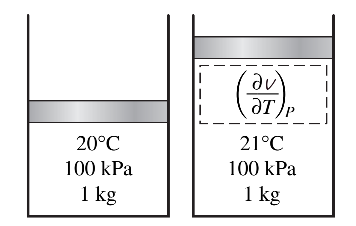
$$\beta_{\text{gas ideal}} = \frac{1}{T} \qquad \text{(1/K)} \tag{2-20}$$

donde T es la temperatura *absoluta*.

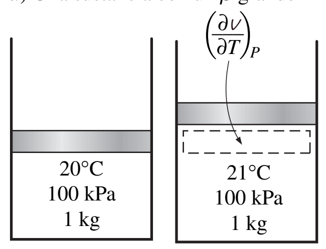
En el estudio de las corrientes de convección natural, la condición de la masa principal de fluido que rodea las regiones finitas calientes o frías se indica con el subíndice "infinito" (∞) para que sirva como recordatorio de que éste es el valor a una distancia en donde no se siente la presencia de la región caliente o fría. En esos casos, el coeficiente de expansión volumétrica se puede expresar de manera aproximada como:

$$\beta \approx -\frac{(\rho_\infty - \rho)/\rho}{T_\infty - T} \qquad \text{o} \qquad \rho_\infty - \rho = \rho\beta(T - T_\infty) \tag{2-21}$$

en donde ρ_∞ es la densidad y T_∞ es la temperatura del fluido inmóvil alejado de la parcela de fluido caliente o frío.



a) Una sustancia con un β grande



b) Una sustancia con un β pequeño

FIGURA 2-9
El coeficiente de expansión volumétrica es una medida del cambio en el volumen de una sustancia con la temperatura a presión constante.

En el capítulo 3 se verá que las corrientes de convección natural son iniciadas por una *fuerza de flotabilidad*, que es proporcional a la *diferencia en la densidad*, la cual es proporcional a la *diferencia en la temperatura* a presión constante. Por lo tanto, cuanto mayor sea la diferencia de temperatura entre la parcela de fluido caliente o frío y la masa principal del fluido circundante, *mayor* es la fuerza de flotabilidad y, en consecuencia, *más fuertes* las corrientes de convección natural.

Se pueden determinar los efectos combinados de los cambios en la presión y en la temperatura sobre el cambio de volumen de un fluido cuando se toma el volumen específico como una función de T y P. Si se diferencia $v = v(T, P)$ y se utilizan las definiciones de los coeficientes de compresión y de expansión α y β se obtiene:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP = (\beta\, dT - \alpha\, dP)v \tag{2-22}$$

Entonces el cambio relativo en el volumen (o la densidad) debido a cambios en la presión y temperatura se puede expresar de manera aproximada como:

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta\rho}{\rho} \cong \beta\, \Delta T - \alpha\, \Delta P \tag{2-23}$$

EJEMPLO 2-3 **Variación de la densidad con la temperatura y la presión**

Considere agua inicialmente a 20°C y 1 atm. Determine la densidad final del agua *a*) si se calienta hasta 50°C a una presión constante de 1 atm y *b*) si se comprime hasta alcanzar la presión de 100 atm a una temperatura constante de 20°C. Tome la compresibilidad isotérmica del agua como $\alpha = 4.80 \times 10^{-5}$ atm^{-1}.

SOLUCIÓN Se considera agua a una temperatura y presión dadas. Se deben determinar las densidades del agua después de que se caliente y después de que se comprime.

Hipótesis **1** El coeficiente de expansión volumétrica y la compresibilidad isotérmica del agua son constantes en el rango dado de temperatura. **2** Se realiza un análisis aproximado cuando se reemplazan los cambios diferenciales en las propiedades por cambios finitos.

Propiedades La densidad del agua a 20°C y la presión de 1 atm es $\rho_1 =$ 998.0 kg/m^3. El coeficiente de expansión volumétrica a la temperatura promedio de (20 + 50)/2 = 35°C es $\beta = 0.337 \times 10^{-3}$ K^{-1}. La compresibilidad isotérmica del agua se da como $\alpha = 4.80 \times 10^{-5}$ atm^{-1}.

Análisis Cuando las cantidades diferenciales se reemplazan por diferencias y se supone que las propiedades α y β son constantes, el cambio en la densidad, en términos de los cambios en la presión y la temperatura, se expresa de forma aproximada como (Ec. 2-23):

$$\Delta\rho = \alpha\rho\, \Delta P - \beta\rho\, \Delta T$$

a) El cambio en la densidad debido a la variación en la temperatura de 20°C hasta 50°C, a presión constante es

$$\begin{aligned}\Delta\rho &= -\beta\rho\, \Delta T = -(0.337 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1})(998\ \text{kg/m}^3)(50 - 20)\ \text{K} \\ &= -10.0\ \text{kg/m}^3\end{aligned}$$

Nótese que $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, la densidad del agua a 50°C y 1 atm es:

$$\rho_2 = \rho_1 + \Delta\rho = 998.0 + (-10.0) = \mathbf{988.0\ kg/m^3}$$

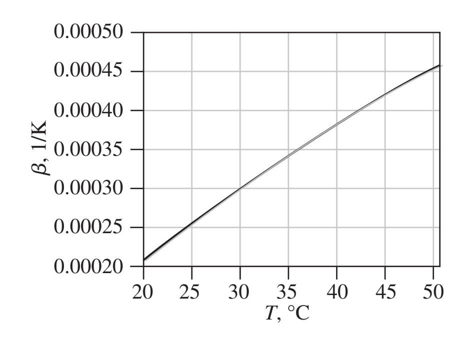


FIGURA 2-10
Variación del coeficiente de expansión volumétrica del agua β con la temperatura en el rango de 20°C a 50°C.
Los datos se generaron y se trazó la gráfica de ellos utilizando EES.

lo cual es casi idéntico al valor de 988.1 kg/m^3 a 50°C que se encuentra en la tabla A-3. Esto se debe principalmente a que β varía con la temperatura aproximadamente de forma lineal, como se muestra en la figura 2-10.

b) El cambio en la densidad debido a un cambio en la presión de 1 atm hasta 100 atm a temperatura constante es:

$$\Delta\rho = \alpha\rho\,\Delta P = (4.80 \times 10^{-5}\ \text{atm}^{-1})(998\ \text{kg/m}^3)(100 - 1)\ \text{atm} = 4.7\ \text{kg/m}^3$$

Entonces la densidad del agua a 100 atm y 20°C es:

$$\rho_2 = \rho_1 + \Delta\rho = 998.0 + 4.7 = \mathbf{1\,002.7\ kg/m^3}$$

Discusión Nótese que la densidad del agua disminuye cuando se calienta y aumenta cuando se comprime, como es de esperar. Este problema se puede resolver de modo más exacto con la aplicación del análisis diferencial, cuando se cuenta con formas funcionales de las propiedades.

2-6 ▪ VISCOSIDAD

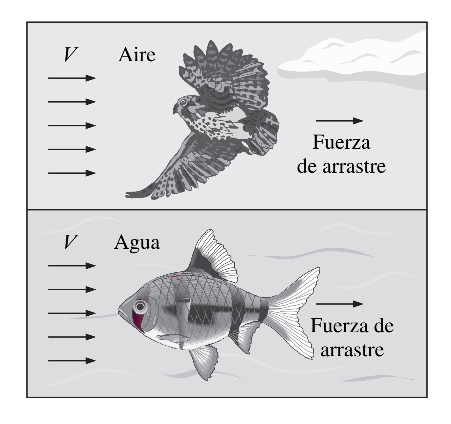


FIGURA 2-11
Un fluido que se mueve respecto a un cuerpo ejerce una fuerza de arrastre sobre ese cuerpo, en parte debido a la fricción causada por la viscosidad.

Cuando dos cuerpos sólidos en contacto se mueven uno con respecto al otro, se crea una fuerza de fricción en la superficie de contacto en la dirección opuesta al movimiento. Por ejemplo, para mover una mesa sobre el piso, se le debe aplicar una fuerza en dirección horizontal, suficientemente grande como para vencer la fricción. La magnitud de la fuerza necesaria para mover la mesa depende del *coeficiente de fricción* entre la mesa y el piso.

La situación es semejante cuando un fluido se mueve con respecto a un sólido o cuando dos fluidos se mueven uno con respecto al otro. Es posible moverse con relativa facilidad en el aire, pero no en el agua. Moverse en aceite sería inclusive más difícil, como se puede observar por el movimiento muy lento hacia abajo de una bola de vidrio que se deja caer en un tubo lleno con aceite. Parece que existe una propiedad que representa la resistencia interna de un fluido al movimiento o la "fluidez", y esa propiedad es la **viscosidad**. La fuerza que un fluido fluyente ejerce sobre un cuerpo en la dirección del flujo se llama **fuerza de arrastre**, y la magnitud de ésta depende, en parte, de la viscosidad (Fig. 2-11).

Para obtener una relación para la viscosidad, considérese una capa de fluido entre dos placas paralelas muy grandes (o, lo que es equivalente, dos placas paralelas sumergidas en una gran masa de fluido) separadas por una distancia ℓ (Fig. 2-12). Ahora se aplica una fuerza paralela constante F a la placa superior, en tanto que la placa inferior se mantiene fija. Después de los efectos transitorios iniciales, se observa que la placa superior se mueve de manera continua, bajo la influencia de esta fuerza, a una velocidad constante V. El fluido, en contacto con la placa superior, se pega a la superficie de ésta y se mueve con ella a la misma velocidad, y el esfuerzo cortante τ que actúa sobre esta capa de fluido es:

$$\tau = \frac{F}{A} \tag{2-24}$$

donde A es el área de contacto entre la placa y el fluido. Nótese que la capa de fluido se deforma de manera continua bajo la influencia del esfuerzo cortante.

El fluido en contacto con la placa inferior toma la velocidad de esa placa, la cual es cero (debido a la condición de no-deslizamiento). En el flujo laminar



estacionario, la velocidad del fluido entre las placas varía de manera lineal entre 0 y V, y así, el *perfil de velocidad* y el *gradiente de velocidad* son:

$$u(y) = \frac{y}{\ell} V \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dy} = \frac{V}{\ell} \tag{2-25}$$

donde y es la distancia vertical medida desde la placa inferior.

Durante un intervalo diferencial de tiempo dt, los lados de las partículas del fluido a lo largo de una recta vertical MN giran describiendo un ángulo diferencial $d\beta$ al mismo tiempo que la placa superior se mueve una distancia diferencial $da = V\,dt$. El desplazamiento o deformación angular (o deformación por esfuerzo cortante) se puede expresar como:

$$d\beta \approx \tan\beta = \frac{da}{\ell} = \frac{V\,dt}{\ell} = \frac{du}{dy}dt \tag{2-26}$$

Si se reordena, la razón de deformación bajo la influencia del esfuerzo cortante τ queda:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{du}{dy} \tag{2-27}$$

De donde se llega a la conclusión de que la razón de deformación de un elemento de fluido equivale al gradiente de velocidad, du/dy. Además, se puede verificar de manera experimental que, para la mayoría de los fluidos, la razón de deformación (y, por lo tanto, el gradiente de velocidad) es directamente proporcional al esfuerzo cortante τ,

$$\tau \propto \frac{d\beta}{dt} \qquad \text{o} \qquad \tau \propto \frac{du}{dy} \tag{2-28}$$

Los fluidos para los cuales la razón de deformación es proporcional al esfuerzo cortante se llaman **fluidos newtonianos** en honor de sir Isaac Newton, quien lo expresó por primera vez en 1687. La mayoría de los fluidos comunes, como el agua, el aire, la gasolina y los aceites son newtonianos. La sangre y los plásticos líquidos son ejemplos de fluidos no-newtonianos

En el flujo tangencial unidimensional de fluidos newtonianos, el esfuerzo cortante se puede expresar mediante la relación lineal:

Esfuerzo cortante:
$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (\text{N/m}^2) \tag{2-29}$$

donde la constante de proporcionalidad μ se llama **coeficiente de viscosidad** o **viscosidad dinámica** (o **absoluta**) del fluido, cuya unidad es kg/m · s, o de modo equivalente, N · s/m^2 (o Pa · s, en donde Pa es la unidad de presión pascal). Una unidad común de la viscosidad es el **poise**, el cual equivale a 0.1 Pa · s (o el *centipoise*, el cual es un centésimo de poise). La viscosidad del agua a 20°C es 1 centipoise y, en consecuencia, la unidad centipoise sirve como una referencia útil. Una gráfica del esfuerzo cortante, en función de la razón de deformación (gradiente de velocidad) para un fluido newtoniano es una recta cuya pendiente es la viscosidad de ese fluido, como se muestra en la figura 2-13. Nótese que la viscosidad es independiente de la razón de deformación.

La **fuerza cortante** que actúa sobre una capa de fluido newtoniano (o, por la tercera ley de Newton, la fuerza que actúa sobre la placa) es:

Fuerza cortante:
$$F = \tau A = \mu A \frac{du}{dy} \qquad (\text{N}) \tag{2-30}$$

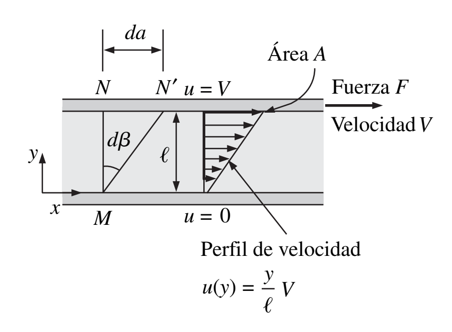


FIGURA 2-12
Comportamiento de un fluido en flujo laminar entre dos placas paralelas, cuando la placa superior se mueve con una velocidad constante.

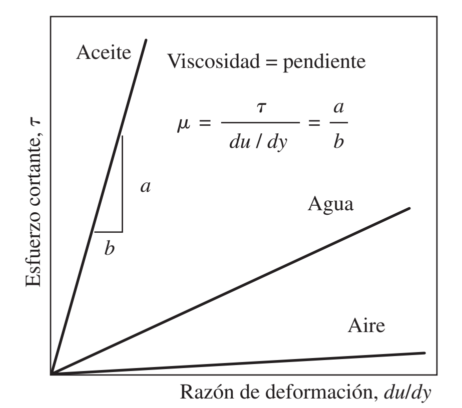


FIGURA 2-13
La razón de deformación (gradiente de velocidad) de un fluido newtoniano es proporcional al esfuerzo cortante, y la constante de proporcionalidad es la viscosidad.

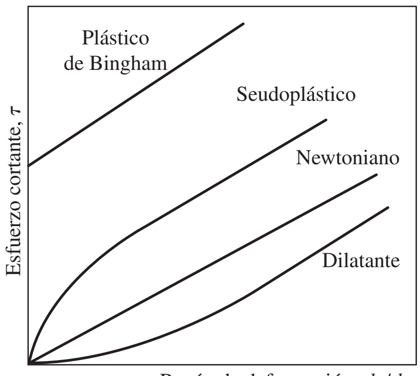


FIGURA 2-14
Variación del esfuerzo cortante con la razón de deformación para fluidos newtonianos y no-newtonianos (la pendiente de una de las curvas en un punto es la viscosidad aparente del fluido en ese punto).

donde, una vez más, A es el área de contacto entre la placa y el fluido. Entonces la fuerza F. requerida para mover la placa superior de la figura 2-12, a una velocidad constante de V al mismo tiempo que la placa inferior permanece estacionaria, es:

$$F = \mu A \frac{V}{\ell} \qquad \text{(N)} \tag{2-31}$$

Se puede usar esta relación de manera alternativa para calcular μ cuando se mide la fuerza F. Por lo tanto, se puede utilizar el montaje experimental que se acaba de describir para medir la viscosidad de los fluidos. Nótese que, en condiciones idénticas, la fuerza F será muy distinta para fluidos diferentes.

Para los fluidos no-newtonianos, la relación entre el esfuerzo cortante y la razón de deformación no es lineal, como se muestra en la figura 2-14. La pendiente de la curva en el diagrama de τ en función de du/dy se conoce como *viscosidad aparente* del fluido. Los fluidos cuya viscosidad aparente se incrementa con la razón de deformación (como las soluciones con almidón o arena suspendidos) se conocen como *fluidos dilatantes* o *espesantes al corte*, y los que exhiben el comportamiento opuesto (el fluido que se vuelve menos viscoso a medida que se le sujeta a un corte más intenso, como algunas pinturas, las soluciones de polímero y los fluidos con partículas suspendidas) se conocen como *fluidos seudoplásticos* o *adelgazantes al corte*. Algunos materiales, como la pasta de dientes, pueden resistir un esfuerzo cortante finito y se comportan como un sólido, pero se deforman de manera continua cuando ese esfuerzo sobrepasa el del punto de fluencia, y en consecuencia, se comportan como un fluido. Esos materiales se conocen como plásticos de Bingham, en honor de E. C. Bingham, quien realizó trabajos pioneros sobre la viscosidad de los fluidos para la U. S. National Bureau of Standards, a principios del siglo XX.

En mecánica de fluidos y transferencia de calor, con frecuencia aparece la razón de la viscosidad dinámica a la densidad. Por conveniencia, a esta razón se le da el nombre de **viscosidad cinemática** ν y se expresa como $\nu = \mu/\rho$. Dos unidades comunes de la viscosidad cinemática son m^2/s y el **stoke** (1 stoke = 1 cm^2/s = 0.0001 m^2/s).

En general, la viscosidad de un fluido depende tanto de la temperatura como de la presión, aun cuando la dependencia respecto a la presión es más bien débil. Para los *líquidos*, la viscosidad dinámica y la cinemática son prácticamente independientes de la presión y suele descartarse cualquier variación pequeña con ésta, excepto a presiones extremadamente elevadas. Para los *gases*, éste también es el caso respecto a la viscosidad dinámica (a presiones bajas hasta moderadas), pero no lo es para la viscosidad cinemática dado que la densidad de un gas es proporcional a su presión (Fig. 2-15).

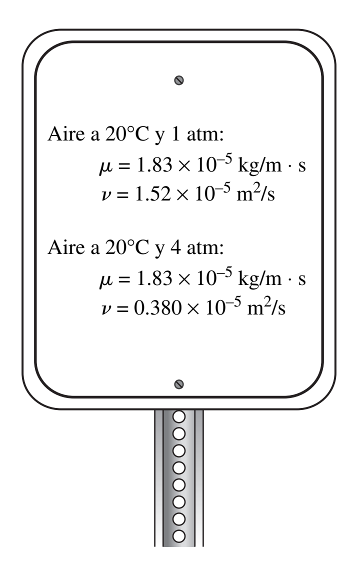


FIGURA 2-15
En general, la viscosidad dinámica no depende de la presión, pero la viscosidad cinemática sí depende de ésta.

La viscosidad de un fluido es una medida de su "resistencia a la deformación". La viscosidad se debe a la fuerza de fricción interna que se desarrolla entre las diferentes capas de los fluidos a medida que se obligan a moverse una con relación a las otras. En los líquidos, la viscosidad se origina por las fuerzas de cohesión entre las moléculas mientras que en los gases por las colisiones moleculares, además de que ésta varía mucho con la temperatura. La viscosidad de los líquidos decrece con la temperatura, en tanto que la de los gases se incrementa gracias a ella (Fig. 2-16). Esto se debe a que, en un líquido, las moléculas poseen más energía a temperaturas más elevadas y se pueden oponer con mayor fuerza a las grandes fuerzas de cohesión intermoleculares. Como resultado, las moléculas energizadas de los líquidos se pueden mover con mayor libertad.

Por otro lado, en un gas las fuerzas intermoleculares son despreciables y a temperaturas elevadas las moléculas de los gases se mueven en forma aleatoria a velocidades más altas. Esto conduce a que se produzcan más colisiones moleculares por unidad de volumen por unidad de tiempo y, en consecuencia, en una mayor resistencia al flujo. La viscosidad de un fluido está relacionada en forma

directa con la potencia de bombeo que se necesita para transportar un fluido en un tubo o para mover un cuerpo (como un automóvil en el aire o un submarino en el mar) a través de un fluido.

La teoría cinética de los gases predice que la viscosidad de éstos es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura; es decir, $\mu_{gas} \propto \sqrt{T}$. Esta predicción queda conformada por las observaciones prácticas, pero es necesario tomar en cuenta las desviaciones para gases diferentes mediante la incorporación de algunos factores de corrección. La viscosidad de los *gases* se expresa como función de la temperatura por la correlación de Sutherland (de The U. S. Standard Atmosphere) como:

Gases:
$$\mu = \frac{aT^{1/2}}{1 + b/T} \qquad \textbf{(2-32)}$$

donde T es la temperatura absoluta y a y b son constantes que se determinan en forma experimental. Nótese que es suficiente con medir las viscosidades a dos temperaturas diferentes para determinar estas constantes. Para el aire, los valores de estas constantes son $a = 1.458 \times 10^{-6}$ kg/(m · s · K$^{1/2}$) y $b = 110.4$ K a las condiciones atmosféricas. La viscosidad de los gases es independiente de la presión, a presiones bajas hasta moderadas (desde un pequeño porcentaje de 1 atm hasta varias atm). Pero la viscosidad aumenta a presiones elevadas debido al incremento en la densidad.

Para los *líquidos*, la viscosidad se expresa en forma aproximada como:

Líquidos:
$$\mu = a10^{b/(T-c)} \qquad \textbf{(2-33)}$$

donde, una vez más, T es la temperatura absoluta y a, b, y c con constantes que se determinan de manera experimental. Para el agua, se emplean los valores $a = 2.414 \times 10^{-5}$ N · s/m^2, $b = 247.8$ K, y $c = 140$ K que conduce a un error de menos de 2.5 por ciento en la viscosidad, en el rango de temperatura de 0°C a 370°C (Touloukian *et al.*, 1975).

Considérese una capa de fluido con espesor ℓ dentro de una pequeña brecha entre dos cilindros concéntricos, como la delgada capa de aceite en una chumacera. La brecha entre los cilindros se puede modelar como dos placas paralelas planas separadas por un fluido. Nótese que el par de torsión (torque) es $\text{T} = FR$ (fuerza multiplicada por el brazo del momento, el cual en este caso es el radio R del cilindro interior), la velocidad tangencial es $V = \omega R$ (la velocidad angular multiplicada por el radio) y al tomar el área de la superficie mojada del cilindro interior como $A = 2\pi RL$ cuando se descarta el esfuerzo cortante que actúa sobre los dos extremos del cilindro interior, el par de torsión se puede expresar como:

$$\text{T} = FR = \mu\,\frac{2\pi R^3 \omega L}{\ell} = \mu\,\frac{4\pi^2 R^3 \dot{n} L}{\ell} \qquad \textbf{(2-34)}$$

donde L es la longitud del cilindro y $\dot{n}$ es el número de revoluciones por unidad de tiempo, el cual suele expresarse en rpm (revoluciones por minuto). Nótese que la distancia angular recorrida durante una rotación es 2π rad, y, en consecuencia, la relación entre la velocidad angular, en rad/min, y las rpm es $\omega = 2\pi\dot{n}$. Se puede usar la ecuación 2-34 para calcular la viscosidad de un fluido midiendo el par de torsión a una velocidad angular especificada. Por lo tanto, se pueden emplear dos cilindros concéntricos como un *viscosímetro*, aparato con el que se mide la viscosidad.

En la tabla 2-3 se incluye una lista de las viscosidades de algunos fluidos. En la figura 2-17 se encuentran sus gráficas correspondientes contra la temperatura. Nótese que las viscosidades de diferentes fluidos no son iguales en varios órdenes de magnitud. Asimismo, nótese que es más difícil mover un objeto en un fluido de viscosidad alta, como el aceite de motor, que en uno de viscosidad baja, como el agua. En general, los líquidos son mucho más viscosos que los gases.

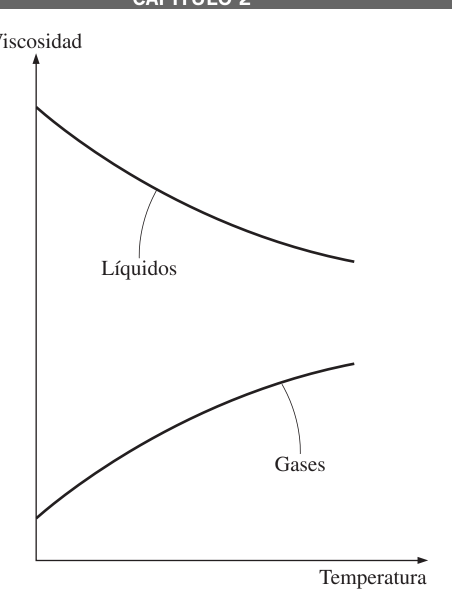


FIGURA 2-16
La viscosidad de los líquidos decrece y la de los gases crece con la temperatura.

TABLA 2-3

Viscosidades dinámicas de algunos fluidos a 1 atm y 20°C (a menos que se indique otra cosa)

Fluido	Viscosidad dinámica μ, kg/m · s
Glicerina:	
−20°C	134.0
0°C	10.5
20°C	1.52
40°C	0.31
Aceite para motor:	
SAE 10W	0.10
SAE 10W30	0.17
SAE 30	0.29
SAE 50	0.86
Mercurio	0.0015
Alcohol etílico	0.0012
Agua:	
0°C	0.0018
20°C	0.0010
100°C (líquido)	0.00028
100°C (vapor)	0.000012
Sangre, 37°C	0.00040
Gasolina	0.00029
Amoniaco	0.00015
Aire	0.000018
Hidrógeno, 0°C	0.0000088

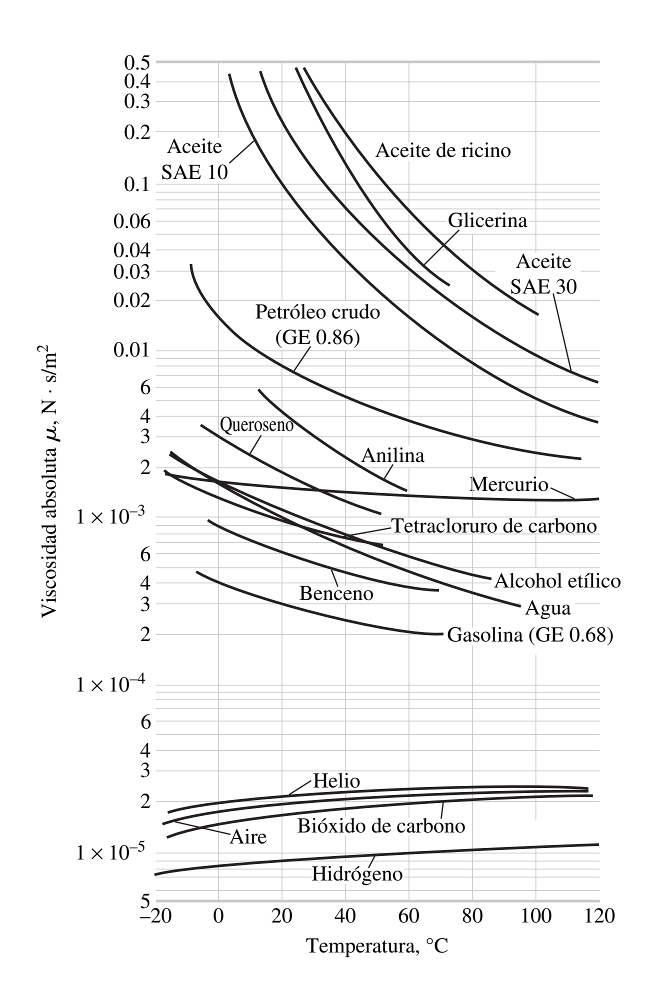


FIGURA 2-17
Variación de las viscosidades dinámicas (absolutas) de fluidos comunes con la temperatura a 1 atm ($1\ N \cdot s/m^2 = 1\ kg/m \cdot s = 0.020886\ lbf \cdot s/ft^2$).

F. M. White, Fluid Mechanics *4e. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies, Inc. Reproducido con autorización.*

EJEMPLO 2-4 Determinación de la viscosidad de un fluido

Se va a medir la viscosidad de un fluido con un viscosímetro construido con dos cilindros concéntricos de 40 cm de largo (Fig. 2-18). El diámetro exterior del cilindro interior es de 12 cm y la brecha entre los dos cilindros es de 0.15 cm. El cilindro interior se hace girar a 300 rpm y se mide el par de torsión que resulta ser de 1.8 N · m. Enseguida determine la viscosidad del fluido.

SOLUCIÓN Se da el par de torsión y las rpm de un viscosímetro de cilindro doble. Se debe determinar la viscosidad del fluido.

Hipótesis **1** El cilindro interior está por completo sumergido en el aceite. **2** Los efectos viscosos en los dos extremos del cilindro interior son despreciables.

Análisis El perfil de velocidad es lineal sólo cuando los efectos de la curvatura son despreciables y se puede tener una aproximación de este perfil como lineal, en este caso, supuesto que $\ell/R \ll 1$. Al despejar la viscosidad en la ecuación 2-34 y sustituyendo los valores dados, se determina que la viscosidad del fluido es:

$$\mu = \frac{T\ell}{4\pi^2 R^3 \dot{n} L} = \frac{(1.8\ N \cdot m)(0.0015\ m)}{4\pi^2 (0.06\ m)^3 (300/60\ 1/s)(0.4\ m)} = \mathbf{0.158\ N \cdot s/m^2}$$

Discusión La viscosidad depende significativamente de la temperatura e indicar un valor de ella sin mencionar una temperatura correspondiente tiene poco sentido. Por lo tanto, también tiene que medirse la temperatura del fluido durante el experimento y darse con este cálculo.

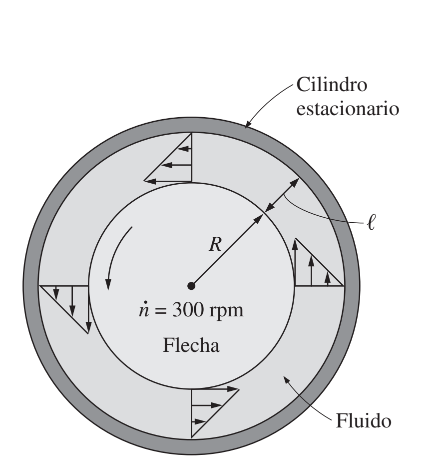


FIGURA 2-18
Esquema para el ejemplo 2-4.

2-7 ▪ TENSIÓN SUPERFICIAL Y EFECTO DE CAPILARIDAD

A menudo se observa que una gota de sangre forma una joroba sobre un vidrio horizontal; una gota de mercurio forma una esfera casi perfecta y se puede hacer rodar del mismo modo que una bola de acero, sobre una superficie lisa; las gotas de agua de la lluvia o del rocío se cuelgan de las ramas o de las hojas de los árboles; un combustible líquido inyectado en un motor forma una niebla de gotas esféricas; el agua que gotea de un grifo con fuga cae como gotas esféricas; una pompa de jabón que se lanza al aire toma una forma esférica, y el agua forma pequeñas gotas sobre los pétalos de las flores (Fig. 2-19).



a)



b)

FIGURA 2-19
Algunas consecuencias de la tensión superficial.
a) © *Pegasus/Visuals Unlimited.*
b) © *Dennis Drenner/Visuals Unlimited.*

En estas y otras observaciones, las gotas de líquido se comportan como pequeños globos esféricos llenos con ese líquido y su superficie actúa como una membrana elástica estirada sometida a tensión. La fuerza de tracción que causa esta tensión actúa paralela a la superficie y se debe a las fuerzas de atracción entre las moléculas del líquido. La magnitud de esta fuerza por unidad de longitud se llama **tensión superficial** σ_s y se expresa en la unidad N/m (o lbf/ft en las unidades inglesas). Este efecto también se conoce como *energía superficial* y se expresa en la unidad equivalente de N · m/m^2 o J/m^2. En este caso, σ_s representa el trabajo de estiramiento que se necesita para hacer que aumente el área superficial del líquido en una cantidad unitaria.

Para visualizar cómo surge la tensión superficial, en la figura 2-20 se presenta una vista microscópica donde se consideran dos moléculas de líquido, una en la superficie y la otra a profundidad en la masa del líquido. Las fuerzas de atracción que se aplican sobre la molécula interior por las moléculas que la rodean se equilibran entre sí debido a la simetría. Pero las fuerzas de atracción que actúan sobre la molécula en la superficie no son simétricas y las fuerzas de atracción que se aplican por las moléculas de gas que están arriba suelen ser muy pequeñas. Por lo tanto, existe una fuerza de atracción neta que actúa sobre la molécula en la superficie del líquido, la cual tiende a jalar de las moléculas que están en la superficie hacia el interior del líquido. Esta fuerza se equilibra por las fuerzas de repulsión provenientes de las moléculas que están debajo de la superficie y que están siendo comprimidas. El efecto de compresión resultante hace que el líquido minimice su área superficial. Esta es la razón de la tendencia de las gotas de líquido de alcanzar una forma esférica, la cual tiene el área superficial mínima para un volumen dado.

Quizá el lector también haya observado, divertido, que algunos insectos pueden aterrizar sobre el agua o, inclusive, caminar sobre ella (Fig. 2-19*b*) y que las agujas pequeñas de acero pueden flotar sobre el agua. De nuevo, estos fenómenos son posibles por la tensión superficial que equilibra los pesos de estos objetos.

Para comprender mejor el efecto de la tensión superficial, considérese una película de líquido (como la película de una pompa de jabón) suspendida de un marco de alambre en forma de U, con un lado movible (Fig. 2-21). Normalmente, la película de líquido tiende a jalar del alambre movible hacia dentro, para minimizar su área superficial. Necesita aplicarse una fuerza F sobre ese alambre movible, en la dirección opuesta, para equilibrar este efecto de tirón. La delgada película que está en el aparato tiene dos superficies (la superior y la inferior) expuestas al aire, y por lo tanto, la longitud a lo largo de la cual actúa en este caso es $2b$. Entonces, un equilibrio de fuerzas sobre el alambre movible da $F = 2b\sigma_s$, y de este modo, la tensión superficial se puede expresar como:

$$\sigma_s = \frac{F}{2b} \tag{2-35}$$

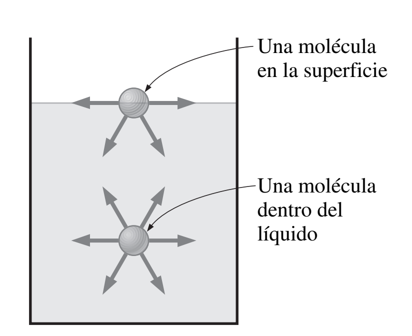


FIGURA 2-20
Fuerzas de atracción que actúan sobre una molécula de líquido en la superficie y a profundidad de un líquido.

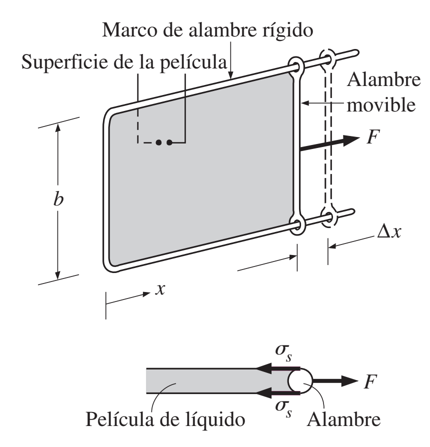


FIGURA 2-21
Estiramiento de una película de líquido con un alambre en forma de U y las fuerzas que actúan en el alambre movible de longitud b.

Nótese que para $b = 0.5$ m, la fuerza F medida (en N) es sencillamente la tensión superficial en N/m. Se puede usar un aparato de este tipo, con precisión suficiente, para medir la tensión superficial de varios fluidos.

En el alambre con forma de U, la fuerza F permanece constante conforme se jala del alambre movible para estirar la película y aumentar su área superficial. Cuando se tira del alambre movible una distancia Δx, el área superficial aumenta en $\Delta A = 2b\,\Delta x$, y el trabajo W realizado durante este proceso de estiramiento es

$$W = \text{Fuerza} \times \text{ Distancia} = F\,\Delta x = 2b\sigma_s\,\Delta x = \sigma_s\,\Delta A$$

supuesto que la fuerza permanece constante en este caso. Este resultado también se puede interpretar como *la energía superficial de la película se incrementa en una cantidad* $\sigma_s\,\Delta A$ *durante este proceso de estiramiento*, lo cual es coherente con la interpretación alternativa de σ_s como energía superficial. Esto es semejante a una banda de caucho que tiene mayor energía potencial (elástica) después de que se estira todavía más. En el caso de la película del líquido, el trabajo se usa para mover las moléculas del líquido de las partes interiores hacia la superficie, contra las fuerzas de atracción de las otras moléculas. Por lo tanto, la tensión superficial también se puede definir como *el trabajo realizado por unidad de incremento en el área superficial del líquido*.

La tensión superficial varía mucho de una sustancia a otra y con la temperatura para una sustancia dada, como se muestra en la tabla 2-4. Por ejemplo, a 20°C la tensión superficial es de 0.073 N/m, para el agua, y de 0.440 N/m, para el mercurio rodeado por aire atmosférico. Las gotas de mercurio forman bolas esféricas que se pueden hacer rodar como una bola sólida sobre una superficie, sin mojar esa superficie. En general, la tensión superficial de un líquido disminuye con la temperatura y llega a cero en el punto crítico (por tanto, a temperaturas por arriba del punto crítico no se tiene una interfaz marcada líquido-vapor). El efecto de la presión sobre la tensión superficial suele ser despreciable.

La tensión superficial de una sustancia puede cambiarse de manera considerable por la presencia de *impurezas*. Por lo tanto, se pueden agregar ciertos productos químicos, llamados *surfactantes*, a un líquido para disminuir su tensión superficial. Por ejemplo, los jabones y detergentes hacen disminuir la tensión superficial del agua y permiten su penetración por las pequeñas aberturas entre las fibras con el fin de lograr un lavado eficaz. Pero esto también significa que los aparatos cuya operación depende de la tensión superficial (como los tubos de calor) pueden ser destruidos por la presencia de impurezas debida a una inadecuada mano de obra.

Se habla de la tensión superficial para los líquidos sólo en las interfaces líquido-líquido o líquido-gas. Por lo tanto, cuando se especifica la tensión superficial, es importante distinguir el líquido o gas adyacente. Asimismo, la tensión superficial determina el tamaño de las gotas de líquido que forma. Una gota que continúa creciendo por la adición de más masa se romperá cuando la tensión superficial ya no pueda mantenerla íntegra. Esto es semejante a lo que le pasa a un globo que se reventará mientras se infla, cuando la presión del interior se eleve por arriba de la resistencia del material del globo.

Una interfaz curva indica una diferencia de presión (o "salto de presión") de un lado al otro de ella, y se encuentra la presión más elevada en el lado cóncavo. Por ejemplo, se puede determinar el exceso de presión ΔP dentro de una gota o burbuja, por arriba de la presión atmosférica, cuando se considere el diagrama de cuerpo libre de la mitad de ellas (Fig. 2-22). Nótese que la tensión superficial

TABLA 2-4

Tensión superficial de algunos fluidos en aire a 1 atm y 20°C (a menos que se indique otra cosa)

Fluido	Tensión superficial σ_s, N/m*
Agua:	
0°C	0.076
20°C	0.073
100°C	0.059
300°C	0.014
Glicerina	0.063
Aceite SAE 30	0.035
Mercurio	0.440
Alcohol etílico	0.023
Sangre, 37°C	0.058
Gasolina	0.022
Amoniaco	0.021
Solución de jabón	0.025
Queroseno	0.028

* Multiplíquese por 0.06852 para convertir a lbf/pie.

actúa a lo largo de la circunferencia y la presión actúa sobre el área, el equilibrio horizontal de fuerzas para la gota y la burbuja dan:

Gota: $$(2\pi R)\sigma_s = (\pi R^2)\Delta P_{\text{gota}} \rightarrow \Delta P_{\text{gota}} = P_i - P_o = \frac{2\sigma_s}{R} \quad \textbf{(2-36)}$$

Burbuja: $$2(2\pi R)\sigma_s = (\pi R^2)\Delta P_{\text{burbuja}} \rightarrow \Delta P_{\text{burbuja}} = P_i - P_o = \frac{4\sigma_s}{R} \quad \textbf{(2-37)}$$

donde P_i y P_o son las presiones dentro y fuera de la gota o burbuja, respectivamente. Cuando la gota o burbuja se encuentran en la atmósfera, P_o es sencillamente la presión atmosférica. El factor 2 en el equilibrio de fuerzas para la burbuja se debe a que ésta consta de una película con *dos* superficies (interior y exterior), por lo que se tienen dos circunferencias en la sección transversal.

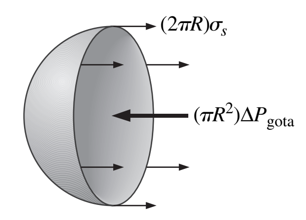
También se puede determinar la presión en exceso en una gota (o burbuja) cuando se considera un incremento diferencial en el radio de ella, debido a la adición de una cantidad diferencial de masa e interpretando la tensión superficial como el incremento en la energía superficial por unidad de área. Entonces el incremento en la energía superficial de la gota durante este proceso de expansión diferencial queda:

$$\delta W_{\text{superficial}} = \sigma_s\, dA = \sigma_s\, d(4\pi R^2) = 8\pi R\sigma_s\, dR$$

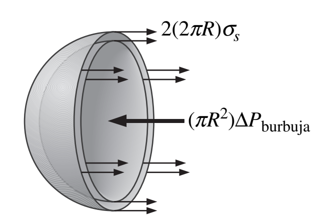
El trabajo de expansión que se realiza durante este proceso diferencial se determina al multiplicar la fuerza por la distancia, para obtener:

$$\delta W_{\text{expansión}} = \text{Fuerza} \times \text{ Distancia} = F\, dR = (\Delta PA)\, dR = 4\pi R^2\, \Delta P\, dR$$

Si se igualan las dos expresiones antes encontradas da $\Delta P_{\text{gota}} = 2\sigma_s/R$, la cual es la misma relación obtenida antes y dada en la ecuación 2-36. Nótese que la presión en exceso en una gota o burbuja es proporcional al radio.



a) Mitad de una gota



b) Mitad de una burbuja

FIGURA 2-22
Diagrama de cuerpo libre de la mitad de una gota y de la mitad de una burbuja.

Efecto de capilaridad

Otra consecuencia interesante de la tensión superficial es el **efecto de capilaridad**, el cual es el ascenso o descenso de un líquido en un tubo de diámetro pequeño insertado en un líquido. Esos tubos angostos o canales de flujo confinado se llaman **capilares**. El ascenso del queroseno por una mecha de algodón insertada en el recipiente de una lámpara con este combustible se debe a este efecto. El efecto de capilaridad también es parcialmente causante del ascenso del agua hasta la punta de los árboles altos. La superficie libre curva de un líquido en un tubo capilar se llama **menisco**.

Es común observar que el agua en un recipiente de vidrio presenta una curvatura ligeramente hacia arriba en los bordes en donde toca la superficie del vidrio; pero, para el mercurio, ocurre lo contrario: se observa una curva hacia abajo en los bordes (Fig. 2-23). Este efecto suele expresarse del agua cuando se dice que *moja* el vidrio (al pegarse a él), en tanto que el mercurio no lo hace. La intensidad del efecto de capilaridad se cuantifica por el **ángulo de contacto** (o *de mojadura*) ϕ, definido como *el ángulo que la tangente a la superficie del líquido forma con la superficie sólida en el punto de contacto*. La fuerza de tensión superficial actúa a lo largo de esta recta tangente hacia la superficie sólida. Se dice que un líquido moja la superficie cuando $\phi < 90°$ y no la moja cuando $\phi > 90°$. En el aire atmosférico, el ángulo de contacto del agua (y de la mayor parte de otros líquidos orgánicos) con el vidrio es casi cero, $\phi \approx 0°$ (Fig. 2-24).

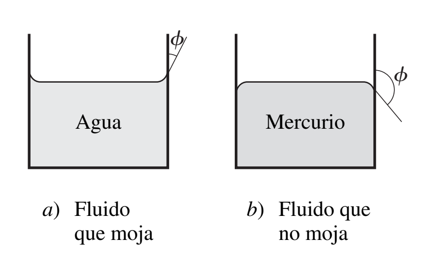


FIGURA 2-23
Ángulo de contacto para fluidos que mojan y que no-mojan.

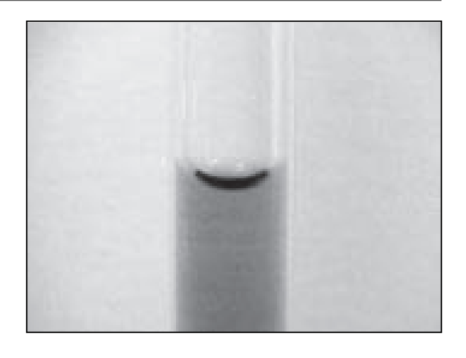


FIGURA 2-24
Menisco de agua coloreada en un tubo de vidrio con un diámetro interior de 4 mm. Nótese que el borde del menisco se encuentra con la pared del tubo capilar y forman un ángulo de contacto muy pequeño.
Fotografía tomada por Gabrielle Trembley, Pennsylvania State University. Reproducida con autorización.

Por lo tanto, la fuerza de tensión superficial actúa hacia arriba sobre el agua en un tubo de vidrio, a lo largo de la circunferencia, tendiendo a jalar del agua hacia arriba. Como resultado, el agua asciende en el tubo hasta que el peso del líquido en el tubo, por arriba del nivel de éste en el recipiente, equilibra la fuerza de tensión superficial. En el aire, el ángulo de contacto es de 130° para el mercurio-vidrio, y de 26° para el queroseno-vidrio. Nótese que, en general, el ángulo de contacto es diferente para medios ambientes distintos (como otro gas o líquido en lugar del aire).

El fenómeno del efecto de capilaridad se puede explicar en forma microscópica cuando se consideran las *fuerzas de cohesión* (las fuerzas entre las moléculas semejantes, como agua y agua) y las *fuerzas de adhesión* (las fuerzas entre las moléculas diferentes, como agua y vidrio). Las moléculas del líquido en la interfaz sólido-líquido están sometidas tanto a fuerzas de cohesión, por parte de las otras moléculas del líquido, como a fuerzas de adhesión, por parte de las moléculas del sólido. Las magnitudes relativas de estas fuerzas determinan si un líquido moja o no una superficie sólida. Es obvio que las moléculas de agua son atraídas con mayor intensidad hacia las moléculas de vidrio que como lo son hacia las otras moléculas de agua y, en consecuencia, el agua tiende a ascender a lo largo de la superficie del vidrio. Para el mercurio ocurre lo opuesto, lo cual causa que la superficie del líquido cercana a la pared del vidrio se deprima (Fig. 2-25).

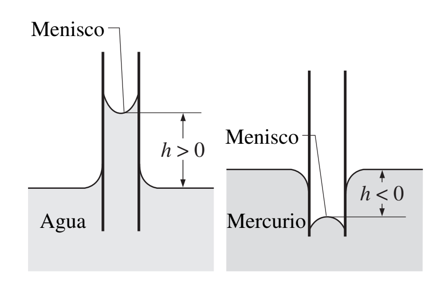


FIGURA 2-25
Ascenso por capilaridad del agua y descenso por capilaridad del mercurio en un tubo de vidrio de diámetro pequeño.

Se puede determinar la magnitud del ascenso por capilaridad en un tubo circular a partir de un equilibrio de fuerzas sobre la columna cilíndrica de líquido de altura h en el tubo (Fig. 2-26). El fondo de la columna de líquido está al mismo nivel que la superficie libre en el recipiente y, por lo tanto, la presión allí debe ser la atmosférica. Ésta equilibra la presión atmosférica que actúa sobre la superficie superior, y en consecuencia, estos dos efectos se cancelan entre sí. El peso de la columna de líquido es aproximadamente:

$$W = mg = \rho V g = \rho g(\pi R^2 h)$$

Cuando se iguala la componente vertical de la fuerza de tensión superficial al peso se obtiene:

$$W = F_{\text{superficial}} \;\rightarrow\; \rho g(\pi R^2 h) = 2\pi R \sigma_s \cos\phi$$

Despejando h da el ascenso por capilaridad como:

Ascenso por capilaridad: $$h = \frac{2\sigma_s}{\rho g R}\cos\phi \qquad (R = \text{constante}) \qquad \textbf{(2-38)}$$

Esta relación también es válida para los líquidos que no mojan (como el mercurio en el vidrio) y da el descenso por capilaridad. En este caso $\phi > 90°$, de donde $\cos\phi < 0$, lo cual hace que h sea negativa. Por lo tanto, un valor negativo del ascenso por capilaridad corresponde a un descenso (Fig. 2-25).

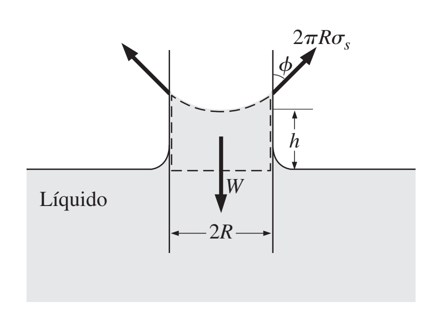


FIGURA 2-26
Fuerzas que actúan una columna de líquido que ha ascendido en un tubo debido al efecto de capilaridad.

Nótese que el ascenso por capilaridad es inversamente proporcional al radio del tubo. Por lo tanto, cuanto más delgado sea el tubo, mayor es el ascenso (o descenso) del líquido en él. En la práctica, el efecto de capilaridad suele ser despreciable en los tubos cuyo diámetro es mayor de 1 cm. Cuando se hacen mediciones de presión con el uso de manómetros y barómetros es importante utilizar tubos suficientemente grandes para minimizar el efecto de capilaridad. El ascenso por capilaridad también es inversamente proporcional a la densidad del líquido, como era de esperarse. Así, los líquidos más ligeros experimentan ascensos más grandes por capilaridad. Por último, debe tenerse presente que se dedujo la ecuación 2-38 para tubos de diámetro constante y no debe usarse para tubos de sección transversal variable.

EJEMPLO 2-5 Ascenso por capilaridad del agua en un tubo

Se inserta un tubo de vidrio de 0.6 mm de diámetro en agua a 20°C que está en una copa. Determine el ascenso por capilaridad del agua en el tubo (Fig. 2-27).

SOLUCIÓN Debe determinarse el ascenso del agua en un tubo delgado, como resultado del efecto de capilaridad.

Hipótesis **1** No hay impurezas en el agua ni contaminación sobre la superficie del tubo de vidrio. **2** El experimento se realiza en aire atmosférico.

Propiedades La tensión superficial del agua a 20°C es de 0.073 N/m (Tabla 2-3). El ángulo de contacto del agua con el vidrio es de 0° (por lo tratado en el texto anterior). Se toma la densidad del agua líquida a 1 000 kg/m³.

Análisis El ascenso por capilaridad se determina en forma directa a partir de la ecuación 2-15, con la sustitución de los valores dados, se obtiene:

$$h = \frac{2\sigma_s}{\rho g R}\cos\phi = \frac{2(0.073\ \text{N/m})}{(1\,000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(0.3\times 10^{-3}\text{m})}(\cos\ 0°)\left(\frac{1\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{1\ \text{N}}\right)$$

$$= 0.050\ \text{m} = \mathbf{5.0\ cm}$$

Por lo tanto, el agua asciende en el tubo 5 cm hacia arriba del nivel del líquido en la copa.

Discusión Nótese que si el diámetro del tubo fuera de 1 cm, el ascenso por capilaridad sería de 0.3 mm, lo cual difícilmente es discernible por el ojo. En realidad, el ascenso por capilaridad en un tubo de diámetro grande sólo ocurre en el borde. El centro no asciende en lo absoluto. Por lo tanto, para los tubos de diámetro grande se puede ignorar el efecto de capilaridad.

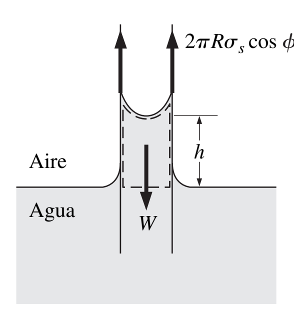


FIGURA 2-27
Esquema para el ejemplo 2-5.

RESUMEN

En este capítulo se discutieron varias propiedades de uso común en la mecánica de fluidos. Las propiedades de un sistema que dependen de la masa se llaman *propiedades extensivas* y las otras, *propiedades intensivas.* La *densidad* es masa por unidad de volumen y el *volumen específico* es volumen por unidad de masa. La *gravedad específica* se define como la razón de la densidad de una sustancia a la densidad del agua a 4°C,

$$GE = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}$$

La ecuación de estado del gas ideal se expresa como:

$$P = \rho RT$$

donde P es la presión absoluta, T es la temperatura termodinámica, ρ es la densidad y R es la constante del gas.

A una temperatura determinada, la presión a la cual una sustancia pura cambia de fase se llama *presión de saturación*. Para los procesos de cambio de fase entre las fases de líquido y vapor de una sustancia pura, es común llamar *presión de vapor* P_v a la presión de saturación. Las burbujas de vapor que se forman en las regiones de baja presión en un líquido (fenómeno llamado *cavitación*) se desintegran conforme son barridas y alejadas de esas regiones, y generan ondas de extremadamente altas presiones intensamente destructivas.

La energía puede existir en numerosas formas y su suma constituye la *energía total E* (o *e* en términos de la unidad de masa) de un sistema. La suma de todas las formas microscópicas de energía se llama *energía interna U* de un sistema. La energía que un sistema tiene como resultado de su movimiento respecto a algún marco de referencia se llama *energía cinética*, y se expresa por unidad de masa como ec = $V^2/2$, y la energía que un sistema tiene como resultado de su elevación en un campo gravitacional se llama *energía potencial*, que se expresa por unidad de masa como ep = gz.

Los efectos de compresibilidad en un fluido se representan por el **coeficiente de compresibilidad** κ (también conocido como **módulo de elasticidad de volumen**), definido como:

$$\kappa = -v\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = \rho\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \cong -\frac{\Delta P}{\Delta v/v}$$

La propiedad que representa la variación de la densidad de un fluido con la temperatura, a presión constante, es el **coeficiente de expansión volumétrica** (o expansividad volumétrica) β, definido como:

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \cong -\frac{\Delta\rho/\rho}{\Delta T}$$

La *viscosidad* de un fluido es una medida de su resistencia a la deformación. La fuerza tangencial por unidad de área se llama *esfuerzo cortante* y se expresa para el flujo tangencial simple entre placas (flujo unidimensional) como:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad o *viscosidad dinámica* (o *absoluta*) del fluido, u es la componente de la velocidad en la dirección del flujo y y es la dirección normal a la dirección de ese flujo. Los fluidos que obedecen esta relación lineal se conocen como *fluidos newtonianos*. La razón de la viscosidad dinámica a la densidad se llama *viscosidad cinemática* ν.

El efecto de tracción sobre las moléculas del líquido en una interface, causado por las fuerzas de atracción de las moléculas por unidad de longitud se llama *tensión superficial* σ_s. El exceso de presión ΔP dentro de una gota o burbuja esféricas se expresa por:

$$\Delta P_{\text{gota}} = P_i - P_o = \frac{2\sigma_s}{R} \quad \text{y} \quad \Delta P_{\text{burbuja}} = P_i - P_o = \frac{4\sigma_s}{R}$$

donde P_i y P_o son las presiones dentro y fuera de la gota o burbuja. El ascenso o descenso de un líquido en un tubo de diámetro pequeño insertado en un líquido, debido a la tensión superficial, se llama *efecto de capilaridad*. El ascenso o descenso por capilaridad se expresa por:

$$h = \frac{2\sigma_s}{\rho g R} \cos \phi$$

donde ϕ es el *ángulo de contacto*. El ascenso por capilaridad es inversamente proporcional al radio del tubo y es despreciable para tubos cuyo diámetro sea mayor a 1 cm.

La densidad y la viscosidad son dos de las propiedades fundamentales de los fluidos y se usan de manera extensa en los capítulos siguientes. En el capítulo 3 se considera el efecto de la densidad sobre la variación de la presión en un fluido y se determinan las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre las superficies. En el capítulo 8 se calcula la caída de presión que se origina por los efectos viscosos durante el flujo y se usa en la determinación de las necesidades de potencia de bombeo. La viscosidad también se emplea, en los capítulos 9 y 10, como una propiedad clave en la formulación y resoluciones de ecuaciones del movimiento de fluidos.

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. E. C. Bingham, “An Investigation of the Laws of Plastic Flow”, *U.S. Bureau of Standards Bulletin*, 13, pp. 309-353, 1916.

2. Y. A. Cengel y M. A. Boles, *Thermodynamics: An Engineering Approach*, 4a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2002.

3. C. T. Crowe, J. A. Roberson y D. F. Elger, *Engineering Fluid Mechanics*, 7a. ed. Nueva York: Wiley, 2001.

4. R. W. Fox y A. T. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics*, 5a. ed. Nueva York: Wiley, 1999.

5. D. C. Giancoli, *Physics*, 3a. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.

6. M. C. Potter y D. C. Wiggert. *Mechanics of Fluids*, 2a. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.

7. Y. S. Touloukian, S. C. Saxena y P. Hestermans. *Thermophysical Properties of Matter*, *The TPRC Data Series*, vol. 11, *Viscosity*; Nueva York: Plenum, 1975.

8. L. Trefethen. “Surface Tension in Fluid Mechanics”, *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*, Cambridge, MA: MIT Press, 1972.

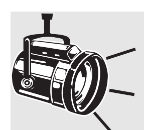
9. *The U.S. Standard Atmosphere*, Washington, DC: U.S. Government Printing Office, 1976.

10. M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Stanford, CA: Parabolic Press, 1982.

11. F. M. White, *Fluid Mechanics*, 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2003.

12. C. L. Yaws, X. Lin y L. Bu, “Calculate Viscosities for 355 Compounds. An Equation Can Be Used to Calculate Liquid Viscosity as a Function of Temperature”, *Chemical Engineering*, 101, núm. 4, pp. 1110-1128, abril 1994.

13. C. L. Yaws, *Handbook of Viscosity*, 3 vols., Houston, TX: Gulf Publishing, 1994.



PROYECTOR DE APLICACIONES ■ Cavitación

Autores invitados: G. C. Lauchle y M. L. Billet,
Penn State University

La *cavitación* es la ruptura de un líquido o de un interfaz fluido-sólido causada por una reducción de la presión estática local producida por la acción dinámica del fluido en el interior y/o en las fronteras de un sistema líquido. La ruptura es la formación de una burbuja visible. Los líquidos, como el agua, contienen muchos vacíos microscópicos que actúan como *núcleos de cavitación*. La cavitación ocurre cuando estos núcleos crecen hasta un tamaño visible significativo. Aun cuando la ebullición también es la formación de vacíos en un líquido, se suele separar este fenómeno de la cavitación porque se causa por un aumento en la temperatura más bien que por una reducción en la presión. La cavitación se puede usar en formas benéficas como en limpiadores ultrasónicos, grabadores y cortadores. Pero con mayor frecuencia, la cavitación debe evitarse en las aplicaciones de flujo de fluidos porque arruina el rendimiento hidrodinámico, causa ruido extremadamente fuerte y elevados niveles de vibración y daña (erosiona) las superficies que la soportan. Cuando las burbujas de cavitación entran en regiones de alta presión y se desintegran, las ondas subacuáticas de choque a veces crean diminutas cantidades de luz. Este fenómeno se conoce como *sonoluminiscencia*.

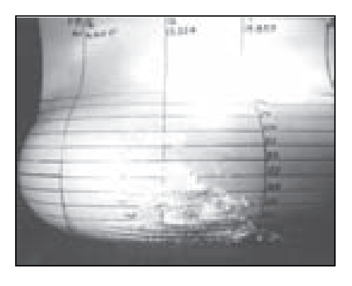
En la figura 2-28 se ilustra la *cavitación de un cuerpo*. El cuerpo es un modelo de la región bulbosa subacuática de la proa de un barco. Se le da esta forma porque ubicado dentro de ella se encuentra un sistema de navegación y determinación de la distancia por medio del sonido (*so*und *na*vigation and *r*anging system, sonar) que tiene forma esférica. En consecuencia, esta parte del barco se llama *domo del sonar*. A medida que el barco se acelera para alcanzar más y más velocidad, algunos de estos domos empiezan a cavitar y el ruido creado por la cavitación inutiliza el sistema de sonar. Los arquitectos navales y los especialistas en dinámica de fluidos intentan diseñar estos domos de modo que no caviten. Las pruebas a escala en modelos permiten al ingeniero ver de primera mano si un diseño determinado proporciona un rendimiento mejorado respecto a la cavitación. En virtud de que esas pruebas se conducen en túneles de agua, las condiciones del agua de prueba deben tener núcleos suficientes como para modelar las condiciones en que opera el prototipo. Esto garantiza que se minimice el efecto de la tensión del líquido (distribución de los núcleos). Las variables importantes son el nivel de contenido de gas (distribución de los núcleos) del agua, la temperatura y la presión hidrostática a la cual el cuerpo opera. La cavitación aparece en principio conforme aumenta la velocidad V o a medida que se hace disminuir la profundidad h de sumersión en el punto de presión mínima $C_{p_{\text{mín}}}$ del cuerpo. Por lo tanto, un diseño adecuado hidrodinámico demanda que $2(P_\infty - P_v)/\rho V^2 > C_{p_{\text{mín}}}$, donde ρ es la densidad, $P_\infty = \rho g h$ es la referencia de la presión estática, C_p es el coeficiente de presión (Cap. 7) y P_v es la presión de vapor del agua.

Bibliografía

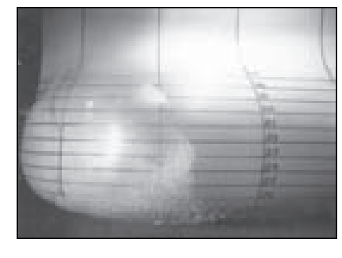
Lauchle, G. C., Billet, M. L. y Deutsch, S., “High-Reynolds Number Liquid Flow Measurements”, *Lecture Notes in Engineering*, vol. 46, *Frontiers in Experimental Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, Berlín, editado por M. Gad-el-Hak, Cap. 3, pp. 95-158, 1989.

Ross, D., *Mechanics of Underwater Noise*, Peninsula Publ., Los Altos, CA, 1987.

Barber, B. P., Hiller, R. A., Löfstedt, R., Putterman, S. J. y Weninger, K. R., “Defining the Unknowns of Sonoluminescence”, *Physics Reports*, vol. 281, pp. 65-143, 1997.



a)



b)

FIGURA 2-28
a) Se presenta la *cavitación vaporosa* en el agua que tiene muy poco gas atrapado, como la que se encuentra a grandes profundidades en una masa de agua. Se forman las burbujas de cavitación cuando la velocidad del cuerpo, en este caso la región bulbosa de la proa del domo del sonar de un barco de superficie aumenta hasta el punto en que la presión estática local cae por abajo de la presión del agua. En esencia, las burbujas de cavitación se llenan con vapor de agua. Este tipo de cavitación es muy violenta y ruidosa. *b*) Por otro lado, en agua poco profunda, se tiene mucho más gas atrapado en el agua para actuar como núcleos de cavitación. Esto se debe a la proximidad del domo a la atmósfera en la superficie del agua. Las burbujas de cavitación aparecen primero a una velocidad más baja y, por lo tanto, a una presión estática local más alta. Están llenas de manera predominante con los gases atrapados en el agua, de modo que esto se conoce como *cavitación gaseosa*.

PROBLEMAS*

Densidad y gravedad específica

2-1C ¿Cuál es la diferencia entre propiedades intensivas y extensivas?

2-2C ¿Qué es la gravedad específica? ¿Cómo está relacionada con la densidad?

2-3C ¿En qué condiciones la hipótesis del gas ideal es adecuada para los gases reales?

2-4C ¿Cuál es la diferencia entre R y R_u? ¿Cómo están relacionadas?

2-5 Un globo esférico con diámetro de 6 m se llena con helio a 20°C y 200 kPa. Determine el número de moles y la masa del helio en el globo. *Respuestas:* 9.28 kmol, 37.2 kg

2-6 Vuelva a considerar el problema 2-5. Usando el software EES (o cualquier otro programa de este tipo), investigue el efecto del diámetro del globo en la masa de helio contenida en el mismo, para las presiones de *a*) 100 kPa y *b*) 200 kPa. Haga que el diámetro varíe desde 5 hasta 15 m. Trace la gráfica de la masa de helio contra el diámetro para los dos casos.

2-7 La presión en un neumático de automóvil depende de la temperatura del aire contenido en él. Cuando la temperatura del aire es de 25°C, la lectura del manómetro es de 210 kPa. Si el volumen del neumático es de 0.025 m³, determine la elevación de la presión cuando la temperatura del aire en él sube hasta 50°C. También, determine la cantidad de aire que debe purgarse para restablecer la presión hasta su valor original, a esta temperatura. Suponga que la presión atmosférica es de 100 kPa.

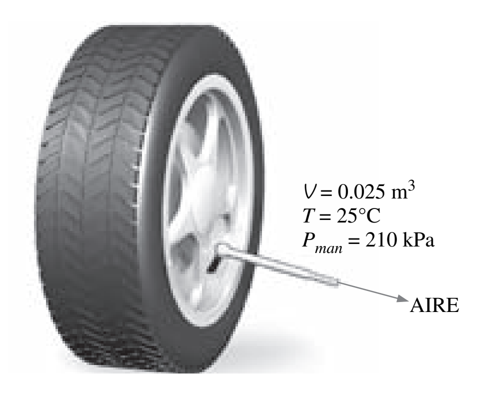


FIGURA P2-7

2-8I El aire en un neumático de automóvil, cuyo volumen es de 0.53 ft³ está a 90°F y 20 psig (libras-fuerza por pulgada cuadrada, presión manométrica). Determine la cantidad de aire que debe agregarse para elevar la presión hasta el valor recomendado de 30 psig. Suponga que la presión atmosférica es de 14.6 psia (libras-fuerza por pulgada cuadrada, presión absoluta) y que la temperatura y el volumen permanecen constantes. *Respuesta:* 0.0260 lbm

2-9I Un tanque rígido contiene 20 lbm de aire a 20 psia y 70°F. Se agrega más aire al tanque hasta que la presión y la temperatura se elevan hasta 35 psia y 90°F, respectivamente. Determine la cantidad de aire agregada al tanque. *Respuesta:* 13.7 lbm

2-10 La densidad del aire atmosférico varía con la elevación y drecrece con el aumento de la altitud. *a*) Use los datos que se indican en la tabla y obtenga una relación para la variación de la densidad con la elevación y calcule la densidad a una elevación de 7 000 m. *b*) Calcule la masa de la atmósfera, use la correlación que obtuvo. Suponga que la Tierra es una esfera perfecta con un radio de 6 377 km y tómese el espesor de la atmósfera como 25 km.

z, km	ρ, kg/m³
6377	1.225
6378	1.112
6379	1.007
6380	0.9093
6381	0.8194
6382	0.7364
6383	0.6601
6385	0.5258
6387	0.4135
6392	0.1948
6397	0.08891
6402	0.04008

Presión de vapor y cavitación

2-11C ¿Qué es la presión de vapor? ¿Cómo está relacionada con la presión de saturación?

2-12C ¿A presiones más elevadas el agua hierve a temperaturas más altas? Explique.

2-13C Si se aumenta la presión de una sustancia durante un proceso de ebullición, ¿la temperatura también aumentará o permanecerá constante? ¿Por qué?

2-14C ¿Qué es cavitación? ¿Y qué la causa?

2-15 En un sistema de tuberías, la temperatura del agua permanece por abajo de 40°C. Determine la presión mínima admisible en el sistema para evitar la cavitación.

2-16 El análisis de una hélice que opera en el agua a 20°C muestra que la presión en las puntas de la misma cae hasta 2 kPa en altas velocidades. Determine si existe peligro de cavitación para esta hélice.

* Los problemas designados por una "C" son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

2-17I El análisis de una hélice que opera en el agua a 70°F muestra que la presión en las puntas de la misma cae hasta 0.1 psia a altas velocidades. Determine si existe peligro de cavitación para esta hélice.

2-18 Se usa una bomba para transportar agua hasta un depósito alto. Si la temperatura del agua es de 25°C, determine la presión más baja que puede existir en la bomba sin cavitación.

Energía y calores específicos

2-19C ¿Cuál es la diferencia entre las formas macroscópica y microscópica de la energía?

2-20C ¿Qué es energía total? Identifique las diferentes formas de energía que constituyen la energía total.

2-21C Haga una lista de las formas de energía que contribuyen a la energía interna de un sistema.

2-22C ¿Cómo están interrelacionados el calor, la energía interna y la energía térmica?

2-23C ¿Qué es energía de flujo? ¿Los fluidos en reposo tienen alguna energía de flujo?

2-24C ¿Qué comparación existe entre las energías de un fluido fluyente y uno en reposo? Nombre las formas específicas de energía asociadas con cada caso.

2-25C Con el empleo de calores específicos promedios, explique cómo se pueden determinar los cambios en la energía interna de los gases ideales y de las sustancias incompresibles.

2-26C Con el empleo de calores específicos promedios, explique cómo se pueden determinar los cambios en la entalpía de los gases ideales y de las sustancias incompresibles.

Coeficiente de compresibilidad

2-27C ¿Qué representa el coeficiente de compresibilidad de un fluido? ¿Cuál es su diferencia con la compresibilidad isotérmica?

2-28C ¿Qué representa el coeficiente de expansión volumétrica de un fluido? ¿Cuál es su diferencia con el coeficiente de compresibilidad?

2-29C ¿Puede ser negativo el coeficiente de compresibilidad de un fluido? ¿Qué se puede decir acerca del coeficiente de expansión volumétrica?

2-30 Se observa que la densidad de un gas ideal decrece en 10 por ciento cuando se comprime en forma isotérmica de 10 atm hasta 11 atm. Determine el porcentaje de disminución en la densidad del gas si se comprime en forma isotérmica de 100 atm hasta 101 atm.

2-31 Con la definición del coeficiente de expansión volumétrica y la expresión $\beta_{\text{gas ideal}} = 1/T$, demuestre que el porcentaje de incremento en el volumen específico de un gas ideal durante la expansión isobárica es igual al porcentaje de aumento en la temperatura absoluta.

2-32 Se comprime en forma isotérmica agua a la presión de 1 atm hasta una presión de 800 atm. Determine el incremento en la densidad del agua. Tome la compresibilidad isotérmica del agua como 4.80×10^{-5} atm^{-1}.

2-33 Se calienta agua a 15°C y una presión de 1 atm hasta 100°C, a presión constante. Con los datos del coeficiente de expansión volumétrica, determine el cambio en la densidad del agua. *Respuesta:* −38.7 kg/m^3

2-34 Se enfría líquido saturado de refrigerante-134a a 10°C hasta 0°C, a presión constante. Con los datos del coeficiente de expansión volumétrica determine el cambio en la densidad del refrigerante.

2-35 Un tanque se llena por completo con agua líquida a 20°C. El material del tanque es tal que puede soportar tensión causada por una expansión volumétrica de 2 por ciento. Determine la elevación máxima en la temperatura admisible sin poner en peligro la seguridad.

2-36 Repita el problema 2-35 para una expansión volumétrica de 1 por ciento para el agua.

2-37 La densidad del agua de mar en una superficie libre donde la presión es de 98 kPa es aproximadamente de 1 030 kg/m^3. Tome el módulo de elasticidad de volumen del agua de mar como 2.34×10^9 N/m^2 y expresando la variación de la presión con la profundidad z como $dP = \rho g\, dz$ determine la densidad y la presión a una profundidad de 2 500 m. Descarte el efecto de la temperatura.

Viscosidad

2-38C ¿Qué es viscosidad? ¿Cuál es la causa de su presencia en los líquidos y en los gases? ¿Tienen los líquidos una viscosidad dinámica más elevada o los gases?

2-39C ¿Qué es un fluido newtoniano? ¿Es el agua un fluido newtoniano?

2-40C Considere dos pequeñas bolas de vidrio idénticas que se dejan caer en dos recipientes idénticos, uno lleno con agua y el otro con aceite. ¿Cuál de las dos bolas llegará primero al fondo del recipiente? ¿Por qué?

2-41C ¿Cómo varía la viscosidad dinámica de *a*) los líquidos y *b*) los gases con la temperatura?

2-42C ¿Cómo varía la viscosidad cinemática de *a*) los líquidos y *b*) los gases con la temperatura?

2-43 Se debe mover un bloque de 50 cm × 30 cm × 20 cm que pesa 150 N a una velocidad constante de 0.8 m/s sobre una superficie inclinada con un coeficiente de fricción de 0.27. *a*) Determine la fuerza F necesaria a aplicar en la dirección horizontal. *b*) Si se aplica una película de aceite de 0.4 mm de espesor, con una viscosidad dinámica de 0.012 Pa · s entre el bloque y la superficie inclinada, determine el porcentaje de reducción en la fuerza necesaria.

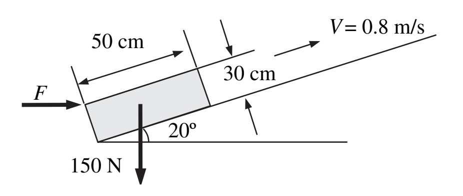


FIGURA P2-43

2-44 Considere el flujo de un fluido con viscosidad μ por un tubo circular. El perfil de velocidad en el tubo se expresa como $u(r) = u_{máx}(1 - r^n/R^n)$, en donde $u_{máx}$ es la velocidad máxima de flujo, la cual se tiene en la línea central; r es la distancia radial desde la línea central y $u(r)$ es la velocidad de flujo en cualquier posición r. Desarrolle una relación para la fuerza de arrastre ejercida sobre la pared del tubo por el fluido en la dirección del flujo, por unidad de longitud del tubo.

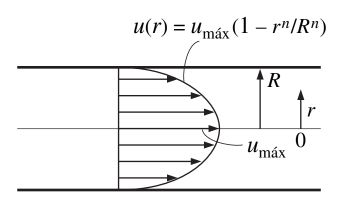


FIGURA P2-44

2-45 Se jala horizontalmente de una placa plana delgada de 20 cm × 20 cm a 1 m/s a través de una capa de aceite de 3.6 mm de espesor, que está entre dos placas, una estacionaria y la otra moviéndose a una velocidad constante de 0.3 m/s, como se muestra en la figura P2-45. La viscosidad dinámica del aceite es de 0.027 Pa · s. Suponiendo que la velocidad en cada una de las capas de aceite varía en forma lineal, *a*) trace la gráfica del perfil de velocidad y encuentre el lugar en donde la velocidad del aceite es cero y *b*) determine la fuerza que se necesita aplicar sobre la placa para mantener este movimiento.

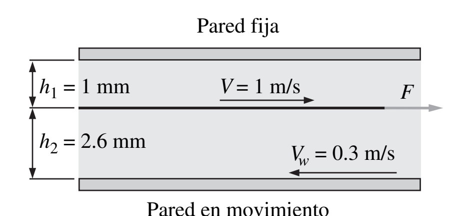


FIGURA P2-45

2-46 Un cuerpo en forma de cono cortado gira a velocidad angular constante de 200 rad/s en un recipiente lleno con aceite SAE 10W a 20°C (μ = 0.1 Pa · s), como se muestra en la figura P2-46. Si, especialmente en los lados, el espesor de la película de aceite es de 1.2 mm, determine la potencia necesaria para mantener este movimiento. Determine también la reducción en el consumo de potencia necesario cuando la temperatura del aceite se eleva hasta 80°C (μ = 0.0078 Pa · s).

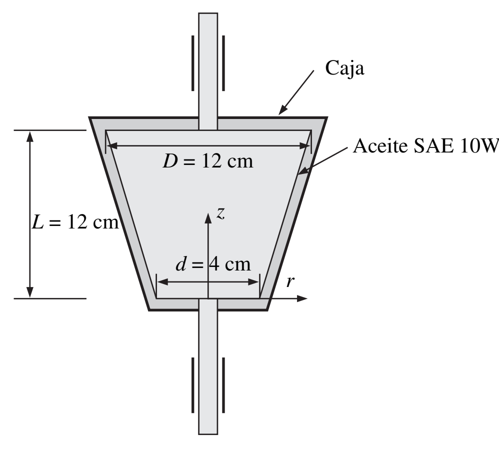


FIGURA P2-46

2-47 El sistema de embrague que se muestra en la figura P2-47 se usa para transmitir par de torsión mediante una película de aceite con μ = 0.38 N · s/m^2 que está entre dos discos idénticos de 30 cm de diámetro. Cuando la flecha impulsora gira a una velocidad de 1 450 rpm, se observa que la flecha impulsada gira a 1 398 rpm. Suponiendo un perfil lineal de velocidad para la película de aceite, determine el par de torsión transmitido.

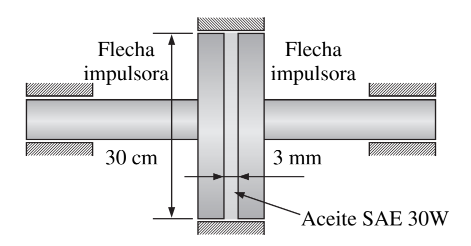


FIGURA P2-47

2-48 Reconsidere el problema 2-47. Con el software de EES (o cualquier otro programa de este tipo), investigue el efecto del espesor de la película de aceite en el par de torsión transmitido. Haga que el espesor de la película varíe desde 0.1 mm hasta 10 mm. Trace la gráfica de los resultados que obtenga y exprese sus conclusiones.

2-49 La viscosidad de algunos fluidos cambia cuando se aplica un fuerte campo eléctrico en ellos. Este fenómeno se conoce como efecto electrorreológico (ER) y los fluidos que muestran un comportamiento de este tipo se conocen como fluidos ER. El modelo del plástico de Bingham para el esfuerzo cortante, el cual se expresa como $\tau = \tau_y + \mu(du/dy)$ se usa con amplitud para describir el comportamiento de los fluidos ER, debido a su sencillez. Una de las aplicaciones más promisorias de los fluidos ER es el embrague ER. Un embrague ER típico de discos múltiples consta de varios discos de acero igualmente espaciados de radio interior R_1 y radio exterior R_2, N de ellos sujetos a la flecha de entrada. La brecha h entre los discos paralelos se llena con un líquido viscoso. *a*) Encuentre una relación para el par de torsión generado por el embrague cuando la flecha de salida está estacionaria y *b*) calcule el par de torsión para un embrague

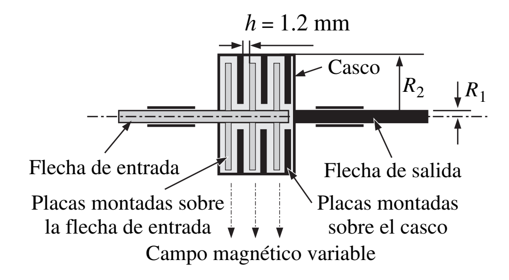


FIGURA P2-49

ER con $N = 11$ para $R_1 = 50$ mm, $R_2 = 200$ mm, y $\dot{n} = 2\,400$ rpm, si el fluido es SAE 10, con $\mu = 0.1$ Pa · s, $\tau_y = 2.5$ kPa, y $h = 1.2$ mm. *Respuesta:* *b*) 2 060 N · m

2-50 La viscosidad de algunos fluidos, llamados fluidos magnetorreológicos (MR), cambia cuando se aplica un campo magnético. Esos fluidos contienen partículas magnetizables con tamaño del orden de micras, suspendidas en un líquido portador apropiado y son adecuados para usarse en embragues hidráulicos controlables. Véase la figura P2-49. Los fluidos MR pueden tener viscosidades mucho más altas que los ER y, a menudo, muestran un comportamiento de adelgazamiento al corte, en el cual la viscosidad del fluido disminuye conforme aumenta la fuerza cortante aplicada. Este comportamiento también se conoce como seudoplástico y se puede representar con éxito mediante el modelo constitutivo de Herschel-Bulkley, expresado como $\tau = \tau_y + K(du/dy)^m$. Aquí τ es el esfuerzo cortante aplicado, τ_y es el esfuerzo en el punto de fluencia, K es el índice de consistencia y m es el índice de potencia. Para un fluido de Herschel-Bulkley con $\tau_y = 900$ Pa, $K = 58$ Pa · s^m, y $m = 0.82$, *a*) encuentre una relación para el par de torsión transmitido por un embrague MR, para N platos sujetos a la flecha de entrada cuando ésta se encuentra girando a una velocidad angular de ω mientras que la flecha de salida está estacionaria y *b*) calcule el par de torsión transmitido por un embrague de ese tipo, con $N = 11$ platos, para $R_1 = 50$ mm, $R_2 = 200$ mm, $\dot{n} = 2\,400$ rpm, y $h = 1.2$ mm.

2-51 Se va a medir la viscosidad de un fluido con un viscosímetro construido de dos cilindros concéntricos de 75 cm de largo. El diámetro exterior del cilindro interior es de 15 cm y la brecha entre los dos cilindros es de 0.12 cm. Se hace girar el cilindro interior a 200 rpm y se mide que el par de torsión es de 0.8 N · m. Determine la viscosidad del fluido.

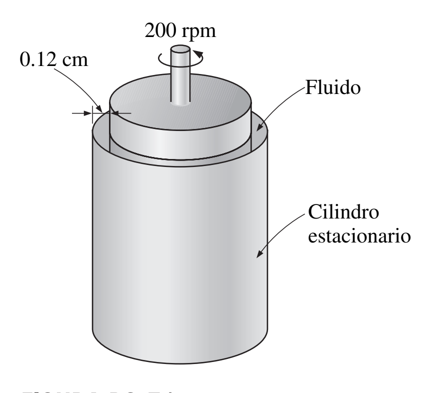


FIGURA P2-51

2-52I Se va a medir la viscosidad de un fluido con un viscosímetro construido con dos cilindros concéntricos de 3 pies de largo. El diámetro interior del cilindro exterior mide 6 pulgadas y la brecha entre los dos cilindros es de 0.05 pulgadas. Se hace girar el cilindro interior a 250 rpm y se mide que el par de torsión es de 1.2 lbf · ft. Determine la viscosidad del fluido. *Respuesta:* 0.000648 lb · s/ft^2

2-53 En las regiones alejadas de la entrada, el flujo de un fluido por un tubo circular es unidimensional y el perfil de velocidad para el flujo laminar se expresa como $u(r) = u_{máx}(1 - r^2/R^2)$, donde R es el radio del tubo, r es la distancia radial desde el centro de ese tubo y $u_{máx}$ es la velocidad máxima de flujo, la cual se tiene en el centro. Obtenga *a*) una relación para la fuerza de resistencia al movimiento aplicada por el fluido en una sección del tubo de longitud L y *b*) el valor de la fuerza de resistencia al movimiento para flujo de agua a 20°C, con $R = 0.08$ m, $L = 15$ m, $u_{máx} = 3$ m/s, y $\mu = 0.0010$ kg/m · s.

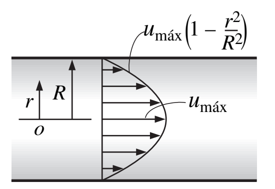


FIGURA P2-53

2-54 Repita el problema 2-53 para $u_{máx} = 5$ m/s. *Respuesta:* *b*) 0.942 N

Tensión superficial y efecto de capilaridad

2-55C ¿Qué es la tensión superficial? ¿Qué la causa? ¿Por qué la tensión superficial también recibe el nombre de energía superficial?

2-56C Considere una pompa de jabón. La presión dentro de la pompa ¿es más alta o más baja que la del exterior?

2-57C ¿Qué es el efecto de capilaridad? ¿Qué lo causa? ¿Cómo lo afecta el ángulo de contacto?

2-58C Se inserta un tubo de diámetro pequeño en un líquido cuyo ángulo de contacto es 110°. El nivel del líquido en el tubo ¿ascenderá o descenderá? Explique.

2-59C El efecto de capilaridad ¿es mayor en los tubos de diámetro pequeño o en los de diámetro grande?

2-60I Se introduce un tubo cuyo diámetro es de 0.03 pulgadas en queroseno a 68°F. El ángulo de contacto del queroseno con una superficie de vidrio es de 26°. Determine el ascenso por capilaridad del queroseno en el tubo. *Respuesta:* 0.65 pulgadas

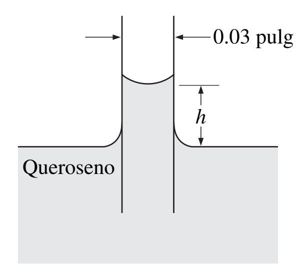


FIGURA P2-60E

2-61 Se introduce un tubo de diámetro de 1.9 mm en un líquido desconocido cuya densidad es de 960 kg/m^3 y se observa que el líquido asciende 5 mm en el tubo y forma un ángulo de contacto de 15°. Determine la tensión superficial del líquido.

2-62 Determine la presión manométrica en el interior de una pompa de jabón cuyo diámetro es de *a*) 0.2 cm y *b*) 5 cm a 20°C.

2-63 Los nutrientes disueltos en el agua los llevan hasta las partes superiores de las plantas diminutos tubos, en parte debido al efecto de capilaridad. Determine hasta qué altura ascenderá la solución acuosa en un árbol, en un tubo cuyo diámetro mide de 0.005 mm, como resultado del efecto de capilaridad. Trate la solución como agua a 20°C con un ángulo de contacto de 15°. *Respuesta:* 5.75 m

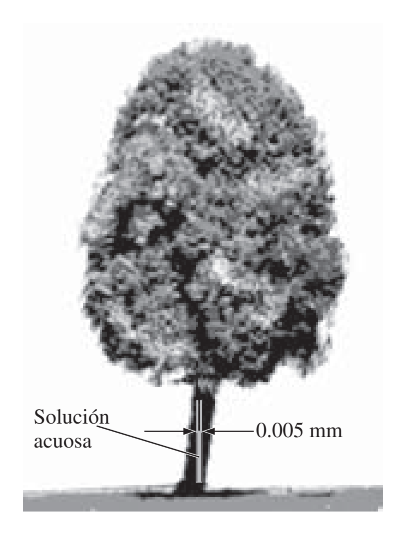


FIGURA P2-63

2-64 Se va a medir la tensión superficial de un líquido con el apoyo de una película de éste que está suspendida en un marco de alambre con forma de U con un lado movible de 8 cm de largo. Si la fuerza necesaria para mover el alambre es de 0.012 N, determine la tensión superficial de este líquido en el aire.

2-65 Contrario a lo que el lector podría esperar, una bola de acero sólido puede flotar sobre el agua debido al efecto de la tensión superficial. Determine el diámetro máximo de una bola de acero que flotaría sobre agua a 20°C. ¿Cuál sería su respuesta para una bola de aluminio? Tome la densidad de la bola de acero y de aluminio como 7 800 kg/m^3 y 2 700 kg/m^3, respectivamente.

Problemas de repaso

2-66 Antes de realizar un viaje, se mide la presión absoluta de un neumático de un automóvil: 290 kPa y, después de ese viaje, 310 kPa. Suponiendo que el volumen del neumático permanece constante a 0.022 m^3, determine el porcentaje de incremento en la temperatura absoluta del aire en el neumático.

2-67 Un tanque de 20 m^3 contiene nitrógeno a 25°C y 800 kPa. Se deja escapar algo del nitrógeno hasta que la presión en el tanque baja a 600 kPa. Si la temperatura en este punto es de 20°C, determine la cantidad de nitrógeno que ha escapado. *Respuesta:* 42.9 kg

2-68 En general, la composición de un líquido con partículas sólidas suspendidas se caracteriza por la fracción de esas partículas, en peso o masa $C_{s,\text{ masa}} = m_s/m_m$ o en volumen, $C_{s,\text{ vol}} = V_s/V_m$ donde m es la masa y V es el volumen. Los subíndices s y m indican sólido y mezcla, respectivamente. Desarrolle una expresión para la gravedad específica de una suspensión a base de agua en términos de$C_{s,\text{ masa}}$ y $C_{s,\text{ vol}}$.

2-69 Se suelen conocer las gravedades específicas de los sólidos y los fluidos portadores de una pasta aguada, pero la gravedad específica de esta última depende de la concentración de las partículas sólidas. Demuestre que la gravedad específica de una pasta aguada a base de agua se puede expresar en términos de la gravedad específica del sólido, GE$_s$ y la concentración en masa de las partículas sólidas suspendidas, $C_{s,\text{ masa}}$ como:

$$\text{GE}_m = \frac{1}{1 + C_{s,\text{ masa}}(1/\text{GE}_s - 1)}$$

2-70I Lo típico de las bombas es que la presión en el lado de la succión sea baja y las superficies en ese lado de la bomba son susceptibles a la cavitación, en especial a temperaturas elevadas del fluido. Si la presión mínima en el lado de la succión de un bamba de agua es 0.95 psia, determine la temperatura máxima del agua para evitar el peligro de la cavitación.

2-71 Un tanque cerrado está parcialmente lleno con agua a 60°C. Si se extrae por completo el aire que se encuentra sobre la superficie del agua, determine la presión absoluta en el espacio que se ha vaciado. Suponga que la temperatura permanece constante.

2-72 La variación de la viscosidad dinámica del agua con la temperatura absoluta se da como:

T, K	μ, Pa · s
273.15	1.787×10^{-3}
278.15	1.519×10^{-3}
283.15	1.307×10^{-3}
293.15	1.002×10^{-3}
303.15	7.975×10^{-4}
313.15	6.529×10^{-4}
333.15	4.665×10^{-4}
353.15	3.547×10^{-4}
373.15	2.828×10^{-4}

Con los datos de la tabla desarrolle una relación para la viscosidad en la forma de $\mu = \mu(T) = A + BT + CT^2 + DT^3 + ET^4$. Use la relación desarrollada, prediga las viscosidades dinámicas del agua a 50°C, a la cual el valor reportado en la literatura es de 5.468×10^{-4} Pa · s. Compare su resultado con los de la ecuación de Andrade, la cual se da en la forma de $\mu = D \cdot e^{B/T}$, donde D y B son constantes cuyos valores se deben determinar usando los datos de la viscosidad.

2-73 Considere el flujo laminar de un fluido newtoniano de viscosidad μ entre dos placas paralelas. El flujo es unidimensional y el perfil de velocidad se da como $u(y) = 4u_{\text{máx}}[y/h - (y/h)^2]$, donde y es la coordenada vertical desde la superficie del fondo, h es la distancia entre las dos placas y $u_{\text{máx}}$ es la velocidad máxima de flujo que se tiene a la mitad del plano.

Desarrolle una relación para la fuerza de arrastre, ejercida sobre las dos placas por el fluido en la dirección del flujo, por unidad de área de las placas.

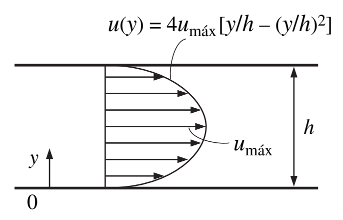


FIGURA P2-73

2-74 Algunos fluidos no-newtonianos se comportan como un plástico de Bingham, para los cuales el esfuerzo cortante se puede expresar como $\tau = \tau_y + \mu(du/dr)$. Para el flujo laminar de un plástico de Bingham en un tubo horizontal de radio R, el perfil de velocidad se expresa como $u(r) = (\Delta P/4\mu L)(r^2 - R^2) + (\tau_y/\mu)(r - R)$, en donde $\Delta P/L$ es la caída constante en la presión a lo largo del tubo, por unidad de longitud, μ es la viscosidad dinámica, r es la distancia radial desde la línea central y τ_y es el esfuerzo en el punto de fluencia del plástico de Bingham. Determine *a*) el esfuerzo cortante en la pared del tubo y *b*) la fuerza de arrastre que actúa sobre una sección del tubo de longitud L.

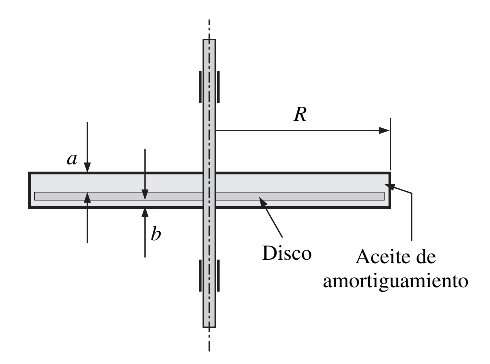


FIGURA P2-75

2-75 En algunos sistemas de amortiguación se usa como amortiguador un disco circular sumergido en aceite, como se muestra en la figura P2-75. Demuestre que el par de torsión de amortiguamiento es proporcional a la velocidad angular, de acuerdo con la relación $T_{\text{amortiguamiento}} = C\omega$ en donde $C = 0.5\pi\mu(1/a + 1/b)R^4$. Suponga perfiles lineales de velocidad en los dos lados del disco y desprecie los efectos en las puntas.

2-76I Se inserta un tubo de vidrio de 0.9 pulgadas de diámetro en mercurio, el cual forma un ángulo de contacto de 140° con el vidrio. Determine el descenso por capilaridad del mercurio en el tubo a 68°F. *Respuesta:* 0.0175 pulgadas.

2-77 Deduzca una relación para el ascenso por capilaridad de un líquido entre dos grandes placas paralelas separadas una distancia t que se introducen en el líquido verticalmente. Tome el ángulo de contacto como ϕ.

2-78 Considere una chumacera de 30 cm de largo que se lubrica con aceite cuya viscosidad es de 0.1 kg/m · s a 20°C al principio de la operación, y de 0.008 kg/m · s a la temperatura de operación anticipada de 80°C. El diámetro de la flecha es de 8 cm y la brecha promedio entre esa flecha y la chumacera es de 0.08 cm. Determine el par de torsión necesario para vencer la fricción en la chumacera, inicialmente, y durante la operación estacionaria, cuando la flecha se hace girar a 500 rpm.

Problemas de diseño y ensayo

2-79 Diseñe un experimento para medir la viscosidad de líquidos, use un embudo vertical con un recipiente cilíndrico de altura h y una sección angosta de flujo de diámetro D y longitud L. Establezca las hipótesis apropiadas, obtenga una relación para la viscosidad en términos de las cantidades que se miden con más facilidad, como la densidad y el gasto volumétrico.

2-80 Escriba un ensayo sobre el ascenso del fluido hasta la punta de los árboles por el efecto de capilaridad y otros efectos.

2-81 Escriba un ensayo sobre los aceites que se utilizan en motores de automóviles en las estaciones del año y sus viscosidades.

CAPÍTULO

3

PRESIÓN Y ESTÁTICA DE FLUIDOS

En este capítulo se estudian las fuerzas que aplican los fluidos en reposo o en el movimiento del cuerpo rígido. La propiedad de los fluidos responsable de esas fuerzas es la *presión*, la cual es una fuerza normal que ejerce el fluido por unidad de área. El capítulo empieza con un comentario detallado de la presión, incluye las *presiones absoluta* y *manométrica*, la presión en un *punto,* la *variación de la presión con la profundidad* en un campo gravitacional, el *manómetro*, el *barómetro* y los instrumentos para medir la presión. A continuación se comentan las *fuerzas hidrostáticas* aplicadas sobre cuerpos sumergidos con superficies planas y curvas. En seguida se analiza la *fuerza de flotación* que ejercen los fluidos sobre los cuerpos sumergidos o flotantes, y se analiza su *estabilidad*. Por último, se aplica la segunda ley de Newton del movimiento a una masa de fluido en movimiento que actúa como un cuerpo rígido y se estudia la variación de la presión en fluidos que sufren aceleración lineal y en recipientes giratorios. En este capítulo se usan frecuentemente los balances de fuerzas para cuerpos en equilibrio estático. Es conveniente repasar primero los temas relativos a la estática.

OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Determinar la variación de la presión en un fluido en reposo
- Calcular las fuerzas que ejerce un fluido en reposo sobre superficies sumergidas, planas o curvas
- Analizar el movimiento de cuerpo rígido de fluidos en recipientes, durante la aceleración lineal y la rotación

3-1 ▪ PRESIÓN

La **presión** se define como *una fuerza normal ejercida por un fluido por unidad de área*. Se habla de presión sólo cuando se trata de un gas o un líquido. La contraparte de la presión en los sólidos es el *esfuerzo normal*. Puesto que la presión se define como fuerza por unidad de área, tiene la unidad de newtons por metro cuadrado (N/m^2), la cual se llama **pascal** (Pa); es decir,

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

La unidad de presión pascal es demasiado pequeña para las presiones que se encuentran en la práctica; por lo tanto, son de uso común sus múltiplos *kilopascal* (1 kPa = 10^3 Pa) y el *megapascal* (1 MPa = 10^6 Pa). Otras unidades de presión de uso general en la práctica, en especial en Europa, son el *bar*, la *atmósfera estándar* y el *kilogramo-fuerza por centímetro cuadrado:*

$$\begin{aligned} 1 \text{ bar} &= 10^5 \text{ Pa} = 0.1 \text{ MPa} = 100 \text{ kPa} \\ 1 \text{ atm} &= 101{,}325 \text{ Pa} = 101.325 \text{ kPa} = 1.01325 \text{ bars} \\ 1 \text{ kgf/cm}^2 &= 9.807 \text{ N/cm}^2 = 9.807 \times 10^4 \text{ N/m}^2 = 9.807 \times 10^4 \text{ Pa} \\ &= 0.9807 \text{ bar} \\ &= 0.9679 \text{ atm} \end{aligned}$$

150 libras 300 libras

$A_{\text{pies}} = 50 \text{ in}^2$

$P = 3$ psi $P = 6$ psi

$$P = \sigma_n = \frac{W}{A_{\text{pies}}} = \frac{150 \text{ lbf}}{50 \text{ in}^2} = 3 \text{ psi}$$

FIGURA 3-1
El esfuerzo normal (o "presión") sobre los pies de una persona obesa es mucho mayor que sobre los de una persona delgada.

Nótese que las unidades de presión bar, atm y kgf/cm^2 son casi equivalentes entre sí. En el sistema inglés, la unidad de presión es la *libra-fuerza por pulgada cuadrada* (lbf/in^2 o psi) y 1 atm = 14.696 psi. Las unidades de presión kgf/cm^2 y lbf/in^2 también se denotan por kg/cm^2 y lb/in^2, respectivamente, y son de uso común en los medidores de presión para los neumáticos de automóvil. Se puede demostrar que kgf/cm^2 = 14.233 psi.

La presión también se usa para los sólidos como sinónimo para *esfuerzo normal,* el cual es la fuerza que actúa perpendicular a la superficie por unidad de área. Por ejemplo, una persona que pesa 150 lb, con un área de impresión de los pies de 50 in^2, ejerce una presión de 150 lbf/50 in^2 = 3.0 psi sobre el piso (Fig. 3-1). Si la persona se para sobre uno de sus pies, la presión se duplica. Si la persona aumenta de peso excesivamente, es probable que sienta molestias en sus pies debido al aumento de presión sobre éstos (el tamaño del pie no cambia debido al aumento de peso). Esto también explica por qué una persona puede caminar sobre nieve recién caída sin hundirse si usa zapatos grandes para caminar en ella, así como explica que una persona corta algún objeto con poco esfuerzo si usa un cuchillo afilado.

La presión real que se encuentra en una posición dada se llama **presión absoluta,** y se mide en relación con el vacío absoluto (es decir, presión cero absoluta). La mayoría de los instrumentos para medir la presión se calibran para que den una lectura de cero en la atmósfera (Fig. 3-2), de modo que indican la diferencia entre la presión absoluta y la presión atmosférica local. Esta diferencia se llama **presión manométrica.** Las presiones por abajo de la atmosférica se conocen como **presiones de vacío** y se miden con instrumentos de vacío que indican la diferencia entre la presión atmosférica y la absoluta. Las presiones absoluta, manométrica y de vacío son todas cantidades positivas y están interrelacionadas por

$$P_{\text{man}} = P_{\text{abs}} - P_{\text{atm}} \tag{3–1}$$

$$P_{\text{vac}} = P_{\text{atm}} - P_{\text{abs}} \tag{3–2}$$

Este concepto se ilustra en la figura 3-3.



FIGURA 3-2
Algunos manómetros básicos.
Dresser Instruments, Dresser, Inc. Reproducido con autorización.

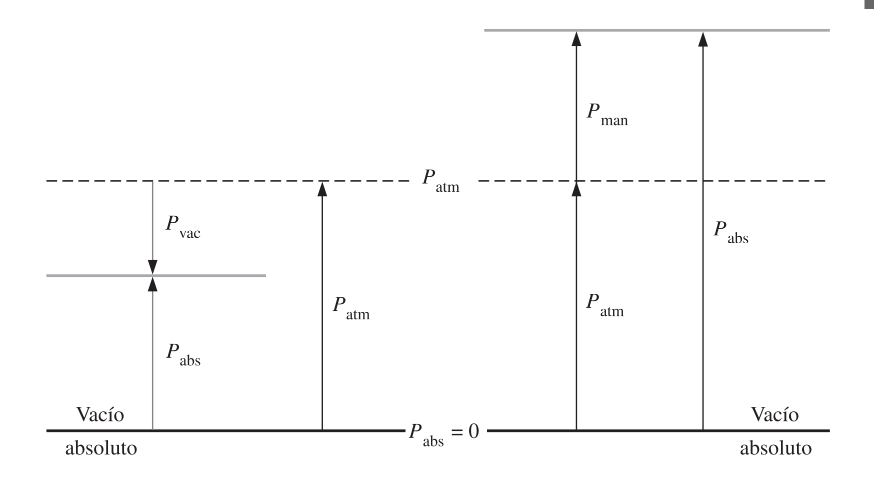


FIGURA 3-3
Presiones absoluta, manométrica y de vacío.

Como los demás manómetros, el que se utiliza para medir la presión del aire en un neumático de automóvil da como lectura la presión manométrica. Por lo tanto, la lectura común de 32 psi (2.25 kgf/cm^2) indica una presión de 32 psi por arriba de la atmosférica. Por ejemplo, en un lugar en donde la presión atmosférica es de 14.3 psi, la presión absoluta en el neumático será de 32 + 14.3 = 46.3 psi.

En las relaciones y tablas termodinámicas, se usa casi siempre la presión absoluta. En este texto, la presión P denotará *presión absoluta*, a menos que se especifique lo contrario. A menudo (en el sistema inglés), se agregan las letras "a" (por presión absoluta) y "g" (por presión manométrica, *gage*) a las unidades de presión (como psia y psig) para aclarar lo que se quiere expresar.

EJEMPLO 3-1 **Presión absoluta de una cámara al vacío**

Un medidor de vacío conectado a una cámara da como lectura 5.8 psi en un lugar en donde la presión atmosférica es de 14.5 psi. Determine la presión absoluta en la cámara.

Solución Se da la presión manométrica de una cámara al vacío. Se debe determinar su presión absoluta.

Análisis La presión absoluta se determina con facilidad, con base en la ecuación 3-2, como

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{atm}} - P_{\text{vac}} = 14.5 - 5.8 = \mathbf{8.7\ psi}$$

Discusión Nótese que en la determinación de la presión absoluta, se usa el valor *local* de la presión atmosférica.

Presión en un punto

La presión es la *fuerza de compresión* por unidad de área y da la impresión de ser un vector. Sin embargo, la presión en cualquier punto en un fluido es la misma en todas direcciones; es decir, tiene magnitud pero no una dirección específica y, en consecuencia, es una cantidad escalar. Esto se puede demostrar cuando se considera un pequeño elemento de fluido con forma de cuña de longitud unitaria (perpendicular al plano de la página) en equilibrio, como se muestra en la figura 3-4. Las presiones medias en las tres superficies son P_1, P_2 y P_3, y la fuerza que actúa sobre cada una de las superficies es el producto de la presión

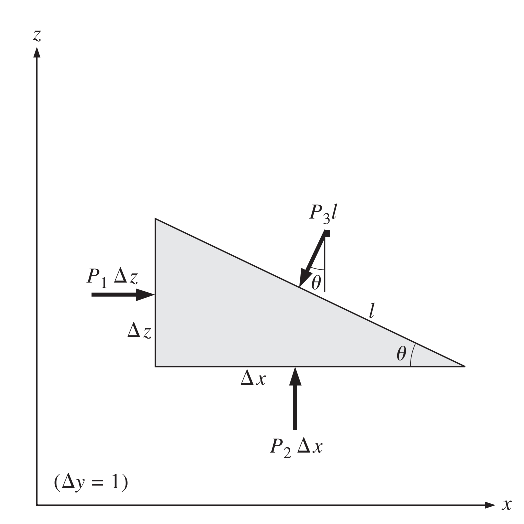


FIGURA 3-4
Fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido con forma de cuña, en equilibrio.

media y el área superficial. Según la segunda ley de Newton, un balance de fuerzas en las direcciones x y z da

$$\sum F_x = ma_x = 0: \qquad P_1\,\Delta z - P_3 l \text{ sen } \theta = 0 \tag{3-3a}$$

$$\sum F_z = ma_z = 0: \qquad P_2\,\Delta x - P_3 l \cos\theta - \frac{1}{2}\rho g\,\Delta x\,\Delta z = 0 \tag{3-3b}$$

donde ρ es la densidad y $W = mg = \rho g\,\Delta x\,\Delta z/2$ es el peso del elemento de fluido. Nótese que la cuña es un triángulo rectángulo, se tiene $\Delta x = l\cos\theta$ y $\Delta z = l \text{ sen } \theta$. Si se sustituyen estas relaciones geométricas y se divide la ecuación 3-3*a* entre Δz y la ecuación 3-3*b* entre Δx se obtiene

$$P_1 - P_3 = 0 \tag{3-4a}$$

$$P_2 - P_3 - \frac{1}{2}\rho g\,\Delta z = 0 \tag{3-4b}$$

El último término de la ecuación 3-4*b* se cancela cuando $\Delta z \to 0$ y la cuña se vuelve infinitesimal y, por lo tanto, el elemento de fluido se contrae hasta un punto. La combinación de los resultados de estas dos relaciones da

$$P_1 = P_2 = P_3 = P \tag{3-5}$$

sin importar el ángulo θ. Se puede repetir el análisis para un elemento en el plano xz y obtener un resultado semejante. De donde se llega a la conclusión que *la presión en un punto en un fluido tiene la misma magnitud en todas direcciones*. Se puede demostrar, en ausencia de fuerzas cortantes, que este resultado es aplicable a fluidos en movimiento y a fluidos en reposo.

Variación de la presión con la profundidad

No sorprenderá al lector observar que la presión en un fluido en reposo no cambia en la dirección horizontal. Esto se puede demostrar con facilidad cuando se considera una delgada capa horizontal de un fluido y se realiza un balance de fuerzas en cualquier dirección horizontal. Sin embargo, éste no es el caso en la dirección vertical en un campo de gravedad. La presión en un fluido aumenta con la profundidad porque descansa más fluido sobre las capas más profundas, y

el efecto de este “peso adicional” sobre una capa más profunda se equilibra por un aumento en la presión (Fig. 3-5).

Para obtener una relación para la variación de la presión con la profundidad, considérese un elemento rectangular de fluido de altura Δz, longitud Δx y profundidad unitaria (perpendicular al plano de la página) en equilibrio, como se muestra en la figura 3-6. Suponga que la densidad del fluido ρ sea constante, un balance de fuerzas en la dirección z vertical da

$$\sum F_z = ma_z = 0: \qquad P_2\,\Delta x - P_1\,\Delta x - \rho g\,\Delta x\,\Delta z = 0 \tag{3-6}$$

donde $W = mg = \rho g\,\Delta x\,\Delta z$ es el peso del elemento de fluido. Si se divide entre Δx y se reordena se obtiene

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \rho g\,\Delta z = \gamma_s\,\Delta z \tag{3-7}$$

donde $\gamma_s = \rho g$ es el *peso específico* del fluido. Por lo tanto, se llega a la conclusión que la diferencia de presión entre dos puntos en un fluido de densidad constante es proporcional a la distancia vertical Δz entre esos puntos y a la densidad ρ del fluido. En otras palabras, la presión en un fluido aumenta de manera lineal con la profundidad. Esto lo experimenta un buzo cuando se sumerge cada vez a mayor profundidad en un lago. Para un fluido determinado, a veces se usa la distancia vertical Δz como una medida de la presión y se llama *carga de presión*.

También, de la ecuación 3-7, se llega a la conclusión que, para distancias pequeñas a moderadas, la variación de la presión con la altura es despreciable para los gases en virtud de su baja densidad. Por ejemplo, la presión en un tanque que contiene un gas se puede considerar como uniforme, ya que el peso del gas es demasiado pequeño para producir una diferencia significativa. Asimismo, se puede suponer que la presión en una habitación llena con aire es constante (Fig. 3-7).

Si se toma el punto 1 en la superficie libre de un líquido abierto a la atmósfera (Fig. 3-8), donde la presión es la atmosférica P_{atm}, entonces la presión a una profundidad h a partir de la superficie libre queda

$$P = P_{atm} + \rho g h \qquad \text{o} \qquad P_{man} = \rho g h \tag{3-8}$$

En esencia, los líquidos son sustancias incompresibles y donde la variación de la densidad con la profundidad es despreciable. Éste también es el caso para los gases, cuando el cambio en la elevación no es muy grande. Sin embargo, la variación de la densidad de los líquidos respecto de la temperatura puede ser significativa y es posible que sea necesario considerarla cuando se desea mayor exactitud. También, a grandes profundidades, como las oceánicas, el cambio de la densidad de un líquido puede ser significativa debido a la compresión que ejerce la tremenda cantidad de peso del líquido que está encima.

La aceleración gravitacional g varía desde 9.807 m/s^2 a nivel del mar, hasta 9.764 m/s^2 a una altura de 14 000 m donde vuelan los grandes aviones de pasajeros. Éste es un cambio de sólo 0.4 por ciento, en este caso extremo. Por lo tanto, se puede suponer que g es constante, con error despreciable.

Para los fluidos cuya densidad cambia de manera significativa respecto de la altura, se puede obtener una relación para la variación de la presión con la altura cuando se divide la ecuación 3-6 entre $\Delta x\ \Delta z$, y se toma el límite cuando $\Delta z \to 0$. Esto da

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{3-9}$$

El signo negativo se debe al acuerdo de tomar la dirección z positiva hacia arriba, de modo que el diferencial dP es negativo cuando el diferencial dz es positivo, puesto que la presión disminuye en dirección ascendente. Cuando se conoce

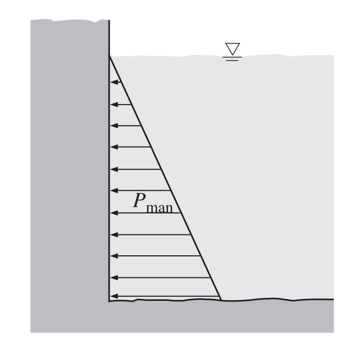


FIGURA 3-5
La presión de un fluido en reposo aumenta con la profundidad (como resultado del peso agregado).

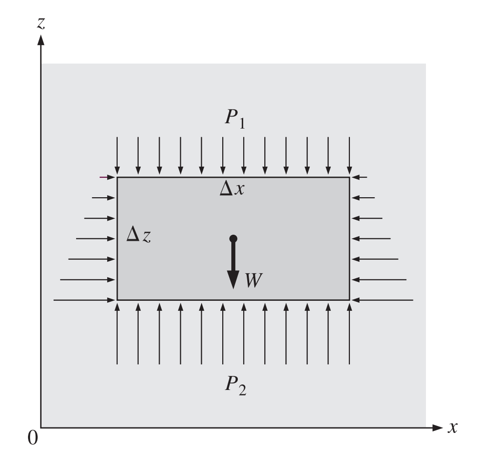


FIGURA 3-6
Diagrama de cuerpo libre de un elemento rectangular de fluido en equilibrio.

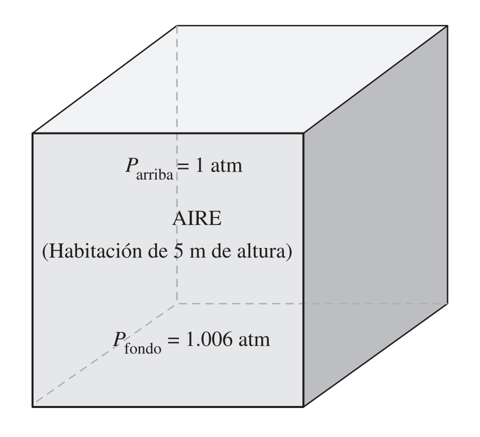


FIGURA 3-7
En una habitación llena con un gas, la variación de la presión con la altura es despreciable.

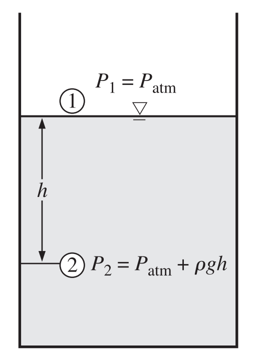


FIGURA 3-8
La presión en un líquido en reposo aumenta en forma lineal con la distancia a la superficie libre.

la variación de la densidad con la altura, se puede determinar la diferencia de presión entre los puntos 1 y 2 por integración, como

$$\Delta P = P_2 - P_1 = -\int_1^2 \rho g \, dz \tag{3-10}$$

Para una densidad constante y una aceleración gravitacional constante, esta relación se reduce a la ecuación 3-7, como era de esperarse.

La presión en un fluido en reposo es independiente de la forma o sección transversal del recipiente que lo contiene. Ésta cambia con la distancia vertical, pero permanece constante en las otras direcciones. Por lo tanto, la presión es la misma en todos los puntos de un plano horizontal en un fluido dado. En 1586, el matemático holandés Simon Stevin (1548-1620) publicó el principio que se ilustra en la figura 3-9. Nótese que las presiones en los puntos A, B, C, D, E, F y G son idénticos porque están a la misma profundidad e interconectados por el mismo fluido estático. Sin embargo, las presiones en los puntos H e I no son iguales, porque estos dos puntos no están interconectados por el mismo fluido (es decir, no se puede trazar una curva desde el punto I hasta el H permaneciendo en el mismo fluido en todo momento), aun cuando están a igual profundidad. (¿Puede decir el lector en cuál de los puntos la presión es más alta?) Asimismo, la fuerza de presión que ejerce el fluido siempre es normal a la superficie en los puntos especificados.

Una consecuencia de que la presión en un fluido permanezca constante en la dirección horizontal consiste en que *la presión aplicada a un fluido confinado aumenta la presión en toda la extensión de éste en la misma cantidad*. Esto se conoce como **ley de Pascal**, en honor a Blaise Pascal (1623-1662). Pascal también sabía que la fuerza aplicada por un fluido es proporcional al área superficial. Observó que se podían conectar dos cilindros hidráulicos de áreas diferentes y se podía usar el más grande para ejercer una fuerza proporcionalmente mayor que la aplicada al más pequeño. La "máquina de Pascal" ha sido la base de muchos inventos que forman parte de nuestra vida cotidiana, como los frenos y los elevadores hidráulicos. Esto permite levantar un automóvil con facilidad mediante un brazo, como se muestra en la figura 3-10. Nótese que

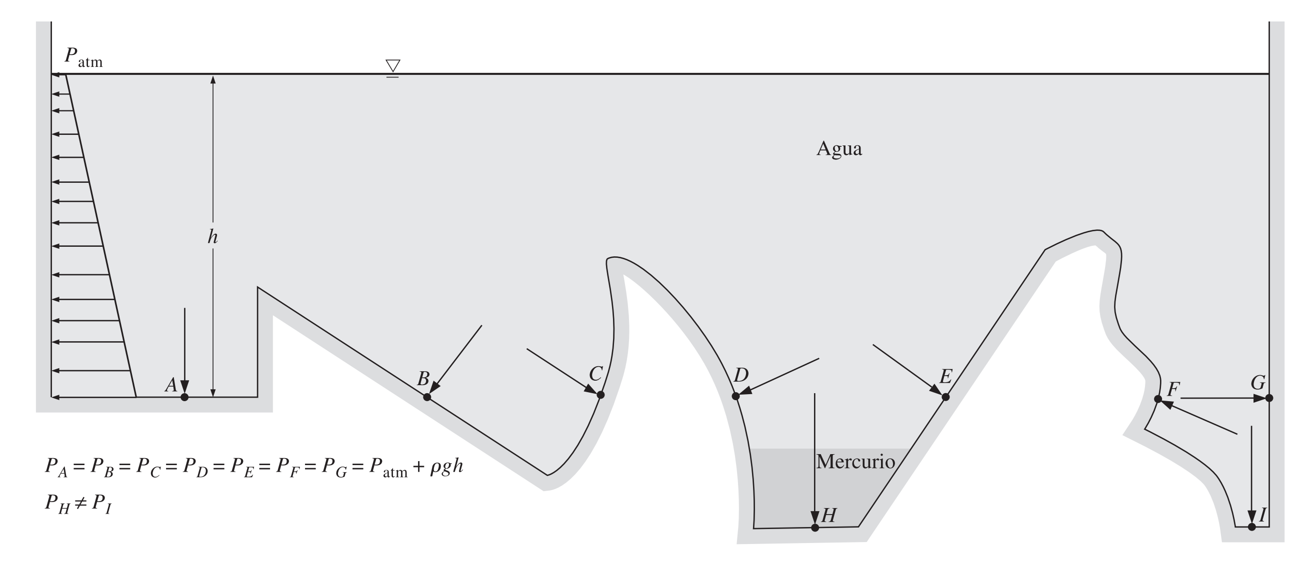


FIGURA 3-9
La presión es la misma en todos los puntos sobre un plano horizontal en un fluido dado, sin importar la configuración geométrica, siempre que los puntos estén interconectados por el mismo fluido.



$P_1 = P_2$, ya que los dos émbolos están al mismo nivel (el efecto de pequeñas diferencias en la altura es despreciable, en especial a presiones altas), se determina que la razón de la fuerza de salida a la de entrada es

$$P_1 = P_2 \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \qquad \textbf{(3-11)}$$

La razón A_2/A_1 se llama *ventaja mecánica ideal* del elevador hidráulico. Por ejemplo, con un gato hidráulico para automóviles con una razón de áreas de los pistones de $A_2/A_1 = 10$, una persona puede levantar un automóvil de 1 000 kg por la aplicación de una fuerza de sólo 100 kgf (= 908 N).

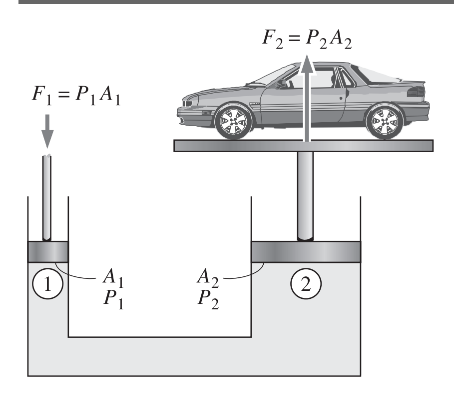


FIGURA 3-10
Levantamiento de un peso grande mediante una fuerza pequeña, por la aplicación de la ley de Pascal.

3-2 ▪ EL MANÓMETRO

Se advierte, con base en la ecuación 3-7, que un cambio en la elevación de Δz en un fluido en reposo corresponde a $\Delta P/\rho g$, lo cual sugiere que se puede usar una columna de fluido para medir diferencias en la presión. Un instrumento que funciona según este principio se llama **manómetro**. Es de uso común para medir diferencias en la presión, pequeñas y moderadas. Un manómetro consta principalmente de un tubo en U de vidrio o plástico que contiene uno o más fluidos como mercurio, agua, alcohol o aceite. Para mantener el tamaño del manómetro dentro de límites manejables se usan fluidos pesados, como el mercurio, si se prevén grandes diferencias en la presión.

Considere el manómetro que se muestra en la figura 3-11, que se usa para medir la presión en el tanque. Puesto que los efectos gravitacionales de los gases son despreciables, la presión en cualquier parte del tanque y en la posición 1 tiene el mismo valor. Además, debido a que la presión en un fluido no varía en la dirección horizontal dentro del mismo, la presión en el punto 2 es la misma que la que se tiene en el punto 1, $P_2 = P_1$.

La columna diferencial de fluido de altura h está en equilibrio estático y abierta a la atmósfera. Entonces de manera directa, a partir de la ecuación 3-8, se determina que la presión en el punto 2 es

$$P_2 = P_{atm} + \rho gh \qquad \textbf{(3-12)}$$

donde ρ es la densidad del fluido en el tubo. Nótese que el área de la sección transversal del tubo no tiene efecto sobre la altura diferencial h y, por tanto, sobre la presión que ejerce el fluido. Sin embargo, el diámetro del tubo debe ser suficientemente grande (más de unos cuantos milímetros) para garantizar que el efecto de la tensión superficial y, por tanto, el ascenso por capilaridad es despreciable.

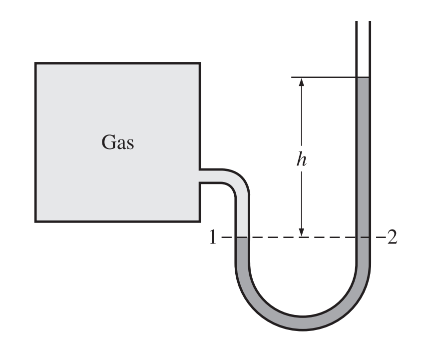


FIGURA 3-11
Manómetro básico.

EJEMPLO 3-2 Medición de la presión con un manómetro

Se usa un manómetro para medir la presión en un tanque. El fluido que se utiliza tiene una gravedad específica de 0.85 y la elevación de la columna en el manómetro es de 55 cm, como se muestra en la figura 3-12. Si la presión atmosférica local es de 96 kPa, determine la presión absoluta dentro del tanque.

Solución Se dan la lectura de un manómetro sujeto a un tanque y la presión atmosférica. Se debe determinar la presión absoluta en el tanque.
Hipótesis El fluido en el tanque es un gas cuya densidad es mucho más baja que la del fluido manométrico.
Propiedades Se da que la gravedad específica del fluido manométrico es 0.85. Se toma la densidad estándar del agua como 1 000 kg/m^3.

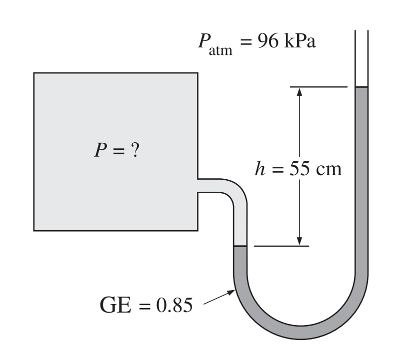


FIGURA 3-12
Esquema para el ejemplo 3-2.

Análisis La densidad del fluido se obtiene cuando se multiplica su gravedad específica por la densidad del agua, la cual se toma como 1 000 kg/m³:

$$\rho = \text{GE}\,(\rho_{H_2O}) = (0.85)(1\,000 \text{ kg/m}^3) = 850 \text{ kg/m}^3$$

Entonces, por la ecuación 3-12,

$$\begin{aligned} P &= P_{atm} + \rho g h \\ &= 96 \text{ kPa} + (850 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.55 \text{ m})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1 \text{ kPa}}{1000 \text{ N/m}^2}\right) \\ &= \mathbf{100.6\ kPa} \end{aligned}$$

Discusión Nótese que la presión manométrica en el tanque es de 4.6 kPa.

Muchos problemas de ingeniería y algunos manómetros se relacionan con múltiples fluidos inmiscibles de densidades diferentes uno sobre otro. Esos sistemas se pueden analizar con facilidad cuando se recuerda que: 1) el cambio de presión de uno a otro lado de una columna de fluido de altura h es $\Delta P = \rho g h$, 2) la presión aumenta hacia abajo en un fluido dado y disminuye hacia arriba (es decir, $P_{fondo} > P_{arriba}$), y 3) dos puntos a la misma altura en un fluido continuo en reposo están a la misma presión.

El último principio, el cual es resultado de la *ley de Pascal*, permite “saltar” de una columna de fluido a la siguiente en los manómetros sin preocuparse por el cambio de presión, mientras no se salte sobre un fluido diferente y el fluido esté en reposo. Entonces, se puede determinar la presión en cualquier punto cuando se parte de un punto de presión conocida y cuando se suman o restan términos $\rho g h$ a medida que se avanza hacia el punto de interés. Por ejemplo, se puede determinar la presión en el fondo del tanque de la figura 3-13 si se empieza en la superficie libre, en donde la presión es P_{atm}, se avanza hacia abajo hasta llegar al punto 1 en el fondo y se iguala el resultado a P_1. Esto da

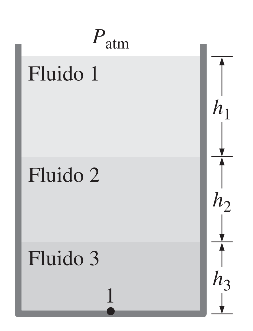


FIGURA 3-13
En capas apiladas de fluido, el cambio de presión a través de una capa de fluido de densidad ρ y espesor h es $\rho g h$.

$$P_{atm} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 = P_1$$

En el caso especial de que todos los fluidos tengan la misma densidad, esta relación se reduce a la ecuación 3-12, como era de esperarse.

En particular, los manómetros son adecuados para medir caídas de presión a lo largo de la sección horizontal de flujo, entre dos puntos especificados, debido a la presencia de un dispositivo, como una válvula o un intercambiador de calor, o cualquier otra resistencia al flujo. Esto se realiza cuando se conectan los dos extremos del manómetro a estos dos puntos (Fig. 3-14.) El fluido de trabajo puede ser un gas o un líquido, cuya densidad es ρ_1. La densidad del fluido manométrico es ρ_2 y la diferencia en su altura es h.

Se puede obtener una relación para la diferencia de presión $P_1 - P_2$ si se parte del punto 1 con P_1, y se desplaza a lo largo del tubo por medio de la suma o sustracción de los términos $\rho g h$ hasta alcanzar el punto 2 e iguala el resultado a P_2:

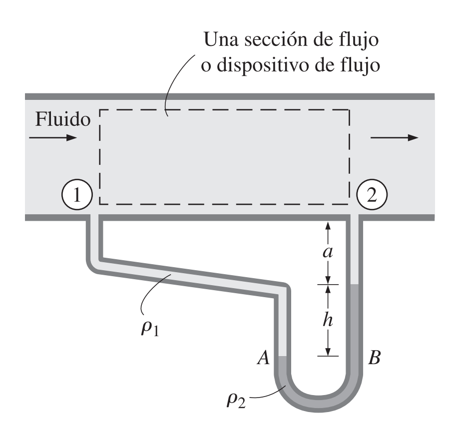


FIGURA 3-14
Medición de la caída de presión a lo largo de la sección horizontal de flujo o en un dispositivo de flujo, con un manómetro diferencial.

$$P_1 + \rho_1 g(a + h) - \rho_2 g h - \rho_1 g a = P_2 \qquad \textbf{(3-13)}$$

Nótese que se saltó desde el punto A horizontalmente hasta el B y se ignoró la parte que está abajo, puesto que la presión en los dos puntos es la misma. Cuando se simplifica,

$$P_1 - P_2 = (\rho_2 - \rho_1) g h \qquad \textbf{(3-14)}$$

Nótese que la distancia a no efecta el resultado, pero debe incluirse en el análisis. Cuando el fluido que fluye en el tubo es un gas, entonces $\rho_1 \cong \rho_2$ y la relación de la ecuación 3-14 se simplifica a $P_1 - P_2\ \rho_2 gh$.

EJEMPLO 3-3 Medición de la presión con un manómetro de fluidos múltiples

El agua en un tanque se presuriza con aire y se mide la presión con un manómetro de fluidos múltiples, como se muestra en la figura 3-15. El tanque está en una montaña a una altitud de 1 400 m, donde la presión atmosférica es de 85.6 kPa. Determine la presión del aire en el tanque si h_1 = 0.1 m, h_2 = 0.2 m, y h_3 = 0.35 m. Tome las densidades del agua, el aceite y el mercurio como 1 000 kg/m^3, 850 kg/m^3, y 13 600 kg/m^3, respectivamente.

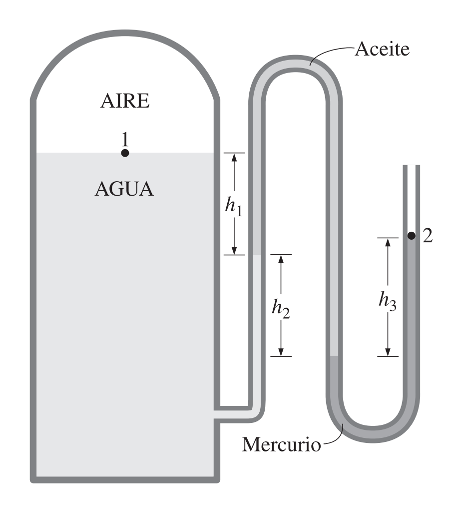


FIGURA 3-15
Esquema para el ejemplo 3-3; el dibujo no está a escala.

Solución Se mide la presión en un tanque presurizado con agua utilizando un manómetro de fluidos múltiples. Se debe determinar la presión del aire en el tanque.

Hipótesis La presión del aire en el tanque es uniforme (es decir, su variación con la altura es despreciable debido a su baja densidad) y, por lo tanto, se puede determinar la presión en la interfaz aire-agua.

Propiedades Se dan las densidades del agua, el aceite y el mercurio como 1 000 kg/m^3, 850 kg/m^3, y 13 600 kg/m^3, respectivamente.

Análisis Se empieza con la presión en el punto 1, en la interfaz aire-agua, avanzando a lo largo del tubo y se suman o restan los términos ρgh hasta alcanzar el punto 2 y se iguala el resultado a P_{atm} puesto que el tubo está abierto a la atmósfera, da

$$P_1 + \rho_{agua}\, gh_1 + \rho_{aceite}\, gh_2 - \rho_{mercurio}\, gh_3 = P_{atm}$$

Si se despeja P_1 y se hacen las sustituciones,

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{atm} - \rho_{agua}\, gh_1 - \rho_{aceite}\, gh_2 + \rho_{mercurio}\, gh_3 \\ &= P_{atm} + g(\rho_{mercurio}\, h_3 - \rho_{agua}\, h_1 - \rho_{aceite}\, h_2) \\ &= 85.6 \text{ kPa} + (9.81 \text{ m/s}^2)[(13\,600 \text{ kg/m}^3)(0.35 \text{ m}) - (1\,000 \text{ kg/m}^3)(0.1 \text{ m}) \\ &\quad - (850 \text{ kg/m}^3)(0.2 \text{ m})]\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1 \text{ kPa}}{1000 \text{ N/m}^2}\right) \\ &= \mathbf{130\ kPa} \end{aligned}$$

Discusión Nótese que si se salta horizontalmente de uno de los tubos al siguiente y se considera que la presión continúa siendo la misma en el mismo fluido, se simplifica el análisis de manera considerable. Obsérvese que el mercurio es un fluido tóxico y se reemplazan los manómetros y termómetros que contienen este fluido por otros con fluidos más seguros debido al riesgo de exposición al vapor de mercurio durante un accidente.

EJEMPLO 3-4 Análisis de manómetro de fluidos múltiples con EES

Vuelva a considerarse el manómetro de fluidos múltiples que se utilizó en el ejemplo 3-3. Determine la presión del aire en el tanque mediante EES. También determine cuál sería la altura h_3 de la columna de fluido para la misma presión del aire, si se reemplazara el mercurio en la última columna por agua de mar con una densidad de 1 030 kg/m^3.

Solución Se mide la presión en un tanque de agua con un manómetro de fluidos múltiples. Se debe determinar, usando EES, la presión del aire en el tanque y la altura h_3 de la columna de fluido, si se reemplaza el mercurio por agua de mar.

Análisis Se inicia el programa EES con doble "clic" sobre su ícono, se abre un archivo nuevo y se escribe lo siguiente en la pantalla vacía que aparece (para tener coherencia en las unidades, se expresa la presión atmosférica en Pa):

g=9.81

Patm=85600

h1=0.1; h2=0.2; h3=0.35

rw=1000; roil=850; rm=13600

P1+rw*g*h1+roil*g*h2−rm*g*h3=Patm

Aquí P1 es la única incógnita y, por medio de EES, se determina que es

$$P_1 = 129647 \text{ Pa} \cong \mathbf{130\ kPa}$$

lo cual es idéntico al resultado obtenido en el ejemplo 3-3. La altura h_3 de la columna de fluido, cuando el mercurio se reemplaza por agua de mar, se determina con facilidad cuando se reemplazan "h3=0.35" por "P1=129647" y "rm=13600" por "rm=1030," y haciendo "clic" sobre el ícono de la calculadora. Esto da

$$h_3 = \mathbf{4.62\ m}$$

Discusión Nótese que se usó la pantalla como un block de papel y se escribió la información pertinente junto con las relaciones aplicables de manera organizada. EES hizo el resto. Las ecuaciones se pueden escribir en renglones separados o en el mismo renglón, separadas por medio de punto o coma, y se pueden insertar renglones en blanco o con comentarios para facilitar la lectura. EES facilita en gran medida formular preguntas de "qué si" y realiza los estudios paramétricos, como se explica en el apéndice 3 en el DVD.

Otros instrumentos para medir la presión

Otro tipo de dispositivo mecánico que comúnmente se utiliza para medir la presión es el **tubo de Bourdon**, nombrado así en honor del ingeniero e inventor francés Eugene Bourdon (1808-1884). Consta de un tubo metálico hueco, doblado como un gancho, cuyo extremo se cierra y se conecta a la aguja de un indicador de carátula (Fig. 3-16). Cuando el tubo se abre a la atmósfera, el tubo queda sin cambiar de forma y, en este estado, la aguja de la carátula se calibra para que dé la lectura cero (presión manométrica). Cuando se presuriza el fluido que está en el tubo, éste tiende a enderezarse y mueve el agua en proporción a la presión aplicada.

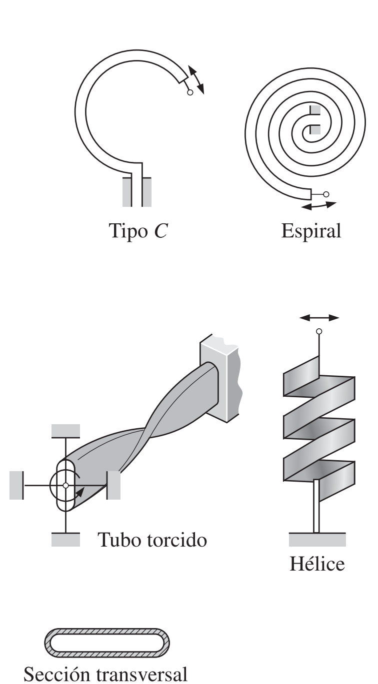


FIGURA 3-16
Varios tipos de tubo de Bourdon usados para medir la presión.

La electrónica ha abierto su camino hacia cada aspecto de la vida, inclusive a los instrumentos de medición de la presión. En los sensores modernos de presión, llamados **transductores de presión**, se aplican varias técnicas para convertir el efecto de presión en un efecto eléctrico, como un cambio en la tensión, la resistencia o la capacitancia. Los transductores de presión son más pequeños y más rápidos, y pueden ser más sensibles, confiables y precisos que sus contrapartes mecánicas. Pueden medir presiones desde un millonésimo de 1 atm hasta varios miles de atm.

Existe una amplia variedad de transductores de presión para medir presiones manométricas, absolutas y diferenciales, en una numerosa gama de aplicaciones. En los *transductores de presión manométrica* se usa la presión atmosférica como referencia cuando se desfoga el lado posterior del diafragma sensor de la presión hacia la atmósfera, y dan una salida de señal cero a la presión atmosférica sin importar la altitud. Los *transductores de presión absoluta* están calibrados para tener una salida de señal cero al pleno vacío. Los *transductores de presión*

diferencial miden de manera directa la diferencia de presión entre dos lugares, en lugar de usar dos transductores de presión y tomar su diferencia.

Los **transductores de presión elásticos** (**de medición de deformación**) funcionan cuando tienen una deflexión de la membrana entre dos cámaras abiertas a las entradas de presión. Conforme la membrana se estira como respuesta a un cambio en la diferencia de presión de uno a otro lado de ella, se estira el medidor de deformación y la salida se amplifica con un circuito de puente de Wheatstone. Un transductor de capacitancia funciona de manera análoga, pero se mide el cambio en la capacitancia, en lugar del cambio en la resistencia conforme la membrana se estira.

Los **transductores piezoeléctricos**, también conocidos como transductores de presión de estado sólido, funcionan con base en el principio de que se genera un potencial eléctrico en una sustancia cristalina cuando se le somete a una presión mecánica. Este fenómeno descubierto primero por los hermanos Pierre y Jacques Curie en 1880, se llama efecto piezoeléctrico (o presión-eléctrico). La respuesta de los transductores piezoeléctricos de presión es mucho más rápida, en comparación con las unidades de membrana, y son muy adecuados para aplicaciones a presiones altas pero, en general, no son tan sensibles como los de membrana.

3-3 ▪ EL BARÓMETRO Y LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA

La presión atmosférica se mide con un instrumento llamado **barómetro**; por tanto, con frecuencia se hace referencia de la presión atmosférica como *presión barométrica*.

El italiano Evangelista Torricelli (1608-1647) fue el primero en probar de manera concluyente que se puede medir la presión atmosférica cuando se invierte un tubo lleno de mercurio en un recipiente lleno con este mismo líquido que está abierto a la atmósfera, como se muestra en la figura 3-17. La presión en el punto B es igual a la atmosférica y se puede tomar la presión en C como cero, ya que sólo existe vapor de mercurio arriba del punto C, y la presión es muy baja en relación con P_{atm} por lo que se puede despreciar para tener una aproximación excelente. Si se escribe un balance de fuerzas en la dirección vertical se obtiene

$$P_{atm} = \rho g h \tag{3-15}$$

donde ρ es la densidad del mercurio, g es la aceleración gravitacional local y h es la altura de la columna de mercurio por arriba de la superficie libre. Nótese que la longitud y el área de la sección transversal del tubo no afectan la altura de la columna de fluido de un barómetro (Fig. 3-18).

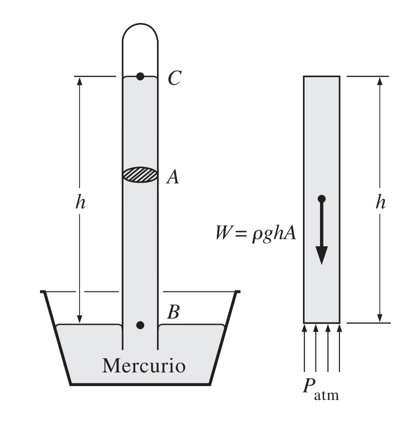


FIGURA 3-17
Barómetro básico.

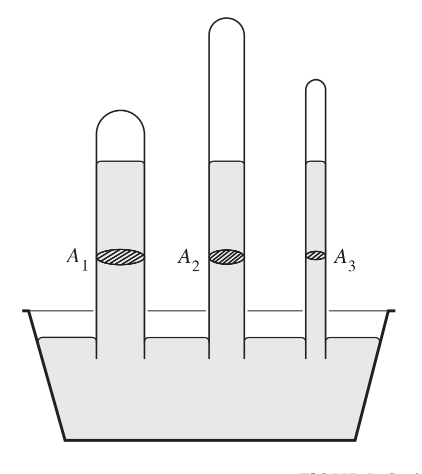


FIGURA 3-18
La longitud o el área de la sección transversal del tubo no tienen efecto sobre la altura de la columna del fluido en un barómetro, siempre que el diámetro de ese tubo sea suficientemente grande como para evitar los efectos de la tensión superficial (de capilaridad).

Una unidad de presión que se usa con frecuencia es la *atmósfera estándar*, la cual se define como la presión producida por una columna de mercurio de 760 mm de altura a 0°C (ρ_{Hg} = 13 595 kg/m^3) bajo la aceleración gravitacional estándar (g = 9.807 m/s^2). Si se usara agua en lugar de mercurio para medir la presión atmosférica estándar, se necesitaría una columna de agua de alrededor de 10.3 m. La presión a veces se expresa (en especial por los pronosticadores del tiempo) en términos de la altura de la columna de mercurio. Por ejemplo, la presión atmosférica estándar es de 760 mm Hg (29.92 in Hg) a 0°C. La unidad mmHg también se conoce como **torr**, en honor de Torricelli. Por lo tanto, 1 atm = 760 torr y 1 torr = 133.3 Pa.

La presión atmosférica estándar P_{atm} cambia desde 101.325 kPa, a nivel del mar, hasta 89.88, 79.50, 54.05, 26.5 y 5.53 kPa a las altitudes de 1 000, 2 000, 5 000, 10 000 y 20 000 m, respectivamente. Por ejemplo, la presión atmosférica estándar en Denver (elevación = 1 610 m) es de 83.4 kPa.

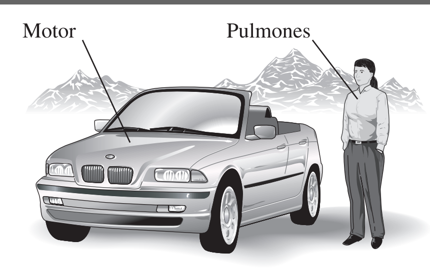


FIGURA 3-19
A grandes altitudes, un motor de automóvil genera menos potencia y una persona obtiene menos oxígeno debido a la densidad más baja del aire.

Recuérdese que la presión atmosférica en un lugar es sencillamente el peso del aire que se encuentra arriba ese lugar por unidad de área superficial. Por lo tanto, cambia no sólo con la elevación, sino también con las condiciones atmosféricas.

El descenso de la presión atmosférica con la elevación tiene ramificaciones de largo alcance en la vida cotidiana. Por ejemplo, la cocción tarda más a mayores altitudes, porque el agua hierve a una temperatura menor en presiones atmosféricas más bajas. La hemorragia nasal es una experiencia común a grandes altitudes, en virtud de que la diferencia entre la presión sanguínea y la atmosférica es más grande en este caso y, a menudo, las delicadas paredes de las venas de la nariz son incapaces de soportar este esfuerzo adicional.

Para una temperatura determinada, la densidad del aire es más baja a grandes altitudes y, como consecuencia, un volumen dado contiene menos aire y oxígeno. De modo que no es sorprendente que se experimente cansancio con más facilidad y se tengan problemas respiratorios a esas altitudes. Para compensar este efecto, las personas que viven a grandes altitudes desarrollan pulmones más eficientes. De manera análoga, a 1 500 m de altitud, un motor de automóvil de 2.0 L funcionara como uno de 1.7 L (a menos que sea turbocargado) debido a la caída de 15 por ciento en la presión y, por lo tanto, una caída de 15 por ciento en la densidad del aire (Fig. 3-19). A esa altitud, un ventilador o compresor desplazará 15 por ciento menos aire, para la misma razón de desplazamiento de volumen. Por lo tanto, puede ser necesario seleccionar ventiladores más grandes de enfriamiento para la operación a mayores altitudes para asegurar el gasto especificado de masa. La presión más baja y la densidad más baja afectan también la sustentación y la fuerza de arrastre: a grandes alturas los aviones necesitan una pista más larga para desarrollar la sustentación necesaria, y una elevación hasta altitudes muy grandes para realizar su vuelo de crucero con una fuerza de arrastre reducida, de este modo hay una mayor eficiencia respecto al combustible.

EJEMPLO 3-5 Medición de la presión atmosférica con barómetro

Determine la presión atmosférica en un lugar donde la lectura barométrica es de 740 mm Hg y la aceleración gravitacional es $g = 9.81$ m/s^2. Suponga que la temperatura del mercurio es de 10°C, a la cual su densidad es de 13 570 kg/m^3.

Solución La lectura barométrica en un lugar se señala en la altura de la columna de mercurio. Debe determinarse la presión atmosférica.
Hipótesis Se supone que la temperatura del mercurio es de 10°C.
Propiedades Se da la densidad del mercurio como 13 570 kg/m^3.
Análisis Por la ecuación 3.15, se determina que la presión atmosférica es

$$
\begin{aligned}
P_{\text{atm}} &= \rho g h \\
&= (13\,570 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.74 \text{ m})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1 \text{ kPa}}{1\,000 \text{ N/m}^2}\right) \\
&= \mathbf{98.5\ kPa}
\end{aligned}
$$

Discusión Nótese que la densidad cambia con la temperatura y, por tanto, debe considerarse este efecto en los cálculos.

EJEMPLO 3-6 Efecto del peso del émbolo sobre la presión en un cilindro

El émbolo de un dispositivo de cilindro y émbolo en posición vertical que contiene un gas tiene una masa de 60 kg y un área de la sección transversal de

0.04 m^2, como se muestra en la figura 3-20. La presión atmosférica local es de 0.97 bar y la aceleración gravitacional es de 9.81 m/s^2. *a*) Determine la presión en el interior del cilindro. *b*) Si se transfiere algún calor al gas y su volumen se duplica, ¿esperaría que cambiara la presión en el interior del cilindro?

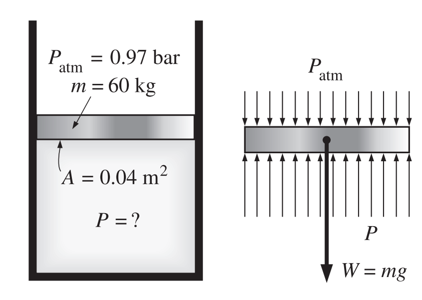


FIGURA 3-20
Esquema para el ejemplo 3-6 y diagrama de cuerpo libre del émbolo.

Solución Un gas contenido en un cilindro vertical con un émbolo pesado. La presión dentro del cilindro y el efecto del cambio deben determinarse.
Hipótesis La fricción entre el émbolo y el cilindro es despreciable.
Análisis *a*) La presión del gas en el dispositivo de cilindro y émbolo depende de la presión atmosférica y del peso del émbolo. Si se dibuja el diagrama de cuerpo libre de este último, como se muestra en la figura 3-20, y se realiza el balance de las fuerzas verticales, se obtiene

$$PA = P_{atm}A + W$$

Se despeja P y se efectúan las sustituciones,

$$P = P_{atm} + \frac{mg}{A}$$
$$= 0.97 \text{ bar} + \frac{(60 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{0.04 \text{ m}^2}\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1 \text{ bar}}{10^5 \text{ N/m}^2}\right)$$
$$= \mathbf{1.12\ bars}$$

b) El cambio de volumen no tendrá efecto en el diagrama de cuerpo libre trazado en el inciso *a*) y, por lo tanto, la presión en el interior del cilindro continuará siendo la misma.
Discusión Si el gas se comporta como un gas ideal, la temperatura absoluta se duplica cuando el volumen se duplica a presión constante.

EJEMPLO 3-7 Presión hidrostática en un estanque solar con densidad variable

Los estanques solares son pequeños lagos artificiales de algunos cuantos metros de profundidad que se usan para almacenar energía solar. El ascenso del agua caliente (y, por tanto, menos densa) hacia la superficie, se impide añadiendo sal en el fondo del estanque. En un estanque solar salino típico de gradiente, la densidad del agua aumenta en la zona de gradiente, como se muestra en la figura 3-21, y la densidad se puede expresar como

$$\rho = \rho_0\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\frac{z}{H}\right)}$$

donde ρ_0 es la densidad en la superficie del agua, z es la distancia vertical medida hacia abajo desde la parte superior de la zona de gradiente y H es el espesor

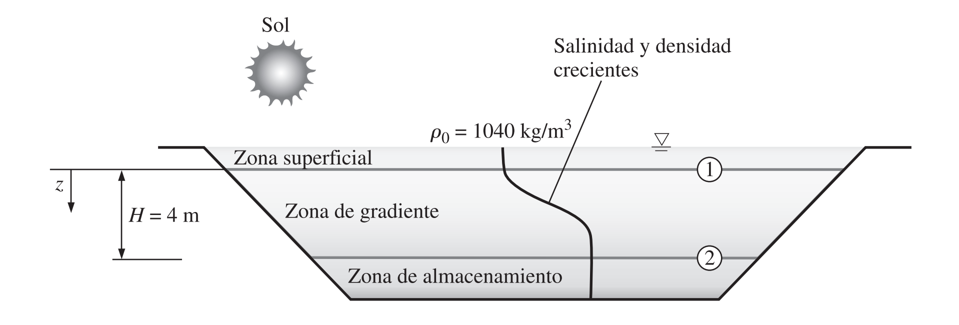


FIGURA 3-21
Esquema para el ejemplo 3-7.

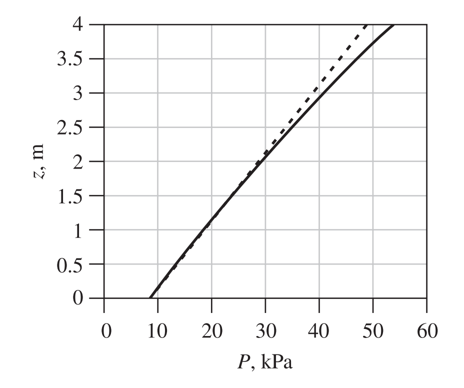


FIGURA 3-22
Variación de la presión manométrica con profundidad, en la zona de gradiente del estanque solar.

de esta zona. Para $H = 4$ m, $\rho_0 = 1040$ kg/m^3, y un espesor de 0.8 mm para la zona superficial, calcule la presión manométrica en el fondo de la zona de gradiente.

Solución Se da la variación de la densidad del agua salina con la profundidad, en la zona de gradiente de un estanque solar. Se debe determinar la presión manométrica en el fondo de la zona de gradiente.
Hipótesis La densidad en la zona superficial del estanque es constante.
Propiedades Se da la densidad de la salmuera sobre la superficie como 1 040 kg/m^3.
Análisis Se hará referencia a la parte superior y al fondo de la zona de gradiente como 1 y 2, respectivamente. Nótese que la densidad de la zona superficial es constante, la presión manométrica en el fondo de esa zona (la cual es la parte superior de la de gradiente) es

$$P_1 = \rho g h_1 = (1040 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.8 \text{ m})\left(\frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = 8.16 \text{ kPa}$$

por que 1 kN/m^2 = 1 kPa. El cambio diferencial en la presión hidrostática de uno a otro extremo de una distancia vertical de dz se da por

$$dP = \rho g\, dz$$

Si se integra de la parte superior de la zona de gradiente (punto 1, donde $z = 0$) hasta cualquier lugar z en la zona de gradiente (sin subíndice) da

$$P - P_1 = \int_0^z \rho g\, dz \qquad \rightarrow \qquad P = P_1 + \int_0^z \rho_0 \sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\frac{z}{H}\right)}\, g\, dz$$

Cuando se realiza la integración se obtiene que la variación de la presión manométrica en la zona de gradiente es

$$P = P_1 + \rho_0 g \frac{4H}{\pi} \operatorname{senh}^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{4}\frac{z}{H}\right)$$

Entonces la presión en el fondo de la zona de gradiente ($z = H = 4$ m) queda

$$P_2 = 8.16 \text{ kPa} + (1040 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)\frac{4(4 \text{ m})}{\pi} \operatorname{senh}^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{4}\frac{4}{4}\right)\left(\frac{1 \text{ kN}}{1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{54.0 \text{ kPa (manométrica)}}$$

Discusión En la figura 3-22 se da la gráfica de la variación de la presión manométrica con la profundidad. La línea punteada indica la presión hidrostática para el caso de una densidad constante de 1040 kg/m^3 y se da como referencia. Nótese que la variación de la presión con la profundidad no es lineal cuando la densidad varía con ésta.

3-4 ▪ INTRODUCCIÓN A LA ESTÁTICA DE FLUIDOS

La **estática de fluidos** trata de los problemas relacionados con los fluidos en reposo. El fluido puede ser gaseoso o líquido. En general, la estática de fluidos se llama *hidrostática* cuando el fluido es un líquido y *aeroestática*, cuando el fluido es un gas. En la estática de fluidos no se tiene movimiento relativo entre capas adyacentes del fluido y, por lo tanto, no se tienen esfuerzos cortantes (tangenciales) en éste que traten de deformarlo. El único esfuerzo que se trata en la estática de fluidos es el *esfuerzo normal*, el cual es la presión, y la variación de ésta sólo se debe al peso del fluido. Por lo tanto, el tema de la estática de fluidos

únicamente tiene significado en campos de gravedad y las relaciones de fuerzas que se formaron de manera natural incluyen la aceleración gravitacional g. La fuerza que se ejerce sobre una superficie por un fluido en reposo es normal a esa superficie en el punto de contacto, puesto que no existe movimiento relativo entre el fluido y la superficie sólida y, como consecuencia, no pueden actuar fuerzas cortantes paralelas a la superficie.

La estática de fluidos se utiliza para determinar las fuerzas que actúan sobre cuerpos flotantes o sumergidos y las fuerzas que generan algunos dispositivos como las prensas hidráulicas y los gatos para automóvil. El diseño de muchos sistemas de ingeniería, como las presas para agua y los tanques de almacenamiento de líquidos, exige determinar las fuerzas que actúan sobre las superficies aplicando la estática de fluidos. La descripción completa de fuerza hidrostática resultante que actúa sobre una superficie sumergida demanda determinar la magnitud, la dirección y la línea de acción de la fuerza. En las secciones 3-5 y 3-6, se consideran las fuerzas que actúan sobre superficies planas y curvas de cuerpos sumergidos, debidas a la presión.



FIGURA 3-23
Presa Hoover.
Cortesía del United States Department of the Interior, Bureau of Reclamation-Lower Colorado Region

3-5 ▪ FUERZAS HIDROSTÁTICAS SOBRE SUPERFICIES PLANAS SUMERGIDAS

Una placa expuesta a un líquido, como una válvula de compuerta en una presa, la pared de un tanque de almacenamiento de líquidos o el casco de un barco en reposo, queda sometida a la presión del fluido distribuida sobre su superficie (Fig. 3-23). Sobre una superficie *plana* las fuerzas hidrostáticas forman un sistema de fuerzas paralelas y, a menudo, se necesita determinar la *magnitud* de la fuerza y su *punto de aplicación,* el cual se llama **centro de presión.** En la mayoría de los casos, el otro lado de la placa está abierto a la atmósfera (como el lado seco de una compuerta) y, donde, la presión atmosférica actúa sobre los dos lados de la placa y conduce a una resultante cero. En esos casos conviene restar la presión atmosférica y trabajar sólo con la presión manométrica (Fig. 3-24). Por ejemplo, $P_{gage} = \rho gh$ en el fondo del lago.

Considérese la superficie superior de una placa plana de manera arbitraria, sumergida totalmente en un líquido, como se muestra en la figura 3-25 junto con su vista desde arriba. El plano de esta superficie (normal al plano de la página) se interseca con la superficie libre horizontal y forma un ángulo θ, y la línea de intersección se toma como el eje x. La presión absoluta arriba del líquido es P_0, la cual es la presión atmosférica local P_{atm} si ese líquido está abierto a la atmósfera (pero P_0 puede ser diferente de P_{atm} si se crea un vacío en el espacio que

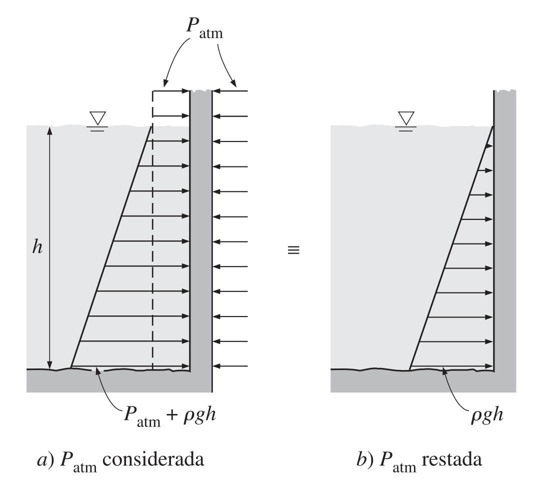


FIGURA 3-24
Cuando se analizan las fuerzas hidrostáticas sobre superficies sumergidas, sencillamente se puede restar la presión atmosférica cuando actúa sobre ambos lados de la estructura.

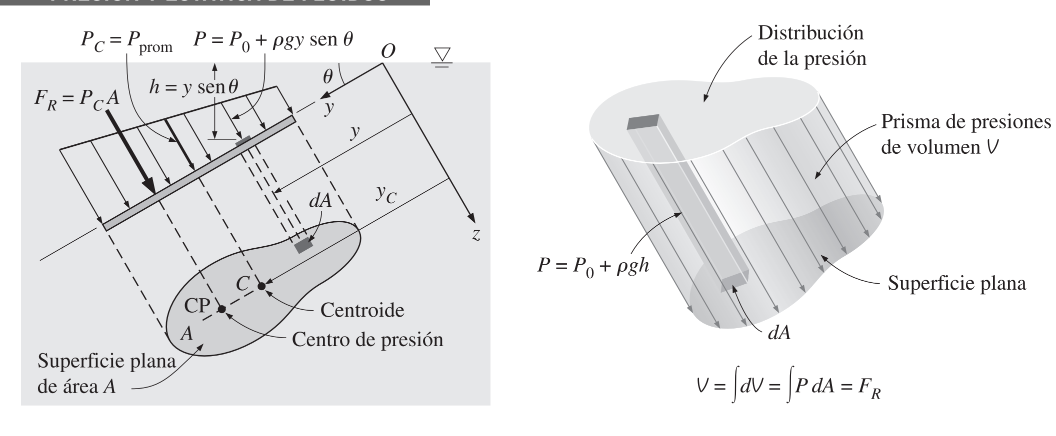


FIGURA 3-25
Fuerza hidrostática sobre la superficie de un plano inclinado totalmente sumergido en un líquido.

está arriba del líquido o se presuriza). Entonces la presión absoluta en cualquier punto de la placa es

$$P = P_0 + \rho gh = P_0 + \rho gy \text{ sen } \theta \qquad \textbf{(3-16)}$$

donde h es la distancia vertical del punto a la superficie libre y y es la distancia del punto al eje x (al punto O en la figura 3-25). La fuerza hidrostática resultante F_R que actúa sobre la superficie se determina cuando se integra la fuerza $P\, dA$ que actúa sobre un área diferencial dA sobre toda el área superficial,

$$F_R = \int_A P\, dA = \int_A (P_0 + \rho gy \text{ sen}\,\theta)\, dA = P_0 A + \rho g \text{ sen}\,\theta \int_A y\, dA \qquad \textbf{(3-17)}$$

Pero el *primer momento de área* $\int_A y\, dA$ está relacionado con la coordenada y del centroide (o centro) de la superficie por

$$y_C = \frac{1}{A}\int_A y\, dA \qquad \textbf{(3-18)}$$

Se efectúan las sustituciones,

$$F_R = (P_0 + \rho g y_C \text{ sen}\,\theta)A = (P_0 + \rho g h_C)A = P_C A = P_{prom}\, A \qquad \textbf{(3-19)}$$

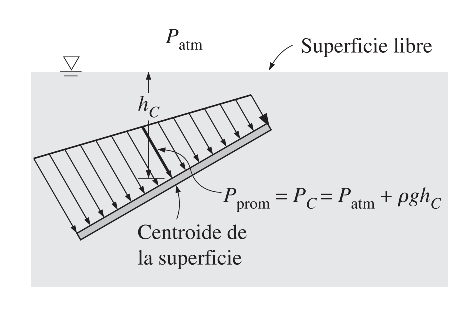


FIGURA 3-26
La presión en el centroide de una superficie equivale a la presión promedio sobre ésta.

donde $P_C = P_0 + \rho g h_C$ es la presión en el centroide de la superficie, la cual equivale a la presión *promedio* sobre la superficie, y $h_C = y_C$ sen θ es la *distancia vertical* del centroide a la superficie libre del líquido (Fig. 3-26). De ello se llega a la conclusión que:

> La magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre una superficie plana de una placa totalmente sumergida en un fluido homogéneo (de densidad constante) es igual al producto de la presión P_C en el centroide de la superficie y el área A de ésta (Fig. 3-27).

La presión P_0 suele ser la atmosférica, la cual, en la mayoría de los casos, se puede ignorar, ya que actúa sobre los dos lados de la placa. Cuando éste no es el caso, una manera práctica de tomar en cuenta la contribución de P_0 a la fuerza resultante es sencillamente sumar una profundidad equivalente $h_{equiv} = P_0/\rho g$ a

h_C; es decir, suponer la presencia de una capa adicional de líquido de espesor h_{equiv} sobre la parte superior del líquido, con un vacío absoluto encima.

Enseguida, se necesita determinar la línea de acción de la fuerza resultante F_R. Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienen la misma magnitud y el mismo momento alrededor de cualquier punto. En general, la línea de acción de la fuerza hidrostática resultante no pasa por el centroide de la superficie (está debajo, en donde la presión es más alta). El punto de intersección de la línea de acción de la fuerza resultante y la superficie es el **centro de presión.** La ubicación vertical de la línea de acción se determina cuando se iguala el momento de la fuerza resultante al momento de la fuerza de presión distribuida, respecto al eje x. Esto da

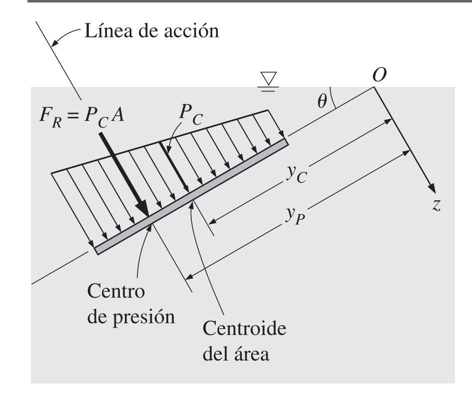


FIGURA 3-27
La fuerza resultante que actúa sobre una superficie plana es igual al producto de la presión en el centroide de la superficie y el área superficial, y su línea de acción pasa por el centro de presión.

$$y_P F_R = \int_A yP\,dA = \int_A y(P_0 + \rho g y \operatorname{sen}\theta)\,dA = P_0 \int_A y\,dA + \rho g \operatorname{sen}\theta \int_A y^2\,dA$$

o

$$y_P F_R = P_0 y_C A + \rho g \operatorname{sen}\theta\, I_{xx,\,O} \qquad \textbf{(3-20)}$$

donde y_P es la distancia del centro de presión al eje x (el punto O de la figura 3-27) y $I_{xx,\,O} = \int_A y^2\,dA$ es el *segundo momento de área* (llamado también *momento de inercia del área*) respecto al eje x. En los manuales de ingeniería se cuenta con amplitud con los segundos momentos de área para formas comunes, pero suelen darse respecto a los ejes que pasan por el centroide del área. Por fortuna, los segundos momentos de área respecto a dos ejes paralelos están interrelacionados por el *teorema de los ejes paralelos,* el cual, en este caso, se expresa como

$$I_{xx,\,O} = I_{xx,\,C} + y_C^2 A \qquad \textbf{(3-21)}$$

donde $I_{xx,\,C}$ es el segundo momento de área respecto al eje x que pasa por el centroide del área y y_C (la coordenada y del centroide) es la distancia entre los dos ejes paralelos. Si se sustituye la relación de F_R dada por la ecuación 3-19, y la relación de $I_{xx,\,O}$ dada por la ecuación 3-21 en la ecuación 3.20 y despejando y_P da

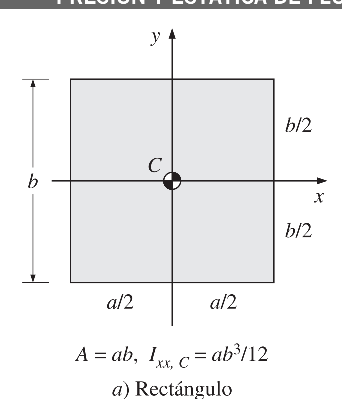
$$y_P = y_C + \frac{I_{xx,\,C}}{[y_C + P_0/(\rho g \operatorname{sen}\theta)]A} \qquad \textbf{(3-22}\textbf{\textit{a}}\textbf{)}$$

Para $P_0 = 0$, que suele ser el caso cuando se ignora la presión atmosférica, se simplifica a

$$y_P = y_C + \frac{I_{xx,\,C}}{y_C A} \qquad \textbf{(3-22}\textbf{\textit{b}}\textbf{)}$$

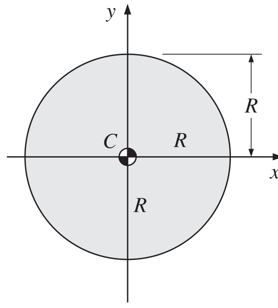
Si se conoce y_P, la distancia vertical del centro de presión a la superficie libre se determina a partir de $h_P = y_P \operatorname{sen}\theta$.

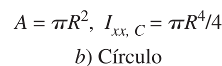
En la figura 3-28 se dan los valores de $I_{xx,\,C}$ para algunas áreas comunes. Para éstas y otras áreas que tienen simetría respecto al eje y, el centro de presión está sobre este eje directamente debajo del centroide. En esos casos, la ubicación del centro de presión es, sencillamente, el punto de la superficie del plano vertical de simetría a una distancia h_P hasta la superficie libre.



$A = ab$, $I_{xx,\,C} = ab^3/12$

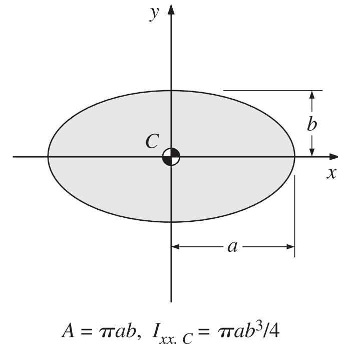
a) Rectángulo

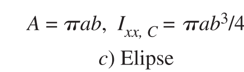




$A = \pi R^2$, $I_{xx,\,C} = \pi R^4/4$

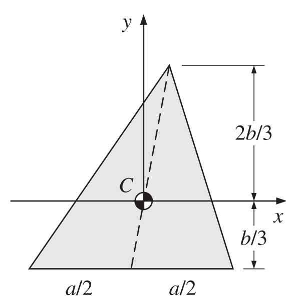
b) Círculo





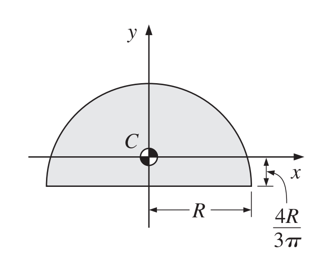
$A = \pi ab$, $I_{xx,\,C} = \pi ab^3/4$

c) Elipse



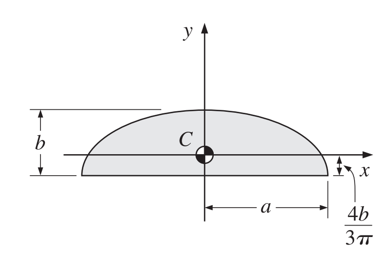
$A = ab/2$, $I_{xx,\,C} = ab^3/36$

d) Triángulo



$A = \pi R^2/2$, $I_{xx,\,C} = 0.109757R^4$

e) Semicírculo



$A = \pi ab/2$, $I_{xx,\,C} = 0.109757ab^3$

f) Semielipse

FIGURA 3-28

Centroide y momentos centroidales de inercia para algunas configuraciones geométricas comunes.

La presión actúa normal a la superficie y las fuerzas hidrostáticas que intervienen sobre una placa plana de cualquier configuración forman un volumen cuya base es el área de la placa y altura es la presión de variación lineal; como se muestra en la figura 3-29. Este **prisma** virtual **de presiones** tiene una interpretación física interesante: su *volumen* es igual a la *magnitud* de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre la placa, ya que $V = \int P\, dA$, y la línea de acción de esta fuerza pasa por el *centroide* del prisma homogéneo. La proyección del centroide sobre la placa es el *centro de presión.* Por lo tanto, con el concepto de prisma de presiones, el problema de describir la fuerza hidrostática resultante sobre una superficie plana se reduce a encontrar el volumen y las dos coordenadas del centroide de este prisma.

Caso especial: placa rectangular sumergida

Considere una placa plana rectangular totalmente sumergida de altura b y ancho a, que está inclinada , forma un ángulo θ respecto a la horizontal y cuyo borde superior está horizontal y se encuentra a una distancia s de la superficie libre, a lo largo del plano de la placa, como se muestra en la figura 3-30*a*. La fuerza hidrostática resultante sobre la superficie superior es igual a la presión promedio, la cual es la presión en el punto medio de esa superficie, multiplicada por el área superficial A; es decir,

Placa rectangular inclinada: $$F_R = P_C A = [P_0 + \rho g(s + b/2)\operatorname{sen}\theta]ab \qquad \textbf{(3-23)}$$

La fuerza actúa a una distancia vertical de $h_P = y_P$ sen θ hasta la superficie, directamente debajo del centroide de la placa, donde, por la ecuación 3-22*a*,

$$y_P = s + \frac{b}{2} + \frac{ab^3/12}{[s + b/2 + P_0/(\rho g \operatorname{sen}\theta)]ab}$$

$$= s + \frac{b}{2} + \frac{b^2}{12[s + b/2 + P_0/(\rho g \operatorname{sen}\theta)]} \qquad \textbf{(3-24)}$$

Cuando el borde superior de la placa está en la superficie libre y, donde $s = 0$, la ecuación 3-23 se reduce a

Placa rectangular inclinada ($s = 0$): $\quad F_R = [P_0 + \rho g(b \operatorname{sen}\theta)/2]ab \qquad$ **(3-25)**

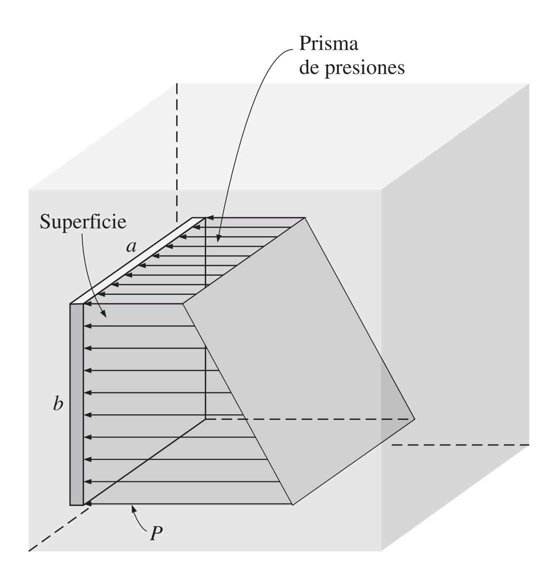
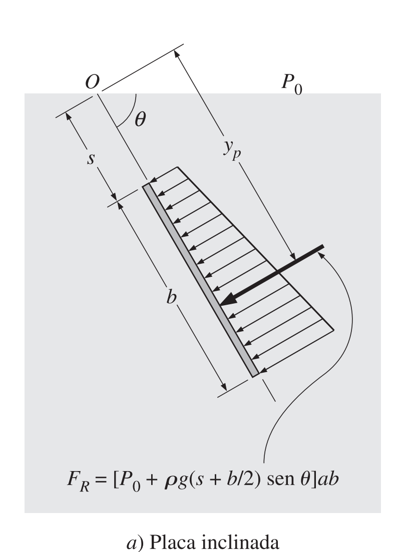
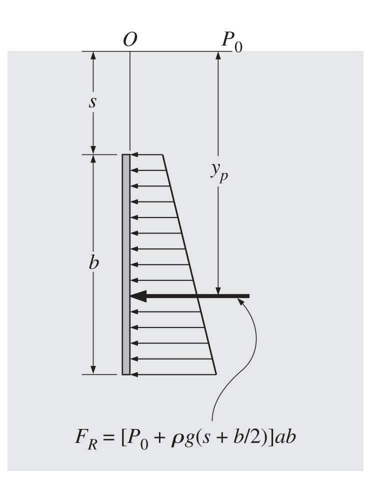


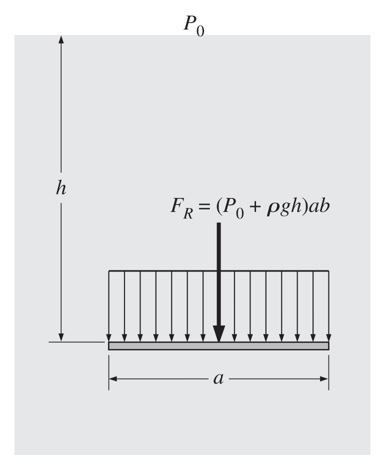
FIGURA 3-29
Las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre una superficie plana forman un volumen cuya base (cara izquierda) es la superficie y cuya altura es la presión.



a) Placa inclinada



b) Placa vertical



c) Placa horizontal

FIGURA 3-30
Fuerza hidrostática que actúa sobre la superficie superior de una placa rectangular sumergida, para los casos inclinada, vertical y horizontal.

Para una placa *vertical* totalmente sumergida ($\theta = 90°$) cuyo borde superior está horizontal, se puede obtener la fuerza hidrostática cuando se realiza sen $\theta = 1$ (Fig. 3-30*b*)

Placa rectangular vertical: $$F_R = [P_0 + \rho g(s + b/2)]ab \qquad \textbf{(3-26)}$$

Placa rectangular vertical ($s = 0$): $$F_R = (P_0 + \rho gb/2)ab \qquad \textbf{(3-27)}$$

Cuando se ignora el efecto de P_0 ya que actúa sobre los dos lados de la placa, la fuerza hidrostática sobre una superficie rectangular vertical de altura b, cuyo borde está horizontal y se encuentra en la superficie libre, es $F_R = \rho gab^2/2$ la cual actúa a una distancia de $2b/3$ de la superficie libre, directamente abajo del centroide de la placa.

La distribución de la presión sobre una superficie *horizontal* sumergida es uniforme y su magnitud es $P = P_0 + \rho gh$, donde h es la distancia de la superficie a la superficie libre. Por lo tanto, la fuerza hidrostática que actúa sobre una superficie rectangular horizontal es

Placa rectangular horizontal: $$F_R = (P_0 + \rho gh)ab \qquad \textbf{(3-28)}$$

y actúa pasando por el punto medio de la placa (Fig. 3-30*c*).

EJEMPLO 3-8 **Fuerza hidrostática que actúa sobre la puerta de un automóvil sumergido**

Un automóvil pesado se sumergió en un lago por accidente y quedó sobre sus ruedas (Fig. 3-31). La puerta mide 1.2 m de altura y 1 m de ancho, y el borde superior de la misma está 8 m abajo de la superficie libre del agua. Determine la fuerza hidrostática sobre la puerta y la ubicación del centro de presión, y determine si el conductor puede abrir la puerta.

Solución Un automóvil está sumergido en agua. Se debe determinar la fuerza hidrostática sobre la puerta y evaluar la posibilidad de que el conductor la abra.

Hipótesis **1** La superficie del fondo del lago es horizontal. **2** La cabina de pasajeros está sellada, de modo que no se filtra agua hacia su interior. **3** La puerta se puede tomar aproximadamente como una placa rectangular vertical. **4** La presión en la cabina de pasajeros permanece en el valor atmosférico, puesto que no se

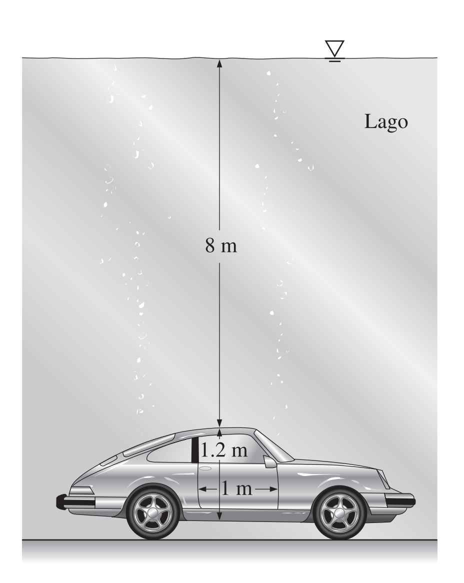


FIGURA 3-31
Esquema para el ejemplo 3-8.

filtra agua hacia dentro y, donde, no hay compresión del aire del interior. Por lo tanto, se puede cancelar la presión atmosférica en los cálculos, ya que actúa sobre los dos lados de la puerta. **5** El peso del automóvil es mayor que la fuerza de flotación que actúa sobre él.

Propiedades Se toma la densidad del agua del lago como 1 000 kg/m^3 en toda su extensión.

Análisis La presión promedio sobre la puerta es el valor de la presión en el centroide (punto medio) de la puerta y se determina que es

$$P_{\text{prom}} = P_C = \rho g h_C = \rho g(s + b/2)$$

$$= (1\ 000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(8 + 1.2/2 \text{ m})\left(\frac{1 \text{ kN}}{1\ 000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{84.4\ kN/m^2}$$

Entonces, la fuerza hidrostática resultante sobre la puerta queda

$$F_R = P_{\text{prom}} A = (84.4 \text{ kN/m}^2)(1 \text{ m} \times 1.2 \text{ m}) = \mathbf{101.3\ kN}$$

El centro de presión está directamente abajo del punto medio de la puerta, y su distancia a la superficie del lago se determina a partir de la ecuación 3-24 y cuando se realiza $P_0 = 0$ que es

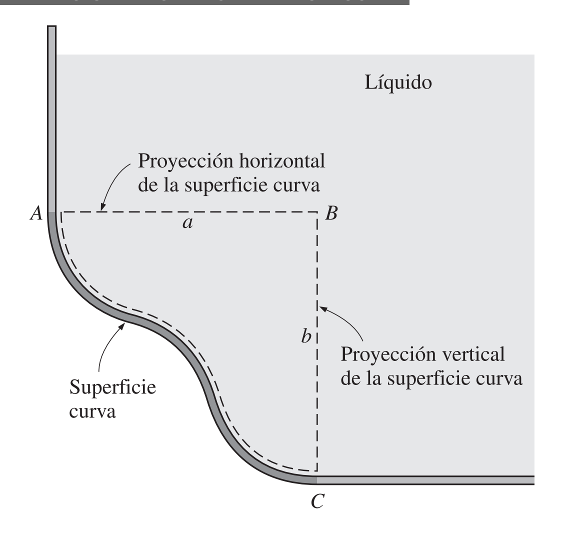
$$y_P = s + \frac{b}{2} + \frac{b^2}{12(s + b/2)} = 8 + \frac{1.2}{2} + \frac{1.2^2}{12(8 + 1.2/2)} = \mathbf{8.61\ m}$$

Discusión Una persona fuerte puede levantar 100 kg, cuyo peso es de 981 N o alrededor de 1 kN. Asimismo, la persona puede aplicar la fuerza en un punto lo más alejado de las bisagras (a 1 m de distancia) para obtener el efecto máximo y generar un momento de 1 kN · m. La fuerza hidrostática resultante actúa debajo del punto medio de la puerta y, a 0.5 m de las bisagras. Esto genera un momento de 50.6 kN · m, lo cual es alrededor 50 veces el momento que es posible que el conductor pueda generar. Por lo tanto, es imposible que el conductor abra la puerta del automóvil. Lo mejor que él puede hacer es dejar que entre poca agua (por ejemplo, con bajar un poco el vidrio de la ventanilla) y mantener su cabeza cerca del toldo. El conductor debe ser capaz de abrir la puerta un poco antes que el automóvil se llene de agua, ya que, en ese momento, las presiones sobre ambos lados de la puerta son casi las mismas y abrirla en el agua es casi tan fácil como hacerlo en el aire.

3-6 ▪ FUERZAS HIDROSTÁTICAS SOBRE SUPERFICIES CURVAS SUMERGIDAS

Para una superficie curva sumergida, la determinación de la fuerza hidrostática resultante es más complicada, en virtud de que es común que se necesite la integración de las fuerzas de presión que cambian de dirección a lo largo de la superficie curva. En este caso, el concepto de prisma de presiones tampoco es de mucha ayuda debido a las configuraciones complicadas con las que se trata.

La manera más fácil de determinar la fuerza hidrostática resultante F_R que actúa sobre una superficie curva bidimensional es determinar las componentes horizontal y vertical F_H y F_V por separado. Esto se realiza cuando se considera el diagrama de cuerpo libre del bloque de líquido encerrado por la superficie curva y las dos superficies planas (una horizontal y la otra vertical) que pasan por los dos extremos de la superficie curva, como se muestra en la figura 3-32. Nótese que la superficie vertical del bloque considerado de líquido es sencillamente la proyección de la superficie curva sobre un *plano vertical,* y la horizontal es la proyección de la superficie curva misma sobre un *plano horizontal.* La fuerza



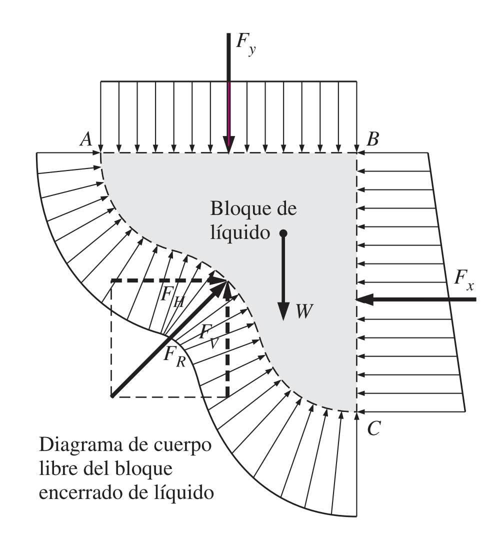


FIGURA 3-32
Determinación de la fuerza hidrostática que actúa sobre una superficie curva sumergida.

resultante que actúa sobre la superficie sólida curva es igual y opuesta a la que actúa sobre la superficie líquida curva (tercera ley de Newton).

Se pueden determinar la fuerza que actúa sobre la superficie plana imaginaria, horizontal o vertical, y su línea de acción como se comentó en la Sección 3-5. El peso del bloque encerrado de líquido de volumen V es sencillamente $W = \rho g V$, y actúa hacia abajo pasando por el centroide de este volumen. Cuando se observa que el bloque de fluido está en equilibrio estático, los balances de las fuerzas en las direcciones horizontal y vertical dan

Componente horizontal de la fuerza sobre la superficie curva: $F_H = F_x$ **(3-29)**

Componente vertical de la fuerza sobre la superficie curva: $F_V = F_y + W$ **(3-30)**

donde la suma $F_y + W$ es una adición vectorial (es decir, se suman las magnitudes si las dos actúan en la misma dirección y se restan si actúan en direcciones opuestas). Por tanto, se infiere que

1. La componente horizontal de la fuerza hidrostática que actúa sobre una superficie curva es igual (en magnitud y respecto a la línea de acción) a la fuerza hidrostática que actúa sobre la proyección vertical de esa superficie curva.
2. La componente vertical de la fuerza hidrostática que actúa sobre una superficie curva es igual a la fuerza hidrostática que actúa sobre la proyección horizontal de esa superficie curva, más (menos, si actúa en la dirección opuesta) el peso del bloque de fluido.

La magnitud de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre la superficie curva es $F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$, y la tangente del ángulo que forma con la horizontal es $\tan \alpha = F_V/F_H$. Se puede determinar la localización exacta de la línea de acción de la fuerza resultante (por ejemplo, su distancia a uno de los puntos extremos de la superficie curva) tomando un momento respecto a un punto apropiado. Estas observaciones son válidas para todas las superficies curvas, sin importar si se encuentran arriba o abajo del líquido. Nótese que en el caso de una *superficie curva que está arriba de un líquido*, el peso del líquido se *resta* de la componente vertical de la fuerza hidrostática, porque actúan en direcciones opuestas (Fig. 3-33).

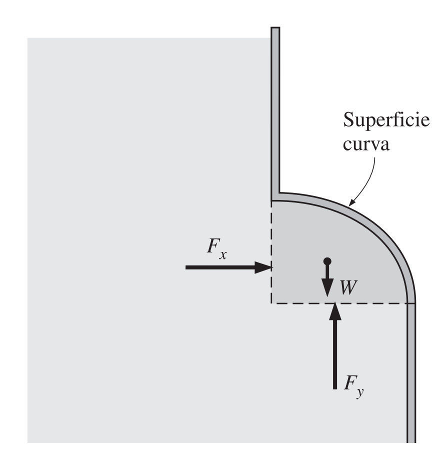


FIGURA 3-33
Cuando una superficie curva está arriba del líquido, el peso del líquido y la componente vertical de la fuerza hidrostática actúan en direcciones opuestas.

Cuando la superficie curva es un *arco circular* (círculo completo o cualquier parte de él), la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre la superficie siempre pasa por el centro del círculo. Esto se debe a que las fuerzas de presión son normales a la superficie, y todas las líneas normales a la superficie de un círculo pasan por el centro del mismo. De este modo, las fuerzas de presión forman un sistema de fuerzas concurrentes en el centro, el cual se puede reducir a una sola fuerza equivalente en ese punto (Fig. 3-34).

Por último, se pueden determinar las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un plano o superficie curva sumergidos en un **fluido de capas múltiples** de densidades diferentes, cuando se consideran las distintas partes de la superficie que se encuentran en los diferentes fluidos como superficies distintas, si se encuentra la fuerza sobre cada una de las partes, y a continuación se suman aplicando la adición vectorial. Para una superficie plana se puede expresar como (Fig. 3-35):

Superficie plana en un fluido de capas múltiples: $$F_R = \sum F_{R,i} = \sum P_{C,i} A_i \qquad \textbf{(3-31)}$$

donde $P_{C,i} = P_0 + \rho_i g h_{C,i}$ es la presión en el centroide de la porción de la superficie que está en el fluido i y A_i es el área de la placa en ese fluido. Se puede determinar la línea de acción de esta fuerza equivalente con base en el requisito de que el momento de ella respecto a cualquier punto sea igual a la suma de los momentos de cada una de las fuerzas respecto al mismo punto.

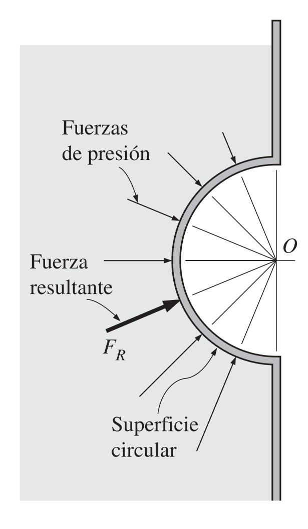


FIGURA 3-34
La fuerza hidrostática que actúa sobre una superficie circular siempre pasa por el centro del círculo, puesto que las fuerzas de presión son normales a la superficie y todas pasan por el centro.

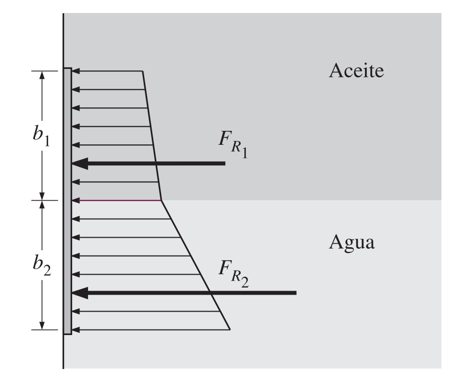


FIGURA 3-35
Se puede determinar la fuerza hidrostática sobre una superficie en un fluido de capas múltiples cuando se consideran las partes de la superficie en los diferentes fluidos como superficies diferentes.

EJEMPLO 3-9 Una compuerta cilíndrica controlada por la gravedad

Un cilindro sólido largo de radio 0.8, articulado en el punto *A* se emplea como una compuerta automática, como se muestra en la figura 3-36. Cuando el nivel del agua llega a 5 m, la compuerta se abre girando en torno a la articulación en el punto *A*. Determine *a*) la fuerza hidrostática que actúa sobre el cilindro y su línea de acción cuando la compuerta se abre, y *b*) el peso del cilindro por m de longitud del mismo.

Solución La altura de un depósito de agua se controla por medio de una compuerta cilíndrica articulada al depósito. Se deben determinar la fuerza hidrostática que actúa sobre el cilindro y el peso del cilindro por m de longitud.

Hipótesis **1** La fricción en la articulación es despreciable. **2** La presión atmosférica actúa sobre los dos lados de la compuerta, donde se cancela.

Propiedades Se toma la densidad del agua como 1 000 kg/m³ en toda su extensión.

Análisis *a*) Se considera el diagrama de cuerpo libre del bloque de líquido encerrado por la superficie circular del cilindro y sus proyecciones vertical y horizontal. Las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre las superficies planas vertical y horizontal, así como el peso del bloque de líquido, se determinan como

Fuerza horizontal sobre la superficie vertical:

$$F_H = F_x = P_{\text{prom}} A = \rho g h_C A = \rho g(s + R/2)A$$

$$= (1\,000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(4.2 + 0.8/2 \text{ m})(0.8 \text{ m} \times 1 \text{ m})\left(\frac{1 \text{ kN}}{1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{36.1 \text{ kN}}$$

Fuerza vertical sobre la superficie horizontal (hacia arriba):

$$F_y = P_{\text{prom}} A = \rho g h_C A = \rho g h_{\text{inferior}} A$$

$$= (1\,000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m})(0.8 \text{ m} \times 1 \text{ m})\left(\frac{1 \text{ kN}}{1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$= 39.2 \text{ kN}$$

FIGURA 3-36
Esquema para el ejemplo 3-9 y diagrama de cuerpo libre del fluido que está debajo del cilindro.

Peso del bloque de fluido por m de longitud (hacia abajo):

$$W = mg = \rho g V = \rho g(R^2 - \pi R^2/4)(1 \text{ m})$$
$$= (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.8 \text{ m})^2(1 - \pi/4)(1 \text{ m})\left(\frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$
$$= 1.3 \text{ kN}$$

Por lo tanto, la fuerza vertical neta hacia arriba es:

$$F_V = F_y - W = 39.2 - 1.3 = 37.9 \text{ kN}$$

Entonces la magnitud y dirección de la fuerza hidrostática que actúa sobre la superficie cilíndrica queda:

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{36.1^2 + 37.9^2} = \mathbf{52.3\ kN}$$
$$\tan\theta = F_V/F_H = 37.9/36.1 = 1.05 \rightarrow \theta = 46.4°$$

De esta manera, la magnitud de la fuerza hidrostática que actúa sobre el cilindro es de 52.3 kN por m de longitud del mismo y su línea de acción pasa por el centro de él y forma un ángulo de 46.4° con la horizontal.

b) Cuando el nivel del agua tiene 5 m de altura, la compuerta está a punto de abrirse y la fuerza de reacción en el fondo del cilindro es cero. Entonces las fuerzas que no son las que en la articulación actúan sobre el cilindro son su peso, que actúa pasando por el centro y la fuerza hidrostática ejercida por el agua. Si se toma un momento respecto al punto *A* en la ubicación de la articulación y se iguala a cero se obtiene:

$$F_R R \operatorname{sen}\theta - W_{cil}\ R = 0 \rightarrow W_{cil} = F_R \operatorname{sen}\theta = (52.3 \text{ kN}) \operatorname{sen} 46.4° = \mathbf{37.9\ kN}$$

Discusión El peso del cilindro por unidad de longitud se determina como 37.9 kN. Se puede demostrar que esto corresponde a una masa de 3 863 kg por m de longitud y a una densidad de 1 921 kg/m^3 para el material del cilindro.

3-7 ▪ FLOTACIÓN Y ESTABILIDAD

Es una hecho común que un objeto se sienta más ligero y pese menos en un líquido que en el aire. Esto se puede demostrar con facilidad si se pesa un objeto denso en el agua, con una balanza de resorte impermeable. Asimismo, los objetos hechos de madera o de otros materiales ligeros flotan en el agua. Éstas y otras observaciones sugieren que un fluido ejerce una fuerza hacia arriba sobre un cuerpo sumergido en él. Esta fuerza que tiende a levantar el cuerpo se llama **fuerza de flotación** y se denota por F_B.

La fuerza de flotación se debe al aumento de la presión en un fluido con profundidad. Por ejemplo, considere una placa plana de espesor h sumergida en un líquido de densidad ρ_f paralela a la superficie libre, como se muestra en la figura 3-37. El área de la superficie superior (y también de la inferior) de la placa es A, y su distancia a la superficie libre es s. Las presiones en las superficies superior e inferior de la placa son $\rho_f gs$ y $\rho_f g(s + h)$, respectivamente. Entonces, la fuerza hidrostática $F_{sup} = \rho_f gsA$ actúa hacia abajo sobre la superficie superior y la fuerza más grande $F_{inf} = \rho_f g(s + h)A$ actúa hacia arriba sobre la superficie inferior de la placa. La diferencia entre estas dos fuerzas es una fuerza neta hacia arriba, la cual es la *fuerza de flotación,*

$$F_B = F_{inf} - F_{sup} = \rho_f g(s + h)A - \rho_f gsA = \rho_f ghA = \rho_f gV \quad \text{(3-32)}$$

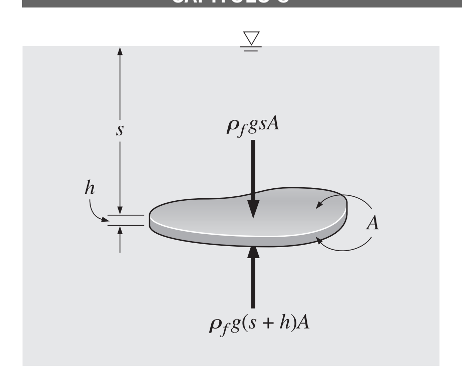


FIGURA 3-37
Placa plana de espesor uniforme h sumergida en un líquido, paralela a la superficie libre.

donde $V = hA$ es el volumen de la placa. Pero la relación $\rho_f gV$ es, sencillamente, el peso del líquido cuyo volumen es igual al volumen de la placa. Se llega a la conclusión que *la fuerza de flotación que actúa sobre la placa es igual al peso del líquido desplazado por la propia placa.* Nótese que la fuerza de flotación es independiente de la distancia del cuerpo a la superficie libre. También es independiente de la densidad del cuerpo sólido.

La relación de la ecuación 3-32 se desarrolla para una configuración geométrica sencilla, pero es válida para cualquier cuerpo, sin importar su forma. Esto se puede demostrar con matemática mediante un balance de fuerzas o, simplemente, por este argumento: considérese un cuerpo sólido con forma arbitraria sumergido en un fluido en reposo y compare con una masa de fluido de la misma forma, indicada por las líneas punteadas, a la misma distancia a la superficie libre (Fig. 3-38). Las fuerzas de flotación que actúan sobre estos dos cuerpos son las mismas ya que las distribuciones de la presión, las cuales dependen sólo de la profundidad, son iguales en las fronteras de ambos. El cuerpo imaginario de fluido está en equilibrio estático y la fuerza neta y el momento neto que actúan sobre él son cero. Por lo tanto, la fuerza de flotación ascendente debe ser la misma al peso del cuerpo imaginario de fluido, cuyo volumen es igual al del cuerpo sólido. Además, el peso y la fuerza de flotación deben tener la misma línea de acción para crear un momento cero. Esto se conoce como **principio de Arquímedes**, en honor del matemático griego (287-212 a.C.), y se expresa como

> La fuerza de flotación que actúa sobre un cuerpo sumergido en un fluido es igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo y actúa hacia arriba pasando por el centroide del volumen desplazado.

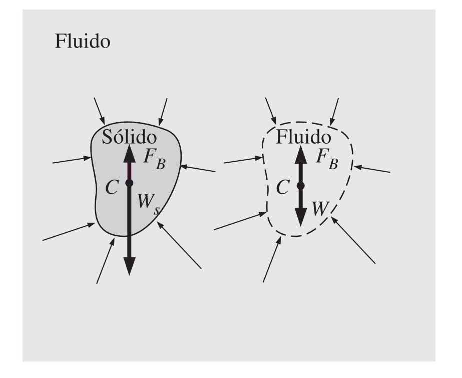


FIGURA 3-38
Las fuerzas de flotación que actúan sobre un cuerpo sólido sumergido en un fluido y sobre una masa del fluido de la misma forma, a la misma profundidad, son idénticas. La fuerza de flotación F_B actúa hacia arriba pasando por el centroide C del volumen desplazado y es igual en magnitud al peso W del fluido desplazado, pero en la dirección opuesta. Para un sólido de densidad uniforme, su peso W_s también actúa pasando por el centroide, pero su magnitud no es necesariamente igual a la del fluido que desplaza. (Aquí, $W_s > W$ y, donde $W_s > F_B$; este cuerpo sólido se hundiría.)

Para los cuerpos *flotantes*, el peso del cuerpo completo debe ser igual a la fuerza de flotación, la cual es el peso del fluido cuyo volumen es igual al de la parte sumergida de ese cuerpo; es decir:

$$F_B = W \rightarrow \rho_f gV_{sum} = \rho_{prom,\ cuerpo}\, gV_{total} \rightarrow \frac{V_{sum}}{V_{total}} = \frac{\rho_{prom,\ cuerpo}}{\rho_f} \quad \text{(3-33)}$$

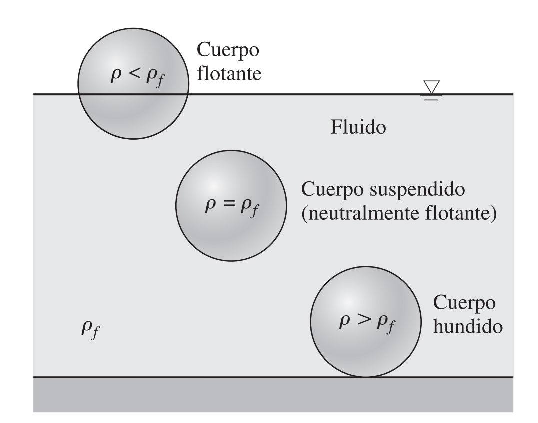


FIGURA 3-39
Un cuerpo sólido cuando cae dentro de un fluido puede hundirse, flotar o quedar en reposo en cualquier sitio de éste, dependiendo sobre su densidad relativa a la densidad del fluido.

Por lo tanto, la fracción sumergida del volumen de un cuerpo flotante es igual a la razón de la densidad promedio del cuerpo a la densidad del fluido. Nótese que cuando la razón de densidades es igual a uno, o mayor que uno, el cuerpo flotante se vuelve por completo sumergido.

Con base en estas observaciones, se infiere que un cuerpo sumergido en un fluido 1) permanece en reposo en cualquier punto en el fluido, cuando su densidad es igual a la densidad del fluido; 2) se hunde hasta el fondo, cuando su densidad es mayor que la del fluido; y 3) asciende hasta la superficie del fluido y flota cuando la densidad del cuerpo es menor que la del fluido (Fig. 3-39).

La fuerza de flotación es proporcional a la densidad del fluido y, por tanto, se podría pensar que la fuerza de flotación que ejercen los gases, como el aire, es despreciable. Es evidente que, en general, éste es el caso, pero hay excepciones significativas. Por ejemplo, el volumen de una persona es de alrededor de 0.1 m^3, y, tomando la densidad del aire como 1.2 kg/m^3, la fuerza de flotación que ejerce el aire sobre la persona es:

$$F_B = \rho_f g V = (1.2 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.1 \text{ m}^3) \cong 1.2 \text{ N}$$

El peso de una persona de 80 kg es de 80 $\times$ 9.81 = 788 N. Por lo tanto, en este caso, ignorar la flotación conduce a un error en el peso de sólo 0.15 por ciento, lo cual es despreciable. Pero los efectos de la flotación en los gases dominan en algunos fenómenos naturales importantes, como el ascenso del aire cálido en un medio ambiente más frío y el comienzo de las corrientes de convección natural, el ascenso de los globos de aire caliente o de helio y los movimientos del aire en la atmósfera. Por ejemplo, un globo de helio asciende como resultado del efecto de flotación hasta que alcanza una altitud en donde la densidad del aire (la cual disminuye con la altitud) se hace igual a la del helio contenido en el globo, se supone que el globo no se revienta para entonces y se ignore el peso del material del que está hecho.

El principio de Arquímedes también se aplica en la geología moderna cuando se considera que los continentes flotan sobre un mar de magma.

EJEMPLO 3-10 Medición de la gravedad específica mediante un hidrómetro

Si el lector tiene un acuario con agua de mar, es posible que haya usado un pequeño tubo cilíndrico de vidrio con algún peso de plomo en el fondo para medir la salinidad del agua simplemente con observar cuánto se hunde el tubo. Un aparato de ese tipo que flota en posición vertical y que se usa para medir la gravedad específica de un líquido se llama *hidrómetro* (Fig. 3-40). Su parte superior

se eleva por arriba de la superficie del líquido y las divisiones que tiene marcadas permiten leer de manera directa la gravedad específica. El hidrómetro se calibra de manera que, en agua pura, da una lectura exactamente de 1.0, en la interfaz aire-agua. *a*) Obtenga una relación para la gravedad específica de un líquido como función de la distancia Δz a partir de la marca correspondiente al agua pura, y *b*) determine la masa del plomo que debe colocarse en un hidrómetro de 1 cm de diámetro y 20 cm de longitud, si debe flotar hundido hasta la mitad (la marca de 10 cm) en agua pura.

Solución Se debe medir la gravedad específica de un líquido con un hidrómetro. Se debe obtener una relación entre la gravedad específica y la distancia vertical a partir del nivel de referencia, así como la cantidad de plomo que se necesita agregar en el tubo para cierto hidrómetro.

Hipótesis **1** El peso del tubo de vidrio es despreciable en relación con el peso del plomo agregado. **2** Se descarta la curvatura del fondo del tubo.

Propiedades Se toma la densidad del agua pura como 1 000 kg/m^3.

Análisis *a*) Nótese que el hidrómetro está en equilibrio estático, la fuerza de flotación F_B que ejerce el líquido debe ser siempre igual al peso W del hidrómetro. En agua pura, sea z_0 la distancia vertical entre el fondo del hidrómetro y la superficie libre del agua. Si, en este caso, se hace $F_B = W$ da

$$W_{\text{hidró}} = F_{B,a} = \rho_a g V_{\text{sum}} = \rho_a gAz_0 \quad \textbf{(1)}$$

donde A es el área de la sección transversal del tubo y ρ_a es la densidad del agua pura.

En un fluido más ligero que el agua ($\rho_f < \rho_a$), el hidrómetro se hundirá a una profundidad mayor y el nivel del líquido estará a una distancia de Δz por arriba de z_0. De nuevo, si se realiza $F_B = W$, da:

$$W_{\text{hidró}} = F_{B,f} = \rho_f g V_{\text{sum}} = \rho_f gA(z_0 + \Delta z) \quad \textbf{(2)}$$

Esta relación también es válida para los fluidos más pesados que el agua, tomando Δz hacia abajo de z_0 para ser una cantidad negativa. Si aquí se igualan entre sí las ecuaciones (1) y (2), supuesto que el peso del hidrómetro es constante, y reordenando, se obtiene:

$$\rho_a gAz_0 = \rho_f gA(z_0 + \Delta z) \quad \rightarrow \quad \text{GE}_f = \frac{\rho_f}{\rho_a} = \frac{z_0}{z_0 + \Delta z}$$

la cual es la relación entre la gravedad específica del fluido y Δz. Nótese que z_0 es constante para un hidrómetro dado y Δz es negativa para los fluidos más pesados que el agua pura.

b) Descartando el peso del tubo de vidrio, la cantidad de plomo que es necesario añadir a ese tubo se determina con base en el requisito de que el peso del plomo sea igual a la fuerza de flotación. Cuando el hidrómetro está flotando con la mitad de él sumergida en agua, la fuerza de flotación que actúa sobre él es de:

$$F_B = \rho_a g V_{\text{sum}}$$

Si se iguala F_B al peso del plomo da:

$$W = mg = \rho_a g V_{\text{sum}}$$

Cuando se despeja m y se sustituye, se determina que la masa del plomo es

$$m = \rho_a V_{\text{sum}} = \rho_a(\pi R^2 h_{\text{sum}}) = (1\,000 \text{ kg/m}^3)[\pi(0.005 \text{ m})^2(0.1 \text{ m})] = \mathbf{0.00785 \text{ kg}}$$

Discusión Nótese que si se necesitara que el hidrómetro se hundiera sólo 5 cm en el agua, la masa necesaria de plomo sería la mitad de esta cantidad. Asimismo, es necesario verificar la suposición de que el peso del tubo de vidrio es despreciable, dado que la masa del plomo sólo es de 7.85 g.

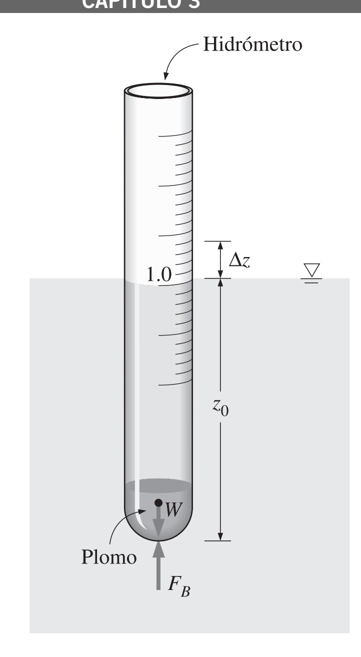


FIGURA 3-40
Esquema para el ejemplo 3-10.

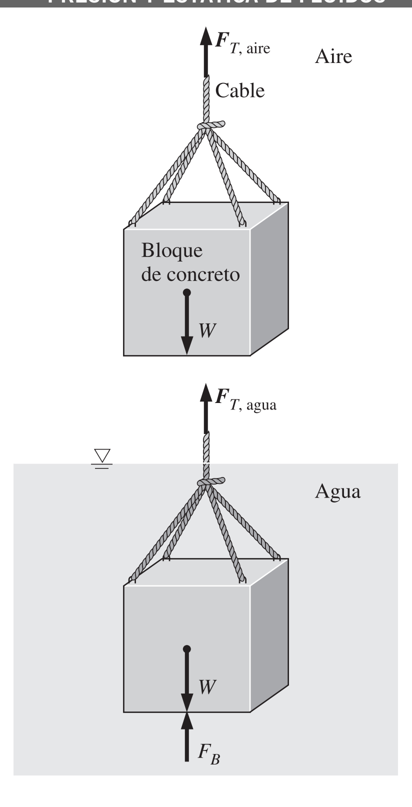


FIGURA 3-41
Esquema para el ejemplo 3-11.

EJEMPLO 3-11 Pérdida de peso de un objeto en agua de mar

Se usa una grúa para bajar objetos pesados en el mar (densidad = 1 025 kg/m³) para un proyecto de construcción submarina (Fig. 3-41). Determine la tensión en el cable de la grúa debida a un bloque rectangular de concreto (densidad = 2 300 kg/m³) cuando está *a*) suspendido en el aire y *b*) sumergido totalmente en el agua.

Solución Se baja un bloque de concreto en el mar. Se debe determinar la tensión en el cable antes y después que el bloque esté en el agua.
Hipótesis **1** La flotación en el aire es despreciable. **2** El peso de los cables es despreciable.
Propiedades Las densidades se dan como 1 025 kg/m³ para el agua de mar y 2 300 kg/m³ para el concreto.
Análisis *a*) Considere el diagrama de cuerpo libre del bloque de concreto. Las fuerzas que actúan sobre éste en el aire son su peso y la fuerza de tensión producida por el cable y dirigida hacia arriba. Estas dos fuerzas deben equilibrarse entre sí y, por lo tanto, la tensión en el cable debe ser igual al peso del bloque:

$$V = (0.4\text{ m})(0.4\text{ m})(3\text{ m}) = 0.48\text{ m}^3$$

$$F_{T,\text{ aire}} = W = \rho_{\text{concreto}}\, gV$$

$$= (2\,300\text{ kg/m}^3)(9.81\text{ m/s}^2)(0.48\text{ m}^3)\left(\frac{1\text{ kN}}{1\,000\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = \mathbf{10.8\text{ kN}}$$

b) Cuando el bloque está sumergido en el agua, se tiene la fuerza adicional de flotación que actúa hacia arriba. En este caso, el balance de fuerzas da:

$$F_B = \rho_f gV = (1\,025\text{ kg/m}^3)(9.81\text{ m/s}^2)(0.48\text{ m}^3)\left(\frac{1\text{ kN}}{1\,000\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = \mathbf{4.8\text{ kN}}$$

$$F_{T,\text{ agua}} = W - F_B = 10.8 - 4.8 = \mathbf{6.0\text{ kN}}$$

Discusión Nótese que el peso del bloque de concreto y, por lo tanto, la tensión en el cable disminuyen en (10.8 − 6.0)/10.8 = 55 por ciento en el agua.

Estabilidad de los cuerpos sumergidos y de los flotantes

Una aplicación valiosa del concepto de flotación es la evaluación de la estabilidad de los cuerpos sumergidos y de los flotantes sin accesorios externos. Este tema tiene importancia en el diseño de los barcos y submarinos (Fig. 3-42). Enseguida se incluyen comentarios cualitativos generales acerca de la estabilidad vertical y la rotacional.

Se aplica la analogía de la "bola sobre el piso" con la finalidad de explicar los conceptos fundamentales de la estabilidad y la inestabilidad. En la figura 3-43 se muestran tres bolas en reposo sobre el piso. El caso *a*) es **estable**, ya que cualquier perturbación pequeña (alguien que mueva la bola hacia la derecha o hacia la izquierda) genera una fuerza de restitución (debida a la gravedad) que la regresa a su posición inicial. El caso *b*) es **neutralmente estable**, porque si alguien mueve la bola hacia la derecha o hacia la izquierda permanecería puesta en su nueva ubicación. No tiende a regresar a su ubicación original ni continúa moviéndose alejándose de ésta. El caso *c*) es una situación en la que puede ser que la bo-

la esté en reposo en el momento, pero cualquier perturbación, inclusive infinitesimal hace que la bola ruede hacia abajo del promontorio (no regresa a su posición original, más bien diverge de ella). Esta situación es **inestable**. ¿Qué se puede decir acerca del caso en que la bola está sobre un piso *inclinado*? En realidad no es apropiado comentar la estabilidad para este caso, puesto que la bola no se encuentra en un estado de equilibrio. En otras palabras, no puede estar en reposo y rodaría del plano, inclusive sin que hubiera perturbación.

Para un cuerpo sumergido o flotante en equilibrio estático, el peso y la fuerza de flotación que actúan sobre él se equilibran entre sí y, de manera inherente, esos cuerpos son estables en la *dirección vertical*. Si un cuerpo sumergido neutralmente flotante se asciende o desciende hasta una profundidad diferente, el cuerpo permanecerá en equilibrio en esa ubicación. Si un cuerpo flotante se asciende o desciende mediante una fuerza vertical, el cuerpo regresará a su posición original tan pronto como se elimine el efecto externo. Por lo tanto, un cuerpo flotante posee estabilidad vertical, mientras que uno sumergido neutralmente flotante es neutralmente estable, puesto que no regresa a su posición original después de una perturbación.

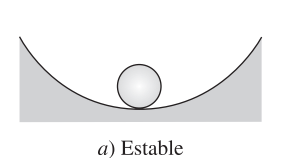
La *estabilidad rotacional* de un *cuerpo sumergido* depende de las ubicaciones relativas del *centro de gravedad G* del cuerpo y del *centro de flotación B*, el cual es el centroide del volumen desplazado. Un cuerpo sumergido es *estable* si tiene un fondo pesado y, en consecuencia, el punto G está directamente debajo del B (Fig. 3-44). En esos casos, una perturbación rotacional del cuerpo produce un *momento de restitución* que lo regresa a su posición estable original. Un diseño estable para un submarino exige que los motores y las cabinas de la tripulación estén ubicados en la mitad inferior, para desplazar el peso hacia el fondo tanto como sea posible. Los globos con aire caliente o con helio (que se pueden concebir como si estuvieran sumergidos en el aire) también son estables, ya que la canastilla que lleva la carga está abajo. Un cuerpo sumergido cuyo centro de gravedad *G* está directamente arriba del *B* es *inestable* y cualquier perturbación hará que este cuerpo se voltee. Un cuerpo para el cual *G* y *B* coinciden es *neutralmente estable.* Éste es el caso de los cuerpos cuya densidad es constante en toda su extensión. Para esos cuerpos no existe tendencia de voltearse o enderezarse por sí mismos.

¿Qué se puede decir acerca de un caso en donde el centro de gravedad no esté alineado en la dirección vertical con el centro de flotación (Fig. 3-45)? En realidad no es apropiado comentar la estabilidad para este caso, ya que el cuerpo no se encuentra en un estado de equilibrio. En otras palabras, no puede estar en reposo y giraría hacia su estado estable, inclusive sin que hubiera perturbación. El momento de restitución en el caso de la figura 3-45 es en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y hace que el cuerpo gire en ese sentido de modo que se alinee el punto *G* en la dirección vertical con el *B*. Nótese que puede haber alguna oscilación, pero llega el momento en que el cuerpo se establece en su estado de equilibrio estable (caso *a* de la figura 3-44). La estabilidad del cuerpo de la figura 3-45 es análoga a la de la bola sobre un piso inclinado. ¿Puede predecir el lector lo que sucedería si el peso del cuerpo de la figura 3-45 estuviera en el lado opuesto del mismo?

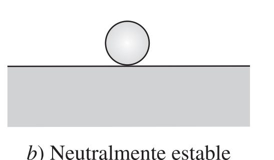
Los criterios de estabilidad rotacional son semejantes para los *cuerpos flotantes.* Una vez más, si el cuerpo flotante tiene fondo pesado y, por tanto, el centro



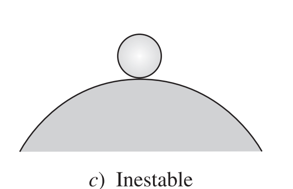
FIGURA 3-42
Para los cuerpos flotantes, como los barcos, la estabilidad es una consideración importante respecto a la seguridad.
© Corbis/vol. 96.



a) Estable



b) Neutralmente estable



c) Inestable

FIGURA 3-43
La estabilidad se entiende con facilidad cuando se analiza una bola sobre el piso.

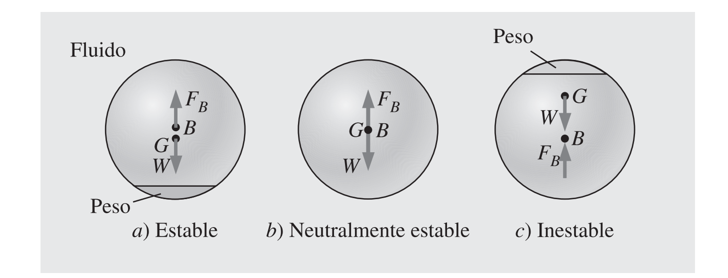


FIGURA 3-44
Un cuerpo sumergido neutralmente flotante es *a*) estable si el centro de gravedad *G*, está directamente abajo del centro de flotación *B*, *b*) neutralmente estable si *G* y *B* coinciden y *c*) inestable si *G* está directamente arriba de *B*.

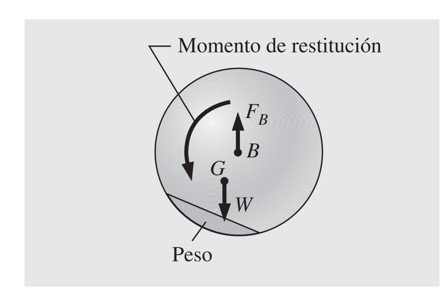


FIGURA 3-45
Cuando el centro de gravedad *G* de un cuerpo sumergido neutralmente flotante no está alineado en la dirección vertical con el centro de flotación *B*, del cuerpo, no se encuentra en estado de equilibrio y giraría hasta alcanzar su estado estable, inclusive sin perturbación.

de gravedad *G*, está directamente abajo del centro de flotación *B*, el cuerpo siempre es estable. Pero, a diferencia de los cuerpos sumergidos, un cuerpo flotante inclusive puede ser estable cuando *G* está directamente arriba del *B* (Fig. 3-46). Esto se debe a que el centroide del volumen desplazado se mueve hacia uno de los lados hasta un punto *B′* durante una perturbación rotacional, mientras que el centro de gravedad *G*, del cuerpo permanece inalterado. Si el punto *B′* está suficientemente lejos, estas dos fuerzas crean un momento de restitución y regresan el cuerpo a la posición original. Una medida de la estabilidad para los cuerpos flotantes es la **altura metacéntrica** *GM,* la cual es la distancia entre el centro de gravedad *G*, y el metacentro *M* (el punto de intersección de las líneas de acción de la fuerza de flotación que pasa por el cuerpo antes y después de la rotación). El metacentro se puede considerar como un punto fijo para la mayor parte de las formas de los cascos, para ángulos pequeños de balanceo, hasta de más o menos 20°. Un cuerpo flotante es estable si el punto *M* está arriba del *G* y, por consiguiente, *GM* es positiva e inestable si el punto *M* está debajo del *G* y, en consecuencia, *GM* es negativa. En el último caso, el peso y la fuerza de flotación que actúan sobre el cuerpo inclinado generan un momento de volcadura, en lugar de uno de restitución, haciendo que el cuerpo se vuelque. La longitud de la altura metacéntrica *GM* por encima de *G* es una medida de la estabilidad: entre mayor sea, más estable es el cuerpo flotante.

Como ya se indicó, un barco se puede inclinar hasta cierto ángulo máximo sin volcarse, pero más allá de ese ángulo se vuelca (y se hunde). Se hará una analogía final entre la estabilidad de los objetos flotantes y la de una bola que rueda por el piso. Imaginemos que la bola está en una depresión entre dos elevaciones (Fig. 3-47). Regresa a su posición de equilibrio estable después de que se le perturba (hasta un límite). Si la amplitud de la perturbación es demasiado grande, la bola rueda sobre el lado opuesto de la elevación y no regresa a su posición de equilibrio. Esta situación se describe como estable hasta cierto nivel límite de la perturbación, pero inestable más allá de ese límite.

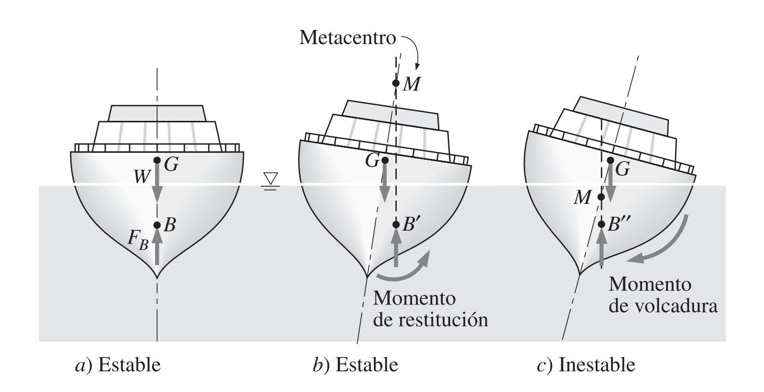


FIGURA 3-46
Un cuerpo flotante es *estable* si su fondo es pesado y, por tanto, el centro de gravedad *G* está debajo del centroide *B* del mismo, o bien si el metacentro *M* está arriba del punto *G*. Sin embargo, el cuerpo es *inestable* si el punto *M* está abajo del punto *G*.

3-8 ▪ FLUIDOS EN EL MOVIMIENTO DEL CUERPO RÍGIDO

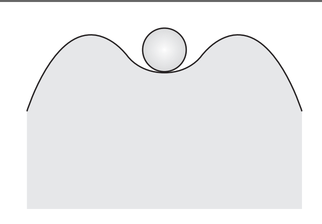


FIGURA 3-47
Una bola en una depresión entre dos elevaciones es estable para las perturbaciones pequeñas, pero inestable para las grandes.

En la sección 3-1, se demostró que la presión en un punto dado tiene la misma magnitud en todas direcciones y es una función e*scalar* En esta sección se obtienen relaciones para la variación de la presión en los fluidos que se mueven como un cuerpo sólido, con o sin aceleración, en ausencia de cualesquiera esfuerzos cortantes (es decir, ningún movimiento entre las capas de fluido una con relación a las otras).

Muchos fluidos, como la leche y la gasolina, se transportan en camiones-tanques. En un camión de este tipo que acelera, el fluido se mueve con rapidez hacia la parte posterior y se presenta alguna salpicadura inicial. Pero, a continuación, se forma una nueva superficie libre (por lo general no horizontal), cada una de las partículas del fluido adquiere la misma aceleración y todo el fluido se mueve como un cuerpo rígido. Ningún esfuerzo cortante se desarrolla dentro de la masa del fluido, ya que no se tiene deformación y ningún cambio en la forma. También se presenta el movimiento de cuerpo rígido de un fluido cuando éste está en un tanque que gira alrededor de un eje.

Considérese un elemento rectangular diferencial de fluido con longitudes de los lados dx, dy y dz en las direcciones x, y y z, respectivamente, estando el eje z en la dirección vertical (Fig. 3-48). Nótese que el elemento diferencial de fluido se comporta como un *cuerpo rígido*, la *segunda Ley de Newton del movimiento* para este elemento se puede expresar como:

$$\delta\vec{F} = \delta m \cdot \vec{a} \tag{3-34}$$

donde $\delta m = \rho\, d\mathrm{V} = \rho\, dx\, dy\, dz$ es la masa del elemento de fluido, $\vec{a}$ es la aceleración y $\delta\vec{F}$ es la fuerza neta que actúa sobre el elemento.

Las fuerzas que actúan sobre el elemento de fluido constan de *fuerzas del cuerpo* como la gravedad que actúa en toda la extensión del cuerpo del elemento y son proporcionales al volumen del propio cuerpo (y también las fuerzas eléctricas y magnéticas, las cuales no se considerarán en este texto) y las *fuerzas superficiales* como las fuerzas de presión, que actúan sobre la superficie del elemento y son proporcionales al área superficial (los esfuerzos cortantes también son fuerzas superficiales pero, en este caso, no se aplican ya que las posiciones relativas de los elementos de fluido permanecen inalteradas). Las fuerzas superficiales aparecen a medida que el elemento de fluido se aísla de sus alrededores para el análisis y el efecto del cuerpo separado del resto de fluido se reemplaza por una fuerza en ese lugar. Nótese que la presión representa la fuerza de compresión que se aplica sobre el elemento de fluido por el fluido circundante y siempre está dirigida hacia la superficie.

Si se toma la presión en el centro del elemento como P, las presiones en las superficies superior e inferior del elemento se pueden expresar como $P + (\partial P/\partial z)\, dz/2$ y $P - (\partial P/\partial z)\, dz/2$, respectivamente. Cuando se nota que la fuerza de presión que actúa sobre una superficie es igual a la presión promedio multiplicada por el área superficial, la fuerza superficial neta que actúa sobre el elemento en la dirección z es la diferencia entre las fuerzas de presión que actúan sobre las caras superior e inferior,

$$\delta F_{S,z} = \left(P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy = -\frac{\partial P}{\partial z}\, dx\, dy\, dz \tag{3-35}$$

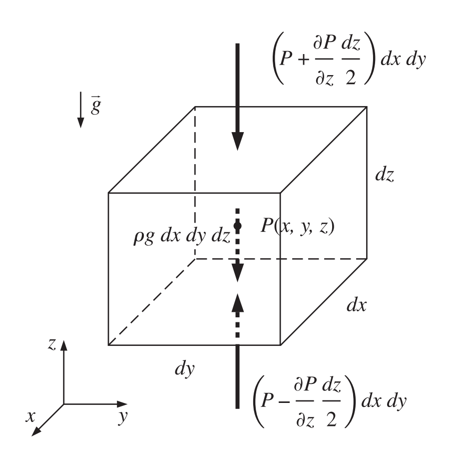


FIGURA 3-48
Fuerzas superficiales y del cuerpo que actúan sobre un elemento diferencial de fluido en la dirección vertical.

De manera análoga, las fuerza superficiales netas en las direcciones x y y son

$$\delta F_{S,x} = -\frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz \qquad \text{y} \qquad \delta F_{S,y} = -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy\, dz \tag{3-36}$$

Entonces la fuerza superficial (la cual es simplemente la fuerza de presión) que actúa sobre el elemento completo se puede expresar en forma vectorial como:

$$\delta \vec{F}_S = \delta F_{S,x}\vec{i} + \delta F_{S,y}\vec{j} + \delta F_{S,z}\vec{k}$$
$$= -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right) dx\,dy\,dz = -\vec{\nabla}P\,dx\,dy\,dz \qquad \text{(3-37)}$$

donde $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son los vectores unitarios en las direcciones x, y y z, respectivamente, y:

$$\vec{\nabla}P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k} \qquad \text{(3-38)}$$

es el *gradiente de presión*. Nótese que $\vec{\nabla}$ o “nabla” (*del* en inglés) es un operador vectorial que se usa para expresar los gradientes de una función escalar de manera compacta en forma vectorial. Asimismo, el *gradiente* de una función escalar se expresa en una *dirección* determinada y, por consiguiente, es una cantidad *vectorial*.

La única fuerza del cuerpo que actúa sobre el elemento de fluido es el peso del propio elemento, que actúa en la dirección z negativa y se expresa como $\delta F_{B,z} = -g\delta m = -\rho g\,dx\,dy\,dz$ o, en forma vectorial, como:

$$\delta \vec{F}_{B,z} = -g\delta m\vec{k} = -\rho g\,dx\,dy\,dz\vec{k} \qquad \text{(3-39)}$$

Entonces la fuerza total que actúa sobre el elemento queda:

$$\delta \vec{F} = \delta \vec{F}_S + \delta \vec{F}_B = -(\vec{\nabla}P + \rho g\vec{k})\,dx\,dy\,dz \qquad \text{(3-40)}$$

Si $\delta \vec{F} = \delta m \cdot \vec{a} = \rho\,dx\,dy\,dz \cdot \vec{a}$ se sustituye en la segunda Ley de Newton del movimiento, y se cancelan $dx\,dy\,dz$, **la ecuación** general **del movimiento** para un fluido que actúa como un cuerpo rígido (no se tienen esfuerzos cortantes) se determina que es:

Movimiento de cuerpo rígido de fluidos:
$$\vec{\nabla}P + \rho g\vec{k} = -\rho\vec{a} \qquad \text{(3-41)}$$

Cuando se resuelven los vectores en sus componentes, esta relación se puede expresar de manera más explícita como:

$$\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k} + \rho g\vec{k} = -\rho(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \qquad \text{(3-42)}$$

o, en forma escalar en las tres direcciones ortogonales, como:

Fluidos en aceleración:
$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(\mathrm{g} + \mathrm{a}_z) \qquad \text{(3-43)}$$

donde a_x, a_y y a_z son las aceleraciones en las direcciones x, y y z, respectivamente.

Caso especial 1: Fluidos en reposo

Para los fluidos en reposo o en movimiento sobre una trayectoria recta a velocidad constante, todas las componentes de la aceleración son cero y las relaciones de las ecuaciones 3-43 se reducen a:

Fluidos en reposo:
$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g \qquad \text{(3-44)}$$

lo cual confirma que, en los fluidos en reposo, la presión permanece constante en cualquier dirección horizontal (P es independiente de x y y) y sólo varía en la dirección vertical como resultado de la gravedad [donde $P = P(z)$]. Estas relaciones son aplicables tanto para los fluidos compresibles como para los incompresibles.

Caso especial 2: Caída libre de un cuerpo de fluido

Un cuerpo que cae libremente acelera bajo la influencia de la gravedad. Cuando la resistencia del aire es despreciable, la aceleración del cuerpo es igual a la gravitacional, y la aceleración en cualquier dirección horizontal es cero. Por lo tanto, $a_x = a_y = 0$ y $a_z = -g$. Entonces las ecuaciones del movimiento para los fluidos en aceleración (ecuaciones 3-43) se reducen a:

Fluidos en caída libre: $$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad P = \text{constante} \qquad \textbf{(3-45)}$$

Por lo tanto, en un marco de referencia en movimiento con el fluido, se comporta como si estuviera en un medio ambiente con gravedad cero. También, la presión manométrica en una gota de líquido en caída libre es cero para toda ella. (En realidad, la presión manométrica está ligeramente arriba de cero debido a la tensión superficial, la cual mantiene la gota intacta.)

Cuando se invierte la dirección del movimiento y se fuerza al fluido acelerar en la dirección vertical con $a_z = +g$, cuando se coloca un recipiente de fluido en un elevador o en un vehículo espacial impulsado hacia arriba por un motor cohete, el gradiente de presión en la dirección z es $\partial P/\partial z = -2\rho g$. Por lo tanto, la diferencia de presión de la capa inferior y la superior de fluido ahora se duplica en relación con el caso del fluido en reposo (Fig. 3-49).

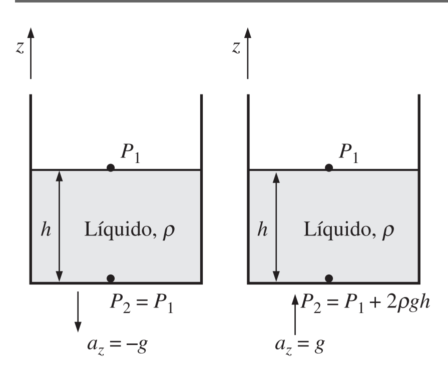


FIGURA 3-49
Efecto de la aceleración sobre la presión de un líquido durante la caída libre y la aceleración hacia arriba.

Aceleración sobre una trayectoria recta

Considere un recipiente parcialmente lleno con un líquido. El recipiente se mueve sobre una trayectoria recta con una aceleración constante. Tómese la proyección de la trayectoria de movimiento sobre el plano horizontal como el eje x y la proyección sobre el plano vertical como el eje z, como se muestra en la figura 3-50. Las componentes x y z de la aceleración son a_x y a_z. No existe movimiento en la dirección y de donde, la aceleración en esa dirección es cero, $a_y = 0$. Entonces, las ecuaciones del movimiento para fluidos en aceleración (ecuación 3-43) se reducen a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z) \qquad \textbf{(3-46)}$$

Por lo tanto, la presión es independiente de y. Entonces la diferencial total de $P = P(x, z)$, la cual es $(\partial P/\partial x)\, dx + (\partial P/\partial z)\, dz$, queda:

$$dP = -\rho a_x\, dx - \rho(g + a_z)\, dz \qquad \textbf{(3-47)}$$

Para $\rho =$ constante, la diferencia de presión entre dos puntos 1 y 2 en el fluido se determina por integración como:

$$P_2 - P_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1) \qquad \textbf{(3-48)}$$

Se toma el punto 1 como el origen ($x = 0$, $z = 0$) donde la presión es P_0 y el punto 2 como cualquier punto en el fluido (sin subíndice), la distribución de presión se puede expresar como:

Variación de la presión: $$P = P_0 - \rho a_x x - \rho(g + a_z)z \qquad \textbf{(3-49)}$$

El ascenso (o descenso) vertical de la superficie libre en el punto 2, con relación al punto 1, se puede determinar cuando se elige tanto 1 como 2 sobre la superficie libre (de modo que $P_1 = P_2$), y se despeja $z_2 - z_1$ en la ecuación 3-48 (Fig. 3-51):

Ascenso vertical de la superficie: $$\Delta z_s = z_{s2} - z_{s1} = -\frac{a_x}{g + a_z}(x_2 - x_1) \qquad \textbf{(3-50)}$$

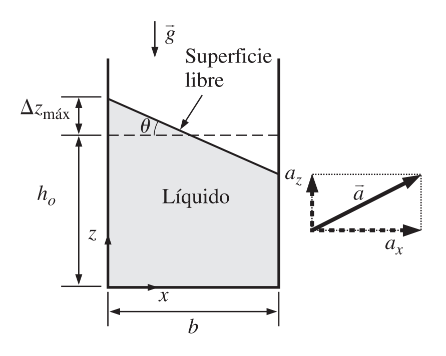


FIGURA 3-50
Movimiento de cuerpo rígido de un líquido en un tanque en aceleración lineal.

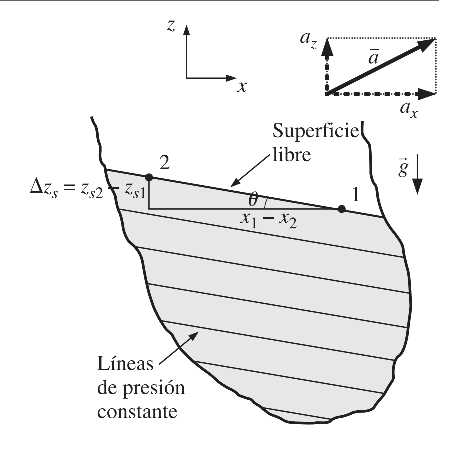


FIGURA 3-51
Líneas de presión constante (las cuales son las proyecciones de las superficies de presión constante sobre el plano *xz*) en un líquido en aceleración lineal, y el ascenso vertical.

donde z_s es la coordenada z de la superficie libre del líquido. La ecuación para las superficies de presión constante, llamadas **isobaras**, se obtiene a partir de la ecuación 3-47 cuando se realiza $dP = 0$ y se reemplaza z por z_{isobara}, la cual es la coordenada z (la distancia vertical) de la superficie, como función de x. Esto da:

Superficies de presión constante:
$$\frac{dz_{\text{isobara}}}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = \text{constante} \qquad \textbf{(3-51)}$$

De esto se llega a la conclusión que las isobaras (inclusive la superficie libre) en un fluido incompresible con aceleración constante en movimiento lineal son superficies paralelas cuya pendiente en el plano *xz* es:

Pendiente de las isobaras:
$$\text{Pendiente} = \frac{dz_{\text{isobara}}}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = -\tan\theta \qquad \textbf{(3-52)}$$

Es obvio que la superficie libre de un fluido de este tipo es una superficie *plana* y está inclinada a menos que $a_x = 0$ (la aceleración sólo es en la dirección vertical). También, la conservación de la masa, junto con la hipótesis de incompresibilidad ($\rho = constante$) necesita que el volumen del fluido permanezca constante antes y durante la aceleración. Por lo tanto, el ascenso del nivel del fluido en uno de los lados debe equilibrarse por un descenso de ese nivel en el otro lado.

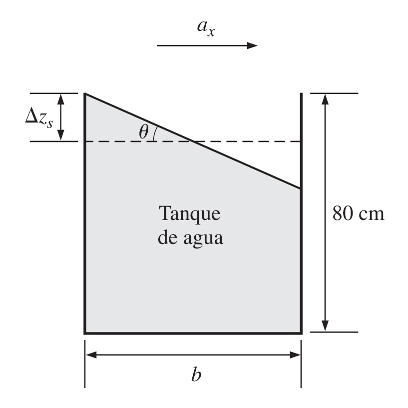


FIGURA 3-52
Esquema para el ejemplo 3-12.

EJEMPLO 3-12 Derrame de agua desde un tanque durante la aceleración

Una pecera de 80 cm de alto, con sección transversal de 2 m × 0.6 m que está inicialmente llena con agua se va a transportar sobre la parte posterior de un camión (Fig. 3-52). El camión acelera desde 0 hasta 90 km/h en 10 s. Se quiere que el agua no se derrame durante la aceleración, determine la altura inicial admisible del agua en la pecera. ¿Recomendaría que la pecera se alineara con el lado largo, o el corto, paralelo a la dirección del movimiento?

Solución Se va a transportar una pecera sobre un camión. Deben determinarse la altura admisible del agua para evitar que se derrame durante la aceleración y su orientación adecuada.
Hipótesis **1** La carretera es horizontal durante la aceleración, de modo que ésta no tiene componente vertical ($a_z = 0$). **2** Se supone que los efectos de la salpicadura, el frenado, el paso sobre topes y el ascenso de pendientes son secundarios y no se consideran. **3** La aceleración permanece constante.
Análisis Se toma el eje *x* como la dirección del movimiento, que el eje *z* está en la dirección vertical ascendente y que el origen es la esquina inferior izquierda de la pecera. Nótese que el camión pasa de 0 a 90 km/h en 10 s, la aceleración del camión es:

$$a_x = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{(90 - 0)\text{ km/h}}{10\text{ s}}\left(\frac{1\text{ m/s}}{3.6\text{ km/h}}\right) = 2.5\text{ m/s}^2$$

La tangente del ángulo que la superficie libre forma con la horizontal es:

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g + a_z} = \frac{2.5}{9.81 + 0} = 0.255 \qquad (\text{y, donde, } \theta = 14.3°)$$

El ascenso vertical máximo de la superficie libre ocurre en la parte posterior de la pecera, y el plano vertical a la mitad no experimenta ascenso ni descenso durante la aceleración, ya que es un plano de simetría. Entonces, el ascenso vertical en la parte posterior de la pecera en relación con el plano de en medio, para las dos orientaciones posibles, queda:

Caso 1: El lado largo es paralelo a la dirección del movimiento:

$$\Delta z_{s1} = (b_1/2) \tan \theta = [(2 \text{ m})/2] \times 0.255 = 0.255 \text{ m} = \mathbf{25.5 \text{ cm}}$$

Caso 2: El lado corto es paralelo a la dirección del movimiento:

$$\Delta z_{s2} = (b_2/2) \tan \theta = [(0.6 \text{ m})/2] \times 0.255 = 0.076 \text{ m} = \mathbf{7.6 \text{ cm}}$$

Por lo tanto, se supone que el ladeo no es un problema, sin duda la pecera debe orientarse de tal manera que su lado corto esté paralelo a la dirección del movimiento. En este caso, vaciar la pecera hasta que el nivel de su superficie libre descienda sólo 7.6 cm resultará adecuado para evitar el derrame durante la aceleración.

Discusión Nótese que la orientación de la pecera es importante en el control del ascenso vertical. Asimismo, el análisis es válido para cualquier fluido con densidad constante, no sólo para el agua, ya que, en la resolución, no se utilizó información que pertenezca al agua.

Rotación en un recipiente cilíndrico

Por experiencia se sabe que cuando un vaso lleno con agua se hace girar alrededor de su eje, se fuerza al fluido hacia afuera como resultado de la fuerza centrífuga y la superficie libre del líquido se vuelve cóncava. Esto se conoce como *movimiento de vórtice forzado*.

Considere un recipiente cilíndrico vertical lleno parcialmente con un líquido. Ahora se hace girar el recipiente alrededor de su eje a una velocidad angular constante ω, como se muestra en la figura 3-53. Después de los efectos transitorios iniciales, el líquido se moverá como un cuerpo rígido junto con el recipiente. No se tiene deformación y, por lo tanto, no puede haber esfuerzo cortante y cada partícula de fluido en el recipiente se mueve con la misma velocidad angular.

Este problema se analiza mejor en coordenadas cilíndricas (r, θ, z), tomando z a lo largo de la línea central del recipiente, dirigida del fondo hacia la superficie libre, puesto que la forma del recipiente es un cilindro y las partículas del fluido se someten a un movimiento circular. La aceleración centrípeta de una partícula de fluido que gira con una velocidad angular constante ω a una distancia r del eje de rotación, es $r\omega^2$ y está dirigida en forma radial hacia el eje de rotación (dirección r negativa). Es decir, $a_r = -r\omega^2$. Se tiene simetría alrededor del eje z, el cual es el eje de rotación y donde no hay dependencia respecto de θ. Entonces $P = P(r, z)$ y $a_\theta = 0$. También, $a_z = 0$ puesto que no hay movimiento en la dirección z.

Entonces las ecuaciones del movimiento para los fluidos en rotación (ecuaciones 3-43) se reducen a:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho r\omega^2, \qquad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \tag{3-53}$$

Entonces la diferencial total de $P = P(r, z)$, la cual es $dP = (\partial P/\partial r)dr + (\partial P/\partial z)dz$, queda:

$$dP = \rho r\omega^2\, dr - \rho g\, dz \tag{3-54}$$

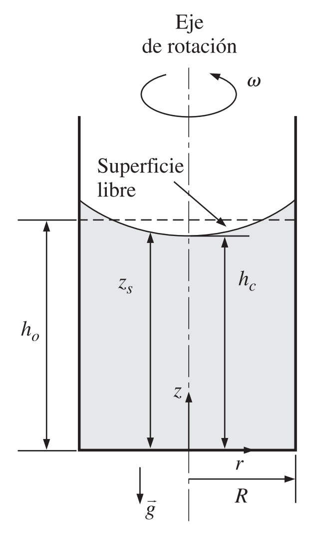


FIGURA 3-53
Movimiento de cuerpo rígido de un líquido en un recipiente cilíndrico vertical giratorio.

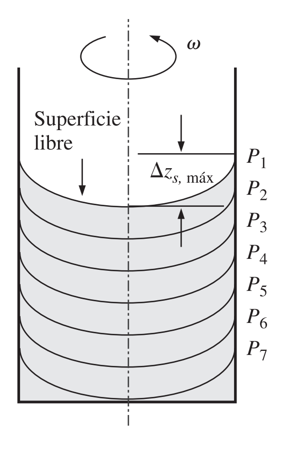


FIGURA 3-54
Superficies de presión constante en un líquido en rotación.

La ecuación para las superficies de presión constante se obtiene cuando se realiza $dP = 0$ y se reemplaza z por z_{isobara}, el cual es el valor de z (la distancia vertical) de la superficie, como función de r. Esto da:

$$\frac{dz_{\text{isobara}}}{dr} = \frac{r\omega^2}{g} \tag{3-55}$$

Integrando, se determina que la ecuación para las superficies de presión constante es:

Superficies de presión constante:
$$z_{\text{isobara}} = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C_1 \tag{3-56}$$

la cual es la ecuación de una *parábola*. Por tanto, se llega a la conclusión que las superficies de presión constante, inclusive la superficie libre, son *paraboloides de revolución* (Fig. 3-54).

El valor de la constante de integración C_1 es diferente para distintas paraboloides de presión constante (es decir, para isobaras diferentes). Para la superficie libre, haciendo $r = 0$ en la ecuación 3-56, da $z_{\text{isobara}}(0) = C_1 = h_c$, en donde h_c es la distancia de la superficie libre al fondo del recipiente a lo largo del eje de rotación (Fig. 3-53). Entonces la ecuación para la superficie libre queda:

$$z_s = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c \tag{3-57}$$

donde z_s es la distancia de la superficie libre al fondo del recipiente en el radio r. La suposición anterior a este análisis es que hay líquido suficiente en el recipiente de modo que toda la superficie del fondo permanece cubierta con él.

El volumen de un elemento de cascarón cilíndrico de radio r, altura z_s, y espesor dr es $dV = 2\pi r z_s\, dr$. Entonces el volumen del paraboloide formado por la superficie libre es:

$$V = \int_{r=0}^{R} 2\pi z_s r\, dr = 2\pi \int_{r=0}^{R} \left(\frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c\right) r\, dr = \pi R^2 \left(\frac{\omega^2 R^2}{4g} + h_c\right) \tag{3-58}$$

Dado que la masa se conserva y la densidad es constante, este volumen debe ser igual al volumen original del fluido en el recipiente, el cual es:

$$V = \pi R^2 h_0 \tag{3-59}$$

donde h_0 es la altura original del fluido en el recipiente sin rotación. Si se igualan entre sí estos dos volúmenes, la altura del fluido a lo largo de la línea central del recipiente cilíndrico queda:

$$h_c = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \tag{3-60}$$

Entonces la ecuación de la superficie libre queda:

Superficie libre:
$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2) \tag{3-61}$$

La altura vertical máxima se tiene en el borde, en donde $r = R$, y la *diferencia máxima en las alturas* entre el borde y el centro de la superficie libre se de-

termina cuando se evalúa z_s en $r = R$ y también en $r = 0$, y calcula su diferencia:

Diferencia máxima en las alturas: $$\Delta z_{s,\ \text{máx}} = z_s(R) - z_s(0) = \frac{\omega^2}{2g} R^2 \qquad \textbf{(3-62)}$$

Donde ρ = constante, la diferencia de presión entre los dos puntos 1 y 2 en el fluido se determina cuando se integra $dP = \rho r \omega^2\, dr - \rho g\, dz$. Esto da por resultado:

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho \omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho g (z_2 - z_1) \qquad \textbf{(3-63)}$$

Si se toma el punto 1 como el origen ($r = 0$, $z = 0$) donde la presión es P_0 y el punto 2 como cualquier punto en el fluido (sin subíndice), la distribución de presión se puede expresar como:

Variación de la presión: $$P = P_0 + \frac{\rho \omega^2}{2} r^2 - \rho g z \qquad \textbf{(3-64)}$$

Nótese que en un radio fijo, la presión varía en forma hidrostática en la dirección vertical, como en un fluido en reposo. Para una distancia vertical fija z, la presión varía con el cuadrado de la distancia radial r, y aumenta desde la línea central hacia el borde exterior. En cualquier plano horizontal la diferencia de presión entre el centro y el borde del recipiente de radio R es $\Delta P = \rho \omega^2 R^2/2$.

EJEMPLO 3-13 Ascenso de un líquido durante la rotación

Un recipiente cilíndrico vertical de 20 cm de diámetro y 60 cm de alto, que se muestra en la figura 3-55, está parcialmente lleno con un líquido cuya densidad es 850 kg/m^3 hasta una altura de 50 cm. Ahora se hace girar el cilindro a una velocidad constante. Determine la velocidad de rotación a la cual el líquido empezará a derramarse por lo bordes del recipiente.

Solución Se hace girar un recipiente cilíndrico vertical parcialmente lleno con un líquido. Se debe determinar la velocidad angular a la cual el líquido empezará a derramarse.

Hipótesis **1** El aumento en la velocidad de rotación es muy lento, de modo que el líquido en el recipiente siempre actúa como un cuerpo rígido. **2** La superficie del fondo del recipiente permanece cubierta con líquido durante la rotación (ningún punto seco).

Análisis Tomando el centro de la superficie del fondo del cilindro vertical giratorio como el origen ($r = 0$, $z = 0$), la ecuación de la superficie libre del líquido se da como:

$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$$

Entonces la altura vertical del líquido en el borde del recipiente, donde $r = R$ queda:

$$z_s(R) = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

donde h_0 = 0.5 m es la altura original del líquido antes de la rotación. Justo antes de que el líquido empiece a derramarse, su altura en el borde del recipiente es igual a la del recipiente y, de este modo, $z_s(R)$ = 0.6 m. En la última ecuación

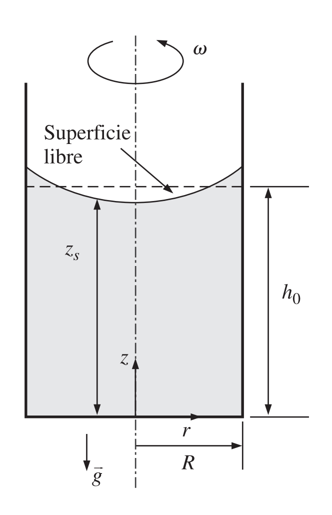


FIGURA 3-55
Esquema para el ejemplo 3-13.

para ω y se efectúan las sustituciones, se determina que la velocidad máxima de rotación del recipiente es:

$$\omega = \sqrt{\frac{4g[z_s(R) - h_0]}{R^2}} = \sqrt{\frac{4(9.81 \text{ m/s}^2)[(0.6 - 0.5) \text{ m}]}{(0.1 \text{ m})^2}} = \mathbf{19.8\ rad/s}$$

Note que una revolución completa corresponde a 2π rad, la velocidad de rotación del recipiente también se puede expresar en términos de revoluciones por minuto (rpm), como

$$\dot{n} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{19.8 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad/rev}}\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) = \mathbf{189\ rpm}$$

Por lo tanto, la velocidad de rotación de este recipiente debe de limitarse a 189 rpm, para evitar cualquier derrame del líquido como resultado del efecto centrífugo.

Discusión Nótese que el análisis es válido para cualquier líquido, ya que el resultado es independiente de la densidad o de cualquier otra propiedad del fluido. Debe verificarse también que la suposición de no existencia de puntos secos es válida. La altura del líquido en el centro es:

$$z_s(0) = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} = 0.4 \text{ m}$$

Ya que $z_s(0)$ es positiva, se valida la suposición.

RESUMEN

La fuerza normal que ejerce un fluido por unidad de área se llama *presión,* y su unidad es el *pascal,* 1 Pa ≡ 1 N/m^2. La presión con relación al vacío absoluto se llama *presión absoluta,* y la diferencia entre esta presión y la presión atmosférica local se llama *presión manométrica.* Las presiones por abajo de la atmosférica se llaman *presiones de vacío.* Las presiones absoluta, manométrica y de vació están relacionadas por:

$$P_{man} = P_{abs} - P_{atm}$$

$$P_{vac} = P_{atm} - P_{abs}$$

La presión que se ejerce en un punto en un fluido tiene la misma magnitud en todas direcciones. La variación de la presión con la elevación en un fluido en reposo se expresa por:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

donde la dirección positiva z se toma hacia arriba. Cuando la densidad de un fluido es constante, la diferencia de presión de uno a otro lado de una capa de fluido de espesor Δz es

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \rho g\ \Delta z$$

Las presiones absoluta y manométrica en un fluido estático abierto a la atmósfera, a una profundidad h a partir de la superficie libre, son:

$$P = P_{atm} + \rho g h \qquad \text{y} \qquad P_{man} = \rho g h$$

La presión en un fluido en reposo permanece constante en la dirección horizontal. La *ley de Pascal* expresa que la presión aplicada a un fluido confinado aumenta la presión en toda su extensión en la misma cantidad. La presión atmosférica se mide con un *barómetro* y se da por:

$$P_{atm} = \rho g h$$

donde h es la altura de la columna de líquido.

La *estática de fluidos* trata acerca de los problemas asociados con los fluidos en reposo; se llama *hidrostática* cuando el fluido es un líquido. La magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre una superficie plana de una placa completamente sumergida en un fluido homogéneo, es igual al producto de la presión P_C en el centroide de la superficie y el área A de ésta y se expresa como:

$$F_R = (P_0 + \rho g h_C)A = P_C A = P_{prom} A$$

donde $h_C = y_C$ sen θ es la *distancia vertical* del centroide a la superficie del líquido. La presión P_0 suele ser la atmosférica, la cual se cancela en la mayoría de los casos porque actúa sobre los dos lados de la placa. El punto de intersección de la línea de acción de la fuerza resultante y la superficie es el *centro de presión*. La ubicación vertical de la línea de acción de la fuerza resultante se da por:

$$y_P = y_C + \frac{I_{xx,\,C}}{[y_C + P_0/(\rho g \text{ sen } \theta)]A}$$

donde $I_{xx,\,C}$ es el segundo momento de área respecto al eje x que pasa por el centroide de dicha área.

Un fluido ejerce una fuerza hacia arriba sobre un cuerpo sumergido en él. Esta fuerza se conoce como *fuerza de flotación* y se expresa como:

$$F_B = \rho_f g V$$

donde V es el volumen del cuerpo. Esto se conoce como *principio de Arquímedes* y se expresa como: la fuerza de flotación que actúa sobre un cuerpo sumergido en un fluido es igual al peso de este último desplazado por el cuerpo; actúa hacia arriba y pasa por el centroide del volumen desplazado. Con densidad constante, la fuerza de flotación es independiente de la distancia del cuerpo a la superficie libre. Para los cuerpos *flotantes*, la fracción sumergida del volumen del cuerpo es igual a la razón de la densidad promedio de ese cuerpo a la densidad del fluido.

La *ecuación* general *del movimiento* para un fluido que actúa como cuerpo rígido es:

$$\vec{\nabla} P + \rho g \vec{k} = -\rho \vec{a}$$

Cuando la gravedad está alineada en la dirección $-z$, se expresa en forma escalar como:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z)$$

donde a_x, a_y y a_z son las aceleraciones en las direcciones x, y y z, respectivamente. Durante el *movimiento en aceleración lineal* en el plano xz, la distribución de presión se expresa como

$$P = P_0 - \rho a_x x - \rho(g + a_z)z$$

Las superficies de presión constante (incluso la superficie libre) en un líquido con aceleración constante en movimiento lineal son superficies paralelas cuya pendiente en un plano xz es:

$$\text{Pendiente} = \frac{dz_{\text{isobara}}}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = -\tan\theta$$

Durante el movimiento de cuerpo rígido de un líquido en un *cilindro giratorio*, las superficies de presión constante son *paraboloides de revolución*. La ecuación para la superficie libre es:

$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$$

donde z_s es la distancia de la superficie libre al fondo del recipiente, en el radio r y h_0 es la altura original del fluido en el recipiente sin rotación. La variación de la presión en el líquido se expresa como:

$$P = P_0 + \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 - \rho g z$$

donde P_0 es la presión en el origen ($r = 0$, $z = 0$).

La presión es una propiedad fundamental y es difícil imaginar un problema significativo de fluidos en que no intervenga. Por lo tanto, el lector verá esta propiedad en todos los capítulos siguientes. Sin embargo, la consideración de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre superficies planas o curvas está limitada principalmente a este capítulo.

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. F. P. Beer, E. R. Johnston, Jr., E. R. Eisenberg y G. H. Staab, *Vector Mechanics for Engineers*, *Statics,* 7a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2004.

2. C. T. Crowe, J. A. Roberson y D. F. Elger, *Engineering Fluid Mechanics*, 7a. ed. Nueva York: Wiley, 2001.

3. R. W. Fox y A. T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 5a. ed., Nueva York: Wiley, 1999.

4. D. C. Giancoli, *Physics*, 3a. ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.

5. M. C. Potter y D. C. Wiggert, *Mechanics of Fluids*, 2a. ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.

6. F. M. White, *Fluid Mechanics*, 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2003.

PROBLEMAS*

Presión, manómetro y barómetro

3-1C ¿Cuál es la diferencia entre presión manométrica y presión absoluta?

3-2C Explique por qué algunas personas experimentan hemorragia nasal y otras experimentan reducción de la respiración a grandes alturas.

3-3C Alguien afirma que la presión absoluta en un líquido de densidad constante se duplica cuando se duplica la profundidad. ¿Está usted de acuerdo?

* Los problemas designados por una “C” son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una “I” están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

3-4C Se suspende un diminuto cubo de acero en agua por medio de un cable. Si las longitudes de los lados del cubo son muy pequeñas, ¿qué comparación habría entre las magnitudes de las presiones sobre la parte superior, el fondo y las superficies laterales de ese cubo?

3-5C Exprese la Ley de Pascal y dé un ejemplo de aplicación real de ella.

3-6C Considere dos ventiladores idénticos, uno a nivel del mar y el otro en la cima de una montaña alta, que funcionan a velocidades idénticas. ¿Qué comparación habría entre *a*) los gastos volumétricos y *b*) los gastos de masa de estos dos ventiladores?

3-7 Un manómetro de vacío conectado a una cámara da una lectura de 24 kPa, en un lugar donde la presión atmosférica es de 92 kPa. Determine la presión absoluta en la cámara.

3-8I Se usa un manómetro para medir la presión del aire en un tanque. El fluido tiene una gravedad específica de 1.25 y la diferencia de alturas entre los dos ramos del manómetro es de 28 in. La presión atmosférica local es de 12.7 psia. Determine la presión absoluta en el tanque si el ramo del manómetro sujeto al tanque tiene el nivel del fluido *a*) más alto y *b*) más bajo que otro ramo.

3-9 Se presuriza el agua que está en un tanque mediante aire y se mide la presión con un manómetro de fluidos múltiples, como se muestra en la figura P3-9. Determine la presión manométrica del aire en el tanque si h_1 = 0.2 m, h_2 = 0.3 m, y h_3 = 0.46 m. Tome las densidades del agua, el aceite y el mercurio como 1 000 kg/m^3, 850 kg/m^3, y 13 600 kg/m^3, respectivamente.

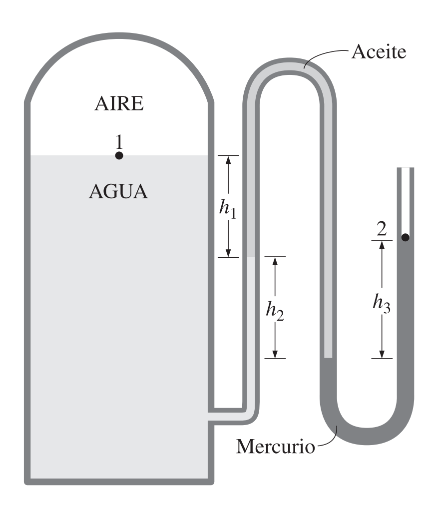


FIGURA P3-9

3-10 Determine la presión atmosférica en un lugar donde la lectura barométrica es de 750 mm Hg. Tome la densidad del mercurio como 13 600 kg/m^3.

3-11 Se lee que la presión manométrica en un líquido a una profundidad de 3 m es de 28 kPa. Determine la presión manométrica en el mismo líquido a una profundidad de 12 m.

3-12 En una localidad se lee que la presión absoluta en agua a una profundidad de 5 m es de 145 kPa. Determine *a*) la presión atmosférica local y *b*) la presión absoluta, en la misma localidad, a una profundidad de 5 m en un líquido cuya gravedad específica es de 0.85.

3-13I Demuestre que 1 kgf/cm^2 = 14.223 psi.

3-14I Un hombre que pesa 200 lb tiene un área total de impresión de sus pies de 72 in^2. Determine la presión que este hombre ejerce sobre el suelo si *a*) está parado sobre los dos pies y *b*) está parado sobre uno de ellos.

3-15 Considere una mujer de 70 kg que tiene un área total de impresión de sus pies de 400 cm^2. Quiere caminar sobre la nieve, pero ésta no soporta presiones mayores de 0.5 kPa. Determine el tamaño mínimo de los zapatos para nieve que ella necesita (área de impresión por zapato) para que pueda caminar sobre la nieve sin hundirse.

3-16 Un medidor de vacío está conectado a un tanque y da una lectura de 30 kPa en un lugar donde la lectura barométrica es de 755 mm Hg. Determine la presión absoluta en el tanque. Tome ρ_{Hg} = 13 590 kg/m^3. *Respuesta:* 70.6 kPa

3-17I Un manómetro está conectado a un tanque y da una lectura de 50 psi en un lugar donde la lectura barométrica es de 29.1 in Hg. Determine la presión absoluta en el tanque. Tome ρ_{Hg} = 848.4 lbm/ft^3. *Respuesta:* 64.29 psia

3-18 Un manómetro está conectado a un tanque y da una lectura de 500 kPa en un lugar donde la presión atmosférica es de 94 kPa. Determine la presión absoluta en el tanque.

3-19 El barómetro de un montañista da una lectura de 930 mbars al principio de una caminata y de 780 mbars al final de ella. Desprecie el efecto de la altitud sobre la aceleración gravitacional local y determine la distancia vertical que ha escalado. Suponga una densidad promedio del aire de 1.20 kg/m^3. *Respuesta:* 1274 m

3-20 Se puede usar un barómetro básico para medir la altura de un edificio. Si las lecturas barométricas en las partes superior e inferior del edificio son de 730 y 755 mm Hg, respectivamente, determine la altura del edificio. Suponga una densidad promedio del aire de 1.18 kg/m^3.

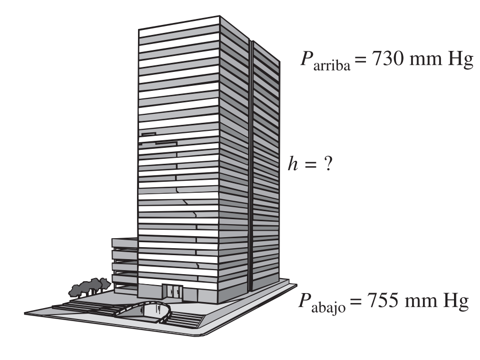


FIGURA P3-20

3-21 Resuelva el problema 3-20 usando el software de EES (o cualquier otro programa de este tipo). Im-

prima la solución completa, inclusive los resultados numéricos con unidades apropiadas y tome la densidad del mercurio como 13 600 kg/m^3.

3-22 Determine la presión que se ejerce sobre un buzo a 30 m por abajo de la superficie libre del mar. Suponga una presión barométrica de 101 kPa y una gravedad específica de 1.03 para el agua de mar. *Respuesta:* 404.0 kPa

3-23I Determine la presión ejercida sobre la superficie de un submarino que viaja a 300 ft por abajo de la superficie libre del mar. Suponga que la presión barométrica es de 14.7 psia y la gravedad específica del agua de mar es 1.03.

3-24 Un gas está contenido en un dispositivo de cilindro y émbolo en posición vertical. El émbolo tiene una masa de 4 kg y un área de la sección transversal de 35 cm^2. Un resorte comprimido arriba del émbolo ejerce una fuerza de 60 N sobre éste. Si la presión atmosférica es de 95 kPa, determine la presión en el interior del cilindro. *Respuesta:* 123.4 kPa

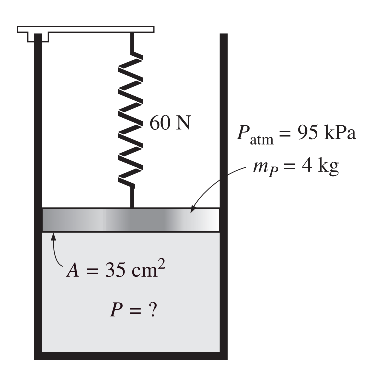


FIGURA P3-24

3-25 Vuelva a considerar el problema 3-24. Use el software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) e investigue el efecto de la fuerza del resorte, en el rango de 0 hasta 500 N. Trace la gráfica de la presión contra la fuerza del resorte y discuta los resultados.

3-26 Dos manómetros, uno de carátula y otro de tubo en U, están sujetos a un tanque de gas para medir su presión. Si la lectura en el manómetro de carátula es de 80 kPa, determine la distancia entre los dos niveles del fluido en el de tubo en U, si el fluido es *a*) mercurio (ρ = 13 600 kg/m^3) o *b*) agua (ρ = 1 000 kg/m^3).

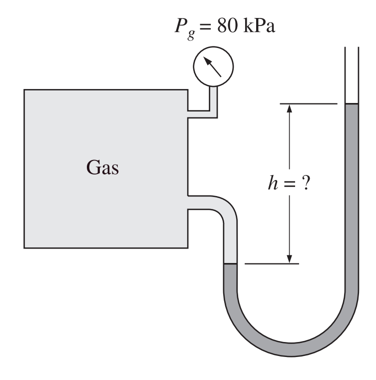


FIGURA P3-26

3-27 Vuelva a considerar el problema 3-26. Use el software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) e investigue el efecto de la densidad del fluido manométrico, en el rango de 800 hasta 13 000 kg/m^3 sobre la diferencia en los niveles del fluido del manómetro de tubo en U. Trace la gráfica de la diferencia de alturas del fluido contra la densidad y comente los resultados.

3-28 Un manómetro de tubo en U que contiene aceite (ρ = 850 kg/m^3) está sujeto a un tanque lleno con aire. Si la diferencia del nivel del aceite entre las dos columnas es de 45 cm y la presión atmosférica es de 98 kPa, determine la presión absoluta del aire dentro del tanque. *Respuesta:* 101.75 kPa

3-29 Un manómetro de mercurio (ρ = 13 600 kg/m^3) está conectado a un ducto de aire para medir la presión en el interior. La diferencia en los niveles del manómetro es de 15 mm y la presión atmosférica es de 100 kPa. *a*) Establezca un juicio con base en la figura P3-29 y determine si la presión en el ducto está por arriba o por abajo de la atmosférica. *b*) Determine la presión absoluta en el ducto

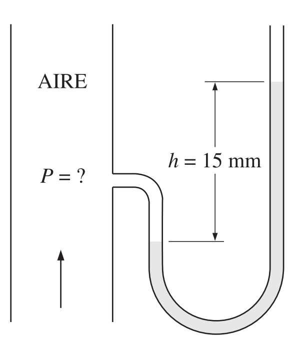


FIGURA P3-29

3-30 Repita el problema 3-29 para una diferencia en los niveles del mercurio de 30 mm.

3-31 La presión sanguínea suele medirse colocando alrededor del antebrazo de una persona, al nivel del corazón, un tubo "aplanado" de tela que se llena con aire y que viene equipado con un manómetro. Con un manómetro de mercurio y un estetoscopio se miden la presión sistólica (la presión máxima cuando el corazón está bombeando) y la diastólica (la presión mínima cuando el corazón está en reposo) en mm Hg. Las presiones sistólica y diastólica de una persona sana son de alrededor de 120 mm Hg y 80 mm Hg, respectivamente y se indican como 120/80. Exprese estas dos presiones manométricas en kPa, psi y altura de una columna de agua (en m).

3-32 La presión sanguínea máxima en el antebrazo de una persona sana es de alrededor de 120 mm Hg. Se conecta a la vena un tubo vertical abierto a la atmósfera, en el brazo de una persona. Determine la altura hasta la que ascenderá la sangre en el tubo. Tome la densidad de la sangre como 1 050 kg/m^3.

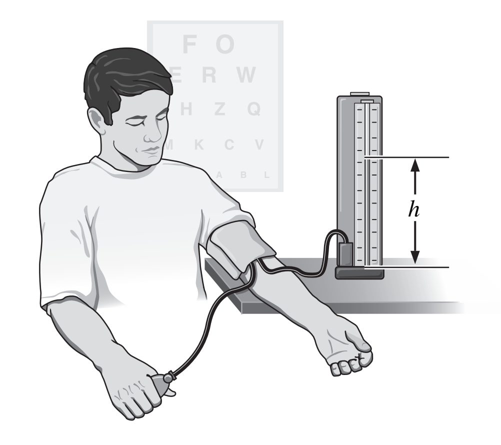


FIGURA P3-32

3-33 Considere a un hombre de 1.8 m de altura que está en posición vertical en agua y sumergido por completo en una alberca. Determine la diferencia entre las presiones que actúan en la cabeza y en los dedos de los pies de este hombre en kPa.

3-34 Considere un tubo en U cuyas ramas están abiertas a la atmósfera. Ahora se vierte agua en una de las ramas del tubo y aceite ligero (ρ = 790 kg/m^3) en la otra. Una de las ramas contiene agua en un tramo de 70 cm de altura, en tanto que la otra contiene los dos fluidos con una proporción de alturas aceite-agua de 6. Determine la altura de cada fluido en esa rama.

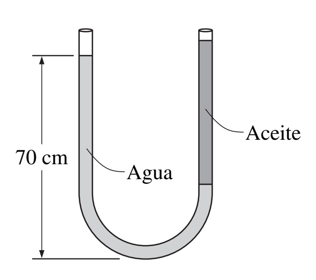


FIGURA P3-34

3-35 El elevador hidráulico en un taller de reparación de automóviles tiene un diámetro de salida de 30 cm y se deben levantar automóviles hasta de 2 000 kg. Determine la presión manométrica del fluido que debe mantenerse en el depósito.

3-36 Agua dulce y agua de mar fluyen en tuberías horizontales paralelas, las cuales están conectadas entre sí por un manómetro de tubo en U doble, como se muestra en la figura P3-36. Determine la diferencia de presión entre las dos tuberías. Tome la densidad del agua de mar en ese lugar como ρ = 1035 kg/m^3. ¿Puede ignorarse la columna de aire en el análisis?

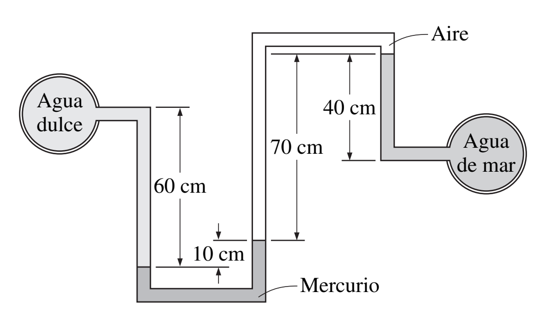


FIGURA P3-36

3-37 Repita el problema 3-36, reemplazando el aire con aceite cuya gravedad específica es de 0.72.

3-38I Se mide la presión en una tubería de gas natural con el manómetro que se muestra en la figura P3-38I, con una de las ramas abierta a la atmósfera en donde la presión atmosférica local es de 14.2 psi. Determine la presión absoluta en la tubería.

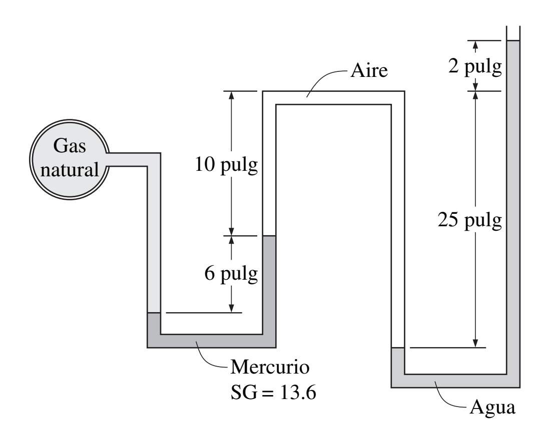


FIGURA P3-38I

3-39I Repita el problema 3-38I, ahora reemplazando el aire por aceite con una gravedad específica de 0.69.

3-40 Se mide la presión manométrica del aire que está en el tanque, como se muestra en la figura P3-40, y resulta ser de 65 kPa. Determine diferencia h en los niveles de mercurio.

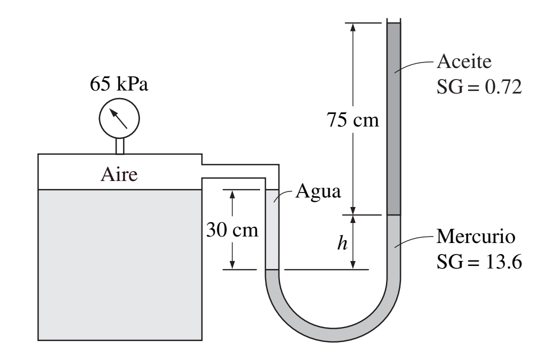


FIGURA P3-40

3-41 Repita el problema 3-40, para una presión manométrica de 45 kPa.

3-42 La parte superior de un tanque de agua está dividida en dos compartimentos, como se muestra en la figura P3-42. Ahora se vierte un fluido con una densidad desconocida en uno de los lados y el nivel del agua se eleva cierta cantidad en el otro lado para compensar el efecto que se produce. Con base en las alturas finales de los fluidos, mostradas en la figura, determine la densidad del fluido añadido. Suponga que el líquido no se mezcla con el agua.

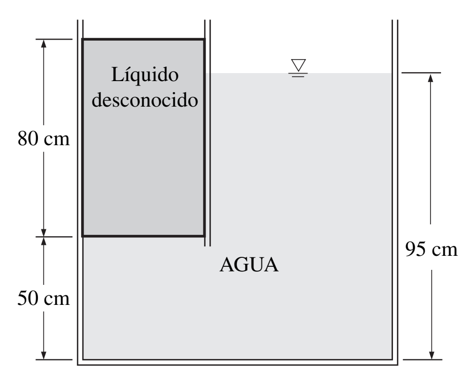


FIGURA P3-42

3-43 Se va a levantar una carga de 500 kg que está sobre el elevador hidráulico que se muestra en la figura P3-43, vertiendo aceite (ρ = 780 kg/m^3) en un tubo delgado. Determine cuál debe ser la altura h para empezar a levantar el peso.

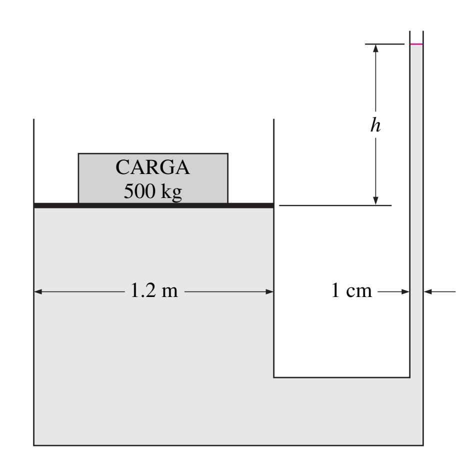


FIGURA P3-43

3-44I Dos tanques de aceite están intrconectados a través de un manómetro. Si la diferencia entre los niveles de mercurio en las dos ramas es de 32 in, determine la diferencia de presión entre los dos tanques. Las densidades del aceite y del mercurio son 45 lbm/ft^3 y 848 lbm/ft^3, respectivamente.

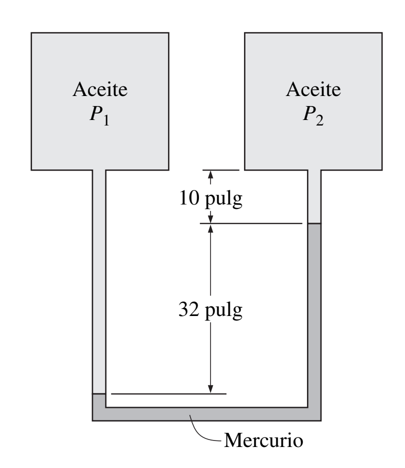


FIGURA P3-44I

3-45 Con frecuencia, la presión se da en términos de una columna de líquido y se expresa como "carga de presión". Exprese la presión atmosférica estándar en términos de columnas de *a*) mercurio (GE = 13.6), *b*) agua (GE = 1.0) y *c*) glicerina (GE = 1.26) Explique por qué suele usarse mercurio en los manómetros.

3-46 Durante mucho tiempo se ha utilizado un sencillo experimento para demostrar cómo la presión negativa impide que el agua se derrame de un vaso invertido. Se invierte un vaso que está lleno por completo con agua y cubierto con un papel delgado, como se muestra en la figura P3-46. Determine la presión en el fondo del vaso y explique por qué no se derrama el agua.

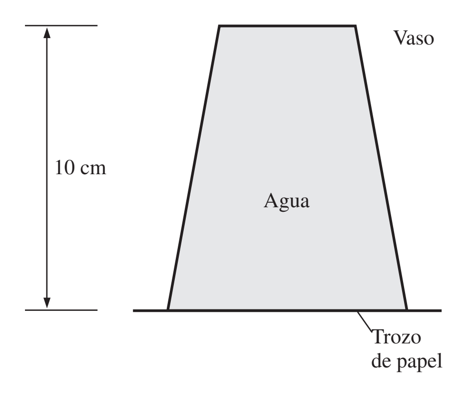


FIGURA P3-46

3-47 Dos cámaras con el mismo fluido en su base están separados por un émbolo cuyo peso es de 25 N, como se muestra en la figura P3-47. Calcule las presiones manométricas en las cámaras *A* y *B*.

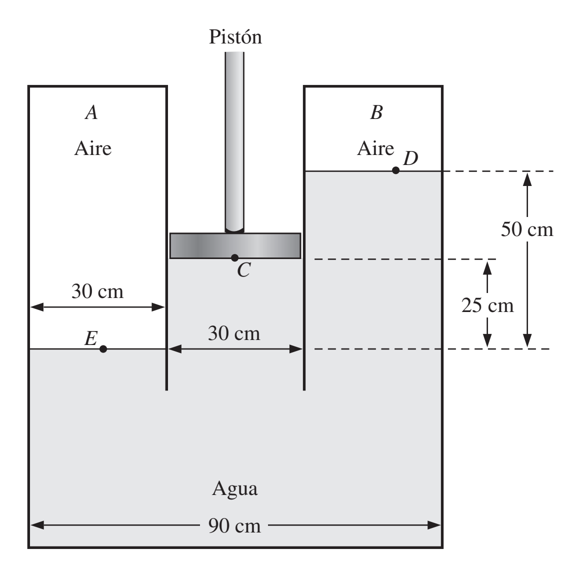


FIGURA P3-47

3-48 Considere un manómetro de doble fluido sujeto a un tubo de aire, como se muestra en la figura P3-48. Si la gravedad específica de uno de los fluidos es 13.55, determine la gravedad específica del otro para la presión absoluta indicada del aire. Tome la presión atmosférica como de 100 kPa. *Respuesta:* 5.0

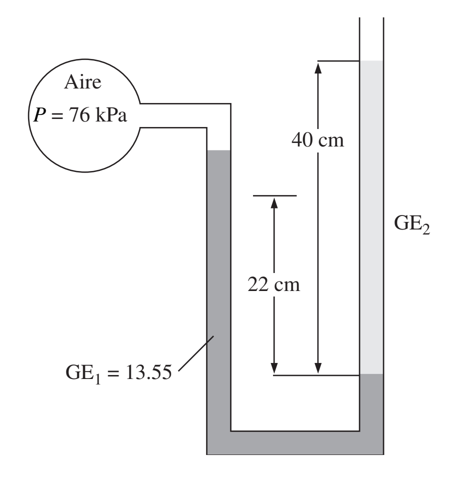


FIGURA P3-48

3-49 Se mide la diferencia de presión entre un tubo de aceite y uno de agua con un manómetro de doble fluido, como se muestra en la figura P3-49. Para las alturas y las gravedades específicas dadas de los fluidos calcule la diferencia de presión $\Delta P = P_B - P_A$.

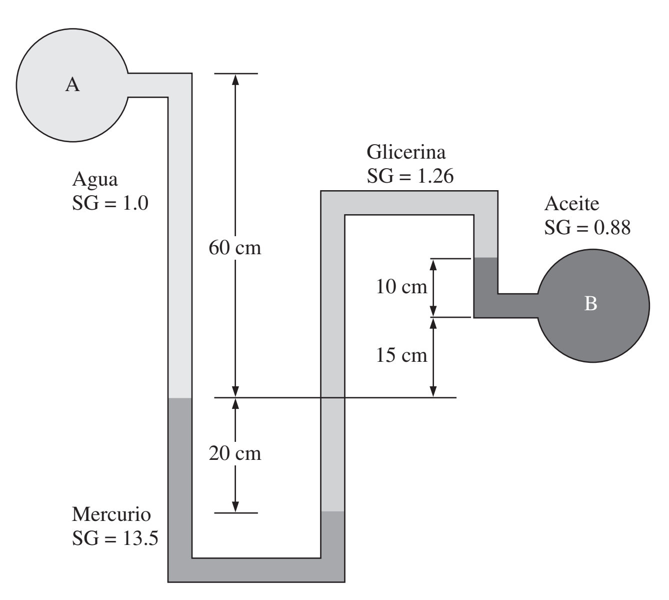


FIGURA P3-49

3-50 Considere el sistema que se muestra en la figura P3-50. Si un cambio de 0.7 kPa en la presión del aire causa que la interfaz salmuera-mercurio de la columna derecha descienda 5 mm, en tanto que la presión en el tubo de la salmuera se mantiene constante, determine la razón A_2/A_1.

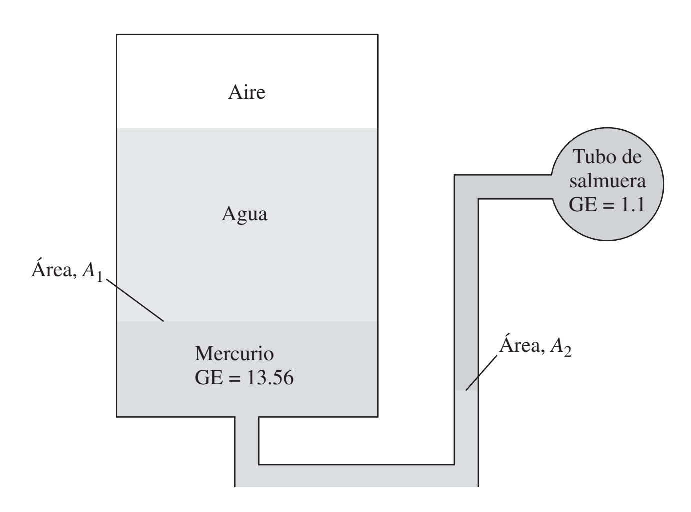


FIGURA P3-50

3-51 Dos tanques de agua están interconectados mediante un manómetro de mercurio con los tubos inclinados, como se muestra en la figura P3-51. Si la diferencia de presión entre los dos tanques es de 20 kPa, calcule a y θ.

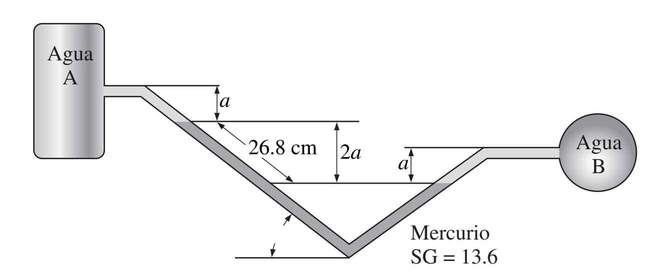


FIGURA P3-51

3-52 Un recipiente con fluidos múltiples está conectado a un tubo en U, como se muestra en la figura P3-52. Para las gravedades específicas y las alturas de las columnas de los fluidos dadas, determine la presión manométrica en A. Además determine la altura de una columna de mercurio que crearía la misma presión en A. *Respuestas:* 0.471 kPa, 0.353 cm

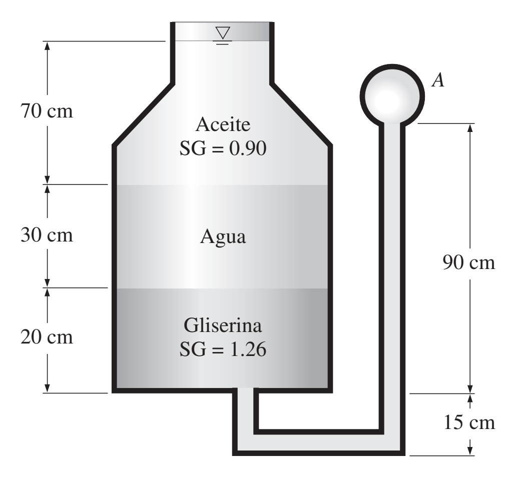


FIGURA P3-52

Estática de fluidos: fuerzas hidrostáticas sobre un plano y sobre superficies curvas

3-53C Defina la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre una superficie sumergida y el centro de presión.

3-54C Alguien afirma que puede determinar la magnitud de la fuerza hidrostática que actúa sobre una superficie plana sumergida en agua, sin importar su forma y orientación, si conociera la distancia vertical del centroide de esa superficie, tomada desde la superficie libre, y el área de la misma. ¿Es ésta una afirmación válida? Explique.

3-55C Una placa plana horizontal sumergida está suspendida en agua mediante un cable sujeto al centroide de su superficie superior. Ahora se hace girar la placa 45° alrededor de un eje que pasa por su centroide. Analice el cambio en la fuerza hidrostática que actúa sobre la superficie superior de esta placa como resultado de esta rotación. Suponga que la placa permanece sumergida en todo momento.

3-56C Es posible que el lector haya advertido que las presas son mucho más gruesas en el fondo. Explique por qué las presas se construyen de esa manera.

3-57C Considere una superficie curva sumergida. Explique cómo determinaría la componente horizontal de la fuerza hidrostática que actúa sobre esta superficie.

3-58C Considere una superficie curva sumergida. Explique cómo determinaría la componente vertical de la fuerza hidrostática que actúa sobre esta superficie.

3-59C Considere una superficie circular sometida a fuerzas hidrostáticas por un líquido de densidad constante. Si se determinan las magnitudes de las componentes horizontal y vertical de la fuerza hidrostática resultante, explique cómo encontraría la línea de acción de esta fuerza.

3-60 Considere un pesado automóvil sumergido en un lago con un fondo plano. La puerta del lado del conductor mide 1.1 m de altura y 0.9 m de ancho, y el borde superior de la misma está 8 m abajo de la superficie del agua. Determine la fuerza neta que actúa sobre la puerta (normal a su superficie) y la ubicación del centro de presión si *a*) el automóvil está bien cerrado y contiene aire a presión atmosférica y *b*) el automóvil se llena con agua.

3-61I Se usa un cilindro sólido largo de radio de 2 ft, articulado en el punto A, como una compuerta automática, como se muestra en la figura P3-61I. Cuando el nivel del agua llega a 15 ft, la compuerta cilíndrica se abre girando en torno a la articulación en el punto A. Determine *a*) la fuerza hidrostática que actúa sobre el cilindro y su línea de acción cuando la compuerta se abre, y *b*) el peso del cilindro por ft de longitud del mismo.

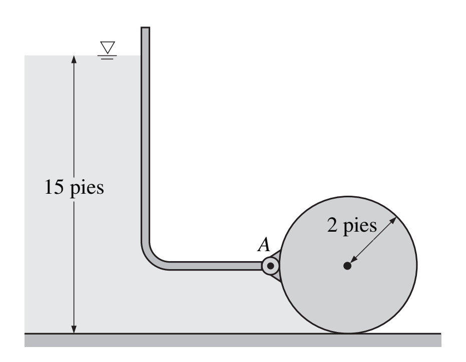


FIGURA P3-61I

3-62 Considere una alberca construida sobre el suelo, con 4 m de largo, 4 m de ancho y 1.5 m de altura, con agua hasta el borde. *a*) Determine la fuerza hidrostática sobre cada pared y la distancia al suelo de la línea de acción de esta fuerza. *b*) Si se duplica la altura de las paredes de la alberca y se llena, la fuerza hidrostática sobre cada pared ¿se duplicará o se cuadriplicará? *Respuesta: a*) 44.1 kN

3-63I Considere una presa de 200 ft de altura y 1 200 ft de ancho llena a toda su capacidad. Determine *a*) la fuerza hidrostática sobre la presa y *b*) la fuerza por unidad de área de la misma cerca de su parte superior y cerca del fondo.

3-64 Un cuarto en el nivel inferior de un barco para cruceros tiene una ventana circular de 30 cm de diámetro. Si el punto medio de la ventana está 5 m abajo de la superficie del agua, determine la fuerza hidrostática que actúa sobre la ventana y el centro de presión. Tome la gravedad específica del agua de mar como 1.025. *Respuesta:* 3 554 N, 5.001 m

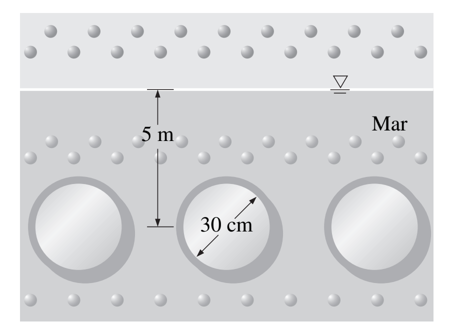


FIGURA P3-64

3-65 El lado del muro de una presa de 100 m de largo que está en contacto con agua tiene forma de un cuarto de círculo con un radio de 10 m. Determine la fuerza hidrostática ejercida sobre la presa y su línea de acción cuando dicha presa está llena hasta el borde.

3-66 Una placa rectangular de 4 m de altura y 5 m de ancho bloquea el extremo de un canal de agua dulce de 4 m de profundidad, como se muestra en la figura P3-66. La placa está articulada en torno a un eje horizontal que está a lo largo de su borde superior y que pasa por un punto *A*, y su apertura la restringe un borde fijo en el punto *B*. Determine la fuerza que se ejerce sobre la placa por el borde.

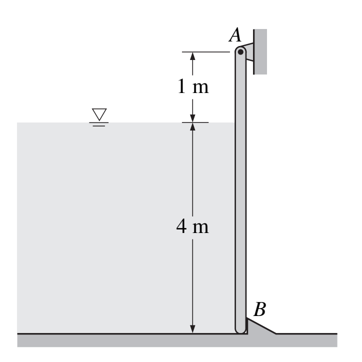


FIGURA P3-66

3-67 Vuelva a considerar el problema 3-66. Use el software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) e investigue el efecto de la profundidad del agua sobre la fuerza que se ejerce sobre la placa por el borde. Suponga que la profundidad del agua varía desde 0 hasta 5 m, en incrementos de 0.5 m. Haga una tabla y trace la gráfica de sus resultados.

3-68I El flujo de agua desde un recipiente se controla por una compuerta con forma de L y de 5 ft de ancho, articulada en el punto *A*, como se muestra en la figura P3.68I. Si se desea que la compuerta se abra cuando la altura del agua sea de 12 ft, determine la masa del peso necesario W. *Respuesta:* 30 900 lbm

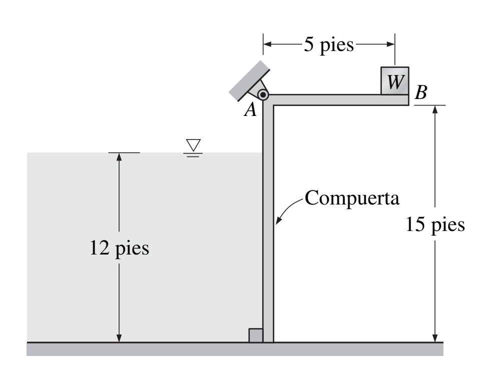


FIGURA P3-68I

3-69I Repita el problema 3-68I para una altura del agua de 8 ft.

3-70 Una artesa de agua de sección transversal semicircular y con un radio de 5 m consta de dos partes simétricas articuladas entre sí en el fondo, como se muestra en la figura P3.70. Las dos partes se mantienen juntas por medio de cables y tensores colocados cada 3 m a lo largo de la longitud de la artesa. Calcule la tensión en cada cable cuando la artesa está llena hasta el borde.

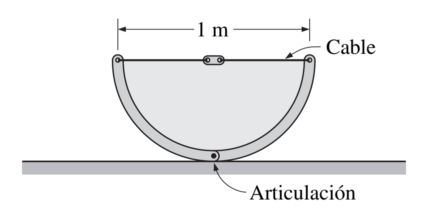


FIGURA P3-70

3-71 Los dos costados de una artesa de agua con forma de V están articulados entre sí en el fondo, en donde se encuentran, como se muestra en la figura P3.71, formando ambos costados un ángulo de 45° respecto del suelo. Cada costado mide 0.75 m de ancho y las dos partes se mantienen juntas mediante cables y tensores colocados cada 6 m a lo largo de la longitud de la artesa. Calcule la tensión en cada cable cuando la artesa está llena hasta el borde. *Respuesta:* 5510 N

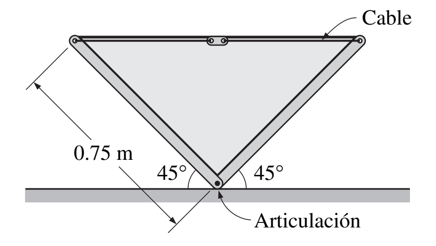


FIGURA P3-71

3-72 Repita el problema 3-71 para el caso de una artesa semillena y con una altura del agua de 0.4 m directamente arriba de la articulación.

3-73 Se debe construir un muro de contención contra un derrumbe de lodo con bloques rectangulares de concreto (ρ = 2 700 kg/m^3) de 0.8 m de altura y 0.2 m de ancho, como se muestra en la figura P3.73. El coeficiente de fricción entre el suelo y los bloques es f = 0.3, y la densidad del lodo es alrededor de 1 800 kg/m^3. Existe la preocupación de que los bloques de concreto puedan resbalarse o voltearse sobre el borde izquierdo inferior conforme suba el nivel del lodo. Determine la

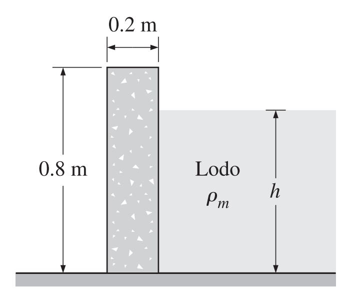


FIGURA P3-73

altura del lodo a la cual *a*) los bloques vencerán la fricción y empezarán a resbalar y *b*) los bloques se voltearán.

3-74 Repita el problema 3-73 para bloques de concreto con un ancho de 0.4 m.

3-75 Una compuerta de 4 m de largo con forma de un cuarto de círculo de radio 3 m y de peso despreciable está articulada alrededor de su borde superior *A*, como se muestra en la figura P3.75. La compuerta controla el flujo de agua sobre el reborde en *B*, donde está comprimida por un resorte. Determine la fuerza mínima necesaria del resorte para mantener cerrada la compuerta cuando el nivel del agua se eleva hasta *A* en el borde superior de la compuerta.

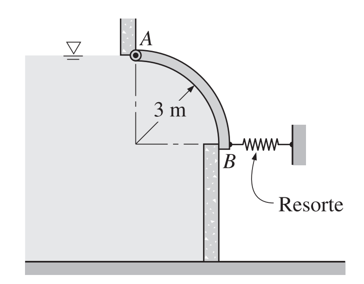


FIGURA P3-75

3-76 Repita el problema 3-75 para un radio de 4 m para la compuerta. *Respuesta:* 314 kN

Flotación

3-77C ¿Qué es fuerza de flotación? ¿Qué la causa? ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de flotación que actúa sobre un cuerpo sumergido cuyo volumen es *V*? ¿Cuáles son la dirección y la línea de acción de la fuerza de flotación?

3-78C Considere dos bolas esféricas idénticas sumergidas en agua a profundidades diferentes. Las fuerzas de flotación que actúan sobre ellas ¿son las mismas o son diferentes? Explique.

3-79C Considere dos bolas esféricas de diámetro 5 cm —una de aluminio y la otra de acero— que están sumergidas en agua. Las fuerzas de flotación que actúan sobre ellas ¿son las mismas o son diferentes? Explique.

3-80C Considere un cubo de cobre de 3 kg y una bola del mismo metal de 3 kg sumergidas en un líquido. Las fuerzas de flotación que actúan sobre estos dos cuerpos ¿son las mismas o son diferentes? Explique.

3-81C Comente la estabilidad de *a*) un cuerpo sumergido y *b*) uno flotante, cuyo centro de gravedad está arriba del centro de flotación.

3-82 Debe determinarse la densidad de un líquido mediante un hidrómetro viejo cilíndrico de 1 cm de diámetro cuyas marcas de división están borradas por completo. Primero, se deja caer el hidrómetro en agua y se marca el nivel correspondiente a ésta. Después se deja caer en el otro líquido y se observa que la marca para el agua ha ascendido 0.5 cm por arriba de la interfaz líquido-aire. Si la altura de la marca para el agua es de 10 cm, determine la densidad del líquido.

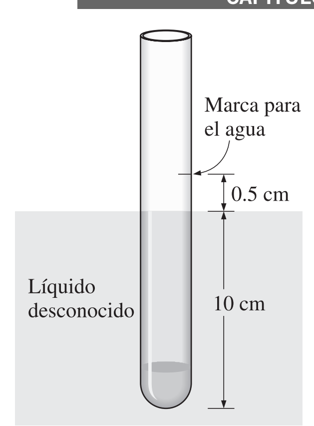


FIGURA P3-82

3-83I Se usa una grúa para bajar objetos pesados dentro de un lago, para un proyecto de construcción subacuática. Determine la tensión en el cable de la grúa debida a un bloque esférico de acero (densidad = 494 lbm/ft^3) de 3 ft de diámetro cuando está *a*) suspendido en el aire y *b*) sumergido por completo en el agua.

3-84 Se deben determinar el volumen y la densidad promedio de un cuerpo de forma irregular usando una balanza de resorte. El cuerpo pesa 7 200 N en el aire y 4 790 N en el agua. Determine el volumen y la densidad del cuerpo. Exprese sus suposiciones.

3-85 Considere un bloque cúbico grande de hielo que flota en el mar. Las gravedades específicas del hielo y del agua de mar son 0.92 y 1.025, respectivamente. Si una parte de 10 cm de alto del bloque de hielo se extiende por encima de la superficie del agua, determine la altura del bloque de hielo por abajo de la superficie. *Respuesta:* 87.6 cm

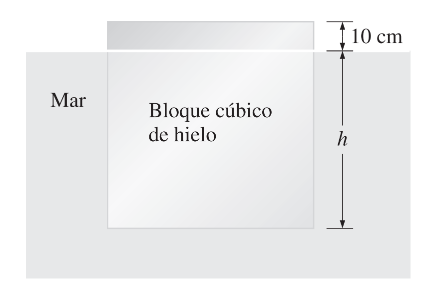


FIGURA P3-85

3-86 Se deja caer una roca de granito (ρ = 2 700 kg/m^3) en un lago. Un hombre se sumerge y trata de levantarla. Determine cuánta fuerza necesita aplicar para levantarla del fondo del lago. ¿Cree el lector que puede hacerlo?

3-87 Se dice que Arquímedes descubrió su principio mientras se bañaba, ya que estaba pensando cómo podría determinar si la corona del rey Herón era en realidad de oro puro. Cuando estaba en la tina de baño, concibió la idea de que podía deter-

minar la densidad promedio de un objeto irregular pesándolo en el aire y también en el agua. Si la corona pesó 3.20 kgf (= 31.4 N) en el aire y 2.95 kgf (= 28.9 N) en el agua, determine si la corona estaba hecha de oro puro. La densidad del oro es de 19 300 kg/m^3. Explique cómo puede usted resolver este problema sin pesar la corona en el agua, pero utilizando una cubeta común, sin calibración para el volumen. Puede pesar algo en el aire.

3-88 Uno de los procedimientos comunes en los programas de acondicionamiento físico es determinar la razón grasa a músculo del cuerpo. Esto se basa en el principio de que el tejido muscular es más denso que el grasoso y, por tanto, cuanto mayor sea la densidad promedio del cuerpo, más alta es la fracción de tejido muscular. Se puede determinar la densidad promedio del cuerpo si se pesa a la persona en el aire y también cuando está sumergida en el agua en un tanque. Trate todos los tejidos y huesos (que no son grasos) como músculos con una densidad equivalente $\rho_{\text{músculo}}$, y obtenga una relación para la fracción en volumen de la grasa del cuerpo x_{grasa}. *Respuesta:* $x_{\text{grasa}} = (\rho_{\text{músculo}} - \rho_{\text{prom}})/(\rho_{\text{músculo}} - \rho_{\text{grasa}})$.

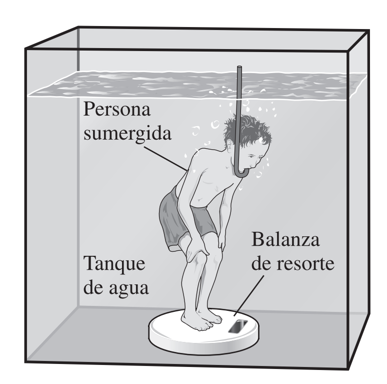


FIGURA P3-88I

3-89 El casco de un bote tiene un volumen de 150 m^3 y la masa total del mismo cuando está vacío es de 8 560 kg. Determine cuánta carga puede transportar este bote sin hundirse *a*) en un lago y *b*) en agua de mar con gravedad específica de 1.03.

Fluidos en el movimiento de cuerpo rígido

3-90C ¿En qué condiciones puede tratarse una masa de fluido en movimiento como un cuerpo rígido?

3-91C Considere un vaso de agua. Compare las presiones promedio del agua en la superficie del fondo para los siguientes casos: el vaso está *a*) en reposo, *b*) moviéndose hacia arriba con velocidad constante, *c*) moviéndose hacia abajo con velocidad constante y *d*) moviéndose en la dirección horizontal con velocidad constante.

3-92C Considere dos vasos idénticos de agua, uno en reposo y el otro moviéndose sobre un plano horizontal con aceleración constante. Suponga que no hay salpicadura ni derrame, ¿cuál de los dos vasos tiene una presión más elevada en el *a*) frente, *b*) punto medio y *c*) atrás de la superficie del fondo?

3-93C Considere un recipiente cilíndrico vertical parcialmente lleno con agua. Ahora se hace girar el cilindro alrededor de su eje a una velocidad angular especificada y se establece un movimiento de cuerpo rígido. Explique cómo resultará afectada la presión en el punto medio y en los bordes de la superficie del fondo debido a la rotación.

3-94 Un camión remolca un tanque de agua sobre una carretera horizontal y se mide que el ángulo que la superficie libre forma con la horizontal es de 15°. Determine la aceleración del camión.

3-95 Considere dos tanques llenos con agua. El primero de ellos mide 8 m de altura y está en reposo, en tanto que el segundo mide 2 m de altura y se mueve hacia arriba con una aceleración de 5 m/s^2. ¿Cuál de los dos tanques tendrá una presión más elevada en el fondo?

3-96 Se está remolcando un tanque de agua sobre una cuesta de una carretera que forma 20° con la horizontal, con una aceleración constante de 5 m/s^2 en la dirección del movimiento. Determine el ángulo que la superficie libre del agua forma con la horizontal. ¿Cuál sería su respuesta si la dirección del movimiento fuera descendente sobre la misma carretera y con la misma aceleración?

3-97I Un tanque cilíndrico vertical de 2 ft de diámetro, abierto a la atmósfera contiene agua hasta una altura de 1 ft. Ahora se hace girar el tanque alrededor de la línea central y el nivel del agua desciende en el centro al mismo tiempo que se eleva en los bordes. Determine la velocidad angular a la cual el fondo del tanque empezará a quedar expuesto. Asimismo, determine la altura máxima del agua en este momento.

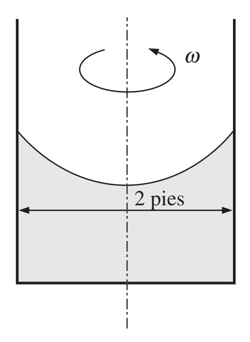


FIGURA P3-97I

3-98 Se transporta un tanque cilíndrico de agua de 60 cm de alto y 40 cm de diámetro sobre una carretera horizontal. La aceleración más alta anticipada es de 4 m/s^2. Determine la altura inicial admisible del agua en el tanque, si nada de ésta se derrama durante la aceleración. *Respuesta:* 51.8 cm

3-99 Un recipiente cilíndrico vertical, de 40 cm de diámetro y 90 cm de alto está semilleno con agua hasta una altura de 60 cm. Ahora se hace girar el tanque a una velocidad angular constante de 120 rpm. Determine cuánto descenderá el nivel del líquido en el centro del cilindro como resultado de este movimiento de rotación.

3-100 Una pecera que contiene agua hasta una altura de 40 cm se mueve en la cabina de un elevador. Determine la presión

en el fondo de la pecera cuando el elevador está *a*) en reposo, *b*) moviéndose hacia arriba con una aceleración hacia arriba de 3 m/s^2 y *c*) moviéndose hacia abajo con una aceleración de 3 m/s^2.

3-101 Un tanque cilíndrico vertical, de 3 m de diámetro, que contiene leche, gira a una razón constante de 12 rpm. Si la presión en el centro de la superficie del fondo es de 130 kPa, determine la presión en el borde de la superficie del fondo del tanque. Tome la densidad de la leche como 1 030 kg/m.

3-102 Se transporta leche con una densidad de 1 020 kg/m^3 sobre una carretera horizontal en un carro-tanque cilíndrico de 7 m de largo y 3 m de diámetro. El carro-tanque está completamente lleno con leche (no existe espacio de aire) y se acelera a 2.5 m/s^2. Si la presión mínima en el carro tanque es de 100 kPa, determine la presión máxima y su ubicación. *Respuesta:* 47.9 kPa

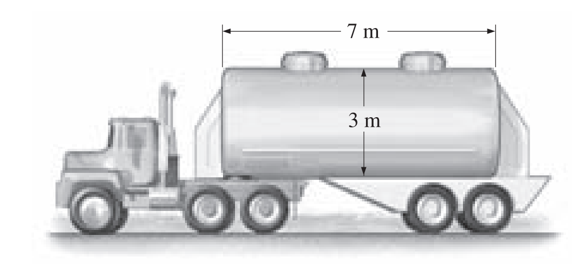


FIGURA P3-102

3-103 Repita el problema 3-102 para una desaceleración de 2.5 m/s^2.

3-104 Las distancias entre los centros de dos ramas de un tubo en U abierto a la atmósfera es de 25 cm y el tubo contiene alcohol hasta una altura de 20 cm en ambas ramas. Ahora se hace girar el tubo alrededor de su rama izquierda a 4.2 rad/s. Determine la diferencia en la elevación entre las superficies del fluido en las dos ramas.

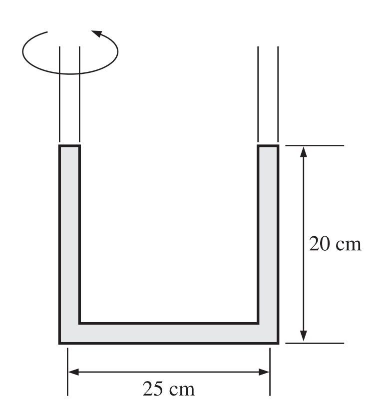


FIGURA P3-104

3-105 Un cilindro vertical sellado, de 1.2 m de diámetro y 3 m de alto, está lleno con gasolina cuya densidad es de 740 kg/m^3. Ahora se hace girar el tanque alrededor de su eje vertical a razón de 70 rpm. Determine *a*) la diferencia entre las presiones en el centro de las superficies del fondo y de arriba y *b*) la diferencia entre las presiones en el centro y el borde de la superficie del fondo.

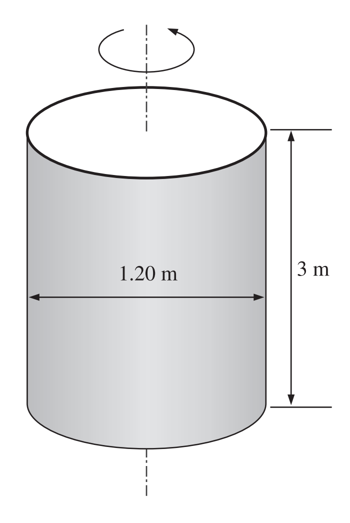


FIGURA P3-105

3-106 Vuelva a considerar el problema 3-105. Use el software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) investigue el efecto de la velocidad de rotación sobre la diferencia de presiones entre el centro y el borde de la superficie del fondo del cilindro. Suponga que la velocidad de rotación varía desde 0 rpm hasta 500 rpm, en incrementos de 50 rpm. Haga una tabla y trace la gráfica de sus resultados.

3-107I Un camión remolca un tanque rectangular de 20 ft de largo y 8 ft de alto, que está abierto a la atmósfera, sobre una carretera horizontal. El tanque está lleno con agua hasta una profundidad de 6 ft. Determine la aceleración o desaceleración máximas permitidas, si no debe derramarse agua durante el remolque.

3-108I Un tanque de 8 ft de largo, abierto a la atmósfera, inicialmente contiene agua hasta una altura de 3 ft. Un camión lo remolca sobre una carretera horizontal. El conductor aplica los frenos y el nivel del agua en el frente se eleva 0.5 ft por arriba del nivel inicial. Determine la desaceleración del camión. *Respuesta:* 4.08 ft/s^2

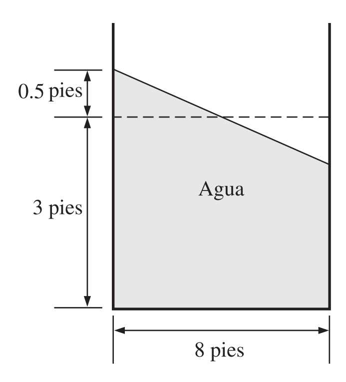


FIGURA P3-108I

3-109 Un tanque cilíndrico, de 3 m de diámetro y 7 m de largo, está lleno con agua. Un camión jala del tanque sobre una carretera horizontal estando horizontal el eje de 7 m de largo. Determine la diferencia de presión entre los extremos delantero y trasero del tanque a lo largo de una recta horizontal, cuando el camión *a*) acelera a 3 m/s^2 y *b*) desacelera a 3 m/s^2.

Problemas de repaso

3-110 Un sistema de aire acondicionado exige que se tienda una sección de 20 m de largo de ducto de 15 cm de diámetro bajo del agua. Determine la fuerza ascendente que el agua ejercerá sobre el ducto. Tome las densidades del aire y del agua como 1.3 kg/m^3 y 1 000 kg/m^3, respectivamente.

3-111 A menudo los globos se llenan con gas helio porque pesa sólo alrededor de un séptimo de lo que pesa el aire en condiciones idénticas. La fuerza de flotación, la cual se puede expresar como $F_b = \rho_{aire} g V_{globo}$, impulsará al globo hacia arriba. Si éste mide 10 m de diámetro y transporta dos personas, de 70 kg cada una, determine la aceleración del globo cuando se acaba de liberar. Suponga que la densidad del aire es de ρ = 1.16 kg/m^3, y desprecie el peso de las cuerdas y la canastilla. *Respuesta:* 16.5 m/s^2

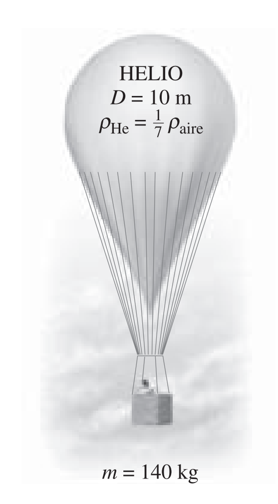


FIGURA P3-111

3-112 Vuelva a considerar el problema 3-111. Use el software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) e investigue el efecto del número de personas transportadas por el globo sobre la aceleración. Trace la gráfica de la aceleración contra el número de personas y analice los resultados.

3-113 Determine la cantidad máxima de carga, en kg, que puede transportar el globo descrito en el problema 3-111. *Respuesta:* 520.6 kg

3-114I La presión en una caldera de vapor se da como 75 kgf/cm^2. Exprese esta presión en psi, kPa, atm y bars.

3-115 Se puede usar el barómetro básico como un aparato para medir la altitud en los aviones. El control de tierra informa de una lectura barométrica de 753 mm Hg, en tanto que la lectura del piloto es de 690 mm Hg. Estime la altitud del avión desde el nivel del suelo si la densidad promedio del aire es de 1.20 kg/m^3. *Respuesta:* 714 m

3-116 La mitad inferior de un recipiente cilíndrico de 10 m de alto está llena con agua (ρ = 1000 kg/m^3) y la superior con aceite que tiene una gravedad específica de 0.85. Determine la diferencia de presión entre la superficie superior y el fondo del cilindro. *Respuesta:* 90.7 kPa

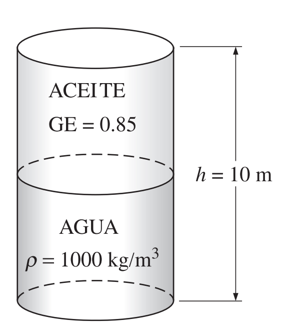


FIGURA P3-116

3-117 Un dispositivo de cilindro y émbolo, en posición vertical y sin fricción, contiene un gas a 500 kPa. La presión atmosférica en el exterior es de 100 kPa y el área del pistón es de 30 cm^2. Determine la masa del émbolo.

3-118 Una olla de presión cuece un alimento más rápido que una cacerola común ya que mantiene en su interior una presión y una temperatura más elevadas. La tapa de una de estas ollas está bien cerrada y el vapor de agua sólo se puede escapar por una abertura que está en medio de ella. Arriba de esta abertura hay una pieza metálica separada —la tapa de la válvula de escape— e impide que el vapor se escape hasta que la fuerza de

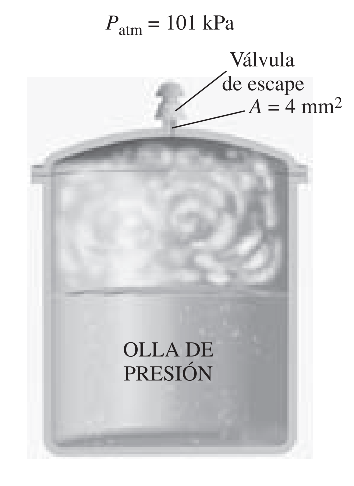


FIGURA P3-118

presión vence su peso. De esta manera, el escape periódico del vapor impide que se cree cualquier presión potencialmente peligrosa, y mantiene a su vez la presión en el interior en un valor constante. Determine la masa de la tapa de la válvula de escape de una olla de presión cuya presión manométrica de operación es de 100 kPa y que tiene un área de sección transversal de la abertura de 4 mm^2. Suponga una presión atmosférica de 101 kPa y dibuje el diagrama de cuerpo libre de la tapa de la válvula de escape. *Respuesta:* 40.8 g

3-119 Se sujeta un tubo de vidrio a un tubo de agua, como se muestra en la figura P3-119. Si la presión del agua en el fondo del tubo es de 115 kPa y la presión atmosférica local es de 92 kPa, determine hasta qué altura se elevará el agua en el tubo, en m. Suponga g = 9.8 m/s^2 en ese lugar y tome la densidad del agua como 1 000 kg/m^3.

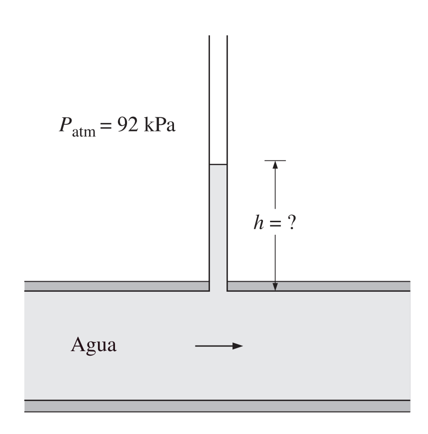


FIGURA P3-119

3-120 Se encuentra un valor aproximado de la presión atmosférica promedio sobre la Tierra, como una función de la altitud, por la relación P_{atm} = 101.325 (1 − 0.02256z)$^{5.256}$, donde P_{atm} es la presión atmosférica en kPa y z es la altitud en km, tomándose z = 0 en el nivel del mar. Determine las presiones atmosféricas aproximadas en Atlanta (z = 306 m), Denver (z = 1 610 m), ciudad de México (z = 2309 m), y la punta del Monte Everest (z = 8848 m).

3-121 Cuando se miden las pequeñas diferencias en la presión con un manómetro, con frecuencia se inclina una de sus ramas con el fin de mejorar la exactitud de la lectura. (La diferencia de presión todavía es proporcional a la distancia vertical y no a la longitud real del fluido a lo largo del tubo.) Se medirá la presión del aire en un ducto circular con un manómetro cuya rama abierta está inclinada 35° respecto a la horizontal, como se muestra en la figura P3-121. La densidad del líquido en el manómetro es 0.81 kg/L y la distancia vertical entre los niveles de fluido en las dos ramas es de 8 cm. Determine la presión manométrica del aire en el ducto y la longitud de la columna de fluido en la rama inclinada por arriba del nivel del mismo en la rama vertical.

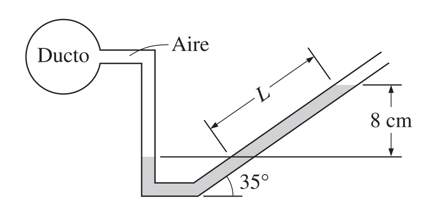


FIGURA P3-121

3-122I Considere un tubo en U cuyas ramas están abiertas a la atmósfera. Ahora, se vierten volúmenes iguales de agua y de aceite ligero (ρ = 49.3 lbm/ft^3) en ramas diferentes. Una persona sopla por el lado del aceite hasta que la superficie de contacto de los dos fluidos se mueve hasta el fondo del propio tubo y, de este modo, los niveles de los líquidos en las dos ramas son los mismos. Si la altura del fluido en cada una de las ramas es de 30 in, determine la presión manométrica que la persona ejerce sobre el aceite cuando sopla.

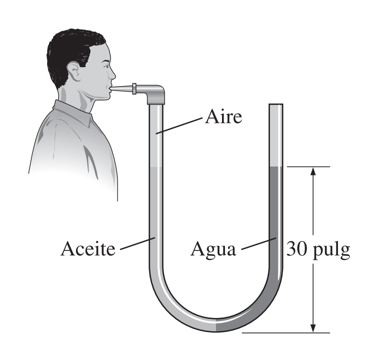


FIGURA P3-122I

3-123 Las infusiones intravenosas suelen impulsarse por gravedad cuando se cuelga la botella de fluido a una altura suficiente para contrarrestar la presión sanguínea en la vena y forzar ese fluido hacia el interior del cuerpo. Cuanto más alto se coloque la botella, mayor será el gasto del fluido. *a*) Si se observa que se equilibran entre sí las presiones del fluido y la sanguínea cuando la botella está 1.2 m arriba del nivel del brazo, determine la presión sanguínea manométrica. *b*) Si la presión manométrica del fluido a nivel del brazo es de 20 kPa para tener un gasto suficiente, determine a qué altura debe colocarse la botella. Tome la densidad del fluido como 1 020 kg/m^3.

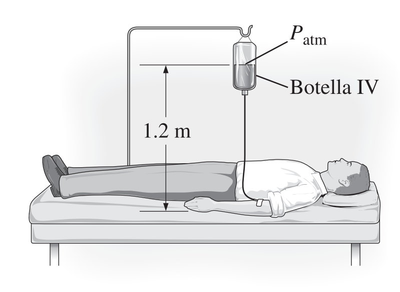


FIGURA P3-123

3-124 Se conecta una línea de gasolina a un manómetro de carátula a través de un manómetro de U doble, como se muestra en la figura P3-124. Si la lectura del manómetro de carátula es de 370 kPa, determine la presión manométrica de la línea de gasolina.

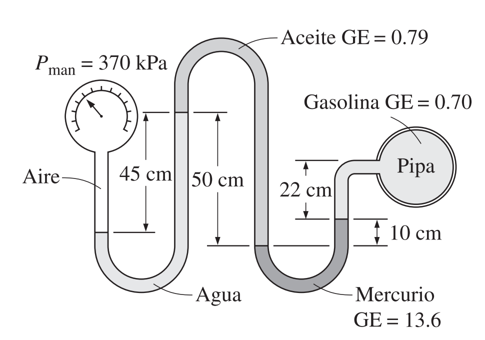


FIGURA P3-124

3-125 Repita el problema 3-124 para una lectura de presión manométrica de 240 kPa.

3-126I Se conecta un tubo de agua a un manómetro de U doble, como se muestra en la figura P3-126I, en un lugar donde la presión atmosférica local es de 14.2 psia. Determine la presión absoluta en el centro del tubo.

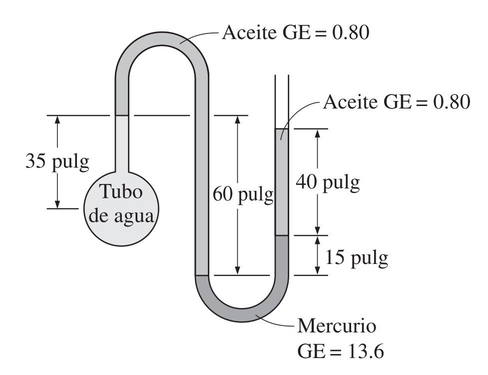


FIGURA P3-126I

3-127 Se mide la presión del agua que fluye por un tubo mediante la disposición que se muestra en la figura P3-127. Para los valores dados, calcule la presión en el tubo.

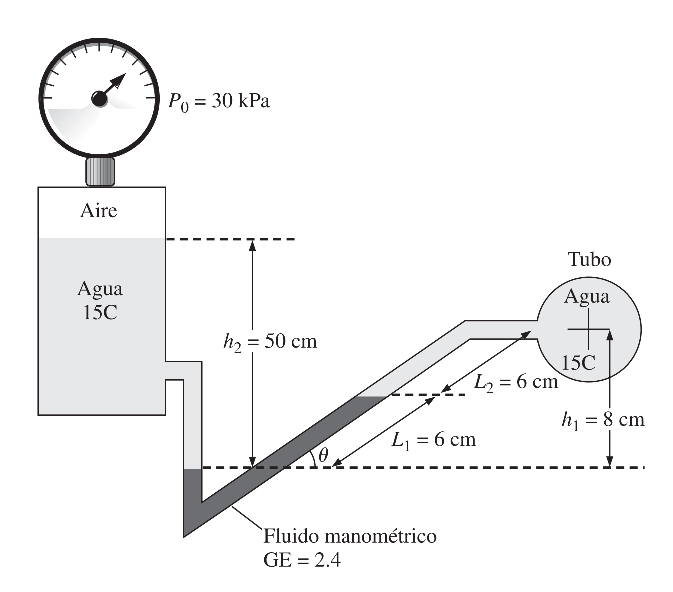


FIGURA P3-127

3-128 Considere un tubo en U lleno con mercurio, excepto la parte de 18 cm de alto de arriba, como se muestra en la figura P3-128. El diámetro de la rama derecha del tubo es D = 2 cm y el de la izquierda es el doble de ése. Se vierte aceite con gravedad específica de 2.72 en la rama izquierda, forzando a que algo del mercurio de la rama izquierda entre a la derecha. Determine la cantidad máxima de aceite que se puede agregar en la rama izquierda. *Respuesta:* 0.256 L

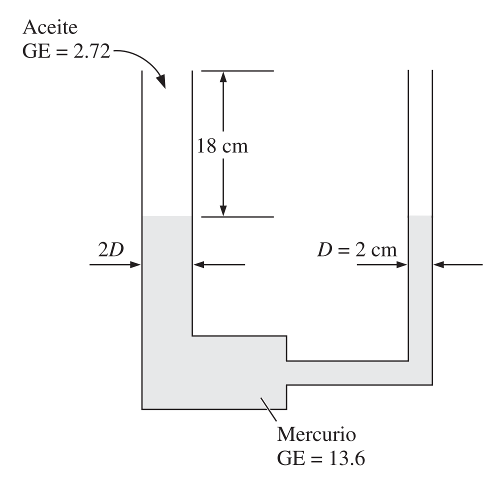


FIGURA P3-128

3-129 Se usa una tetera de agua con una tetera pequeña para té en su parte superior, para preparar té, como se muestra en la figura P3-129. La tetera pequeña para té puede bloquear parcialmente el escape de vapor y hacer que se eleve la presión en la tetera de agua y se pueda presentar un derrame de agua por el tubo de la tetera destinado para servir el agua. Descarte la expansión térmica de agua líquida y la variación en la cantidad de agua en el tubo, como despreciables en relación con la cantidad de agua en la tetera, determine la altura máxima de agua fría que no causaría un derrame a presiones manométricas de vapor hasta de 0.32 kPa.

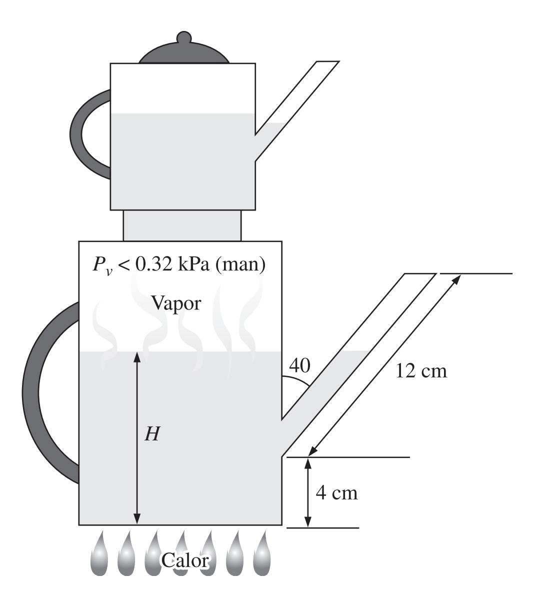


FIGURA P3-129

3-130 Repita el problema 3-129 tomando en consideración la expansión térmica del agua, conforme se calienta de 20°C hasta la temperatura de ebullición de 100°C.

3-131 Se sabe que la temperatura de la atmósfera varía con la altitud. Por ejemplo, en la troposfera, la cual se extiende hasta una altitud de 11 km, se puede obtener una aproximación de la variación de la temperatura por $T = T_0 - \beta z$, donde T_0 es la temperatura a nivel del mar, la cual se puede tomar como 288.15 K, y $\beta = 0.0065$ K/m. La aceleración gravitacional también cambia con la altitud como $g(z) = g_0/(1 + z/6\,370\;320)^2$ donde $g_0 = 9.807$ m/s^2 y z es la altura sobre el nivel del mar en m. Obtenga una relación para la variación de la presión en la troposfera *a*) ignorando y *b*) considerando la variación de g con la altitud.

3-132 La variación de la presión con la densidad en una capa gruesa de gas se da por $P = C\rho^n$, donde C y n son constantes. Note que el cambio de la presión de uno a otro lado de una capa diferencial de fluido de espesor dz en la dirección vertical se da como $dP = -\rho g\, dz$, obtenga una relación para la presión como función de la elevación z. Tome la presión y la densidad en $z = 0$ como P_0 y ρ_0, respectivamente.

3-133 Los transductores de presión son de uso común para medir la presión cuando se generan señales analógicas por lo general en el rango de 4 mA hasta 20 mA, o 0 V-cd hasta 10 V-cd, como respuesta a la presión aplicada. Se puede usar el sistema cuyo esquema se muestra en la figura P3-133, para calibrar los transductores de presión. Se llena un recipiente rígido con aire presurizado y se mide la presión mediante el manómetro agregado. Se usa una válvula para regular la presión en el recipiente. Se miden simultáneamente la presión y la señal eléctrica para diversos ajustes y se hace una tabla con los resultados. Para el juego de mediciones dado, obtenga la curva de calibración en la forma de $P = aI + b$, donde a y b son constantes y calcule la presión que corresponde a una señal de 10 mA.

Δh, mm	28.0	181.5	297.8	413.1	765.9
I, mA	4.21	5.78	6.97	8.15	11.76

Δh, mm	1027	1149	1362	1458	1536
I, mA	14.43	15.68	17.86	18.84	19.64

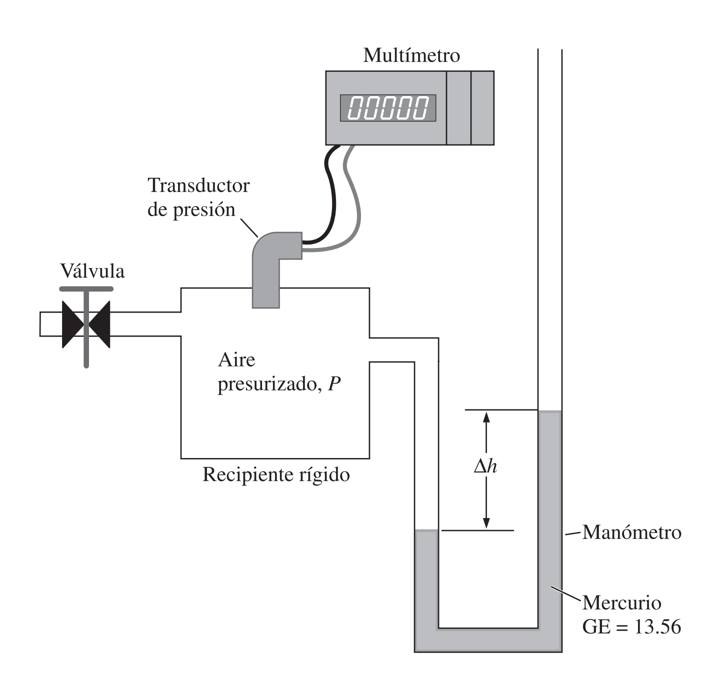


FIGURA P3-133

3-134 Un sistema se equipa con dos manómetros de carátula y uno de tubo en U, como se muestra en la figura P3-134. Para $\Delta h = 8$ cm, determine la diferencia de presión $\Delta P = P_2 - P_1$.

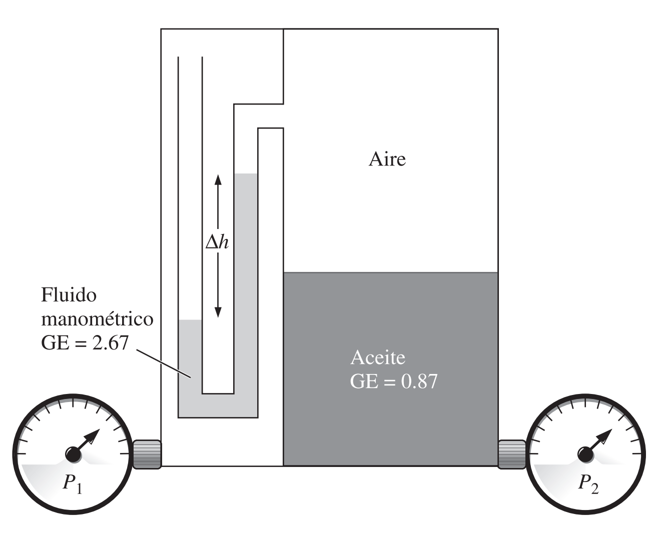


FIGURA P3-134

3-135 Se conectan entre sí una tubería de aceite y un tanque rígido de aire mediante un manómetro, como se muestra en la figura P3-135. Si el tanque contiene 15 kg de aire a 80°C, determine *a*) la presión absoluta en la tubería y *b*) el cambio en Δh cuando la temperatura en el tanque desciende hasta 20°C. Suponga que la presión en la tubería de aceite permanece constante y que el volumen de aire en el manómetro es despreciable con relación al volumen del tanque.

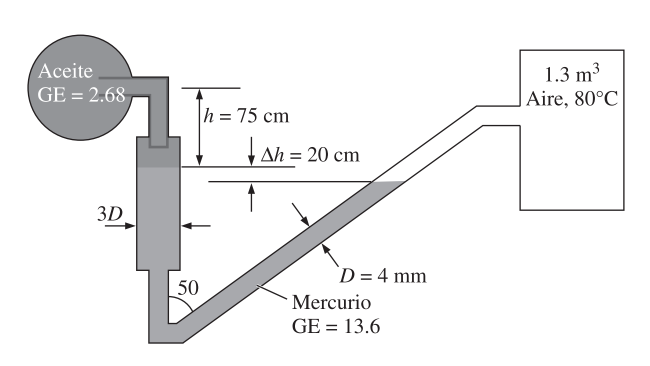


FIGURA P3-135

3-136 Se puede determinar la densidad de un cuerpo flotante con amarrarle pesos a éste hasta que él y los pesos se sumerjan por completo y, después, pesarlos por separado en el aire. Considere un tronco de madera que pesa 1 540 N en el aire. Si necesita 34 kg de plomo (ρ = 11 300 kg/m^3) para hundirse por completo junto con el plomo, determine la densidad promedio del tronco. *Respuesta:* 835 kg/m^3

3-137 Una compuerta rectangular de 200 kg y 5 m de ancho, que se muestra en la figura P3-137, está articulada en *B* y se apoya contra el piso en *A*, formando un ángulo de 45° con la horizontal. La compuerta se va a abrir por su borde inferior por medio de la aplicación de una fuerza normal en su centro. Determine la fuerza mínima *F* necesaria para abrir la compuerta. *Respuesta:* 520 kN

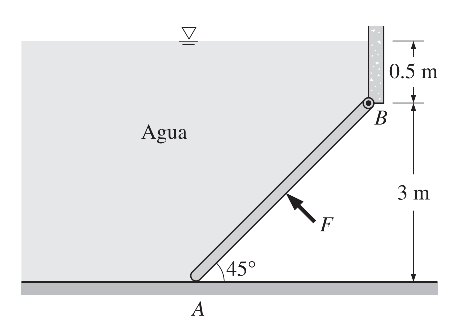


FIGURA P3-137

3-138 Repita el problema 3-137 con una altura del agua de 1.2 m por arriba de la articulación en *B*.

3-139 Una compuerta rectangular de 3 m de alto y 6 m de ancho está articulada en el borde superior en *A* y está restringida mediante un reborde en *B*. Determine la fuerza hidrostática ejercida sobre la compuerta por el agua con 5 m de altura y la ubicación del centro de presión.

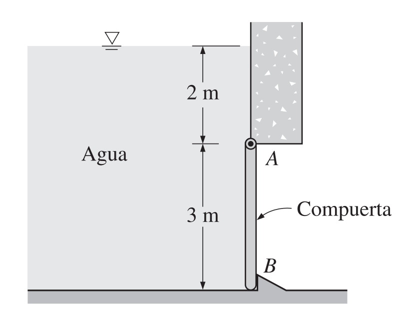


FIGURA P3-139

3-140 Repita el problema 3-139 para una altura total del agua de 2 m.

3-141I Se construirá un túnel semicircular de 30 ft de diámetro debajo de un lago de 150 ft de profundidad y 800 ft de largo, como se muestra en la figura P3-141I. Determine la fuerza hidrostática total que actúa sobre el techo del túnel.

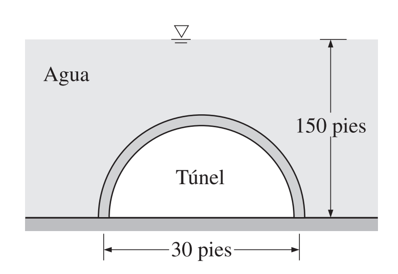


FIGURA P3-141I

3-142 Un domo hemisférico de 50 ton y 6 m de diámetro colocado sobre una superficie horizontal está lleno con agua, como se muestra en la figura P3-142. Alguien afirma que puede levantar este domo aplicando la ley de Pascal, con sujetar un tubo largo en la parte superior y llenarlo con agua. Determine la altura de agua en el tubo necesaria para levantar el domo. Descarte el peso del tubo y del agua en él. *Respuesta:* 0.77 m

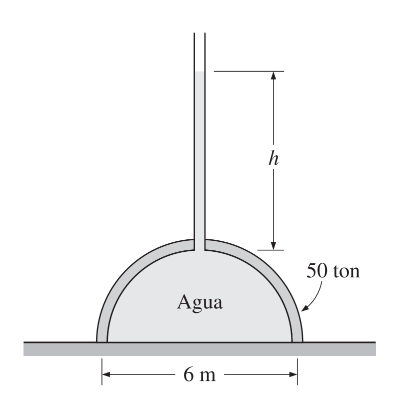


FIGURA P3-142

3-143 El agua en un depósito de 25 m de profundidad se mantiene en el interior por medio de un muro de 150 m de ancho cuya sección transversal es un triángulo equilátero, como se muestra en la figura P3-143. Determine *a*) la fuerza total (hidrostática + atmosférica) que actúa sobre la superficie interior del muro y su línea de acción y *b*) la magnitud de la componente horizontal de esta fuerza. Tome P_{atm} = 100 kPa.

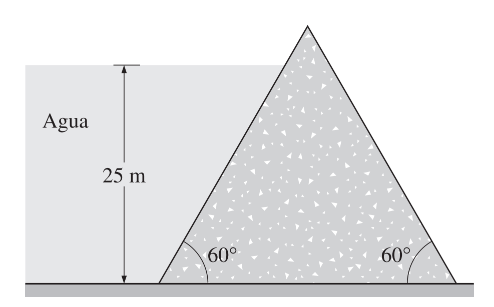


FIGURA P3-143

3-144 Un tubo en U contiene agua en la rama derecha y otro líquido en la izquierda. Se observa que cuando el tubo gira a 30 rpm alrededor de un eje que está a 15 cm de la rama derecha y a 5 de la izquierda, los niveles del líquido en las dos ramas se vuelven iguales. Determine la densidad del fluido en la rama izquierda.

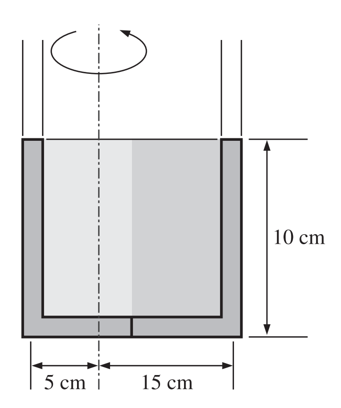


FIGURA P3-144

3-145 Un cilindro vertical de 1 m de diámetro y 2 m de alto está lleno con gasolina cuya densidad es 740 kg/m^3. Ahora se hace girar el tanque alrededor de su eje vertical a razón de 90 rpm, mientras está siendo acelerado hacia arriba a 5 m/s^2. Determine *a*) la diferencia entre las presiones en los centros de las superficies del fondo y superior y *b*) la diferencia entre las presiones en el centro y el borde de la superficie del fondo.

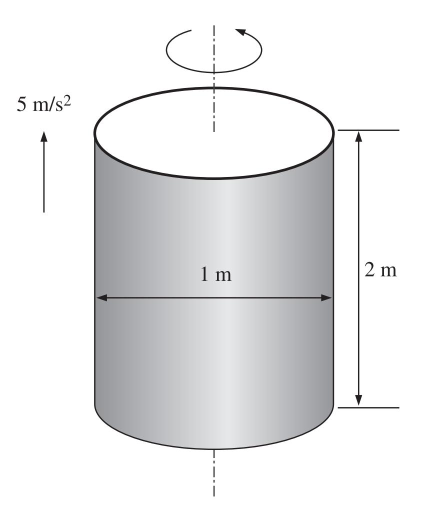


FIGURA P3-145

3-146 Un tanque de 5 m de largo y 4 m de alto contiene agua hasta una profundidad de 2.5 m, cuando no está en movimiento y está abierto a la atmósfera a través de un desfogue en medio.

Ahora se acelera el tanque hacia la derecha sobre una superficie horizontal, a 2 m/s^2. Determine la presión máxima en el tanque con relación a la atmosférica. *Respuesta:* 29.5 kPa

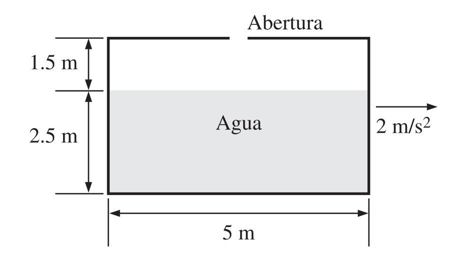


FIGURA P3-146

3-147 Vuelva a considerar el problema 3-146. Use el software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) e investigue el efecto de la aceleración sobre la pendiente de la superficie libre del agua en el tanque. Suponga que la aceleración varía desde 0 m/s^2 hasta 5 m/s^2 en incrementos de 0.5 m/s^2. Haga una tabla y trace la gráfica de sus resultados.

3-148 Un globo elástico de aire con un diámetro de 30 cm se sujeta a la base de un recipiente parcialmente lleno con agua a +4°C, como se muestra en la figura P3-148. Si la presión del aire arriba del agua se incrementa de manera gradual de 100 kPa hasta 1.6 MPa, ¿cambiará la fuerza sobre el cable? Si es así, ¿cuál es el porcentaje de cambio en la fuerza? Suponga que la presión sobre la superficie libre y el diámetro del globo están relacionados por $P = CD^n$, en donde C es una constante y $n = -2$. El peso del globo y del aire en él es despreciable. *Respuesta:* 98.4 por ciento

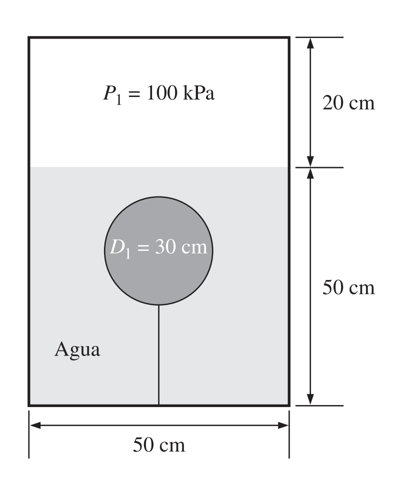


FIGURA P3-148

3-149 Vuelva a considerar el problema 3-148. Use el software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) e investigue el efecto de la presión del aire que está arriba del agua sobre la fuerza en el cable. Suponga que esta presión varía desde 0.1 MPa hasta 10 MPa. Trace la gráfica de la fuerza en el cable contra la presión del aire.

3-150 La densidad promedio de los témpanos es alrededor de 917 kg/m^3. *a*) Determine el porcentaje del volumen total de un témpano sumergido en agua de mar de densidad 1 042 kg/m^3. *b*) Aun cuando los témpanos están sumergidos en su mayor parte, se observa que se vuelcan. Explique cómo puede suceder esto. (Sugerencia: Considere la temperatura de los témpanos y del agua de mar.)

3-151 Un recipiente cilíndrico cuyo peso es de 79 N está invertido y metido hacia el agua, como se muestra en la figura P3-151. Determine la diferencia de alturas h del manómetro y la fuerza F necesaria para mantenerlo en la posición en que se muestra.

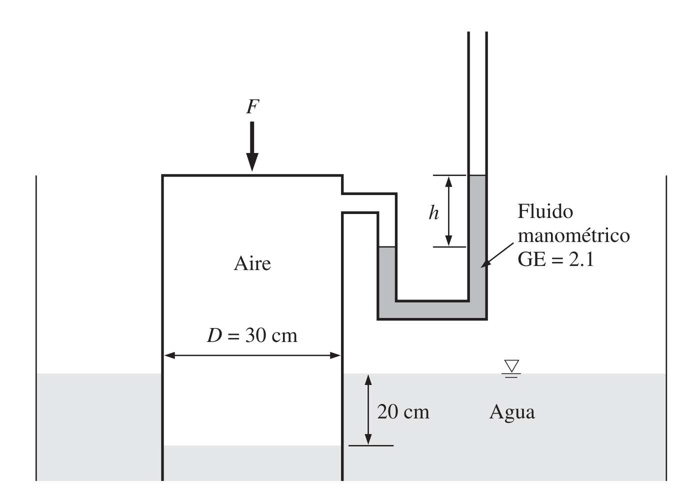


FIGURA P3-151

Problemas de diseño y ensayo

3-152 Se diseñarán zapatos para permitir que gente hasta de 80 kg, sean capaces de caminar sobre la superficie de agua dulce o de mar. Los zapatos se fabricarán de plástico soplado con la forma de una esfera, de una pelota de futbol (americano) o una rebanada de pan francés. Determine el diámetro equivalente de cada zapato y haga un comentario acerca de las formas propuestas desde el punto de vista de la estabilidad. ¿Cuál es su valoración de la posibilidad de colocar en el mercado estos zapatos?

3-153 Se debe determinar el volumen de una roca sin usar algún aparato de medición del volumen. Explique cómo podría hacerlo con una balanza impermeable de resorte.

CAPÍTULO

4

CINEMÁTICA DE FLUIDOS

La *cinemática de fluidos* trata la descripción del movimiento de los fluidos sin necesariamente considerar las fuerzas y momentos que lo *causan*. En este capítulo se introducen varios conceptos cinemáticos relacionados con los fluidos fluyentes. Se estudia la *derivada material* (*sustancial*) y su papel en la transformación de las ecuaciones de conservación con base en la *descripción lagrangiana del flujo de fluidos* (siguiendo una *partícula de fluido*) o la *descripción euleriana del flujo de fluidos* (que pertenece a un *campo de flujo*). En seguida, se comentan diversas maneras de visualizar los campos de fluidos —*líneas de corriente*, *líneas de traza*, *líneas de trayectoria*, *líneas fluidas*, y los métodos ópticos de *estrioscopia* y *fotografía por sombras*— y se describen tres maneras de trazar gráficas a partir de los datos del flujo: *gráficas de perfiles*, *gráficas vectoriales* y *gráficas de contornos*. Se explican las cuatro propiedades cinemáticas fundamentales del movimiento y deformación de los fluidos: *razón de translación, razón de rotación, razón de deformación lineal* y *razón de deformación por esfuerzo cortante*. También se comentan los conceptos de *vorticidad, rotacionalidad* e *irrotacionalidad* en los flujos de fluidos. Por último, se estudia el *teorema del transporte de Reynolds* (RTT, por sus siglas en inglés), y se destaca su papel en la transformación de las ecuaciones del movimiento, de las que describen un *sistema* hacia las que corresponden a un flujo de fluido hacia dentro y hacia fuera de un *volumen de control*. Se explica la analogía entre la derivada material para los elementos infinitesimales de fluido y el RTT para los volúmenes de control.

OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Entender el papel de la derivada material en la transformación entre las descripciones lagrangiana y euleriana
- Distinguir entre los diversos tipos de visualizaciones del flujo y los métodos para trazar gráficas de las características de un flujo de fluido
- Tener una percepción de las numerosas maneras en cómo se desplazan y se deforman los fluidos
- Distinguir entre regiones rotacionales e irrotacionales de flujo basados en las propiedades del flujo de vorticidad
- Entender la utilidad del teorema del transporte de Reynolds

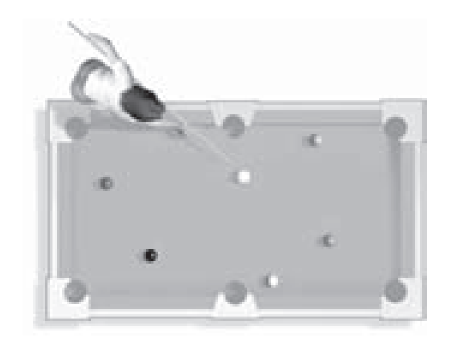


FIGURA 4-1
Con un número pequeño de objetos, como las bolas sobre una mesa de billar, se puede seguir la trayectoria de cada una de ellas por separado.

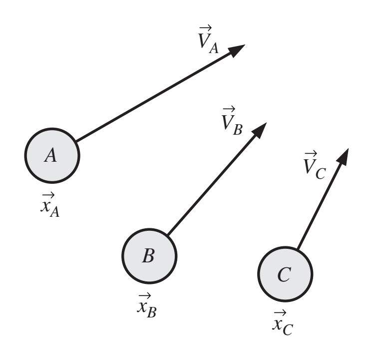


FIGURA 4-2
En la descripción lagrangiana, debe seguirse la huella de la posición y de la velocidad de cada partícula.

4-1 ▪ DESCRIPCIONES LAGRANGIANA Y EULERIANA

La materia llamada **cinemática** se interesa en el estudio del *movimiento*. En la dinámica de fluidos, la *cinemática de fluidos* es el estudio que explica cómo fluyen los fluidos y cómo describir su movimiento. Desde un punto de vista fundamental existen dos maneras de describir el movimiento. El primer método y más conocido es el que se aprendió en las clases de física de nivel preparatoria: seguir la trayectoria de los objetos por separado. Por ejemplo, todos hemos visto experimentos de física en los que una bola sobre una mesa de billar o un disco en una mesa de hockey sobre un colchón de aire choca con otra bola o contra la pared (Fig. 4-1). Se usan las leyes de Newton para describir el movimiento de objetos de ese tipo y se puede predecir con exactitud a dónde van y cómo se intercambia la cantidad de movimiento y la energía cinética de un objeto a otro. La cinemática de esos experimentos incluye seguir el rastro del **vector de posición** de cada objeto, $\vec{x}_A$, $\vec{x}_B$, . . . , y del **vector de velocidad** de cada uno de ellos, $\vec{V}_A$, $\vec{V}_B$, . . . , como funciones del tiempo (Fig. 4-2). Cuando se aplica este método a un fluido fluyente, se le llama **descripción lagrangiana** del movimiento de fluido, en honor al matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813). El análisis lagrangiano es análogo al **análisis de sistemas** que se aprendió en la clase de termodinámica; es decir, se sigue una masa fija.

Como el lector puede imaginar, ¡este método de descripción del movimiento es mucho más difícil para los fluidos que para las bolas de billar! En primer lugar, no se pueden definir e identificar con facilidad las partículas de fluido conforme se desplazan en todas direcciones. En segundo lugar, un fluido es un **continuum** (desde un punto de vista macroscópico), de modo que las interacciones entre las parcelas de fluido no son tan fáciles de describir, como son las interacciones entre objetos distintos, como las bolas de billar o los discos de hockey. Además, las parcelas de fluido se *deforman* de manera continua a medida que se mueven en el flujo.

Desde el punto de vista *microscópico*, un fluido está formado por *miles de millones* de moléculas que se golpean continuamente entre sí, como las bolas de billar; pero la tarea de seguir un subconjunto de estas moléculas es bastante difícil, aun para las computadoras más rápidas y más grandes. Sin embargo, existen muchas aplicaciones prácticas de la descripción lagrangiana, como seguir el rastro de escalares pasivos en un flujo, en los cálculos de la dinámica de los gases rarificados referentes al reingreso de una nave espacial en la atmósfera terrestre y en el desarrollo de sistemas de medición del flujo basado en la formación de imágenes de las partículas (como se estudia en la Sección 4-2).

Un método más común de descripción del flujo de fluidos es la **descripción euleriana** del movimiento de fluidos, nombrada así en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). En esta descripción del flujo de fluidos, se define un volumen finito, llamado **dominio del flujo** o **volumen de control**, a través del cual un fluido fluye hacia dentro y hacia fuera. No es necesario seguir el rastro de la posición y la velocidad de una masa fija de partículas de fluido. En lugar de ello, se definen **variables de campo**, funciones del espacio y el tiempo, dentro del volumen de control. Por ejemplo, el **campo de presión** es un campo de **variable escalar**; en caso general para un flujo tridimensional no-estacionario, en coordenadas cartesianas:

Campo de presión: $$P = P(x, y, z, t) \quad \textbf{(4-1)}$$

De manera semejante se define el **campo de velocidad** como un campo de **variable vectorial**:

Campo de velocidad: $$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \quad \textbf{(4-2)}$$

Del mismo modo, el **campo de aceleración** también es un campo de variable vectorial:,

Campo de aceleración: $$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t) \quad \textbf{(4-3)}$$

De manera colectiva, estas variables de campo (y otras) definen el **campo de flujo**. El campo de velocidad de la ecuación 4-2 se puede desarrollar en las coordenadas cartesianas (x, y, z), $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ como:

$$\vec{V} = (u, v, w) = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k} \quad \textbf{(4-4)}$$

Se puede realizar un desarrollo semejante para el campo de aceleración de la ecuación 4-3. En la descripción euleriana, todas esas variables de campo se definen en cualquier ubicación (x, y, z) en el volumen de control y en cualquier instante t (Fig. 4-3). En la descripción euleriana en realidad no importa lo que sucede a las partículas de fluido por separado; en lugar de ello, se centra la atención en la presión, la velocidad, la aceleración, etcétera, de cualquiera que sea la partícula de fluido que llegue a estar en el lugar de interés en el momento de interés.

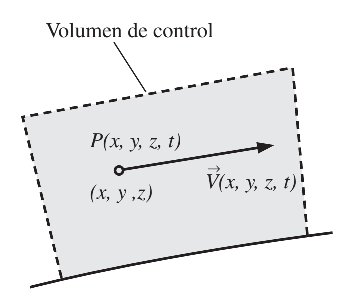


FIGURA 4-3
En la descripción euleriana se definen las variables de un campo, como el campo de presión y el campo de velocidad, en cualquier lugar y cualquier instante.

La diferencia entre estas dos descripciones se aclara más cuando se imagina a una persona que se encuentra en una ribera midiendo sus propiedades. En el enfoque lagrangiano, lanza al río una sonda que se desplaza corriente abajo con el agua. En el euleriano, ancla la sonda en una posición fija en el agua.

Aun cuando existen muchas ocasiones en las que la descripción lagrangiana resulta útil, con frecuencia la euleriana es más conveniente para las aplicaciones de la mecánica de fluidos. Además, en general, las mediciones experimentales se ajustan más a la descripción euleriana. Por ejemplo, en un túnel de viento, por lo general se colocan las sondas de velocidad y de presión en una ubicación fija en el flujo, midiendo $\vec{V}(x, y, z, t)$ o $P(x, y, z, t)$. No obstante, en tanto que las ecuaciones del movimiento en la descripción lagrangiana, siguiendo las partículas de fluido por separado, se conocen bien (por ejemplo, la segunda ley de Newton), las ecuaciones del movimiento del flujo de fluidos no se aprecian con facilidad en la descripción euleriana y deben deducirse con todo cuidado.

EJEMPLO 4-1 Un campo bidimensional estacionario de velocidad

Se da un campo estacionario, incompresible y bidimensional de velocidad por:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j} \quad \textbf{(1)}$$

en donde las coordenadas x y y se dan en metros y la magnitud de la velocidad está en m/s. Un **punto de estancamiento** se define como *un punto en el campo de flujo en donde la velocidad es idénticamente cero*. *a*) Determínese si existen puntos de estancamiento en este campo de flujo y, si es así, ¿en dónde? *b*) Trace un esquema de vectores de velocidad en varias ubicaciones en el dominio, entre $x = -2$ m hasta 2 m y $y = 0$ m hasta 5 m; describa cualitativamente el campo de flujo.

SOLUCIÓN Para el campo dado de velocidad, deben determinarse la (las) ubicación (ubicaciones) del punto (de los puntos) de estancamiento. Se deben trazar varios vectores de velocidad y describirse el campo de velocidad.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** El flujo es bidimensional, lo que implica que no existe componente z de la velocidad y se tiene variación de u o v con z.

Análisis *a*) Dado que $\vec{V}$ es un vector, *todos* sus componentes deben ser iguales a cero para que el propio $\vec{V}$ sea cero. Con la aplicación de la ecuación 4-4 y con igualar la ecuación 1 a cero:

$$\textit{Punto de estancamiento:}\quad \begin{aligned} u &= 0.5 + 0.8x = 0 &&\rightarrow\quad x = -0.625 \text{ m} \\ v &= 1.5 - 0.8y = 0 &&\rightarrow\quad y = 1.875 \text{ m} \end{aligned}$$

Sí. Existe un punto de estancamiento localizado en **$x = -0.625$ m, $y = 1.875$ m.**

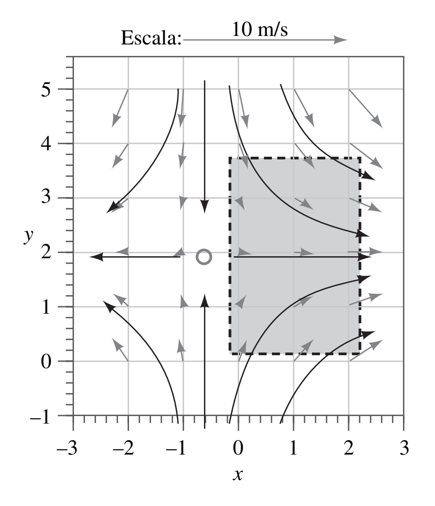


FIGURA 4-4
Vectores de velocidad para el campo de velocidad del ejemplo 4-1. Se muestra la escala mediante la flecha superior y las curvas trazadas con líneas continuas en negro representan las formas aproximadas de algunas líneas de corriente, con base en los vectores de velocidad calculados. El punto de estancamiento está indicado por el círculo azul. La región sombreada representa una parte del campo de flujo que puede ser una aproximación del flujo hacia una toma (Fig. 4-5).

b) Las componentes *x* y *y* de la velocidad se calculan a partir de la ecuación 1 para varias localizaciones (*x*, *y*) en el rango especificado. Por ejemplo, en el punto (x = 2 m, y = 3 m), u = 2.10 m/s y v = −0.900 m/s. La magnitud de la velocidad (la rapidez) en ese punto es 2.28 m/s. En éste y en un arreglo de otros lugares, el vector velocidad se construye a partir de sus dos componentes, los resultados se muestran en la figura 4-4. El flujo se puede describir como flujo de punto de estancamiento, en el cual el flujo entra desde arriba y abajo y se dispersa hacia la derecha e izquierda en torno a una recta horizontal de simetría en y = 1.875 m. El punto de estancamiento del inciso a) está indicado en la figura 4-4 mediante el círculo gris.

Si se observa con atención la región sombreada de la figura 4-4, este campo de flujo modela un flujo convergente y en aceleración de la izquierda hacia la derecha. Este tipo de flujo se podría encontrar, por ejemplo, cerca de la toma sumergida de boca acampanada de una presa hidroeléctrica (Fig. 4-5). La parte útil del campo dado de velocidad puede concebirse como una aproximación de primer orden de la parte sombreada del campo físico de flujo de la figura 4-5.

Discusión Se puede verificar con base en el material del capítulo 9 que este campo de flujo es físicamente válido porque satisface la ecuación diferencial para la conservación de la masa.

Campo de aceleraciones

El lector debe recordar de su estudio de la termodinámica, las leyes fundamentales de conservación (como la conservación de la masa y la primera ley de la termodinámica) se expresan para un *sistema* de masa fija (también llamado *sistema cerrado*). En los casos en donde el análisis de un *volumen de control* (también conocido como *sistema abierto*) es más conveniente que el análisis de sistemas, es necesario volver a escribir estas leyes fundamentales en formas aplicables al volumen de control. El mismo principio se aplica aquí. De hecho, existe una analogía directa entre los sistemas en comparación con los volúmenes de control, en la termodinámica; y las descripciones lagrangianas en comparación con las eulerianas, en la dinámica de fluidos. Las ecuaciones del movimiento para el flujo de fluidos (como la segunda ley de Newton) se escriben para una masa fija, tomado aquí como una pequeña parcela de fluido, a la cual se le da el nombre de **partícula de fluido** o **partícula material.** Si fuera a seguirse una partícula particular de fluido conforme se desplaza en todas direcciones en el flujo, se estaría empleando la descripción lagrangiana y las ecuaciones del movimiento serían directamente aplicables. Por ejemplo, se definiría la ubicación de la partícula en el espacio en términos de un **vector de posición material** ($x_{\text{partícula}}(t)$, $y_{\text{partícula}}(t)$, $z_{\text{partícula}}(t)$). Sin embargo, se necesita algo de manipulación matemática para convertir las ecuaciones del movimiento en formas aplicables para la descripción euleriana.

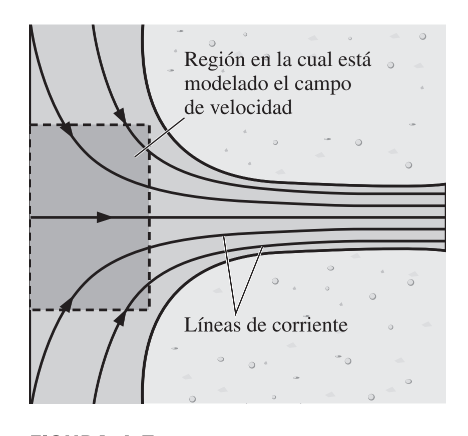


FIGURA 4-5
Campo de flujo cerca de la toma en forma de una boquilla acampanada de una presa hidroeléctrica; se puede usar una parte del campo de velocidad del ejemplo 4-1 como una aproximación de primer orden de este campo físico de flujo. La región sombreada corresponde a la región sombreada de la figura 4-4.

Por ejemplo, considérese la segunda ley de Newton aplicada a la partícula mencionada:

Segunda ley de Newton:
$$\vec{F}_{\text{partícula}} = m_{\text{partícula}}\vec{a}_{\text{partícula}} \tag{4-5}$$

donde $\vec{F}_{\text{partícula}}$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula de fluido, $m_{\text{partícula}}$ es su masa y $\vec{a}_{\text{partícula}}$ es su aceleración (Fig. 4-6). Por definición, la aceleración de la partícula de fluido es la derivada respecto al tiempo de la velocidad de la misma:

Aceleración de una partícula de fluido:
$$\vec{a}_{\text{partícula}} = \frac{d\vec{V}_{\text{partícula}}}{dt} \tag{4-6}$$

Sin embargo, en cualquier instante t, la velocidad de la partícula es igual al valor local del *campo* de velocidad en la ubicación ($x_{\text{partícula}}(t)$, $y_{\text{partícula}}(t)$,

$z_{\text{partícula}}(t)$) de la misma, ya que, por definición, la partícula de fluido se desplaza con el propio fluido. En otras palabras, $\vec{V}_{\text{partícula}}(t) \equiv \vec{V}(x_{\text{partícula}}(t),\, y_{\text{partícula}}(t),\, z_{\text{partícula}}(t),\, t)$. Por lo tanto, para tomar la derivada respecto del tiempo en la ecuación 4-6, debe aplicarse la *regla de la cadena*, ya que la variable dependiente ($\vec{V}$) es función de *cuatro* variables independientes, ($x_{\text{partícula}}$, $y_{\text{partícula}}$, $z_{\text{partícula}}$ y t),

$$\vec{a}_{\text{partícula}} = \frac{d\vec{V}_{\text{partícula}}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}(x_{\text{partícula}}, y_{\text{partícula}}, z_{\text{partícula}}, t)}{dt}$$
$$= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_{\text{partícula}}}\frac{dx_{\text{partícula}}}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y_{\text{partícula}}}\frac{dy_{\text{partícula}}}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z_{\text{partícula}}}\frac{dz_{\text{partícula}}}{dt} \qquad \textbf{(4-7)}$$

En la ecuación 4-7, ∂ es el **operador de derivada parcial** y d es el **operador de derivada total**. Considérese el segundo término del segundo miembro de la ecuación 4-7. Puesto que la aceleración está definida como la que *corresponde a una partícula de fluido* (descripción lagrangiana), la razón de cambio de la posición x de la partícula respecto al tiempo es $dx_{\text{partícula}}/dt = u$ (Fig. 4-7), en donde u es la componente x del vector velocidad definido por la ecuación 4-4. De manera análoga, $dy_{\text{partícula}}/dt = v$ y $dz_{\text{partícula}}/dt = w$. Además, en cualquier instante que se esté considerando, el vector de posición material ($x_{\text{partícula}}$, $y_{\text{partícula}}$, $z_{\text{partícula}}$) de la partícula de fluido en el marco de referencia lagrangiano es igual al vector de posición (x, y, z) en el marco euleriano. La ecuación 4-7 queda:

$$\vec{a}_{\text{partícula}}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \qquad \textbf{(4-8)}$$

donde también se usó (obvio) de que $dt/dt = 1$. Por último, en cualquier instante t, el campo de aceleración de la ecuación 4-3 debe ser igual a la aceleración de la partícula de fluido que llegue a ocupar la ubicación (x, y, z) en ese instante t, ya que, por definición, la partícula de fluido se está acelerando con el flujo del fluido. De donde, *se puede reemplazar* $\vec{a}_{\text{partícula}}$ con $\vec{a}(x, y, z, t)$ *en las ecuaciones 4-7 y 4-8 para realizar la transformación del marco de referencia lagrangiano al euleriano*. En forma vectorial, la ecuación 4-8 se puede escribir como:

Aceleración de una partícula de fluido expresada como una variable de campo:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} \qquad \textbf{(4-9)}$$

donde $\vec{\nabla}$ es el **operador gradiente** u **operador nabla**, un operador vectorial que se define en coordenadas cartesianas como:

Gradiente u operador nabla:
$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \textbf{(4-10)}$$

Entonces, en coordenadas cartesianas, las componentes del vector de aceleración son:

Coordenadas cartesianas:
$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \qquad \textbf{(4-11)}$$
$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

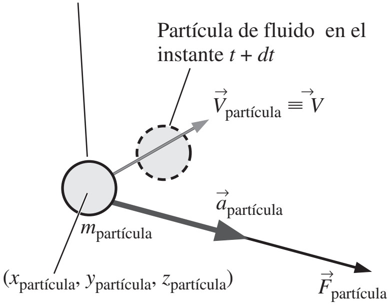


FIGURA 4-6
Segunda ley de Newton aplicada a una partícula de fluido; el vector de aceleración (flecha grs oscuro) está en la misma dirección que la del vector de fuerza (flecha negra), pero el vector de velocidad (flecha gris claro) puede actuar en una dirección diferente.

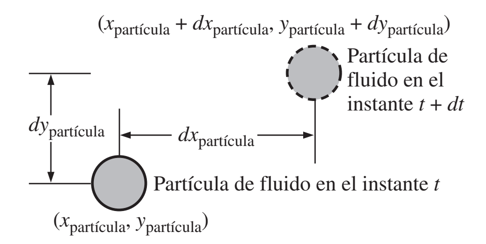


FIGURA 4-7
Cuando se sigue una partícula de fluido, la componente x de la velocidad, u, se define como $dx_{\text{partícula}}/dt$. De manera análoga, $v = dy_{\text{partícula}}/dt$ y $w = dz_{\text{partícula}}/dt$. Por sencillez, aquí se muestra el movimiento sólo en dos dimensiones.

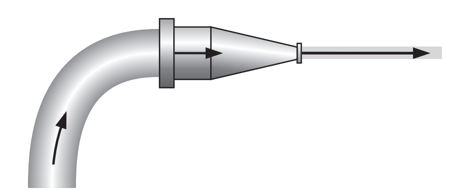


FIGURA 4-8
El flujo de agua por la boquilla de una manguera de jardín ilustra que las partículas de un fluido se pueden acelerar, inclusive en un flujo estacionario. En este ejemplo, la velocidad de salida del agua es mucho más elevada que la del agua en la manguera, lo que implica que las partículas del fluido se han acelerado, aun cuando el flujo sea estacionario.

El primer término de la ecuación 4-9, $\partial\vec{V}/\partial t$, se llama **aceleración local** y es diferente de cero sólo para los flujos no estacionarios. El término, $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$, recibe el nombre de **aceleración convectiva**; *este término puede ser diferente de cero inclusive para los flujos estacionarios*. Explica el efecto de la partícula de fluido que se desplaza (en advección o en convección) hacia una nueva ubicación en el flujo, en donde el campo de velocidad es diferente. Por ejemplo, considere el flujo estacionario de agua por la boquilla de una manguera de jardín (Fig. 4-8). En el marco de referencia euleriano, se define como *estacionario* cuando las propiedades en cualquier punto en el campo de flujo no cambian respecto al tiempo. La velocidad a la salida de la boquilla es mayor de la que se tiene en la entrada de ella, resulta claro que las partículas se aceleran, aun cuando el flujo es estacionario. La aceleración es diferente de cero por la presencia de los términos de aceleración convectiva en la ecuación 4-9. Nótese que aun cuando el flujo es estacionario desde el punto de vista de un observador en el marco de referencia euleriano, *no* lo es desde el marco de referencia lagrangiano en movimiento con una partícula de fluido que entra a la boquilla y se acelera a medida que pasa por ella.

EJEMPLO 4-2 **Aceleración de una partícula de fluido en una boquilla**

Para lavar su automóvil Nadia usa una boquilla similar a la que se ilustra en la figura 4-8. La boquilla tiene 3.90 in (0.325 ft) de largo, con un diámetro de entrada de 0.420 in (0.0350 ft) y uno de salida de 0.182 in (véase la figura 4-9). El gasto volumétrico por la manguera de jardín (y a través de la boquilla) es $\dot{V}$ = 0.841 gal/min (0.00187 ft^3/s), y el flujo es estacionario. Estímese la magnitud de la aceleración de una partícula de fluido que pasa a lo largo de la línea central de la boquilla.

SOLUCIÓN Se debe estimar la aceleración siguiendo a una partícula de fluido que se desplaza a lo largo de la línea central de una boquilla.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** La dirección x se toma a lo largo de la línea central de la boquilla. **3** Por simetría, $v = w = 0$ a lo largo de la línea central, pero u aumenta a lo largo de la boquilla.
Análisis El flujo es estacionario, de modo que el lector puede sentirse tentado a decir que la aceleración es cero. Sin embargo, aun cuando la aceleración local $\partial\vec{V}/\partial t$ es idénticamente cero para este campo de flujo estacionario, la aceleración convectiva $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$ *no* es cero. Primero calcule la componente x promedio de la velocidad en la entrada y la salida de la boquilla, divida el gasto volumétrico entre el área de la sección transversal:

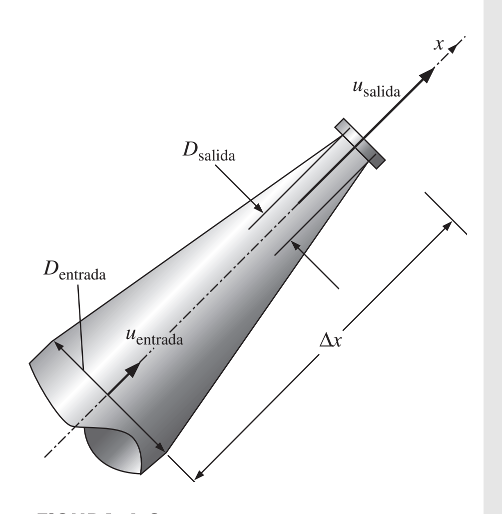


FIGURA 4-9
Flujo del agua por la boquilla del ejemplo 4-2.

Velocidad de entrada:

$$u_{entrada} \cong \frac{\dot{V}}{A_{entrada}} = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2_{entrada}} = \frac{4(0.00187\ ft^3/s)}{\pi(0.0350\ ft)^2} = 1.95\ ft/s$$

De manera análoga, la velocidad promedio de salida es u_{salida} = 10.4 ft/s. Ahora se calculará la aceleración de dos maneras con resultados equivalentes. Primero se calcula un simple valor promedio de la aceleración en la dirección x, con base en el cambio en la velocidad dividido entre una estimación del **tiempo de residencia** de una partícula en la boquilla, $\Delta t = \Delta x/u_{prom}$ (Fig. 4-10). Por la definición fundamental de aceleración como la razón de cambio de la velocidad,

Método A:
$$a_x \cong \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_{salida} - u_{entrada}}{\Delta x/u_{promedio}} = \frac{u_{salida} - u_{entrada}}{2\ \Delta x/(u_{salida} + u_{entrada})} = \frac{u^2_{salida} - u^2_{entrada}}{2\ \Delta x}$$

En el segundo método se hace uso de la ecuación para las componentes del campo de aceleración, en coordenadas cartesianas, ecuación 4-11:

Método B:
$$a_x = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{0 \text{ Estacionario}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{0,\ v = 0 \text{ a lo largo de la línea central}} + \underbrace{w\frac{\partial u}{\partial z}}_{0,\ w = 0 \text{ a lo largo de la línea central}} \cong u_{\text{prom}}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Aquí se ve que sólo un término convectivo es diferente de cero. Se obtiene una aproximación de la velocidad promedio a través de la boquilla como el promedio de las velocidades de entrada y de salida y se usa una **aproximación por diferencia finita de primer orden** (Fig. 4-11) para el valor promedio de la derivada $\partial u/\partial x$ a lo largo de la línea central de la propia boquilla:

$$a_x \cong \frac{u_{\text{salida}} + u_{\text{entrada}}}{2}\,\frac{u_{\text{salida}} - u_{\text{entrada}}}{\Delta x} = \frac{u^2_{\text{salida}} - u^2_{\text{entrada}}}{2\,\Delta x}$$

El resultado del método B es idéntico al del A. La sustitución de los valores dados conduce a:

Aceleración axial:

$$a_x \cong \frac{u^2_{\text{salida}} - u^2_{\text{entrada}}}{2\,\Delta x} = \frac{(10.4 \text{ ft/s})^2 - (1.95 \text{ ft/s})^2}{2(0.325 \text{ ft})} = \mathbf{160\ ft/s^2}$$

Discusión ¡Las partículas del fluido se aceleran a través de la boquilla casi cinco veces la aceleración de la gravedad (casi cinco g)! Este sencillo ejemplo ilustra con claridad que la aceleración de una partícula de fluido puede ser diferente de cero, inclusive en el flujo estacionario. Note que, en realidad, la aceleración es una **función de punto**, en tanto que se ha estimado una simple aceleración promedio a lo largo de toda la boquilla.

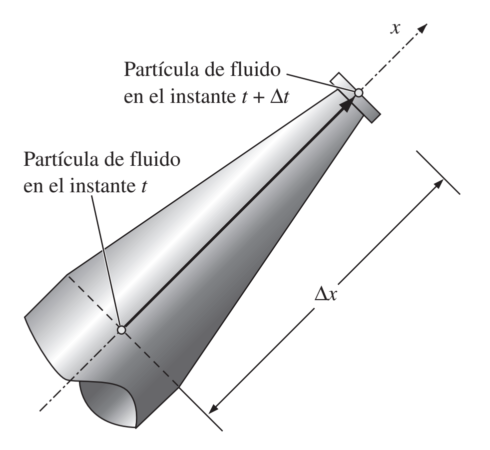


FIGURA 4-10
El *tiempo de residencia* Δt se define como el tiempo que tarda una partícula de fluido en pasar por la boquilla, desde la entrada hasta la salida (distancia Δx).

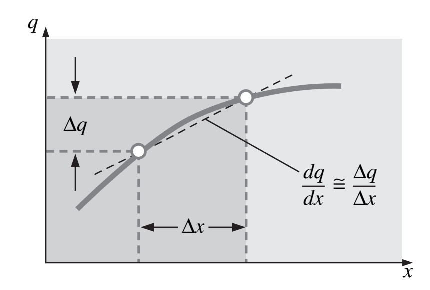


FIGURA 4-11
Una *aproximación por diferencia finita de primer orden* para la derivada dq/dx es sencillamente el cambio en la variable dependiente (q) dividido entre el cambio en la variable independiente (x).

Derivada material

Al operador derivada total d/dt de la ecuación 4-9 se le da un nombre especial, el de **derivada material**; algunos autores le asignan una notación especial, D/Dt, para hacer resaltar que se forma cuando sigue una *partícula de fluido a medida que se mueve por el campo de flujo* (Fig. 4-12). Otros nombres para derivada material incluyen **total**, **de partícula**, **lagrangiana**, **euleriana** y **sustancial**.

Derivada material:
$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \tag{4-12}$$

Cuando se aplica la derivada material de la ecuación 4-12 al campo de velocidad, el resultado es el campo de aceleración, según se expresa por la ecuación 4-9, a la cual, en consecuencia, a veces se le da el nombre de **aceleración material**.

Aceleración material:
$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \tag{4-13}$$

La ecuación 4-12 se puede aplicar también a otras propiedades de los fluidos, además de la velocidad, tanto escalares como vectoriales. Por ejemplo, la derivada material de la presión se puede escribir como:

Derivada material de la presión:
$$\frac{DP}{Dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})P \tag{4-14}$$

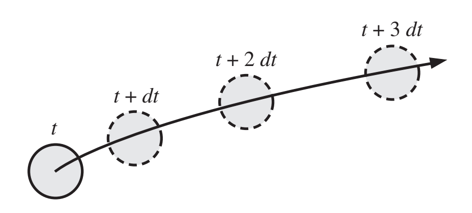


FIGURA 4-12
La derivada material D/Dt se define cuando sigue una partícula de fluido conforme se desplaza por todo el campo de flujo. En esta ilustración, la partícula de fluido se está acelerando hacia la derecha a medida que se desplaza hacia arriba y hacia la derecha.

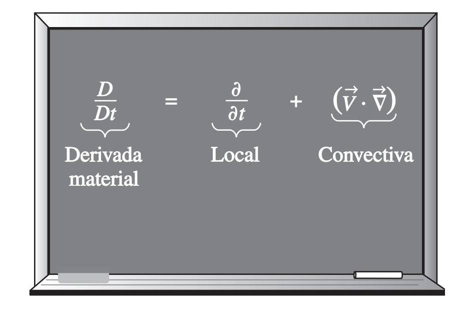


FIGURA 4-13
La derivada material *D/Dt* se compone de una parte *local* o *no-estacionaria* y una parte *convectiva*.

La ecuación 4-14 representa la razón de cambio respecto al tiempo de la presión, siguiendo una partícula de fluido a medida que se desplaza por el flujo y contiene tanto componentes locales (no estacionarias) como convectivas (Fig. 4-13).

EJEMPLO 4-3 Aceleración material de un campo estacionario de velocidad

Considere el campo bidimensional estacionario e incompresible de velocidad del Ejemplo 4-1. *a*) Calcule la aceleración material en el punto (x = 2 m, y = 3 m). *b*) Trace un esquema de los vectores de aceleración material en el mismo arreglo de valores x y y como en el ejemplo 4-1.

SOLUCIÓN Para el campo de velocidad dado, debe calcularse el vector de aceleración material en un punto particular y trazar la gráfica en un arreglo de ubicaciones en campo de flujo.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** El flujo es bidimensional, lo que implica que no hay componente z de la velocidad y no hay variación de u o v con z.
Análisis *a*) Se usa el campo de velocidad de la ecuación 1 del ejemplo 4-1 y la ecuación para las componentes de la aceleración material en coordenadas cartesianas (Ec. 4-11), se escriben expresiones para las dos componentes diferentes de cero del vector aceleración:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$= 0 + (0.5 + 0.8x)(0.8) + (1.5 - 0.8y)(0) + 0 = (0.4 + 0.64x)\ \text{m/s}^2$$

y

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \underbrace{v\frac{\partial v}{\partial y}} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$= 0 + (0.5 + 0.8x)(0) + (1.5 - 0.8y)(-0.8) + 0 = (-1.2 + 0.64y)\ \text{m/s}^2$$

En el punto (x = 2 m, y = 3 m), $\boldsymbol{a_x}$ **= 1.68 m/s²** **y** $\boldsymbol{a_y}$ **= 0.720 m/s².**
b) Las ecuaciones del inciso *a*) se aplican a un arreglo de valores x y y en el dominio del flujo, dentro de los límites dados, y en la figura 4-14 se tienen las gráficas de los vectores de aceleración.
Discusión El campo de aceleración es diferente de cero, aun cuando el flujo es estacionario. Arriba del punto de estancamiento (arriba de y = 1.875 m), los vectores de aceleración trazados en la figura 4-14 apuntan hacia arriba, aumentan en magnitud cuando se alejan de ese punto. A la derecha del punto de estancamiento (a la derecha de x = −0.625 m), los vectores de aceleración apuntan hacia la derecha, aumentan una vez más en magnitud cuando se alejan del punto. Esto concuerda de manera cualitativa con los vectores de velocidad de la figura 4-14 y las líneas de corriente trazadas en esa misma figura; es decir, en la parte superior derecha del campo de flujo, las partículas de fluido aceleran en la dirección superior derecha y, por lo tanto, se tuercen en contrasentido al movimiento de las manecillas del reloj, debido a la **aceleración centrípeta** hacia la derecha superior. El flujo debajo de y = 1.875 m hacia la derecha superior. El flujo debajo de y = 1.875 m es una imagen especular del que se desarrolla arriba de esta recta de simetría, y el flujo a la izquierda de x = −0.625 m es una imagen especular de aquel que se desarrolla a la derecha de esta recta de simetría.

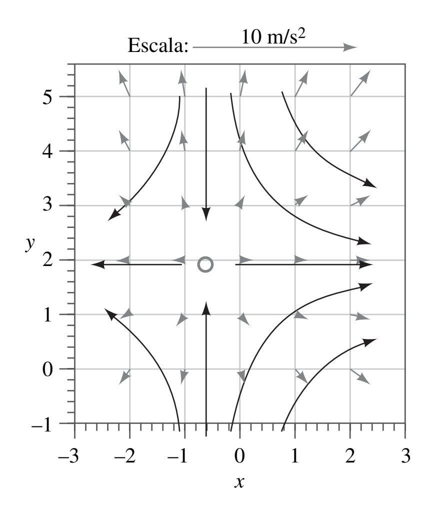


FIGURA 4-14
Vectores de aceleración para el campo de velocidad de los ejemplos 4-1 y 4-3. La escala se muestra por la flecha superior y las curvas trazadas con línea continua en negro representan las formas aproximadas de algunas líneas de corriente, basadas en los vectores de velocidad calculados (véase la figura 4-4). El punto de estancamiento está indicado por el círculo gris.

4-2 ▪ FUNDAMENTOS DE VISUALIZACIÓN DEL FLUJO

El estudio cuantitativo de la dinámica de fluidos exige matemáticas avanzadas; sin embargo, se puede aprender mucho con la **visualización del flujo**: el examen visual de las características del campo de flujo. La visualización del flujo es útil no sólo en los experimentos físicos (Fig. 4-15), sino también en las resoluciones *numéricas* (**dinámica computacional de fluidos**, **CFD**, *computational fluid dynamics*). De hecho, precisamente lo primero que un ingeniero hace cuando utiliza CFD, después de obtener una solución numérica, es simular alguna forma de visualización del flujo, de modo que pueda ver la "imagen completa", en vez de sólo una lista de números y datos cuantitativos. ¿Por qué? Porque la mente humana está diseñada para procesar con rapidez una cantidad increíble de información visual; como se dice: una imagen vale más que mil palabras. Existen numerosos tipos de patrones de flujo que se pueden visualizar, físicamente (experimentalmente) o en forma computacional.

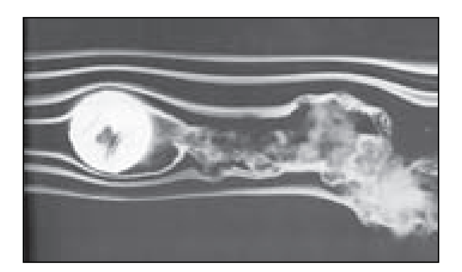


FIGURA 4-15
Pelota de béisbol girando con rapidez. El finado F. N. M. Brown dedicó muchos años para desarrollar y usar visualización mediante humo en túneles de viento en la Universidad de Notre Dame. En la fotografía, la velocidad del flujo es alrededor de 77 ft/s y la pelota se hace girar a 630 rpm.
Fotografía cortesía de T. J. Mueller.

Líneas de corriente y tubos de corriente

> Una **línea de corriente** es una curva que, en todas partes, es tangente al vector velocidad local instantáneo.

Las líneas de corriente son útiles como indicadores de la dirección instantánea del movimiento del fluido en todo el campo de flujo. Por ejemplo, las regiones de recirculación del flujo y de separación de un fluido de una pared sólida se identifican con facilidad por el patrón de líneas de corriente. Las líneas de corriente no se pueden observar directamente de manera experimental, excepto en los campos de flujo estacionario, en los cuales coinciden con las líneas de trayectoria y las líneas de traza, que se estudian a continuación. Sin embargo, desde el punto de vista matemático, se puede escribir una expresión sencilla para una línea de corriente con base en su definición.

Considere una longitud infinitesimal de arco, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ a lo largo de una línea de corriente; $d\vec{r}$ debe ser paralelo al vector velocidad local $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ por definición de línea de corriente. Mediante sencillos argumentos geométricos, con el uso de triángulos semejantes, se sabe que las componentes de $d\vec{r}$ deben ser proporcionales a las de $\vec{V}$ (Fig. 4-16). De donde:

Ecuación para una línea de corriente:
$$\frac{dr}{V} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \tag{4-15}$$

donde dr es la magnitud de $d\vec{r}$ y V es la velocidad, la magnitud de $\vec{V}$. En la figura 4-16, la ecuación 4-15 se ilustra en dos dimensiones por sencillez. Para un campo conocido de velocidad, se puede integrar la ecuación 4-15 con el fin de obtener ecuaciones para las líneas de corriente. En dos dimensiones, (x, y), (u, v), se obtiene la ecuación diferencial siguiente:

Línea de corriente en el plano:
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{a lo largo de una línea de corriente}} = \frac{v}{u} \tag{4-16}$$

En algunos casos sencillos, la ecuación 4-16 se puede resolver en forma analítica; en el caso general, debe resolverse en forma numérica. En cualquiera de los dos casos aparece una constante arbitraria de integración y la *familia* de curvas que satisfacen la ecuación 4-16 representa las líneas de corriente del campo de flujo.

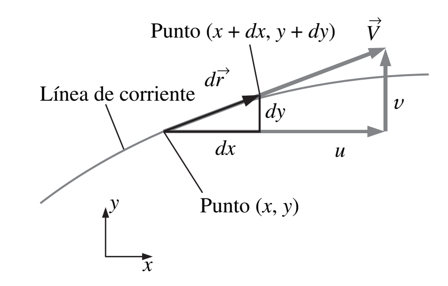


FIGURA 4-16
Para el flujo bidimensional en el plano xy, la longitud de arco $d\vec{r} = (dx, dy)$ a lo largo de una *línea de corriente* es tangente en todo punto al vector velocidad instantánea local $\vec{V} = (u, v)$.

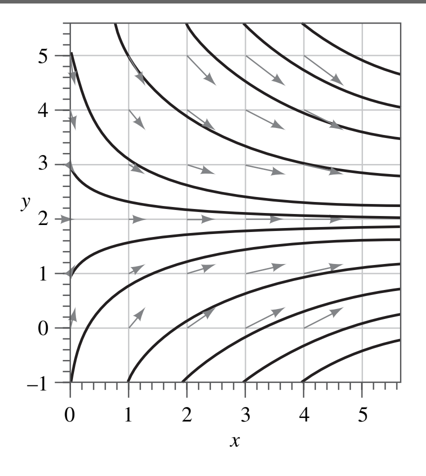


FIGURA 4-17
Líneas de corriente (curvas de línea continua en negro) para el campo de velocidad del ejemplo 4-4; están sobrepuestos los vectores de velocidad (flechas grises) para fines de comparación.



EJEMPLO 4-4 **Líneas de corriente en el plano *xy*; una solución analítica**

Para el campo bidimensional estacionario e incompresible de velocidad del ejemplo 4-1, trace la gráfica de varias líneas de corriente en la mitad derecha del flujo ($x > 0$) y haga una comparación con los vectores de velocidad trazados en la figura 4-4.

SOLUCIÓN Se debe generar una expresión analítica para las líneas de corriente y trazar su gráfica en el cuadrante superior derecho.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** El flujo es bidimensional, lo que implica que no existe componente z de la velocidad y no se tiene variación de u o v con z.
Análisis En este caso, se puede aplicar la ecuación 4-16; de donde, a lo largo de una línea de corriente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1.5 - 0.8y}{0.5 + 0.8x}$$

Esta ecuación diferencial se resuelve por separación de variables:

$$\frac{dy}{1.5 - 0.8y} = \frac{dx}{0.5 + 0.8x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{1.5 - 0.8y} = \int \frac{dx}{0.5 + 0.8x}$$

Después de algo de álgebra (la cual se deja al lector), se despeja y como función de x, a lo largo de una línea de corriente:

$$y = \frac{C}{0.8(0.5 + 0.8x)} + 1.875$$

donde C es una constante de integración a la cual se le puede dar varios valores para trazar la gráfica de las líneas de corriente. En la figura 4-17 se muestran varias de estas líneas del campo de flujo.
Discusión Se sobrepusieron los vectores de velocidad de la figura 4-4, sobre las líneas de corriente de la figura 4-17; la concordancia es excelente, en el sentido de que los vectores de velocidad señalan, en todo punto, tangentes en las líneas. Nótese que la magnitud de la velocidad no se puede determinar directamente a partir sólo de las líneas de corriente.

Un **tubo de corriente** consta de un haz de líneas de corriente (Fig. 4-18), de forma muy semejante en la que un cable de comunicaciones consta de un haz de cables de fibras ópticas. Dado que las líneas de corriente son en todo punto paralelas a la velocidad local, por definición un fluido no puede cruzar una línea de corriente. Por extensión, *el fluido que se encuentra dentro de un tubo de corriente debe permanecer allí y no puede cruzar la frontera de éste*. Se debe tener presente que tanto las líneas de corriente como los tubos de corriente son cantidades instantáneas, definidas en un instante en particular según el campo de velocidad en ese instante. En un flujo *no estacionario*, el patrón de las líneas de corriente puede cambiar de manera significativa con el tiempo. Pero, en cualquier instante, el gasto de masa que pasa a través de cualquier rebanada entre dos secciones transversales de un tubo de corriente debe seguir siendo el mismo. Por ejemplo, en una parte convergente de un campo de flujo incompresible, el diámetro del tubo de corriente debe disminuir conforme la velocidad aumenta, a fin de que la masa se conserve (Fig. 4-19*a*). Del mismo modo, el diámetro del tubo de corriente aumenta en las partes divergentes del flujo de fluido incompresible. (Fig. 4-19*b*).

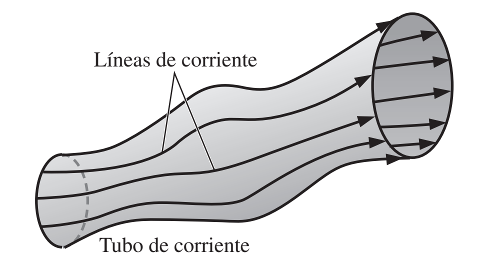


FIGURA 4-18
Un *tubo de corriente* consta de un haz de líneas de corriente.

Líneas de trayectoria

Una **línea de trayectoria** es la trayectoria real recorrida por una partícula de fluido durante algún periodo.

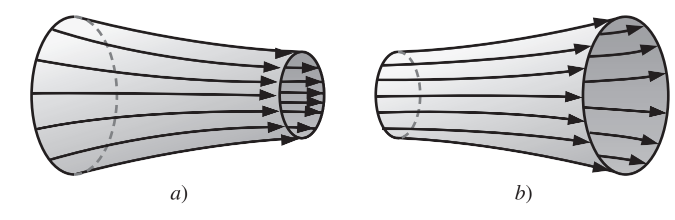


FIGURA 4-19
En un campo de flujo incompresible, un tubo de corriente *a*) disminuye en diámetro a medida que el flujo se acelera o converge y *b*) aumenta en diámetro a medida que el flujo se desacelera o diverge.

Las líneas de trayectoria son los patrones de flujo más fáciles de entender. Una línea de trayectoria es un concepto lagrangiano en el que sencillamente se sigue de una partícula de fluido conforme se desplaza en el campo de flujo (Fig. 4-20). De donde, una línea de trayectoria es lo mismo que el vector de posición material ($x_{\text{partícula}}(t)$, $y_{\text{partícula}}(t)$, $z_{\text{partícula}}(t)$), comentado en la Sección 4-1, al que se le sigue el rastro durante algún intervalo finito. En un experimento físico, el lector puede imaginar una partícula trazadora del fluido marcada de alguna manera —mediante un color o haciéndola que brille— tal que se puede distinguir con facilidad respecto de las partículas circundantes del fluido. Ahora, imagine una cámara con el obturador abierto durante un cierto periodo, $t_{\text{inicio}} < t < t_{\text{fin}}$, en el cual se registra la trayectoria de la partícula; la curva resultante se llama línea de trayectoria. En la figura 4-21, se muestra un ejemplo interesante para el caso de las olas que se desplazan a lo largo de la superficie del agua en un tanque. **Partículas trazadoras**, neutralmente flotantes, están suspendidas en el agua y se toma una fotografía con exposición de tiempo durante un periodo completo de la ola. El resultado son líneas de trayectoria que tienen forma elíptica, que muestran a las partículas de fluido que se mecen hacia arriba y abajo, y hacia delante y atrás, pero regresan a su posición original después de completar un periodo de la ola; no se tiene un movimiento neto hacia delante. El lector puede haber experimentado algo semejante cuando se mece hacia arriba y abajo sobre las olas del océano.

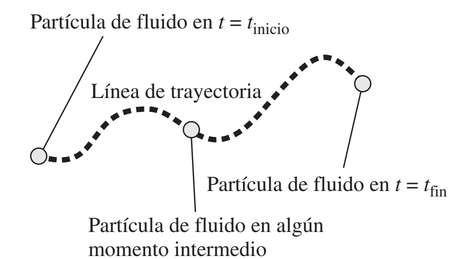


FIGURA 4-20
Se forma una *línea de trayectoria* cuando se sigue la trayectoria real de una partícula de fluido.



FIGURA 4-21
Líneas de trayectoria producidas por partículas trazadoras blancas suspendidas en agua y capturadas por una fotografía con exposición de tiempo; conforme las olas pasan en dirección horizontal, cada partícula se desplaza en una trayectoria elíptica durante el periodo de una ola.
Wallet, A. & Ruellan F. 1950, La Houille Blanche, *5: 483-489. Reproducida con autorización.*

En una técnica experimental moderna conocida como **velocimetría por imagen de partículas** (**PIV,** *particle image velocimetry*, por sus siglas en inglés) se utilizan las líneas de trayectoria de partículas para medir el campo de velocidad sobre un plano en un flujo (Adrian, 1991). (Avances recientes extienden también la técnica a tres dimensiones.) En la PIV, se suspenden diminutas partículas trazadoras en el fluido, de modo muy semejante a cómo se ilustra en la figura 4-21. Sin embargo, el flujo se ilumina por medio de dos destellos (por lo general de un láser, como en la figura 4-22), para producir dos puntos brillantes sobre la película o fotosensor por cada partícula en movimiento. Entonces, se puede inferir tanto la magnitud como la dirección del vector de velocidad en cada ubicación de la partícula, suponiendo que las partículas trazadoras son suficientemente pequeñas como para que se muevan con el fluido. La fotografía digital moderna y la velocidad de respuesta de la computadora han permitido que se pueda realizar la PIV con rapidez suficiente para que también se puedan medir las características *no estacionarias* del campo de flujo. En el capítulo 8 se comenta la PIV con más detalle.

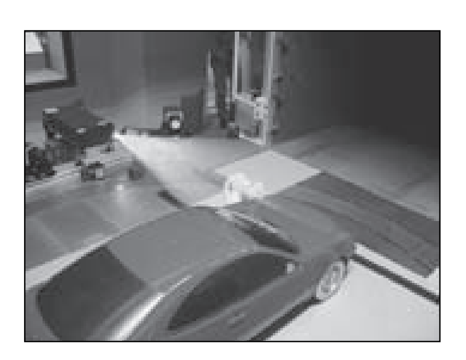


FIGURA 4-22
PIV aplicada a un modelo de automóvil en un túnel de viento.
Cortesía de Dantec Dynamics, Inc. Reproducida con autorización.

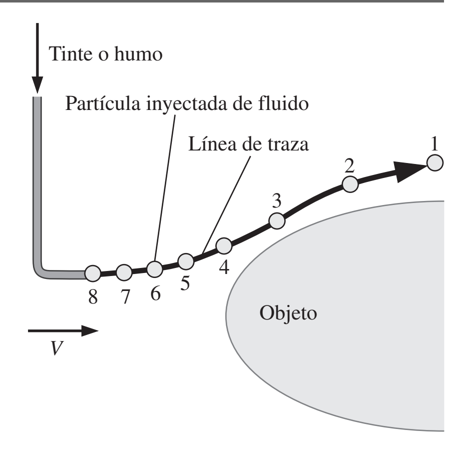


FIGURA 4-23
Se forma una *línea de traza* por la introducción continua de tinte o humo desde un punto en el flujo. Las partículas trazadoras numeradas (1 a 8) se introdujeron de manera secuencial.

También se pueden calcular las líneas de trayectoria en forma numérica para un campo conocido de velocidad. Específicamente, la ubicación de la partícula trazadora se integra sobre el tiempo, desde la ubicación de inicio, $\vec{x}_{\text{inicio}}$ e instante de inicio, t_{inicio} hasta algún instante posterior t.

Ubicación de la partícula trazadora en el instante t:
$$\vec{x} = \vec{x}_{\text{inicio}} + \int_{t_{\text{inicio}}}^{t} \vec{V}\,dt \qquad \textbf{(4-17)}$$

Cuando se calcula la ecuación 4-17 para t entre t_{inicio} y t_{fin}, una gráfica de $\vec{x}(t)$ es la línea de trayectoria de la partícula de fluido durante ese intervalo, como se ilustra en la figura 4-20. Para algunos campos sencillos de flujo, la ecuación 4-17 se puede integrar en forma analítica. Para flujos más complejos, debe llevarse a cabo una integración numérica.

Si el campo de velocidad es estacionario, cada una de las partículas de fluido seguirá líneas de corriente; por tanto, *para el flujo estacionario, las líneas de trayectoria son idénticas a las líneas de corriente*.

Líneas de traza

Una **línea de traza** es el lugar geométrico de las partículas de fluido que han pasado de manera secuencial por un punto prescrito en el flujo.

Las líneas de traza constituyen el patrón de flujo más común generado en un experimento físico. Si se inserta un tubo pequeño en un flujo y se introduce una corriente continua de fluido trazador (tinte en un flujo de agua o humo en flujo de aire), el patrón que se observa es una línea de traza. En la figura 4-23 se muestra un trazador que se inyecta en un flujo libre que contiene un objeto, como el borde delantero de un ala. Los círculos representan partículas separadas que se inyectan con fluido trazador, y que se liberan a intervalos uniformes. A medida que las partículas son forzadas por el objeto a salir de su camino, se aceleran moviéndose a lo largo de la superficie de éste, como lo indica la distancia incrementada entre cada una de esas partículas trazadoras en esa región. La línea de traza se forma al conectar todos los círculos por medio de una curva suave. En los experimentos físicos en un túnel de viento o de agua, el humo o el tinte se inyectan *en forma continua*, no como partículas separadas y, por definición, el patrón resultante de flujo es una línea de traza. En la figura 4-23, la partícula trazadora 1 se liberó un instante anterior al correspondiente de la partícula 2, y así de manera sucesiva. Desde el momento de su inyección en el flujo hasta el instante presente, la ubicación de cada una de las partículas trazadoras se determina por el campo de velocidad alrededor de objeto. Si el flujo es no estacionario, el campo de velocidad cambia y no se puede esperar que la línea de traza resultante se semeje a una de corriente o a una de trayectoria en cualquier instante dado. Sin embargo, *si el flujo es estacionario*, *las líneas de corriente*, *las de trayectoria y las de traza son idénticas* (Fig. 4-24).

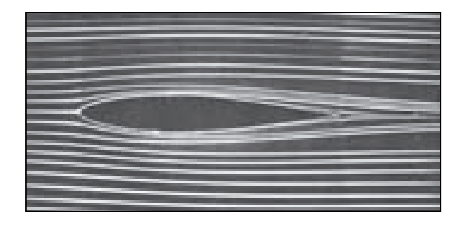


FIGURA 4-24
Líneas de traza producidas por fluido coloreado que se introdujo corriente arriba; como el flujo es estacionario, estas líneas de traza son las mismas que las líneas de corriente y las de trayectoria.
Cortesía de ONERA. Fotografía de Werlé.

A menudo, las líneas de traza se confunden con las de corriente y las de trayectoria. Aun cuando los tres patrones de flujo son idénticos en el flujo estacionario, pueden ser bastante diferentes en el no estacionario. La diferencia principal es que una línea de corriente representa un patrón *instantáneo* de flujo, en un instante dado, en tanto que una de traza y una de trayectoria son patrones de flujo que tienen cierta *edad* y, en consecuencia, una *historia* asociada con ellas. Una línea de traza es una fotografía instantánea de un patrón de flujo *integrado respecto del tiempo* Por otra parte, una línea de trayectoria es la trayectoria de una partícula de flujo *expuesta en el tiempo* durante algún periodo.

La propiedad integrante respecto del tiempo de las líneas de traza se ilustra en forma vívida en un experimento realizado por Cimbala y otros investigadores, reproducido en la figura 4-25. Los autores usaron un **hilo de humo** para visualizar el flujo en un túnel de viento. En operación, el hilo de humo es un delgado alam-

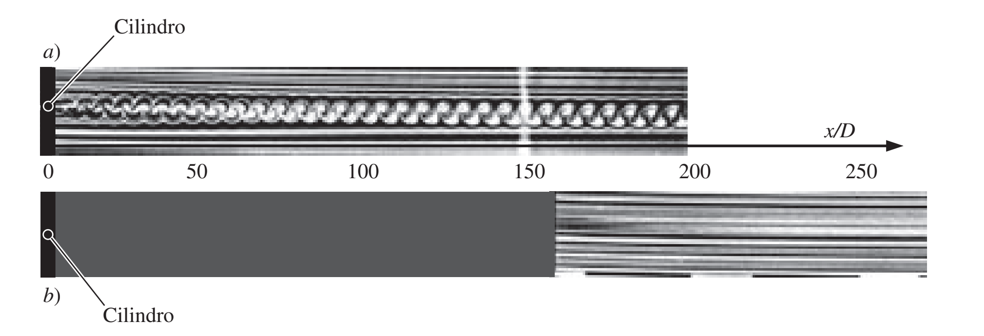


FIGURA 4-25
Líneas de traza formadas por humo que se introdujeron mediante un hilo de humo en dos lugares diferentes en la estela de un cilindro circular: *a*) alambre de humo precisamente corriente abajo del cilindro y *b*) alambre de humo localizado en $x/D = 150$. La naturaleza integrante respecto del tiempo de las líneas de traza se ve con claridad cuando se comparan las dos fotografías.
Fotografías tomadas por John M. Cimbala.

bre vertical que está recubierto con aceite mineral. El aceite forma una fila de bolitas a lo largo del alambre, debido a los efectos de la tensión superficial. Cuando una corriente eléctrica calienta el alambre, cada pequeña bola de aceite produce una línea de traza formada por humo. En la figura 4-25*a*, las líneas de traza se introducen desde un hilo de humo ubicado precisamente corriente abajo de un cilindro circular de diámetro *D* alineado normal al plano de visión. (Cuando se introducen múltiples líneas de traza a lo largo de un ducto, como en la figura 4-25, esto se menciona como **rastra** de líneas de traza.) El número de Reynolds del flujo es $\text{Re} = \rho VD/\mu = 93$. Debido a los **vórtices** no estacionarios derramados en un patrón alternante desde el cilindro, el humo se agrupa en un patrón definido con claridad conocido como **huella de vórtices de Kármán**.

Con base en la figura 4-25*a*, se puede pensar que los vórtices derramados siguen existiendo hasta varios cientos de diámetros corriente abajo del cilindro. Sin embargo, ¡el patrón de línea de traza de esta figura es engañoso! En la figura 4-25*b*, el hilo de humo está colocado 150 diámetros corriente abajo del cilindro. Las líneas de traza resultantes son rectas, lo que indica que los vórtices derramados en realidad han desaparecido a lo largo de esta distancia corriente abajo. En este lugar, el flujo es estacionario y paralelo y no se tienen más vórtices; la difusión viscosa ha causado que vórtices adyacentes de signo opuesto se cancelen entre sí a partir de la distancia superior a 100 diámetros de cilindro aproximadamente. Los patrones de la figura 4-25*a* cerca de $x/D = 150$ son simplemente *recuerdos* de la huella de vórtices que existió corriente arriba. Las líneas de traza de la figura 4-25*b*, sin embargo, muestran las correctas características de flujo en esta región. Las líneas de traza generadas en $x/D = 150$ son idénticas a las de corriente o a las de trayectoria en esa región del flujo —líneas rectas, casi horizontales— porque allí el flujo es estacionario.

Para un campo conocido de velocidad, una línea de traza se puede calcular en forma numérica, aun con cierta dificultad. Es necesario seguir las trayectorias de flujo continuo de partículas trazadoras desde el instante de su inyección en el flujo hasta el instante actual, usando la ecuación 4-17. Matemáticamente se integra la ubicación de la partícula trazadora sobre el tiempo, desde el instante de su inyección $t_{\text{inyección}}$, hasta el instante actual, t_{actual}. La ecuación 4-17 queda:

Ubicación integrada de la partícula trazadora:
$$\vec{x} = \vec{x}_{\text{inyección}} + \int_{t_{\text{inyección}}}^{t_{\text{actual}}} \vec{V}\, dt \qquad \textbf{(4-18)}$$

En un flujo complejo no estacionario, la integración debe realizarse en forma numérica, ya que el campo de velocidad cambia con el tiempo. Cuando el lugar geométrico de las ubicaciones de las partículas trazadoras en $t = t_{\text{actual}}$ se conectan por medio de una curva suave, el resultado es la línea de traza deseada.

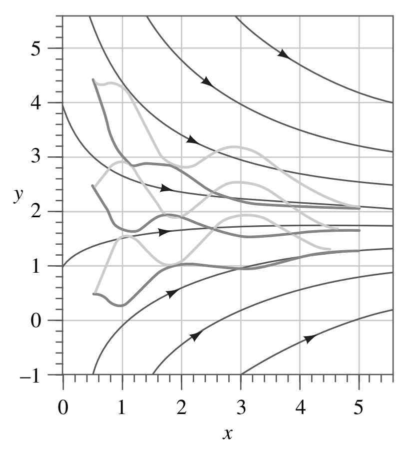


FIGURA 4-26
Líneas de corriente, de trayectoria y de traza para el campo oscilante de velocidad del ejemplo 4-5. Las líneas de traza y las de trayectoria son onduladas, debido a su historia integrada en el tiempo, pero las de corriente no lo son porque representan una fotografía instantánea del campo de velocidad.

EJEMPLO 4-5 **Comparación de los patrones de flujo en un flujo no estacionario**

Se da un campo de velocidad, bidimensional *no estacionario*, e incompresible, por:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 + 2.5\,\text{sen}(\omega t) - 0.8y)\vec{j} \quad \textbf{(1)}$$

donde la frecuencia angular ω es igual a 2π rad/s (una frecuencia física de 1 Hz). Este campo de velocidad es idéntico al de la ecuación 1 del ejemplo 4-1, excepto por el término periódico adicional en la componente v de la velocidad. De hecho, dado que el periodo de oscilación es de 1 s, cuando el tiempo t es cualquier múltiplo entero de $\frac{1}{2}$ s ($t = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ s), el término en seno de la ecuación 1 es cero y el campo de velocidad es instantáneamente idéntico al del ejemplo 4-1. Desde el punto de vista físico, se concibe un flujo entrante a una toma grande de forma acampanada que es oscilante hacia arriba y hacia abajo con una frecuencia de 1 Hz. Considere dos ciclos completos del flujo, de $t = 0$ s hasta $t = 2$ s. Compare las líneas de corriente instantáneas en $t = 2$ s con las líneas de trayectoria y las de traza generadas durante el periodo de $t = 0$ s hasta $t = 2$ s.

SOLUCIÓN Se deben generar las líneas de corriente, las de trayectoria y las de traza y compararse, para el campo no estacionario de velocidad dado.

Hipótesis **1** El flujo es incompresible. **2** El flujo es bidimensional, lo que implica que no existe componente z de la velocidad y no se tiene variación de u o v con z.

Análisis Las líneas instantáneas de corriente en $t = 2$ s son idénticas a las de la figura 4-17 y en la figura 4-26 se ha vuelto a trazar la gráfica de varias de ellas. Para simular las líneas de trayectoria, se utiliza la técnica de integración numérica de Runge-Kutta para marchar en el tiempo, desde $t = 0$ s hasta $t = 2$ s, trazando la trayectoria de las partículas de fluido liberadas en tres lugares: ($x = 0.5$ m, $y = 0.5$ m), ($x = 0.5$ m, $y = 2.5$ m) y ($x = 0.5$ m, $y = 4.5$ m). En la figura 4-26 se muestran estas líneas de trayectoria, junto con las de corriente. Por último, las líneas de traza se simulan cuando siguen las trayectorias de *muchas* partículas trazadoras de fluido, liberadas en los tres lugares dados, en instantes entre $t = 0$ s y $t = 2$ s, y conectando el lugar geométrico de sus posiciones en $t = 2$ s. Las gráficas de estas líneas de traza también se tienen en la figura 4-26.

Discusión Supuesto que el flujo es no estacionario, las líneas de corriente, las de trayectoria y las de traza no coinciden. De hecho, difieren de manera significativa entre sí. Note que las líneas de traza y las de trayectoria son onduladas, debido a la ondulante componente v de la velocidad. Se han tenido dos periodos completos de oscilación entre $t = 0$ s y $t = 2$ s, como se puede verificar con una observación cuidadosa de las líneas de trayectoria y de traza. Las líneas de corriente no tienen esas ondulaciones, puesto que no tienen historia; representan una fotografía instantánea del campo de velocidad en $t = 2$ s.

Líneas fluidas

Una **línea fluida (línea de tiempo)** es un conjunto de partículas adyacentes de fluido que se marcaron en el mismo instante (anterior).

Las líneas fluidas son particularmente útiles para situaciones en donde se va examinar la uniformidad de un flujo (o la falta de ello). En la figura 4-27 se ilus-

tran las líneas fluidas de un flujo en un canal entre dos paredes paralelas. Debido a la fricción en las paredes, la velocidad del fluido es cero (la condición de no deslizamiento) y el extremo superior e inferior de la línea fluida están anclados en sus lugares de arranque. En regiones del flujo alejadas de las paredes, las partículas marcadas de fluido se mueven a la velocidad local de éste, deformando la línea fluida. En el ejemplo de la figura 4-27, la velocidad en el centro del canal es bastante uniforme, pero las pequeñas desviaciones tienden a amplificarse con el tiempo, conforme se estira la línea fluida. Las líneas fluidas se pueden generar en forma experimental en un canal de agua por medio del uso de un **hilo de burbujas de hidrógeno**. Cuando se produce, durante un intervalo corto, una corriente eléctrica por el alambre catódico, se presenta electrólisis del agua y en la superficie de alambre se forman burbujas diminutas de gas de hidrógeno. Debido a que las burbujas son tan pequeñas, su flotación es casi despreciable y siguen bien el flujo del agua (Fig. 4-28).

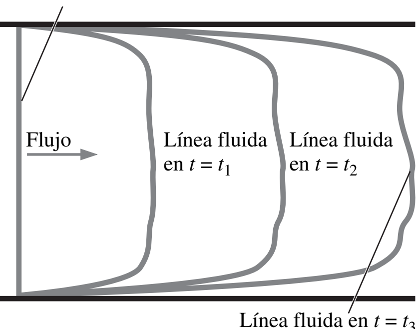


FIGURA 4-27
Las líneas fluidas se forman marcando una línea de partículas de fluido y, a continuación, se observa el movimiento (y la deformación) de esa línea a través del campo de flujo; se muestran las líneas fluidas en $t = 0$, t_1, t_2, y t_3.

Técnicas refractivas de visualización del flujo

Otra categoría de visualización del flujo se basa en la **propiedad refractiva** de las ondas luminosas. Como el lector recordará de lo visto en sus estudios de física, la velocidad de la luz a través de un material puede diferir un tanto de la de otro material, o inclusive en el *mismo* material, si cambia su densidad. Conforme la luz viaja a través de un fluido hacia otro con un índice de refracción diferente, los rayos de luz se desvían (se **refractan**).

Existen dos técnicas básicas de visualización del flujo en las que se utiliza el hecho de que el índice de refracción en el aire (u otros gases) varía con la densidad. Éstas son la técnica de **estrioscopia** y **fotografía por sombras** (Settles, 2001). La **interferometría** es una técnica de visualización que utiliza el *cambio de fase* de la luz cuando pasa a través de aire de densidades variantes, como la base para la visualización del flujo y no se trata en este texto (véase Merzkirch, 1987). Todas estas técnicas son útiles para visualizar el flujo en campos del flujo en donde la densidad cambia de un lugar en el flujo a otro, como los flujos de convección natural (las diferencias de temperatura causan las variaciones en la densidad), los flujos mezclados (las especies de fluidos causan las variaciones en la densidad) y los flujos supersónicos (las ondas de choque y las de expansión causan las variaciones en la densidad).

A diferencia de las visualizaciones del flujo en las que intervienen las líneas de traza, las de trayectoria y las líneas fluidas, en los métodos de estrioscopia y fotografía por sombras no se necesita inyectar un trazador visible (humo o tinte). En lugar de ello, las diferencias en la densidad y la propiedad refractiva de la luz proporcionan los medios necesarios para visualizar regiones de interés en

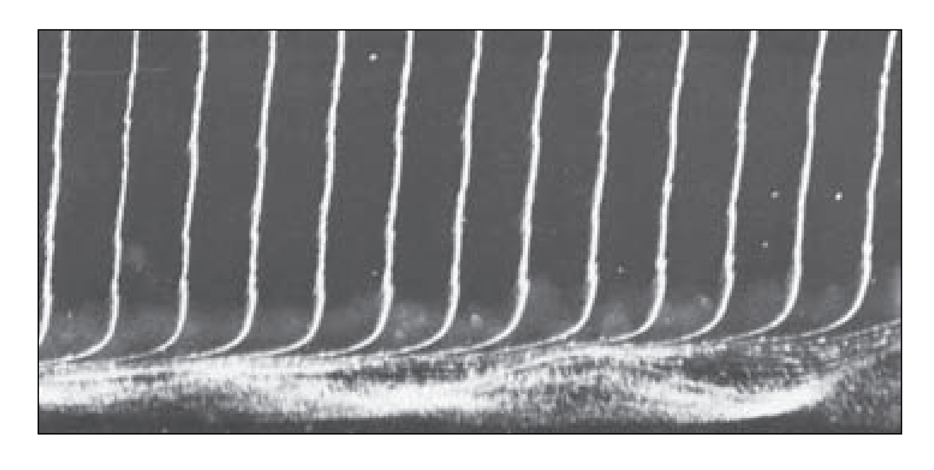


FIGURA 4-28
Se usan las líneas fluidas producidas por un hilo de burbujas de hidrógeno con el fin de visualizar la forma del perfil de velocidad de la capa límite. El flujo es de izquierda a derecha y el hilo de burbujas de hidrógeno está localizado a la izquierda del campo de visión. Las burbujas cercanas a la pared revelan una inestabilidad del flujo que conduce a turbulencia.

Bippes, H. 1972 Sitzungsber, Heidelb. Akad. Wiss. Math. Naturwiss. *Kl., núm. 3, 103-180; NASA TM-75243, 1978.*

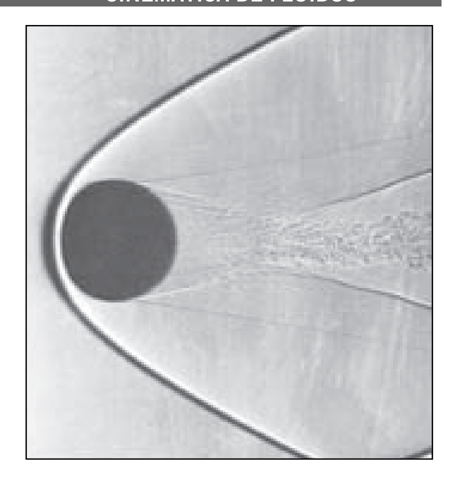


FIGURA 4-29
La fotografía por sombras de una esfera de 14.3 mm en vuelo libre a través del aire Ma = 3.0. Se ve con claridad una onda de choque en la sombra, como un arco oscuro que se curva alrededor de la esfera y se conoce como *onda de choque oblicua* (véase el capítulo 12).
A. C. Charters, Air Flow Branch, U.S. Army Ballistic Research Laboratory.

el campo de flujo, y permite "ver lo invisible". La imagen producida (una **fotografía por sombras**) por la técnica de fotografía por sombras (o visualización de perfiles) se forma cuando los rayos refractados de luz redisponen la sombra proyectada sobre una pantalla de visión o el plano focal de una cámara, hacen que aparezcan patrones brillantes y oscuros en la sombra. Los patrones oscuros indican el lugar en donde se *originan* los rayos refractados, en tanto que los brillantes marcan dónde *finalizan*, y pueden ser engañosos. Como resultado, las regiones oscuras están menos distorsionadas que las brillantes y son más útiles para interpretar la fotografía por sombras. Por ejemplo, en la fotografía por sombras figura 4-29, se puede tener confianza acerca de la forma y posición de la onda de choque oblicua (la banda oscura), pero la luz brillante refractada ha distorsionado el frente de la sombra de la esfera.

Una fotografía por sombras no es una imagen óptica verdadera; es, después de todo, sencillamente una sombra. Sin embargo, en un **estriograma**, intervienen lentes (o espejos) y una cuchilla o cualquier otro dispositivo cortante para bloquear la luz refractada y es una imagen óptica enfocada verdadera. La formación de estriogramas es más complicada en comparación con las fotografías por sombras (véase Settles, 2001, en relación con los detalles), pero tiene varias ventajas. Por ejemplo, un estriograma no sufre de distorsión óptica por los rayos refractados de luz. La formación de estriogramas también es más sensible a los gradientes débiles de densidad, como los causados por la convección natural (Fig. 4-30) o por fenómenos graduales como la expansión en el flujo supersónico. También se han desarrollado técnicas de formación de estriogramas a color. Por último, se pueden ajustar más componentes en un montaje óptico estrioscópico, como la localización, la orientación y el tipo del dispositivo cortante, para producir una imagen que sea más útil para el problema que se esté tratando.

Técnicas de visualización del flujo sobre la superficie

Por último, se mencionan brevemente algunas técnicas de visualización del flujo que resultan útiles a lo largo de superficies sólidas. La dirección del flujo de fluidos inmediatamente arriba de una superficie sólida se puede visualizar con **mechones** (hilos flexibles y cortos, pegados a la superficie en uno de sus extremos, que apuntan en la dirección del flujo). Los mechones son útiles en especial para localizar regiones de separación del flujo, en donde la dirección se invierte de manera repentina..



FIGURA 4-30
Estriograma de la convección natural debida a una parrilla para asar.
G. S. Settles, Gas Dynamics Lab, Penn State University. Reproducida con autorización.

Para el mismo fin, se puede aplicar una técnica llamada **visualización mediante aceite superficial** (el aceite que se coloca sobre la superficie forma venas que indican la dirección del flujo). Si llueve ligeramente y su automóvil está sucio (en especial en el invierno, cuando se riega sal sobre las carreteras), puede haber advertido venas a lo largo del cofre y los costados del automóvil, o incluso sobre el parabrisas. Esto es semejante a lo que se observa con la visualización por medio de aceite superficial..

Ahora ya existen pinturas sensibles a la presión y a la temperatura que permiten a los investigadores observar la distribución de presión o de temperatura a lo largo de superficies sólidas.

4-3 ▪ GRÁFICAS DE LOS DATOS SOBRE FLUJO DE FLUIDOS

Sin importar cómo se obtengan los resultados (analítica o experimental, o por mediante programas de computación), en ocasiones es necesario *trazar las gráficas* de los datos de flujo en forma tal que se pueda adquirir una sensación de cómo varían las propiedades de ese flujo en el tiempo o el espacio. Los lectores

ya están familiarizados con las *gráficas de tiempo*, las cuales resultan especialmente útiles en los flujos turbulentos (por ejemplo, una componente de la velocidad trazada como función del tiempo), así como con las gráficas *xy* (por ejemplo, la presión como función del radio). En esta sección se comentan tres tipos adicionales de gráficas que son útiles en la mecánica de fluidos: las gráficas de perfiles, las vectoriales y las de contornos.

Gráficas de perfiles

> Una **gráfica de perfiles** indica cómo varía el valor de una propiedad escalar a lo largo de una dirección deseada en el campo de flujo.

Las gráficas de perfiles son las más sencillas de entender de las tres porque son semejantes a las gráficas *xy* que el lector ha generado desde la escuela primaria. Ha trazado la gráfica de cómo una variable *y* varía como función de una segunda variable *x*. En la mecánica de fluidos se pueden crear gráficas de perfiles de *cualquier* variable escalar (presión, temperatura, densidad, etcétera), pero la más común que se usa en este libro es la *gráfica del perfil de velocidad*. Se debe observar que como la velocidad es una cantidad vectorial, se suele trazar la gráfica de la magnitud de la velocidad o de una de las componentes del vector velocidad como función de la distancia en alguna dirección deseada.

Por ejemplo, una de las líneas fluidas en el flujo de la capa límite de la figura 4-28 se puede convertir en una gráfica del perfil de velocidad cuando se reconoce que, en un instante dado, la distancia horizontal recorrida por una de las burbujas de hidrógeno en la ubicación vertical *y* es proporcional a la componente *x* local de la velocidad *u*. En la figura 4-31 se ha trazado la gráfica de *u* como función de *y*. También se pueden obtener los valores de *u* para la gráfica en forma analítica (véanse los capítulos 9 y 10); en forma experimental con la aplicación de la PIV o alguna clase de instrumento de medición de la velocidad local (véase capítulo 8); o en forma computacional (véase capítulo 15). Nótese que tiene mayor significado físico en este ejemplo trazar la gráfica de *u* sobre la abscisa (eje horizontal) en vez de sobre la *ordenada* (eje vertical), aun cuando sea la variable dependiente, ya que entonces la posición *y* está en su orientación apropiada (hacia arriba), en lugar de atravesada.

Por último, es costumbre añadir flechas a las gráficas de perfiles de velocidad para hacerlas visualmente más atractivas, aunque no se suministre información adicional mediante esas flechas. Si, por la flecha, se da la gráfica de más de una componente de la velocidad, se indica la *dirección* del vector de velocidad local y la gráfica del perfil de velocidad se convierte en una del *vector* de velocidad.

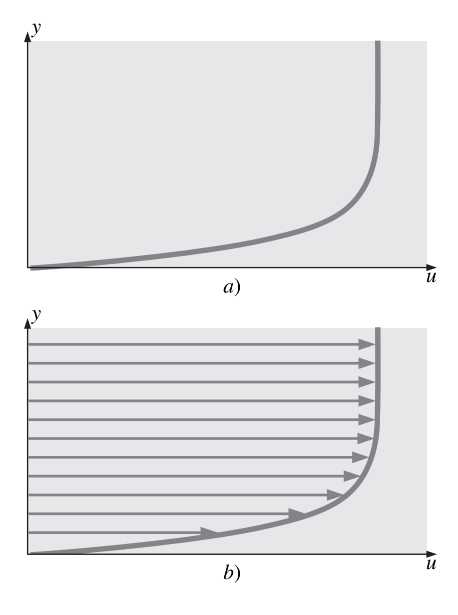


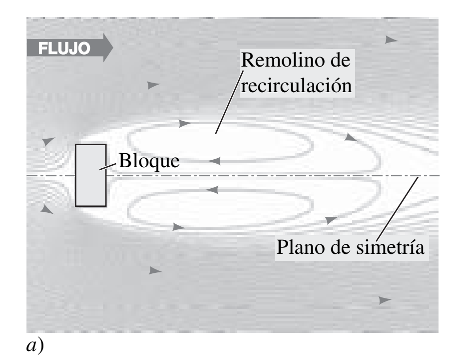
FIGURA 4-31
Gráficas de perfiles de la componente horizontal de la velocidad como función de la distancia vertical; flujo en la capa límite creciendo a lo largo de una placa plana horizontal: *a*) gráfica estándar de perfil y *b*) gráfica de perfil con flechas.

Gráficas vectoriales

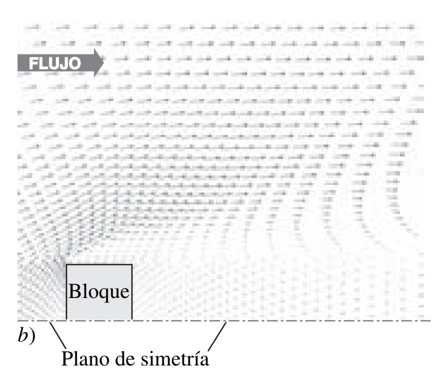
> Una **gráfica vectorial** es un arreglo de flechas que indican la magnitud y dirección de una propiedad vectorial en un instante.

En tanto que las líneas de corriente indican la *dirección* del campo de velocidad instantánea, no indican de manera directa la *magnitud* de la velocidad (es decir, la rapidez). Por tanto, un patrón útil de flujo, tanto para los flujos experimentales como computacionales de fluidos, es la gráfica vectorial, que consta de un arreglo de flechas que indican la magnitud y la dirección de una propiedad vectorial instantánea. En la figura 4-4 ya se ha visto un ejemplo de una gráfica de vectores de velocidad y, en la figura 4-14, una de vectores de aceleración. Éstas se generaron analíticamente. Las gráficas vectoriales también se pueden generar a partir de datos obtenidos experimentalmente (por ejemplo, de mediciones PIV) o en forma numérica con base en cálculos CFD.

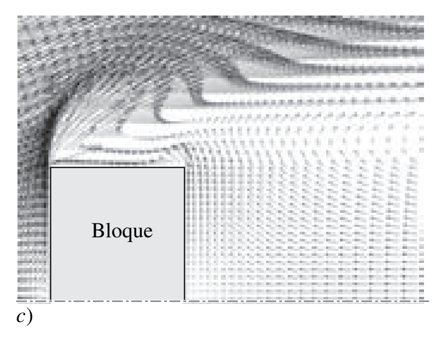
Con la finalidad de ilustrar más las gráficas vectoriales, se generó un campo bidimensional de flujo que consiste en un flujo libre que choca contra un bloque de sección transversal rectangular. Se realizaron cálculos CFD y, en la figura



a)



b)



c)

FIGURA 4-32
Resultados de cálculos CFD de un flujo que choca contra un bloque; *a*) líneas de corriente, *b*) gráfica de los vectores de velocidad de la mitad superior del flujo y *c*) gráfica de los vectores de velocidad, vista de acercamiento que revela más detalles.

4-32, se muestran los resultados. Note que, por naturaleza, este flujo es turbulento y no estacionario, pero en la figura sólo se han calculado y presentado los resultados promediados en un tiempo largo. En la figura 4-32*a* se tienen las gráficas de las líneas de corriente; se muestra una vista del bloque completo y gran parte de su estela. Las líneas de corriente cerradas arriba y abajo del plano de simetría indican grandes remolinos de recirculación, uno arriba y otro abajo de la recta de simetría. En la figura 4-32*b*, se muestra una gráfica de vectores de velocidad (debido a la simetría, sólo se muestra la mitad superior del flujo). Con base en esta gráfica, resulta claro que el flujo se acelera alrededor de la esquina corriente arriba del bloque, de tal manera que la capa límite no puede ajustarse a la brusca esquina y se separa del propio bloque, con lo que se producen los grandes remolinos de recirculación corriente abajo de éste. (Note que estos vectores de velocidad son valores promediados en el tiempo; los vectores instantáneos cambian tanto de magnitud como de dirección con el tiempo, conforme se derraman los vórtices desde el cuerpo, de manera semejante a los de la figura 4-25*a*.) En la figura 4-32*c* se tiene la gráfica de una vista de acercamiento de la región del flujo separado, en donde se comprueba el flujo inverso en la mitad inferior del gran remolino de recirculación.

Los códigos CFD modernos y los posprocesadores pueden agregar *color* a una gráfica vectorial. Por ejemplo, se pueden colorear los vectores según alguna otra propiedad del flujo, como la presión (rojo para la presión alta y azul para la baja), o bien, la temperatura (rojo para caliente y azul para frío). De esta manera se puede visualizar con facilidad no sólo la magnitud y dirección del flujo, sino también otras propiedades de manera simultánea.

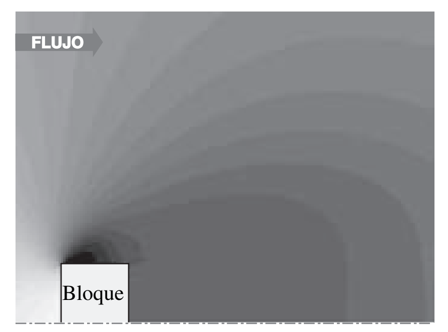
Gráficas de contornos

Una **gráfica de contornos** muestra las curvas de valor constante de una propiedad escalar (o magnitud de una propiedad de un vector) en un determinado instante.

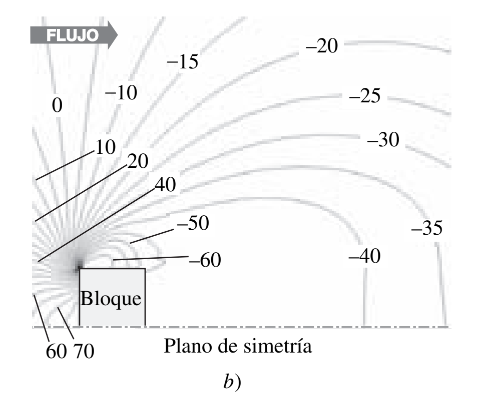
Si el lector ha practicado el excursionismo, está familiarizado con los mapas de curvas de nivel de los senderos. Los mapas constan de una serie de curvas cerradas, cada una de ellas indica una elevación o altitud constante. Cerca del centro de un grupo de esas curvas está el pico de la montaña o el fondo del valle; el pico real o el fondo del valle es un *punto* en el mapa que muestra la mayor elevación a la altitud más baja. Esos mapas son útiles en el sentido de que no sólo le dan una “vista a ojo de pájaro” de las corrientes y los senderos, etcétera, sino también puede ver con facilidad su elevación y en dónde un sendero es plano o empinado. En la mecánica de fluidos se aplica el mismo principio a varias propiedades escalares del flujo; se generan gráficas de contornos (también conocidas como **gráficas de isocontornos**) de la presión, la temperatura, la magnitud de la velocidad, la concentración de especies, las propiedades de turbulencia, etcétera. Una gráfica de contornos puede revelar con rapidez las regiones de valores altos (o bajos) de la propiedad del flujo que se está estudiando.

Una gráfica de contornos puede consistir, sencillamente, de curvas que indiquen varios niveles de la propiedad; ésta se conoce como **gráfica de líneas de contorno**. De modo opcional, los contornos se pueden rellenar con colores o sombras de gris; esto se conoce como **gráfica de contornos rellenos**. En la figura 4-33 se muestra un ejemplo de contornos de presión, para el mismo flujo que el de la figura 4-32. En la figura 4-33*a* se muestran contornos rellenos con sombras de tonalidades grises para identificar las regiones de niveles diferentes de presión (las regiones oscuras indican presión baja y las regiones claras indican presión alta). Con base en esta figura, resulta claro que la presión es la más alta en la cara del frente del bloque y la más baja a lo largo de la cara superior, en la zona separada. La presión también es baja en la estela del bloque, como era de esperarse. En la figura 4-33*b* se muestran los mismos contornos de presión, pero como una gráfica de líneas de contorno con los niveles indicados de la presión manométrica en unidades de pascales.

En la CFD a menudo se presentan las líneas de contorno en colores llamativos, indicando por lo común con rojo el valor más alto del escalar y con azul el más bajo. El ojo humano sano puede identificar con facilidad una región roja o azul y, de este modo, localizar las regiones de valor alto o bajo de la propiedad del flujo. Debido a las bellas imágenes producidas por la CFD, a la dinámica computacional de fluidos a veces se le conoce con el apodo de "dinámica de fluidos a todo color".



a)



b)

FIGURA 4-33
Gráficas de contornos del campo de presión debido al flujo que choca contra un bloque, según se producen por medio de cálculos CFD; sólo se muestra la mitad superior debido a la simetría; *a*) gráfica de contornos a escala rellenos en gris y *b*) gráfica de líneas de contorno en donde se muestran los valores de la presión referentes a presiones manométricas, en unidades de Pa (pascales).

4-4 ▪ OTRAS DESCRIPCIONES CINEMÁTICAS

Tipos de movimiento o deformación de los elementos de fluidos

En la mecánica de fluidos, como en la de los sólidos, un elemento puede pasar por cuatro tipos fundamentales de movimiento o deformación, como se ilustra en dos dimensiones en la figura 4-34: *a*) **traslación**, *b*) **rotación**, *c*) **deformación lineal** (a veces conocida como **deformación por tensión**) y *d*) **deformación por esfuerzo cortante**. El estudio de la dinámica de fluidos se complica todavía más porque los cuatro tipos de movimiento o deformación suelen ocurrir de manera simultánea. En virtud de que los elementos de fluidos pueden estar en movimiento constante, en la dinámica de fluidos es preferible describir el movimiento y la deformación de los elementos de fluido en términos de *razones*. En particular, se estudiarán la *velocidad* (razón de traslación), la *velocidad angular* (razón de rotación), y la *razón de deformación lineal y la razón de deformación por esfuerzo cortante*. Para que estas **razones de deformación** sean útiles en el cálculo de los flujos de fluidos, se les debe expresar en términos de la velocidad y de derivadas de la velocidad.

La traslación y la rotación se entienden con facilidad ya que comúnmente se observan en el movimiento de partículas sólidas, como las bolas de billar (Fig. 4-1). Se requiere un vector para describir por completo la razón de traslación en tres dimensiones. El **vector de razón de traslación** se describe en forma matemática como el **vector de velocidad**. En coordenadas cartesianas:

Vector razón de traslación en coordenadas cartesianas:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \tag{4-19}$$

En la figura 4-34*a* el elemento de fluido se ha movido en la dirección horizontal (x) positiva; de donde, u es positiva, en tanto que v (y w) son cero.

La **razón de rotación** (**velocidad angular**) en un punto se define como *la razón promedio de rotación de dos rectas inicialmente perpendiculares que se intersecan en ese punto*. Por ejemplo, en la figura 4.34*b*, considere el punto en la esquina inferior izquierda del elemento de fluido inicialmente cuadrada. La arista izquierda y la inferior se intersecan en ese punto y, en el inicio, son perpendiculares. Estas dos líneas giran en contrasentido al movimiento de las manecillas del reloj, lo cual es, para las matemáticas, la dirección positiva. El ángulo entre estas dos rectas (o entre dos rectas *cualesquiera* inicialmente perpendiculares en este elemento de fluido) sigue siendo de 90° ya que, en la figura, se ilustra la rotación de un cuerpo sólido. Por lo tanto, las dos rectas giran con la misma rapidez y la razón de rotación en el plano es tan sólo la componente de la velocidad angular en ese plano.

En el caso más general, pero todavía bidimensional (Fig. 4-35), la partícula de fluido se traslada y deforma según gira y la razón de rotación se calcula según la definición dada en el párrafo anterior. Es decir, se principia en el instante t_1 con dos rectas inicialmente perpendiculares (rectas a y b de la figura 4-35) que se intersecan en el punto P, en el plano xy. Se siguen estas rectas a medida que se mueven y giran en un incremento infinitesimal de tiempo $dt = t_2 - t_1$. En el

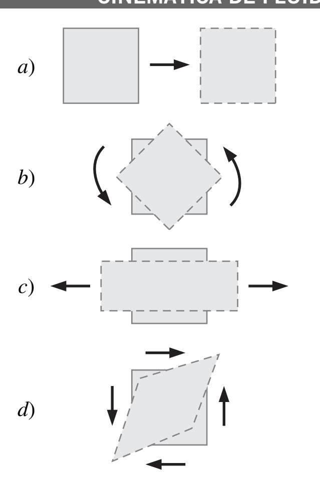


FIGURA 4-34
Tipos fundamentales de movimiento o deformación de los elementos de fluido: *a*) traslación, *b*) rotación, *c*) deformación lineal y *d*) deformación por esfuerzo cortante.

instante t_2, la recta *a* ha girado en un ángulo α_a, y la *b* lo ha hecho en un ángulo α_b, y las dos rectas se han movido con el flujo como se indica en la figura (los valores de los dos ángulos se dan en radianes y, en el esquema, se muestran matemáticamente positivos). De esta manera el ángulo promedio de rotación es $(\alpha_a + \alpha_b)/2$, y la *razón de rotación* o velocidad angular en el plano *xy* es igual a la derivada respecto del tiempo de este ángulo promedio de rotación,

Razón de rotación del elemento de fluido alrededor del punto P de la figura 4-35:

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha_a + \alpha_b}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4-20}$$

Se deja como ejercicio comprobar la expresión de lado derecho de la ecuación 4-20, en donde se ha escrito ω en términos de las componentes *u* y *v* de la velocidad, en lugar de los ángulos α_a y α_b.

En tres dimensiones se debe definir un *vector* para la razón de rotación en un punto en el flujo, ya que su magnitud puede diferir en cada una de las tres dimensiones. La deducción del vector de razón de rotación en tres dimensiones se puede encontrar en numerosos libros de mecánica de fluidos, como el de Kundu (1990) y el de White (1991). El **vector de razón de rotación** es igual al **vector de velocidad angular** y se expresa en coordenadas cartesianas como:

Vector de razón de rotación en coordenadas cartesianas:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{4-21}$$

La **razón de deformación lineal** se define como *la razón de incremento en la longitud por unidad de longitud*. Desde el punto de vista matemático, la razón de deformación lineal depende de la orientación o dirección inicial del segmento rectilíneo en el que se mide la deformación lineal. Por lo tanto, no se puede expresar como una cantidad escalar o vectorial. En vez de ello, se define la razón de deformación lineal en alguna dirección arbitraria, la cual se denota como la dirección x_α. Por ejemplo, el segmento rectilíneo *PQ* de la figura 4-36 tiene una longitud inicial de dx_α, y, como se muestra, crece hasta obtener el segmento rectilíneo $P'Q'$. A partir de la definición dada y utilizando las longitudes marcadas en la figura 4-36, la razón de deformación lineal en la dirección x_α es:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{P'Q' - PQ}{PQ}\right)$$

$$\cong \frac{d}{dt}\left(\frac{\overbrace{\left(u_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}dx_\alpha\right)dt + dx_\alpha - u_\alpha\,dt}^{\text{Longitud de } P'Q' \text{ en la dirección } x_\alpha} \quad - \overbrace{dx_\alpha}^{\text{Longitud de } PQ \text{ en dirección } x_\alpha}}{\underbrace{dx_\alpha}_{\text{Longitud de } PQ \text{ en dirección } x_\alpha}}\right) = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \tag{4-22}$$

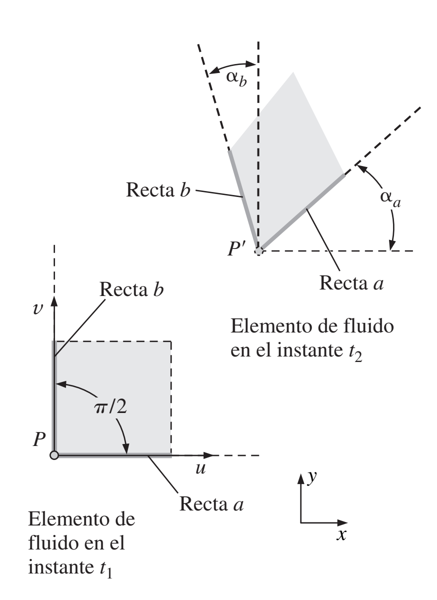


FIGURA 4-35
Para un elemento de fluido que se traslada y deforma según el esquema, la *razón de rotación* en el punto *P* se define como la razón promedio de rotación de dos rectas inicialmente perpendiculares (rectas *a* y *b*).

En coordenadas cartesianas, normalmente se toma la dirección x_α como la de cada una de los tres ejes de coordenadas, aun cuando no es necesario restringirse a estas instrucciones.

Razón de deformación lineal en coordenadas cartesianas:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{4-23}$$

Para el caso más general, el elemento de fluido se mueve y se deforma como se muestra en el esquema de la figura 4-35. Se deja como ejercicio demostrar que la ecuación 4-23 todavía es válida para el caso general.

Los objetos sólidos, como los alambres, las varillas y las vigas, se estiran cuando se jala de ellas. El lector debe recordar por su estudio de la mecánica para ingeniería, que cuando se estira uno de esos objetos en una dirección, suele contraerse en la(s) dirección (direcciones) normal(es) a esa dirección. Lo mismo se cumple para los elementos de fluido. En la figura 4-34*c* se estira el elemento de fluido, originalmente cuadrado, en la dirección horizontal y se contrae en la vertical. En consecuencia, la razón de deformación lineal es positiva en la dirección horizontal y negativa en la vertical.

Si el flujo es *incompresible*, el volumen neto del elemento de fluido debe permanecer constante; de este modo, si el elemento se estira en una dirección, para compensar debe contraerse en una cantidad apropiada en la(s) otra(s) dirección (direcciones). Sin embargo, el volumen de un elemento de fluido *compresible* puede aumentar o disminuir conforme su densidad decrece o crece, respectivamente (la masa de un elemento de fluido debe permanecer constante pero, como $\rho = m/V$, la densidad y el volumen son inversamente proporcionales). Considere, por ejemplo, una parcela de aire en un cilindro que está siendo comprimido por un pistón (Fig. 4-37); el volumen del fluido decrece en tanto que su densidad aumenta de modo que la masa del elemento de fluido se conserva. La razón de incremento de volumen de un elemento de fluido por unidad de volumen se conoce como su **razón de deformación volumétrica** o **razón de deformación de volumen**. Su propiedad cinemática se define como *positiva* cuando el volumen *aumenta*. Otro sinónimo de razón de deformación volumétrica es el de **razón de dilatación volumétrica**, lo cual es fácil de recordar si se piensa cómo el iris del ojo se dilata (se agranda) cuando se expone a la luz tenue. Resulta que la razón de deformación volumétrica es la suma de las razones de deformación lineal en tres direcciones mutuamente ortogonales. Por lo tanto, en coordenadas cartesianas (Ec. 4-23), la razón de deformación volumétrica es:

Razón de deformación volumétrica en coordenadas cartesianas:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{4-24}$$

En la ecuación 4-24 se usa la notación D en mayúsculas para enfatizar que se está hablando del volumen *que corresponde a un elemento de fluido*, es como decir, el *volumen material* del elemento de fluido (volumen de sustancia), como en la ecuación 4-12.

La razón de deformación volumétrica es cero en un flujo incompresible.

La razón de deformación por esfuerzo cortante es la razón de deformación más difícil de describir y de entender. La **razón de deformación por esfuerzo cortante** en un punto se define como *la mitad de la razón de disminución del ángulo entre dos rectas inicialmente perpendiculares que se intersecan en el punto*. (La justificación por la cual se habla de la mitad quedará clara más adelante cuando se combinen la razón de deformación por esfuerzo cortante y la razón de deformación lineal en un tensor.) Por ejemplo, en la figura 4-34*d,* los ángulos inicialmente de 90° en las esquinas inferior izquierda y superior derecha del elemento cuadrado de fluido decrecen; ésta, por definición, es una deformación *positiva* por esfuerzo cortante. Sin embargo, los ángulos en las esquinas superior izquierda e inferior derecha del elemento cuadrado de fluido crecen a medida que ese elemento inicialmente cuadrado de fluido se deforma; ésta es una deformación *negativa* por esfuerzo cortante. Es obvio que no se puede describir la razón de deformación por esfuerzo cortante en términos sólo de una cantidad escalar o, inclusive, en términos de una cantidad *vectorial* para ese tema. Más bien, una descripción matemática completa de la razón de deformación por esfuerzo cortante requiere su especificación en cualesquiera *dos direcciones mutuamente perpendiculares*. En coordenadas cartesianas, los propios ejes constituyen la elección más obvia, aun cuando no es necesario restringirse a éstos. Considere un elemen-

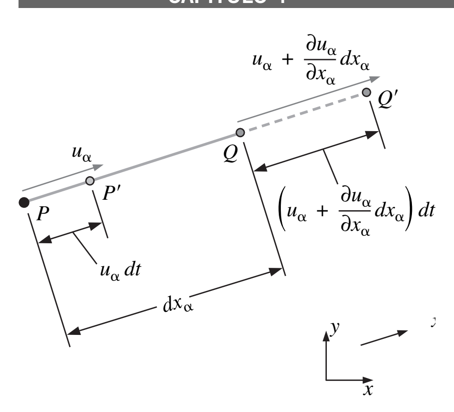


FIGURA 4-36
La *razón de deformación lineal* en alguna dirección x_α arbitraria se define como la razón de incremento en la longitud por unidad de longitud en esa dirección. La razón de deformación lineal sería *negativa* si disminuyera la longitud del segmento rectilíneo. De esto se infiere el aumento en longitud del segmento rectilíneo PQ para convertirse en el segmento rectilíneo $P'Q'$, lo cual conduce a una razón de deformación lineal positiva. Las componentes de la velocidad y las distancias se truncan hasta el primer orden puesto que dx_α y dt son infinitesimalmente pequeños.

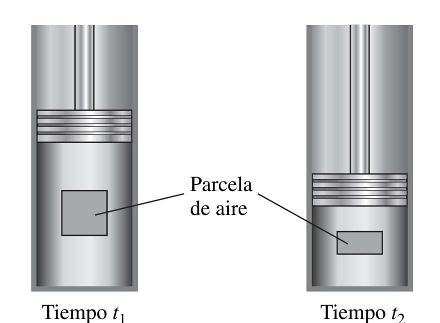


FIGURA 4-37
Se está comprimiendo aire mediante un pistón en un cilindro; el volumen de un elemento de fluido que esté en el cilindro disminuye, lo que corresponde a una razón negativa de dilatación volumétrica.

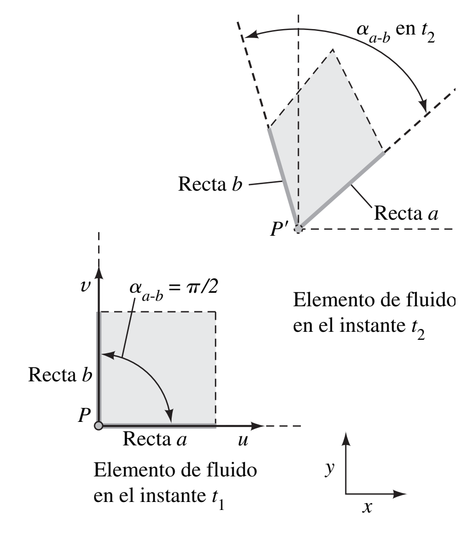


FIGURA 4-38
Para un elemento de fluido que se traslada y se deforma como se muestra en el esquema, la *razón de deformación por esfuerzo cortante* en el punto P se define como la mitad de la razón de disminución del ángulo entre dos rectas inicialmente perpendiculares (rectas a y b).

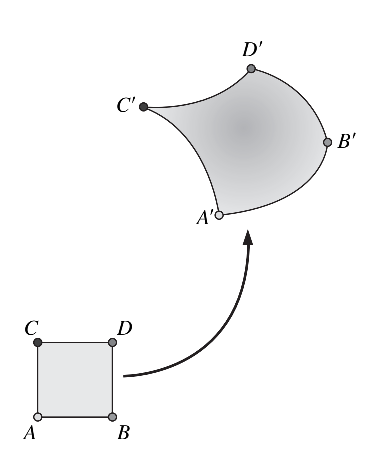


FIGURA 4-39
Un elemento de fluido en el que se ilustra la traslación, la rotación, la deformación lineal, la deformación por esfuerzo cortante y la deformación volumétrica.

to de fluido en dos dimensiones, en el plano xy. El elemento se traslada y se deforma con el tiempo como se ilustra en la figura 4-38. Se siguen dos rectas en principio mutuamente perpendiculares (rectas a y b en las direcciones x y y, respectivamente). El ángulo entre estas dos rectas decrece desde $\pi/2$ (90°) hasta el ángulo marcado como $\alpha_{a\text{-}b}$ en t_2 en el esquema. Se deja como ejercicio demostrar que la razón de deformación por esfuerzo cortante en el punto P, para rectas inicialmente perpendiculares en las direcciones x y y, se da por:

Razón de deformación por esfuerzo cortante, rectas inicialmente perpendiculares en las direcciones x y y:

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\alpha_{a\text{-}b} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \textbf{(4-25)}$$

La ecuación 4-25 se puede extender con facilidad a tres dimensiones. Por lo tanto, la razón de deformación por esfuerzo cortante es:

Razón de deformación por esfuerzo cortante en coordenadas cartesianas:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad \textbf{(4-26)}$$

Por último, resulta que se pueden combinar matemáticamente la razón de deformación lineal y la razón de deformación por esfuerzo cortante en un tensor simétrico de segundo orden conocido como **tensor de razones de deformación**, el cual es una combinación de las ecuaciones 4-23 y 4-26:

Tensor de razones de deformación en coordenadas cartesianas:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4-27)}$$

El tensor de razones de deformación obedece todas las leyes de los tensores matemáticos, como las invariantes tensoriales, las leyes de transformación y los ejes principales.

En la figura 4-39 se muestra una situación general (aunque bidimensional) en un flujo de fluido compresible en el cual están presentes de manera simultánea todos los movimientos y todas las deformaciones posibles. En particular, se tiene traslación, rotación, deformación lineal y deformación por esfuerzo cortante. Debido a la naturaleza compresible del fluido, también existe deformación volumétrica (dilatación). El lector ahora debe de tener una mejor apreciación de la complejidad inherente de la dinámica de fluidos y del refinamiento matemático necesario para describir por completo el movimiento de esos fluidos..

EJEMPLO 4-6 **Cálculo de las propiedades cinemáticas en un flujo bidimensional**

Considere el campo bidimensional estacionario de velocidad del ejemplo 4-1:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8\,x)\vec{i} + (1.5 - 0.8\,y)\vec{j} \qquad \textbf{(1)}$$

donde las longitudes se dan en unidades de m, el tiempo en s y la velocidad en m/s. Se tiene un punto de estancamiento en (−0.625, 1.875) como se muestra en la figura 4-40. También, en esta figura, están trazadas las líneas de corriente del flujo. Calcule las diversas propiedades cinemáticas, es decir, la razón de traslación, la razón de rotación, la razón de deformación lineal, la razón de deformación por esfuerzo cortante y la razón de deformación volumétrica. Verifique que este flujo es incompresible.



SOLUCIÓN Se deben calcular varias propiedades cinemáticas de un campo de velocidad y verificar que el flujo es incompresible.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El flujo es bidimensional, lo que implica que no hay componente z de la velocidad y ninguna variación de u o v con z.
Análisis Por la ecuación 4-19, la razón de traslación es sencillamente el propio vector de velocidad, dado por la ecuación 1; de donde:

Razón de traslación: $$u = \mathbf{0.5} + \mathbf{0.8}x \qquad v = \mathbf{1.5} - \mathbf{0.8}y \qquad w = \mathbf{0} \tag{2}$$

La razón de rotación se encuentra con base en la ecuación 4-21. En este caso, supuesto que $w = 0$ en todas partes y como ni u ni v varían con z, la única componente diferente de cero de la razón de rotación está en la dirección z. De donde,

Razón de rotación: $$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = \frac{1}{2}(0 - 0)\vec{k} = \mathbf{0} \tag{3}$$

En este caso, se ve que no hay rotación neta de las partículas de fluido conforme se mueven en todas direcciones. (Ésta es una pieza importante de información, la cual se comentará con más detalle más adelante en este capítulo y también en el capítulo 10.)

Las razones de deformación lineal se pueden calcular en cualquier dirección arbitraria con aplicación de la ecuación 4-22. En las direcciones x, y y z, las razones de deformación lineal de la ecuación 4-23 son:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{0.8\ s^{-1}} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \mathbf{-0.8\ s^{-1}} \qquad \varepsilon_{zz} = \mathbf{0} \tag{4}$$

Por lo tanto, se predice que las partículas de fluido se *estiran* en la dirección x (razón de deformación lineal positiva) y se *contraen* en la dirección y (razón de deformación lineal negativa). Esto se ilustra en la figura 4-41, en donde se ha marcado una parcela inicialmente cuadrada de fluido con centro en (0.25, 4.25). Cuando se integran las ecuaciones 2 con el tiempo, se calcula la ubicación de las cuatro esquinas del fluido marcado, después de haber transcurrido 1.5 s. En efecto, esta parcela de fluido se ha estirado en la dirección x y contraído en la y, como se predijo.

La razón de deformación por esfuerzo cortante se determina a partir de la ecuación 4-26. Debido a la bidimensionalidad, sólo se pueden tener razones diferentes de cero de deformación por esfuerzo cortante en el plano xy. Si se usan rectas paralelas a los ejes x y y como las rectas inicialmente perpendiculares, se calcula ε_{xy} con base en la ecuación 4-26:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(0 + 0) = \mathbf{0} \tag{5}$$

En consecuencia, no se tiene deformación por esfuerzo cortante en este flujo, como también se indica mediante la figura 4-41. Aunque la partícula muestra de fluido se deforma, continúa siendo rectangular; sus ángulos en las esquinas, en el inicio de 90°, continúan siendo de 90° a lo largo de todo el periodo del cálculo.

Por último, la razón de deformación volumétrica se calcula a partir de la ecuación 4-24:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (0.8 - 0.8 + 0)\ \mathrm{s^{-1}} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Puesto que la razón de deformación volumétrica es cero en todas partes, se puede decir en definitiva que las partículas de fluido no se están dilatando (expandiendo) ni contrayendo (comprimiendo) en volumen. Por consiguiente, **se verifica que este flujo efectivamente es incompresible**. En la figura 4-41, el área de la partícula sombreada de fluido se mantiene constante a medida que se mueve y se deforma en el campo de flujo.
Discusión En este ejemplo, resulta que las razones de deformación lineal (ε_{xx} y ε_{yy}) son diferentes de cero, en tanto que las razones de deformación por esfuerzo

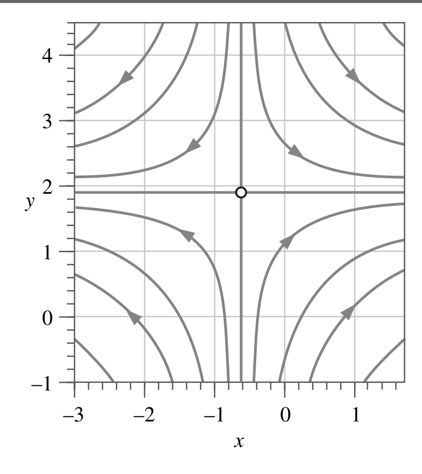


FIGURA 4-40
Líneas de corriente para el campo de velocidad del ejemplo 4-6. El punto de estancamiento se indica por el círculo en $x = -0.625$ m y $y = 1.875$ m.

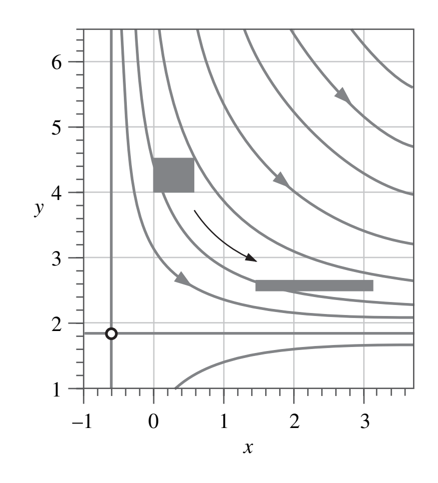


FIGURA 4-41
Deformación de una partícula inicialmente cuadrada del fluido marcado que se somete al campo de velocidad del ejemplo 4-6 durante un periodo de 1.5 s. El punto de estancamiento se indica por el círculo en $x = -0.625$ m y $y = 1.875$ m, y se han trazado varias líneas de corriente.

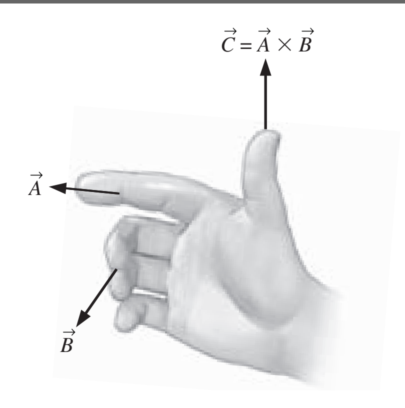


FIGURA 4-42
La dirección de un producto cruz de vectores se determina por la regla de la mano derecha.

cortante (ε_{xy} y su compañera simétrica ε_{yx}) son cero. Esto significa que *los ejes x y y de este campo de flujo son los ejes principales*. De donde, el tensor (bidimensional) de razones redeformación en esta orientación es:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix} \text{s}^{-1} \quad \textbf{(7)}$$

Si se hicieran girar los ejes en algún ángulo arbitrario, los nuevos ejes *no* serían ejes principales y los cuatro elementos del tensor de razones de deformación serían diferentes de cero. Puede ser que el lector recuerde, en sus clases de mecánica para ingeniería, la rotación de ejes por medio del uso de los círculos de Mohr con la finalidad de determinar los ejes principales, las deformaciones máximas por esfuerzo cortante, etcétera. En la mecánica de fluidos se pueden realizar análisis semejantes.

Vorticidad y rotacionalidad

Ya se definió el vector de razón de rotación de un elemento de fluido (véase la ecuación 4-21). Una propiedad cinemática relacionada tiene gran importancia para el análisis de los flujos de fluidos; a saber, el **vector de vorticidad** se define matemáticamente como el rotacional del vector de velocidad $\vec{V}$,

Vector de vorticidad:
$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{rot}(\vec{V}) \quad \textbf{(4-28)}$$

Desde el punto de vista físico, se puede indicar la dirección del vector de vorticidad mediante la aplicación de la regla de la mano derecha para el producto cruz (Fig. 4-42). El símbolo ζ que se usa para la vorticidad es la letra griega *zeta*. El lector debe de tener en cuenta que este símbolo para la vorticidad *no* es de uso general en libros de texto de mecánica de fluidos; algunos autores usan la letra griega *omega* (ω) en tanto que otros usan esta letra, pero en mayúscula (Ω). En este libro se usa $\vec{\omega}$ para denotar el vector de razón de rotación (vector velocidad angular) de un elemento de fluido. Resulta que el vector de razón de rotación es igual a la mitad del vector de vorticidad:

Vector razón de rotación:
$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{2}\text{rot}(\vec{V}) = \frac{\vec{\zeta}}{2} \quad \textbf{(4-29)}$$

Por lo tanto, *la vorticidad es una medida de la rotación de una partícula de fluido*. Específicamente,

> la **Vorticidad** es igual al doble de la velocidad angular de una partícula de fluido (Fig. 4-43).

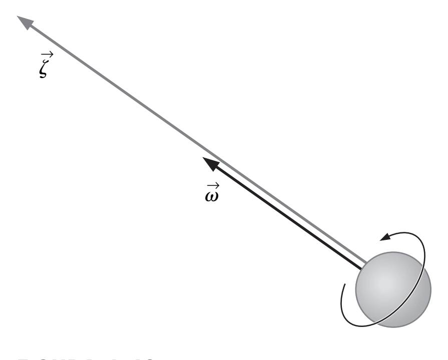


FIGURA 4-43
El *vector de vorticidad* es igual al doble del vector de velocidad angular de una partícula de fluido en rotación.

Si la vorticidad en un punto en un campo de flujo es diferente de cero, la partícula de fluido que llegue a ocupar ese punto en el espacio está girando; se dice que el flujo en esa región es **rotacional**. De modo semejante, si la vorticidad en una región del flujo es cero o (o despreciablemente pequeña) las partículas de fluido allí no están girando; se dice que el flujo en esa región es **irrotacional**. Desde el punto de vista físico, las partículas de fluido que están en una región rotacional de un flujo giran extremo sobre extremo a medida que avanzan en ese flujo. Por ejemplo, las partículas de fluido dentro de la capa límite viscosa cercana a una pared sólida son rotacionales (y, por lo tanto, tienen vorticidad diferente de cero), en tanto que las partículas de fluido que están afuera de la capa límite son irrotacionales (y su vorticidad es cero). Estos dos casos se ilustran en la figura 4-44.

La rotación de los elementos de fluido se asocia con las estelas, las capas límites, el flujo a través de turbomaquinaria (ventiladores, turbinas, compresores, etcétera) y el flujo con transferencia de calor. La vorticidad de un elemento de fluido no puede cambiar, excepto por la acción de la viscosidad, el calentamien-

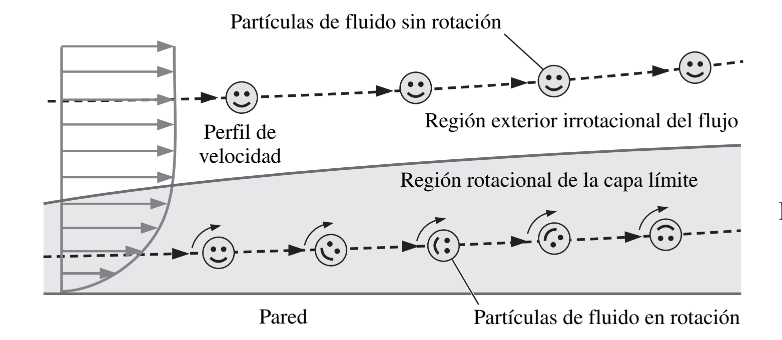


FIGURA 4-44
Diferencia entre el flujo rotacional y el irrotacional: los elementos de fluido están en rotación en una región rotacional del flujo, pero no están en una región irrotacional de ese flujo.

to no uniforme (gradientes de temperatura) u otros fenómenos no uniformes. Por consiguiente, si un flujo se origina en una región irrotacional, continúa siendo irrotacional hasta que algún proceso no uniforme lo altera. Por ejemplo, el aire que entra por una admisión proveniente de alrededores tranquilos (quietos) es irrotacional y se mantiene a menos que encuentre un objeto en su trayectoria o se someta a un calentamiento no uniforme. Si una aproximación de una región de flujo se puede hacer como irrotacional, las ecuaciones del movimiento se simplifican considerablemente, como se verá en el capítulo 10.

En coordenadas cartesianas, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (x, y, z), y (u, v, w), la ecuación 4-28 se puede desarrollar como sigue:

Vector vorticidad en coordenadas cartesianas:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{4-30}$$

Si el flujo es bidimensional en el plano xy, la componente z de la velocidad (w) es cero y ni u ni v varían con z. Entonces, las dos primeras componentes de la ecuación 4-30 son idénticamente cero y la vorticidad se reduce a:

Flujo bidimensional en coordenadas cartesianas:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{4-31}$$

Note que si un flujo es bidimensional en el plano xy, el vector de vorticidad debe apuntar en la dirección z o en la $-z$ (Fig. 4-45).

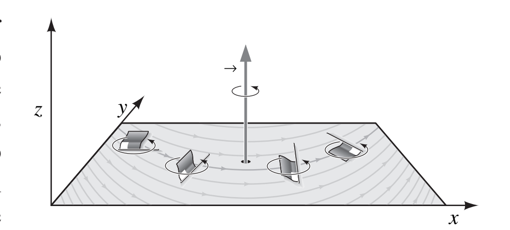


FIGURA 4-45
Para un flujo bidimensional en el plano xy, el vector vorticidad siempre apunta en la dirección z o $-z$. En esta ilustración, la partícula de fluido con forma de bandera gira en contrasentido al movimiento de las manecillas del reloj conforme se mueve en el plano xy; su vorticidad apunta en la dirección z positiva, como se muestra.

EJEMPLO 4-7 Contornos de vorticidad en un flujo bidimensional

Considere el cálculo CFD de un flujo libre bidimensional que choca contra un bloque de sección transversal rectangular, como se muestra en las figuras 4-32 y 4-33. Trace los contornos de vorticidad y coméntelo.

SOLUCIÓN Tiene que calcularse el campo de vorticidad para un campo dado de velocidad producido por CFD y, a continuación, generar una gráfica de contornos de esa vorticidad.

Análisis Supuesto que el campo de flujo es bidimensional, la única componente diferente de cero de la vorticidad está en la dirección z, normal a la página en las figuras 4-32 y 4-33. En la figura 4-46 se muestra una gráfica de contornos de la componente z de la vorticidad para este campo de flujo. La región oscura cerca de la esquina superior izquierda del bloque indica valores negativos grandes de la vorticidad, lo que implica rotación *en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj* de las partículas de fluido en esa región. Esto se debe a los enormes gradientes de velocidad que se encuentran en esta parte del campo de flujo; la capa lími-

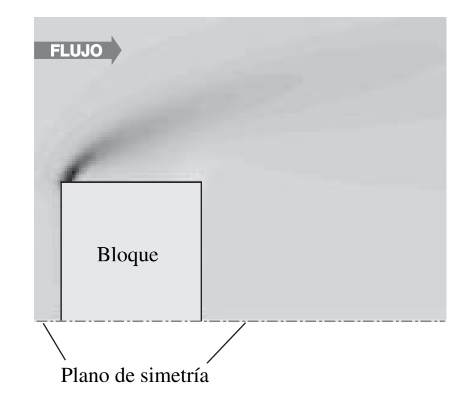


FIGURA 4-46
Gráfica de contornos del campo de vorticidad ζ_z debido al flujo que choca contra un bloque, según se produjo mediante cálculos CFD; sólo se muestra la mitad superior debido a la simetría. Las regiones oscuras representan vorticidad negativa grande y las claras representan vorticidad positiva grande.

te se separa de la pared en la esquina del cuerpo y forma una delgada **capa de deslizamiento** a través de la cual la velocidad cambia con rapidez. La concentración de la vorticidad en la capa de deslizamiento disminuye conforme esa vorticidad se difunde corriente abajo. La pequeña región con sombra clara cercana a la esquina derecha superior representa una región de vorticidad *positiva* (rotación en contrasentido al movimiento de las manecillas del reloj) —un patrón secundario de flujo causado por la separación de éste.

Discusión Se espera que la magnitud de la vorticidad sea más alta en regiones en donde las derivadas espaciales de la velocidad sean altas (vea la ecuación 4-30). Un examen minucioso revela que la región oscura de la figura 4-46 en realidad corresponde a los enormes gradientes de velocidad de la figura 4-32. Tenga presente que el campo de vorticidad de la figura 4-46 se promedia en el tiempo. El campo instantáneo de flujo es en realidad turbulento y no estacionario, y los vórtices se derraman del cuerpo escarpado.

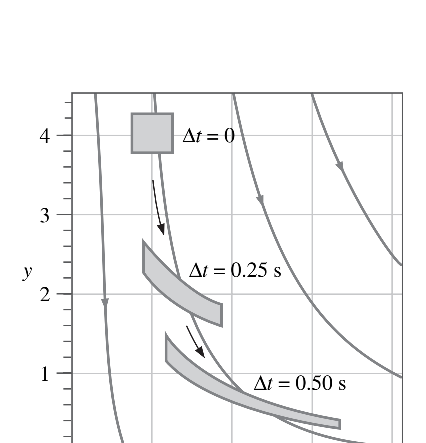


FIGURA 4-47
Deformación de una partícula de fluido, inicialmente cuadrada, sometida al campo de velocidad del ejemplo 4-8, durante un periodo de 0.25 s y 0.50 s. También están trazadas varias líneas de corriente en el primer cuadrante. Se ve con claridad que este flujo es *rotacional*.

EJEMPLO 4-8 Determinación de la rotacionalidad en un flujo bidimensional

Considere el siguiente campo estacionario, incompresible y bidimensional de velocidad:

$$\vec{V} = (u, v) = x^2\vec{i} + (-2xy - 1)\vec{j} \qquad \textbf{(1)}$$

¿Es rotacional o irrotacional este flujo? Trace el esquema de algunas líneas de corriente y argumente sobre ello.

SOLUCIÓN Se debe determinar si un flujo con un campo dado de velocidad es rotacional o irrotacional y se deben trazar algunas líneas de corriente en el primer cuadrante.

Análisis Supuesto que el flujo es bidimensional, la ecuación 4-31 es válida; de donde:

$$\textit{Vorticidad:} \qquad \vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = (-2y - 0)\vec{k} = -2y\vec{k} \qquad \textbf{(2)}$$

Puesto que la vorticidad es diferente de cero, este flujo es **rotacional**. En la figura 4-47, se han trazado varias líneas de corriente del flujo en el primer cuadrante; se ve que el fluido se mueve hacia abajo y hacia la derecha. También se muestra la traslación y la deformación de una partícula de fluido: en $\Delta t = 0$, la partícula de fluido es cuadrada; en $\Delta t = 0.25$ s, se ha movido y deformado; y en $\Delta t = 0.50$ s, la partícula se ha movido y deformado todavía más. En particular, la porción más cercana hacia la derecha de la partícula se mueve más rápido hacia la derecha y más rápido hacia abajo en comparación con la porción que está más cercana hacia la izquierda, con lo que la partícula se estira en la dirección x y se aplasta en la dirección vertical. Se ve con claridad que también se tiene una rotación neta de la partícula de fluido *en contrasentido al movimiento de las manecillas del reloj*, lo cual concuerda con el resultado de la ecuación 2.

Discusión Con base en la ecuación 4-29, cada una de las partículas de fluido gira con una velocidad angular igual a $\vec{\omega} = -y\vec{k}$, la mitad del vector vorticidad. Dado que $\vec{\omega}$ no es constante, este flujo *no* es la rotación de un cuerpo sólido. Más bien, $\vec{\omega}$ es una función lineal de y. Un análisis adicional revela que este campo de flujo es incompresible; las áreas sombreadas que representan la partícula de fluido en la figura 4-47 permanecen constantes en los tres instantes.

En coordenadas cilíndricas $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, (r, θ, z) y (u_r, u_θ, u_z) la ecuación 4-28 se puede desarrollar como:

Vector de vorticidad en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z \qquad \textbf{(4-32)}$$

Para el flujo bidimensional en el plano $r\theta$, la ecuación 4-32 se reduce a:

Flujo bidimensional en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{k} \quad \textbf{(4-33)}$$

donde se usa $\vec{k}$ como el vector unitario en la dirección z, en lugar de $\vec{e}_z$. Note que si un flujo es bidimensional en el plano $r\theta$, el vector de vorticidad debe apuntar en la dirección z o en la $-z$ (Fig. 4-48).

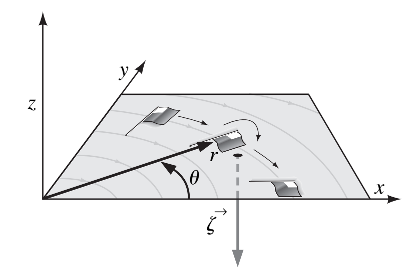


FIGURA 4-48
Para un flujo bidimensional en el plano $r\theta$, el vector vorticidad siempre apunta en la dirección z (o $-z$). En esta ilustración, la partícula de fluido con forma de bandera gira en contrasentido al movimiento de las manecillas del reloj conforme se mueve en el plano $r\theta$; su vorticidad apunta en la dirección $-z$.

Comparación de dos flujos circulares

No todos los flujos con líneas de corriente circulares son rotacionales. Para ilustrar este punto, se considerarán dos flujos bidimensionales incompresibles y estacionarios, donde los dos tienen líneas de corriente circulares en el plano $r\theta$:

Flujo A (rotación de cuerpo sólido): $u_r = 0$ y $u_\theta = \omega r$ **(4-34)**

Flujo B (vórtice líneal): $u_r = 0$ y $u_\theta = \frac{K}{r}$ **(4-35)**

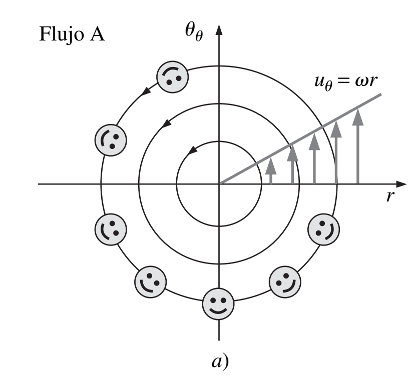
donde ω y K son constantes (los lectores atentos observarán que, en la ecuación 4-35 u_θ es infinita en $r = 0$, lo cual, por supuesto, es físicamente imposible; para evitar este problema se ignora la región cercana al origen). Como en ambos casos la componente radial de la velocidad es cero, las líneas de corriente son círculos alrededor del origen. En la figura 4-49 se presentan esquemas de los perfiles de velocidad para los dos flujos, junto con sus líneas de corriente. Ahora se calcula y compara el campo de vorticidad para cada uno de estos dos flujos utilizando la ecuación 4-33.

Flujo A (rotación de cuerpo sólido): $$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} - 0\right)\vec{k} = 2\omega\vec{k} \quad \textbf{(4-36)}$$

Flujo B (vórtice líneal): $$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(K)}{\partial r} - 0\right)\vec{k} = 0 \quad \textbf{(4-37)}$$

No es sorprendente que la vorticidad para la rotación de cuerpo sólido sea diferente de cero. De hecho, es constante con magnitud igual al doble de la velocidad angular y apunta en la misma dirección (esto concuerda con la ecuación 4-29). *El flujo A es rotacional*. Desde el punto de vista físico, esto significa que cada una de las partículas de fluido gira conforme da la vuelta alrededor del origen (Fig. 4-49*a*). Como contraste, la vorticidad del vórtice líneal es idénticamente cero en todas partes (excepto precisamente en el origen, el cual es una singularidad matemática). *El flujo B es irrotacional*. Físicamente, las partículas de fluido *no* giran conforme dan la vuelta alrededor del origen (Fig. 4-49*b*).

Se puede hacer una sencilla analogía entre el flujo A y un carrusel o tiovivo, y el flujo B y una rueda de la fortuna (Fig. 4-50). Conforme el niño se mueve dando la vuelta en un tiovivo, también gira sobre sí mismo con la misma velocidad angular que la del aparato. Esto es análogo a un flujo rotacional. Como contraste, el niño en la rueda de la fortuna siempre permanece orientado en una posición vertical conforme describe su trayectoria circular. Esto es análogo a un flujo irrotacional.



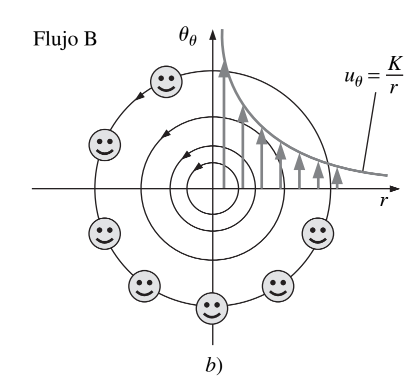
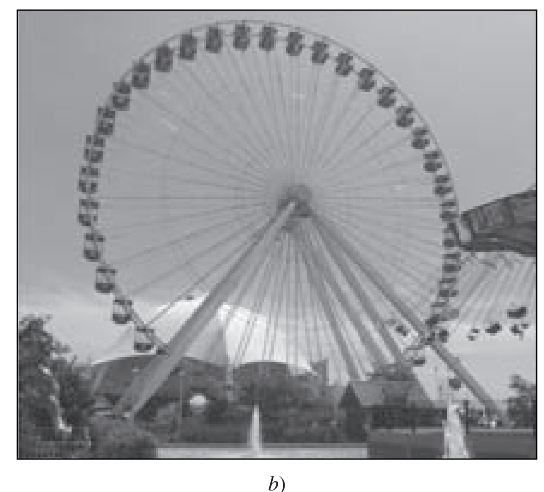


FIGURA 4-49
Líneas de corriente y perfiles de velocidad para *a*) el flujo A, rotación de cuerpo sólido y *b*) flujo B, un vórtice líneal. El flujo A es rotacional, pero el B es irrotacional en todas partes, excepto en el origen.



a)



b)

FIGURA 4-50
Una analogía sencilla: *a*) el flujo circular *rotacional* es análogo a un tiovivo, en tanto que *b*) el flujo circular *irrotacional* es análogo a una rueda de la fortuna.
© Robb Gregg/PhotoEdit

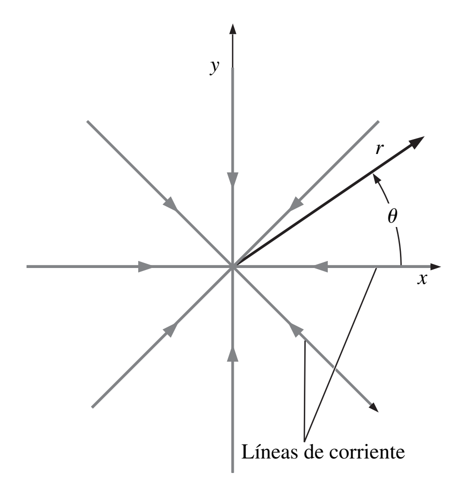


FIGURA 4-51
Líneas de corriente en el plano $r\theta$ para el caso de un sumidero lineal.

EJEMPLO 4-9 **Determinación de la rotacionalidad de un sumidero lineal**

A menudo se usa un sencillo campo bidimensional de velocidad, llamado **sumidero lineal**, para simular un fluido que está siendo succionado hacia una recta a lo largo del eje *z*. Suponga que se conoce el gasto volumétrico por unidad de longitud a lo largo del eje *z*, $\dot{V}/L$, en donde $\dot{V}$ es una cantidad negativa. En dos dimensiones, en el plano $r\theta$:

Sumidero lineal: $$u_r = \frac{\dot{V}}{2\pi L}\frac{1}{r} \quad \text{y} \quad u_\theta = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Dibuje varias líneas de corriente del flujo y calcule la vorticidad. ¿Este flujo es rotacional o irrotacional?

SOLUCIÓN Se debe trazar las líneas de corriente del flujo dado y determinar su rotacionalidad.

Análisis Supuesto que sólo existe flujo radial y no tangencial, se sabe de inmediato que todas las líneas de corriente deben entrar al origen. En la figura 4-51 se han trazado varias líneas de corriente. La vorticidad se calcula a partir de la ecuación 4-33:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial\theta}u_r\right)\vec{k} = \frac{1}{r}\left(0 - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\dot{V}}{2\pi L}\frac{1}{r}\right)\right)\vec{k} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Ya que el vector de vorticidad es cero en todas partes, este flujo es **irrotacional**.

Discusión Se puede tener una aproximación bastante exacta de muchos campos prácticos de flujo relacionados con succión, como el flujo hacia admisiones y entradas, suponiendo un flujo irrotacional (Heinsohn y Cimbala, 2003).

4-5 ▪ EL TEOREMA DEL TRANSPORTE DE REYNOLDS

Con frecuencia, en la termodinámica y la mecánica de los sólidos, se trabaja con un **sistema** (también llamado **sistema cerrado**), que se define como una *cantidad de materia de masa fija*. En la dinámica de fluidos es más común que se

trabaje con un **volumen de control** (también conocido como un **sistema abierto**), el cual se define como una *región en el espacio elegida para su estudio*. El tamaño y la forma de un sistema pueden cambiar durante un proceso, pero nada de masa cruza sus límites. Por otra parte, en un volumen de control se permite que la masa entre o salga a través de sus límites, los cuales se conocen como **superficies de control.** Un volumen de control también puede moverse y deformarse durante un proceso, pero numerosas aplicaciones del mundo real se relacionan con volúmenes de control fijos e indeformables.

En la figura 4-52 se ilustra un sistema y un volumen de control para un desodorante que se rocía desde una lata. Cuando se analiza el proceso de atomización, una elección natural para el análisis es el fluido en movimiento y deformación (un sistema) o el volumen limitado por las superficies interiores de la lata (un volumen de control). Estas dos selecciones son idénticas antes de atomizar el desodorante. Cuando se descarga algo del contenido de la lata, en el enfoque de sistema se considera la masa descargada como parte de ese sistema y se le sigue el rastro (una labor en verdad difícil); por lo tanto, la masa del sistema permanece constante. Desde el punto de vista conceptual, esto equivale a sujetar un globo sin inflar a la boquilla de la lata y dejar que el líquido atomizado lo infle. La superficie interior del globo ahora se convierte en parte del límite del sistema. Sin embargo, en el enfoque de volumen de control no se tiene interés en lo absoluto acerca del desodorante que ha escapado de la lata (otro interés que no sea el de sus propiedades a la salida) y de donde la masa del volumen de control disminuye durante este proceso, en tanto que su volumen permanece constante. Por lo tanto, en el enfoque de sistema se trata el proceso de atomización como una expansión del volumen del propio sistema, en tanto que en el de volumen de control se le considera como una descarga de fluido a través de la superficie de control de ese volumen que se considera fijo.

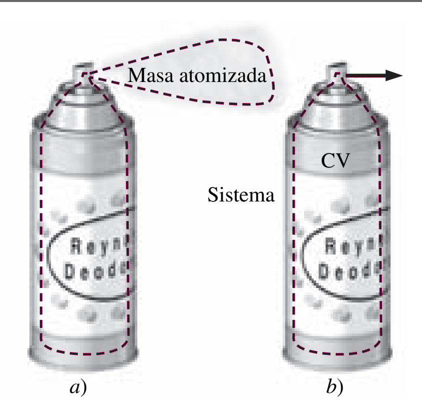


FIGURA 4-52
Dos métodos de análisis de la atomización de desodorante desde una lata: *a*) se sigue el fluido conforme se mueve y se deforma. Éste es el *enfoque de sistema* (ninguna masa cruza la frontera y la masa total del sistema permanece fija). *b*) Se considera un volumen interior fijo de la lata. Este es el *enfoque de volumen de control* (la masa cruza la frontera).

La mayoría de los principios de la mecánica de fluidos se adoptan de la mecánica de los sólidos, en donde las leyes físicas que se refieren a las razones de cambio respecto del tiempo de propiedades extensivas se expresan para sistemas. En la mecánica de fluidos, con frecuencia es más conveniente trabajar con volúmenes de control y, por lo tanto, surge la necesidad de relacionar los cambios en un volumen de control con los cambios en un sistema. La relación entre las razones de cambio respecto del tiempo de una propiedad extensiva para un sistema y para un volumen de control se expresa por el **teorema del transporte de Reynolds (RTT,** *Reynolds transport theorem*), el cual proporciona el vínculo entre los enfoques de sistema y de volumen de control (Fig. 4-53). El RTT recibe ese nombre en honor al ingeniero inglés Osborne Reynolds (1842-1912), quien realizó un gran esfuerzo por avanzar su aplicación en la mecánica de fluidos.

La forma general del teorema del transporte de Reynolds se puede deducir cuando se considera un sistema con una forma e interacciones arbitrarias, pero la deducción es bastante complicada. Para captar el significado fundamental del teorema, primero se le deduce de manera directa, usando una configuración geométrica sencilla y, a continuación, generalizando los resultados.

Considere el flujo de izquierda a derecha por una porción divergente (en expansión) de un campo de flujo como se ilustra en la figura 4-54. Los límites superior e inferior del fluido que se considera son *líneas de corriente* del flujo y se supone que éste es uniforme a través de cualquier sección transversal entre estas dos líneas. Se elige el volumen de control como un volumen fijo entre las secciones (1) y (2) del campo de flujo. Tanto la sección (1) como (2) son normales a la dirección del flujo. En algún instante inicial t, el sistema coincide con el volumen de control y, por lo tanto, los dos son idénticos (la región sombreada de color gris en la figura 4-54). Durante el intervalo de tiempo Δt, el sistema se mueve en la dirección del flujo, con velocidades uniformes V_1 en la sección (1), y V_2 en la sección (2). El sistema en este instante ulterior está indicado por la región sombreada con rectas inclinadas. La región descubierta por el sistema du-

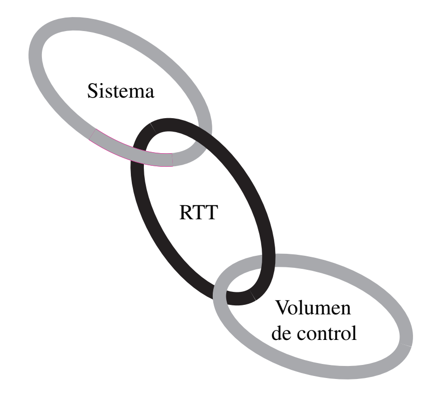


FIGURA 4-53
El *teorema del transporte de Reynolds* (RTT) proporciona un vínculo entre el enfoque de sistema y el de volumen de control.

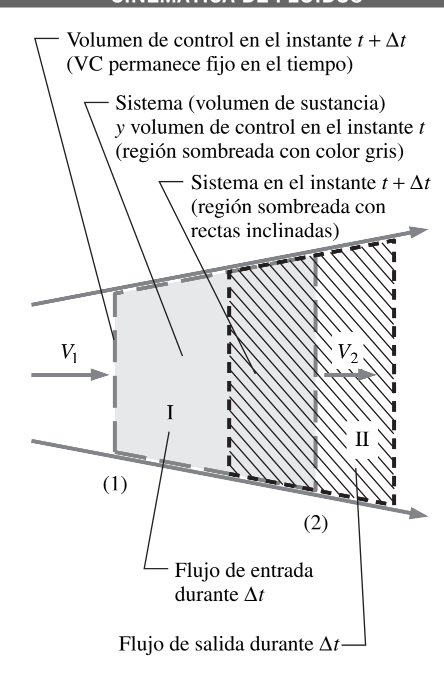


FIGURA 4-54
Un *sistema* en movimiento (región sombreada con rectas inclinadas) y un *volumen* fijo de control (región sombreada en color gris) en una porción divergente de un campo de flujo, en los instantes t y $t + \Delta t$. Los límites superior e inferior son líneas de corriente del flujo.

rante este movimiento está designada como sección I (forma parte del VC) y la nueva región cubierta por el sistema está designada como sección II (no forma parte del VC). Por lo tanto, en el instante $t + \Delta t$, el sistema consiste en el mismo fluido, pero ocupa la región CV − I + II. El volumen de control está fijo en el espacio y en todo instante continúa siendo la región sombreada de color gris que se ha marcado como CV.

Represente por B cualquier **propiedad extensiva** (como la masa, la energía o la cantidad de movimiento) y sea $b = B/m$ la **propiedad intensiva** correspondiente. Cuando se observe que las propiedades extensivas son aditivas, la propiedad extensiva B del sistema, en los instantes t y $t + \Delta t$ se puede expresar como:

$$B_{\text{sist},\, t} = B_{\text{VC},\, t} \qquad \text{(el sistema y el VC (volumen de control) coinciden en el instante } t\text{)}$$

$$B_{\text{sist},\, t+\Delta t} = B_{\text{VC},\, t+\Delta t} - B_{\text{I},\, t+\Delta t} + B_{\text{II},\, t+\Delta t}$$

Cuando se resta la primera ecuación de la segunda y se divide entre Δt da:

$$\frac{B_{\text{sist},\, t+\Delta t} - B_{\text{sist},\, t}}{\Delta t} = \frac{B_{\text{VC},\, t+\Delta t} - B_{\text{VC},\, t}}{\Delta t} - \frac{B_{\text{I},\, t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{B_{\text{II},\, t+\Delta t}}{\Delta t}$$

Se toma el límite cuando $\Delta t \to 0$, y se utiliza la definición de derivada, se obtiene:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \frac{dB_{\text{VC}}}{dt} - \dot{B}_{\text{ent}} + \dot{B}_{\text{sal}} \tag{4-38}$$

o bien:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \frac{dB_{\text{VC}}}{dt} - b_1\rho_1 V_1 A_1 + b_2\rho_2 V_2 A_2$$

puesto que

$$B_{\text{I},\, t+\Delta t} = b_1 m_{\text{I},\, t+\Delta t} = b_1\rho_1 \mathcal{V}_{\text{I},\, t+\Delta t} = b_1\rho_1 V_1\, \Delta t\, A_1$$

$$B_{\text{II},\, t+\Delta t} = b_2 m_{\text{II},\, t+\Delta t} = b_2\rho_2 \mathcal{V}_{\text{II},\, t+\Delta t} = b_2\rho_2 V_2\, \Delta t\, A_2$$

y

$$\dot{B}_{\text{ent}} = \dot{B}_{\text{I}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\text{I},\, t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{b_1 \quad _1 V_1\, \Delta t\, A_1}{\Delta t} = b_1 \quad _1 V_1\, A_1$$

$$\dot{B}_{\text{sal}} = \dot{B}_{\text{II}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\text{II},\, t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{b_2 \quad _2 V_2\, \Delta t\, A_2}{\Delta t} = b_2 \quad _2 V_2\, A_2$$

donde A_1 y A_2 son las áreas de las secciones transversales en las ubicaciones 1 y 2. La ecuación 4-38 expresa que *la razón de cambio respecto del tiempo de la propiedad B del sistema es igual a la razón de cambio de B respecto del tiempo del volumen de control más el flujo neto de B hacia fuera de este volumen debido a la masa que cruza la superficie de control*. Ésta es la relación deseada ya que relaciona el cambio de una propiedad de un sistema con el cambio de esa propiedad para un volumen de control. Note que la ecuación 4-38 se aplica en cualquier instante, en donde se supone que el sistema y el volumen de control ocupan el mismo espacio en ese instante particular.

En este caso, el flujo de entrada $\dot{B}_{\text{ent}}$ y el de salida, $\dot{B}_{\text{sal}}$ de la propiedad B son fáciles de determinar, ya que sólo se tiene una entrada y una salida, y las velocidades son normales a las superficies en las secciones (1) y (2). Sin embargo, en general, se pueden tener varias entradas y salidas y puede ser que la velocidad no sea normal a la superficie de control en el punto de ingreso. Asimismo, puede ser que la velocidad no sea uniforme. Con la finalidad de generalizar el proceso, se considera un área superficial diferencial, dA sobre la superficie de control y se denota su **vector normal exterior unitario** por $\vec{n}$. El gasto de la propiedad b a través de dA es $\rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA$ ya que el producto punto $\vec{V} \cdot \vec{n}$ da

la componente normal de la velocidad. Entonces, por integración se determina que la razón neta de flujo de salida a través de toda la superficie de control (SC) es (Fig. 4-55):

$$\dot{B}_{\text{neta}} = \dot{B}_{\text{sal}} - \dot{B}_{\text{ent}} = \int_{SC} b\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \quad \text{(flujo de entrada si es negativa)} \tag{4-39}$$

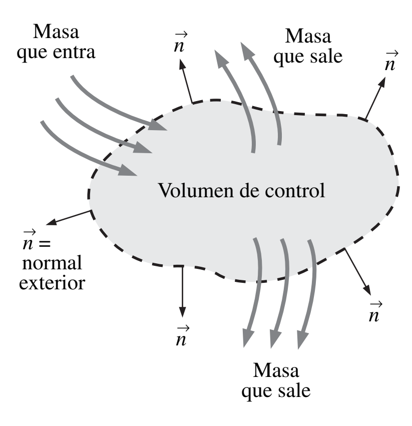


FIGURA 4-55
La integral de $b\rho\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA$ sobre la superficie de control da la cantidad neta de la propiedad que fluye hacia afuera del volumen de control (hacia el volumen de control, si es negativa) por unidad de tiempo.

Un aspecto importante de esta relación es que de manera automática se resta el flujo de entrada del de salida, como se explica a continuación. El producto punto del vector de velocidad en un punto de la superficie de control y el vector normal exterior en ese punto es $\vec{V} \cdot \vec{n} = |\vec{V}||\vec{n}| \cos \theta = |\vec{V}| \cos \theta$, en donde θ es el ángulo entre esos dos vectores, como se muestra en la figura 4-56. Para $\theta < 90°$, se tiene $\cos \theta > 0$ y donde $\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$ para el flujo de salida de masa del volumen de control y para $\theta > 90°$, se tiene $\cos \theta < 0$ y donde $\vec{V} \cdot \vec{n} < 0$ para el flujo de entrada de masa al volumen de control. Por lo tanto, la cantidad diferencial $\rho b\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA$ es positiva para la masa que fluye hacia fuera del volumen de control y negativa para la masa que fluye hacia dentro de ese volumen, y su integral sobre la superficie completa de control da la razón de flujo neto de salida de la propiedad B debido a la masa que cruza la superficie.

En general, dentro del volumen de control, las propiedades pueden variar con la posición. En ese caso, la cantidad total de la propiedad B dentro del volumen de control debe determinarse por integración:

$$B_{\text{VC}} = \int_{\text{VC}} \rho b\, dV \tag{4-40}$$

Por tanto, el término dB_{CV}/dt de la ecuación 4-38 es igual a $\frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho b\, dV$, y representa la razón de cambio respecto del tiempo del contenido de la propiedad B en el volumen de control. Un valor positivo de dB_{CV}/dt indica un aumento en el contenido de B, y uno negativo indica una disminución. Con la sustitución de las ecuaciones 4-39 y 4-40 en la ecuación 4-38 se llega al teorema del transporte de Reynolds, conocido también como *transformación de sistema a volumen de control* para un volumen fijo de control:

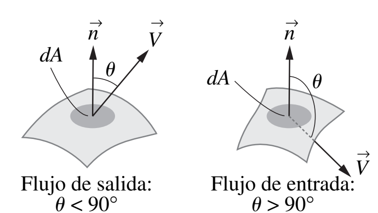
RTT, VC fijo:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho b\, dV + \int_{\text{SC}} \rho b\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \tag{4-41}$$

Puesto que el volumen de control no se mueve ni se deforma con el tiempo, la derivada respecto del tiempo en el primer término de la expresión del lado derecho de la ecuación se puede introducir a la integral, dado que el dominio de integración no cambia con el tiempo (en otras palabras, es irrelevante si se deriva o se integra primero). Pero, en ese caso, la derivada respecto del tiempo se debe expresar como una derivada *parcial* ($\partial/\partial t$), ya que tanto la densidad como la cantidad b pueden depender de la posición dentro del volumen de control. Una forma alternativa del teorema del transporte de Reynolds para un volumen fijo de control es:

RTT alternativo, VC fijo:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \int_{\text{VC}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{\text{SC}} \rho b\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \tag{4-42}$$



$\vec{V} \cdot \vec{n} = |\vec{V}||\vec{n}| \cos \theta = V \cos \theta$
Si $\theta < 90°$, entonces $\cos \theta > 0$ (flujo de salida).
Si $\theta > 90°$, entonces $\cos \theta < 0$ (flujo de entrada).
Si $\theta = 90°$, entonces $\cos \theta = 0$ (ningún flujo).

FIGURA 4-56
Flujo de entrada y de salida de masa a través del área diferencial de una superficie de control.

La ecuación 4-41 se dedujo para un volumen *fijo* de control. Sin embargo, muchos sistemas prácticos, como la turbina y las aspas de una hélice, incluyen volúmenes no fijos de control. Por fortuna, la ecuación 4-41 también es válida para volúmenes de control en *movimiento* o *deformación,* siempre que la velocidad absoluta $\vec{V}$ del fluido del último término se reemplace por la **velocidad relativa** $\vec{V}_r$,

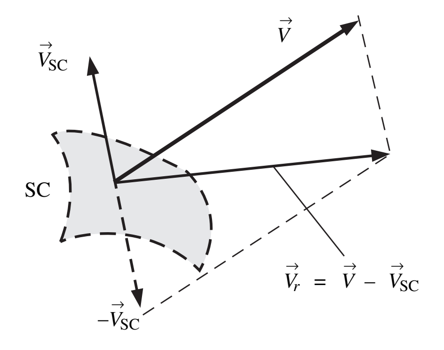


FIGURA 4-57
La *velocidad relativa* que cruza una superficie de control se encuentra por la adición vectorial de la velocidad absoluta del fluido y la velocidad opuesta a la velocidad local de la superficie de control.

Velocidad relativa: $$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{SC} \qquad \textbf{(4-43)}$$

donde $\vec{V}_{SC}$ es la velocidad local de la superficie de control (Fig. 4-57). De donde, la forma más general del teorema del transporte de Reynolds es:

RTT, VC no fijo: $$\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b \, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} \, dA \qquad \textbf{(4-44)}$$

Note que para un volumen de control que se mueve o deforma con el tiempo, la derivada respecto del tiempo debe aplicarse *después* de la integración, como en la ecuación 4-44. Como un ejemplo sencillo de un volumen de control en movimiento, considere un automóvil de juguete que se desplaza a una velocidad absoluta constante $\vec{V}_{auto}$ = 10 km/h hacia la derecha. Un chorro de agua a alta velocidad (velocidad absoluta = $\vec{V}_{chorro}$ = 25 km/h hacia la derecha) choca contra la parte posterior del automóvil de juguete y lo impulsa (Fig. 4-58). Si se traza un volumen de control alrededor del cochecito, la velocidad relativa es $\vec{V}_r$ = 25 − 10 = 15 km/h hacia la derecha. Esto representa la velocidad a la cual un observador que se mueve con el volumen de control (en movimiento con el coche) observaría el fluido cruzar la superficie de control. En otras palabras, $\vec{V}_r$ es la velocidad del fluido que se expresa con relación a un sistema de coordenadas que se mueve con el volumen de control.

Por último, mediante la aplicación del teorema de Leibnitz, se puede demostrar que el teorema del transporte de Reynolds para un volumen de control general que se mueve o deforma (Ec. 4-44) equivale a la forma dada por la ecuación 4-42, la cual se repite enseguida:

RTT alternativo, VC no fijo: $$\frac{dB_{sist}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b) \, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \qquad \textbf{(4-45)}$$

En contraste con la ecuación 4-44, el vector de velocidad $\vec{V}$ de la ecuación 4-45 debe tomarse como la velocidad *absoluta* (según se ve desde un marco de referencia fijo) para aplicarse a un volumen no fijo de control.

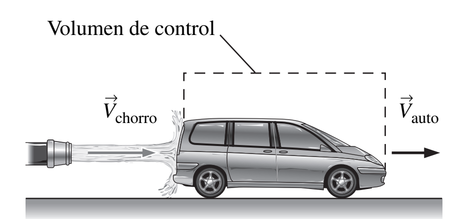
Durante el flujo estacionario, la cantidad de la propiedad B que está dentro del volumen de control permanece constante en el tiempo y la derivada respecto del tiempo de la ecuación 4-44 resulta cero. Entonces el teorema del transporte de Reynolds se reduce a:

RTT, flujo estacionario: $$\frac{dB_{sist}}{dt} = \int_{SC} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} \, dA \qquad \textbf{(4-46)}$$

Note que, a diferencia del volumen de control, el contenido de la propiedad B del sistema inclusive puede cambiar con el tiempo durante un proceso estacionario. Pero, en este caso, el cambio debe ser igual a la propiedad neta transportada por la masa a través de la superficie de control (un efecto convectivo en lugar de un efecto no estacionario).

En la mayoría de las aplicaciones prácticas del RTT a la ingeniería, el fluido cruza el límite del volumen de control en un número finito de admisiones y salidas bien definidas (Fig. 4-59). En esos casos, es conveniente cortar la superficie de control directamente a través de cada admisión y cada salida, y reemplazar la integral de superficie de la ecuación 4-44 con expresiones algebraicas aproximadas en cada una de ellas, basadas en los valores *promedios* de las propiedades del fluido que cruza la frontera. Defina ρ_{prom}, b_{prom} y $V_{r,\,prom}$ como los valores promedio de ρ, b y V_r, respectivamente, a través de una admisión o de una salida con área A de la sección transversal (por ejemplo, $b_{prom} = (1/A)\int_A b \, dA$).

Marco de referencia absoluto:



Marco de referencia relativo:

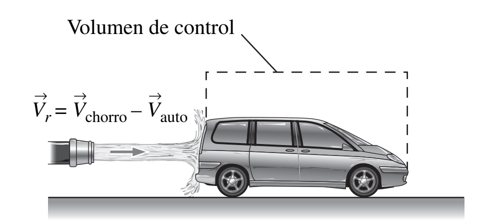


FIGURA 4-58
Teorema del transporte de Reynolds aplicado a un volumen de control en movimiento a velocidad constante.

Entonces, se tiene una *aproximación* de las integrales de superficie del RTT(Ec. 4-44), cuando se aplican sobre una admisión o una salida de área A de la sección transversal, extrayendo la propiedad b de la integral de superficie y reemplazándola con su promedio. Ésta conduce a:

$$\int_A \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n}\, dA \cong b_{\text{prom}} \int_A \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n}\, dA = b_{\text{prom}} \dot{m}_r$$

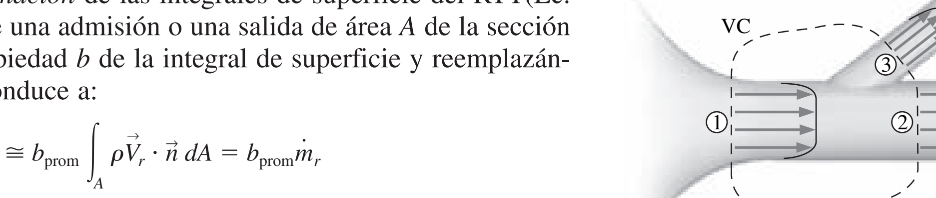


FIGURA 4-59
Ejemplo de volumen de control en el cual se tiene una admisión bien definida (1) y dos salidas bien definidas (2 y 3). En esos casos, la integral sobre la superficie de control en el RTT se puede escribir de manera más conveniente en términos de los valores promedios de las propiedades del fluido que cruza cada admisión y cada salida.

donde $\dot{m}_r$ es el gasto de masa a través de la admisión o de la salida en relación con la superficie de control (en movimiento). La aproximación en esta ecuación es exacta cuando la propiedad b es uniforme sobre el área A de la sección transversal. La ecuación 4-44 queda:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho b\, dV + \sum_{\text{sal}} \underbrace{\dot{m}_r b_{\text{prom}}}_{\text{para cada salida}} - \sum_{\text{adm}} \underbrace{\dot{m}_r b_{\text{prom}}}_{\text{para cada admisión}} \tag{4-47}$$

En algunas aplicaciones, se puede desear volver a escribir la ecuación 4-47 en términos de gasto volumétrico (en vez de gasto de masa). En esos casos, se hace una aproximación adicional, que $\dot{m}_r \approx \rho_{\text{prom}} \dot{V}_r = \rho_{\text{prom}} V_{r,\,\text{prom}} A$. Esta aproximación es exacta cuando la densidad del fluido ρ es uniforme sobre A; entonces la ecuación 4-47 se reduce a:

RTT aproximado para admisiones y salidas bien definidas:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho b\, dV + \sum_{\text{sal}} \underbrace{\rho_{\text{prom}} b_{\text{prom}} V_{r,\,\text{prom}} A}_{\text{para cada salida}} - \sum_{\text{adm}} \underbrace{\rho_{\text{prom}} b_{\text{prom}} V_{r,\text{prom}} A}_{\text{para cada admisión}} \tag{4-48}$$

Note que estas aproximaciones simplifican mucho el análisis, pero puede ser que no siempre sean exactas, en especial en los casos en donde la distribución de la velocidad a lo largo del área de la admisión o salida no es muy uniforme (por ejemplo, los flujos en tubos; Fig. 4-59). En particular, la integral de la superficie de control de la ecuación 4-45 se vuelve *no lineal* cuando la propiedad b contiene un término de velocidad (por ejemplo, cuando se aplica el RTT a la ecuación del momento lineal, $b = \vec{V}$), y la aproximación de la ecuación 4-48 conduce a errores. Por fortuna, se pueden eliminar los errores por medio de la inclusión de *factores de corrección* en la ecuación 4-48, como se comenta en los capítulos 5 y 6.

Las ecuaciones 4-47 y 4-48 se aplican a volúmenes de control fijos o en movimiento pero, como se comentó con anterioridad, se debe usar la *velocidad relativa* para el caso de un volumen no fijo de control. Por ejemplo, en la ecuación 4-47, el gasto de masa, $\dot{m}_r$ es relativo a la superficie (en movimiento) de control, por ello el subíndice r.

*Deducción alterna del teorema del transporte de Reynolds

Es posible una deducción matemática más elegante del teorema del transporte de Reynolds mediante el uso del **teorema de Leibnitz** (véase Kundu, 1990). Es probable que el lector esté familiarizado con la versión unidimensional de este teorema, el cual le permite derivar una integral cuyos límites de integración son funciones de la variable con respecto de la cual necesita derivar (Fig. 4-60):

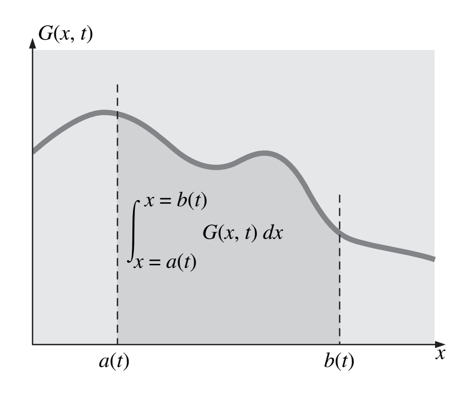


FIGURA 4-60
Se necesita el *teorema unidimensional de Leibnitz* cuando se calcula la derivada respecto del tiempo de una integral (con respecto a x) para la cual los límites de la misma son funciones del tiempo.

Teorema unidimensional de Leibnitz:

$$\frac{d}{dt}\int_{x=a(t)}^{x=b(t)} G(x, t)\, dx = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}\, dx + \frac{db}{dt} G(b, t) - \frac{da}{dt} G(a, t) \tag{4-49}$$

* Se puede omitir esta sección sin pérdida de continuidad.

El teorema de Leibnitz toma en cuenta el cambio de los límites $a(t)$ y $b(t)$ respecto del tiempo, así como los cambios no estacionarios del integrando $G(x, t)$ con el tiempo.

EJEMPLO 4-10 Integración unidimensional de Leibnitz

Simplifique la siguiente expresión tanto como sea posible::

$$F(t) = \frac{d}{dt}\int_{x=0}^{x=Ct} e^{-x^2}\, dx \tag{1}$$

SOLUCIÓN Debe evaluarse $F(t)$ a partir de la expresión dada.

Análisis Se podría intentar primero la integración y, a continuación, derivar, pero ya que la ecuación 1 es de la forma de la ecuación 4-49, se usará el teorema unidimensional de Leibnitz. En este caso, $G(x, t) = e^{-x^2}$ (G no es función del tiempo en este ejemplo sencillo). Los límites de integración son $a(t) = 0$ y $b(t) = Ct$. De donde:

$$F(t) = \int_a^b \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}}_{0} dx + \underbrace{\frac{db}{dt}}_{C}\underbrace{G(b, t)}_{e^{-b^2}} - \underbrace{\frac{da}{dt}}_{0} G(a, t) \quad \rightarrow \quad \mathbf{F(t) = Ce^{-C}} \tag{2}$$

Discusión Se le da la bienvenida al lector para que intente obtener la misma solución sin aplicar el teorema de Leibnitz.

En tres dimensiones, el teorema de Leibnitz para una integral de *volumen* es:

Teorema tridimensional de Leibnitz:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} G(x, y, z, t)\, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial G}{\partial t} dV + \int_{A(t)} G\vec{V}_A \cdot \vec{n}\, dA \tag{4-50}$$

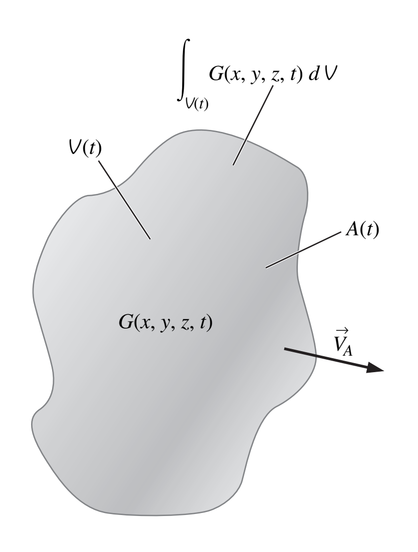


FIGURA 4-61
Se necesita el *teorema tridimensional de Leibnitz* cuando se calcula la derivada respecto del tiempo de una integral de volumen para la cual el propio volumen se mueve o se deforma con el tiempo. Resulta que se puede usar la forma tridimensional del teorema Leibnitz en una deducción alternativa del teorema del transporte de Reynolds.

donde $V(t)$ es un volumen en movimiento o deformación (función del tiempo), $A(t)$ es su superficie (frontera) y $\vec{V}_A$ es la velocidad absoluta de esta superficie (en movimiento) (Fig. 4-61). La ecuación 4-50 es válida para *cualquier* volumen, que se mueve o se deforma arbitrariamente en el espacio y tiempo. En beneficio de la coherencia con los análisis anteriores, se hace que la integración de G sea ρb para su aplicación al flujo de fluidos:

Teorema tridimensional de Leibnitz aplicado al flujo de fluidos:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho b\, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{A(t)} \rho b\vec{V}_A \cdot \vec{n}\, dA \tag{4-51}$$

Si se aplica el teorema de Leibnitz al caso especial de un **volumen de sustancia** (un sistema de masa fija que se mueve con el flujo del fluido), entonces $\vec{V}_A = \vec{V}$ en todas partes sobre la superficie de este volumen de sustancia, porque se mueve *con* el fluido. En este caso, $\vec{V}$ es la velocidad local del fluido y la ecuación 4-51 queda:

Teorema de Leibnitz aplicado a un volumen de sustancia:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho b\, dV = \frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{A(t)} \rho b\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \tag{4-52}$$

La ecuación 4-52 es válida en cualquier instante t. Se define el volumen de control de manera tal que, en este instante t, el volumen y el sistema ocupen el mismo espacio; en otras palabras, que sean *coincidentes*. En algún instante ulterior $t + \Delta t$, el sistema se movió y deformó con el flujo, pero el volumen de control puede haberse movido y deformado de manera diferente (Fig. 4-62). Sin

embargo, la clave es que *en el instante t, el sistema (volumen de sustancia) y el volumen de control son uno y el mismo*. Así, se puede evaluar la integral de volumen de la parte derecha de la ecuación 4-52 sobre el *volumen de control* en el instante t, y la integral de superficie se puede evaluar sobre la *superficie de control* en el instante t; donde:

RTT general, VC no fijo:
$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \int_{\text{VC}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{\text{SC}} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad \textbf{(4-53)}$$

Esta expresión es idéntica a la de la ecuación 4-45 y es válida para un volumen de control con forma arbitraria, en movimiento o deformación, en el instante t. Recuerde que $\vec{V}$ de la ecuación 4-53 es la velocidad *absoluta* del fluido.

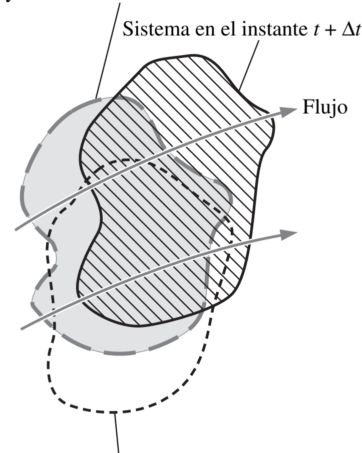


FIGURA 4-62
El volumen de sustancia (sistema) y el volumen de control ocupan el mismo espacio en el instante t (el área sombreada), pero se mueven y se deforman de manera diferente. En un instante ulterior no son coincidentes.

EJEMPLO 4-11 **Teorema del transporte de Reynolds en función de la velocidad relativa**

A partir del teorema de Leibnitz y del teorema general del transporte de Reynolds para un volumen de control que se mueve y deforma arbitrariamente, ecuación 4-53, pruebe que la ecuación 4-44 es válida.

SOLUCIÓN Debe probarse la ecuación 4-44.

Análisis La versión tridimensional general del teorema de Leibnitz (Ec. 4-50) se aplica a *cualquier* volumen. Elija aplicarlo al volumen de control de interés, el cual puede estar en movimiento o deformándose de manera diferente que el volumen de sustancia (Fig. 4-62). Al hacer G igual a ρb, la ecuación 4-50 queda:

$$\frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho b\, dV = \int_{\text{VC}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{\text{SC}} \rho b \vec{V}_{\text{SC}} \cdot \vec{n}\, dA \quad \textbf{(1)}$$

Se despeja la integral del volumen de control en la ecuación 4-53,

$$\int_{\text{VC}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV = \frac{dB_{\text{sist}}}{dt} - \int_{\text{SC}} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \quad \textbf{(2)}$$

sustituye la ecuación 2 en la 1, y se obtiene

$$\frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho b\, dV = \frac{dB_{\text{sist}}}{dt} - \int_{\text{SC}} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA + \int_{\text{SC}} \rho b \vec{V}_{\text{SC}} \cdot \vec{n}\, dA \quad \textbf{(3)}$$

Se combinan los dos últimos términos y se reordenan:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho b\, dV + \int_{\text{SC}} \rho b(\vec{V} - \vec{V}_{\text{SC}}) \cdot \vec{n}\, dA \quad \textbf{(4)}$$

Pero, recuérdese que la velocidad relativa se define por la ecuación 4-43; donde:

RTT en términos de la velocidad relativa:

$$\boldsymbol{\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho b\, dV + \int_{\text{SC}} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n}\, dA} \quad \textbf{(5)}$$

Discusión Efectivamente, la ecuación 5 es idéntica a la ecuación 4-44 y se demuestra el poder y la elegancia del teorema de Leibnitz.

Relación entre la derivada material y el RTT

El lector puede haber advertido una semejanza o analogía entre la derivada material, comentada en la sección 4-1, y el teorema del transporte de Reynolds, discutido en esta sección. De hecho, los dos análisis representan métodos para trans-

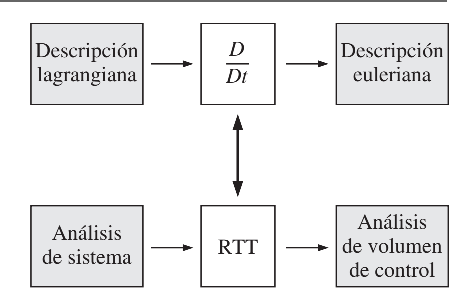


FIGURA 4-63
El teorema del transporte de Reynolds para volúmenes finitos (análisis integral) es análogo a la derivada material para volúmenes diferenciales (análisis diferencial). En ambos casos, se transforma de un punto de vista lagrangiano o de sistema a un punto de vista euleriano o de volumen de control.

formar conceptos fundamentalmente lagrangianos a interpretaciones eulerianas de esos conceptos. Aun cuando el teorema del transporte de Reynolds trata de volúmenes de control de tamaño finito y la derivada material lo hace con partículas infinitesimales de fluido, la misma interpretación física fundamental se aplica a los dos (Fig. 4-63). De hecho, el teorema del transporte de Reynolds se puede concebir como la contraparte integral de la derivada material. En cualquiera de los dos casos, la razón total de cambio de alguna propiedad que sufre una porción identificada de fluido consta de dos partes: se tiene una parte local o no estacionaria que toma en cuenta los cambios en el campo de flujo con el tiempo (compare el primer término de la parte derecha de la ecuación 4-12 con el de la ecuación 4-45). También existe una parte convectiva que toma en cuenta el movimiento del fluido de una región del flujo hacia otra (compare los segundos términos de las partes derechas de las ecuaciones 4-12 y 4-45).

Justamente como la derivada material se puede aplicar a cualquier propiedad de un fluido, escalar o vectorial, el teorema del transporte de Reynolds se puede aplicar también a cualquier propiedad escalar o vectorial. En los capítulos 5 y 6 se aplica el teorema del transporte de Reynolds a la conservación de la masa, de la energía, de la cantidad de movimiento y del momento angular, seleccionando como la propiedad B masa, energía, cantidad de movimiento y momento angular, respectivamente. De esta manera, se puede pasar con facilidad, al partir de las leyes fundamentales de conservación del sistema (punto de vista lagrangiano), hacia formas que son válidas y útiles en un análisis del volumen de control (punto de vista euleriano).

RESUMEN

LA *mecánica de fluidos* se interesa en describir el movimiento de fluidos sin necesidad de analizar las fuerzas responsables que lo causan. Existen dos descripciones fundamentales del movimiento de fluidos: *lagrangiana* y *euleriana*. En una descripción lagrangiana se siguen cada una de las partículas del fluido o agrupaciones de partículas de éste, en tanto que en la descripción euleriana se define un *volumen de control* a través del cual el fluido fluye hacia adentro o hacia afuera. Se transforman las ecuaciones del movimiento, de lagrangianas a eulerianas, mediante la aplicación del *teorema del transporte de Reynolds* (*RTT*) para sistemas de volumen finito. Para alguna propiedad extensiva B o su correspondiente propiedad intensiva b:

Derivada material:
$$\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})b$$

RTT general, VC no fijo:
$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \int_{\text{VC}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{\text{SC}} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA$$

En ambas ecuaciones, el cambio total de la propiedad, siguiendo una partícula de fluido o siguiendo un sistema, está formado por dos partes: una parte local (no estacionaria) y una parte convectiva (de movimiento).

Existen varias maneras de visualizar y analizar los campos de flujo: *líneas de corriente, líneas de traza, líneas de trayectoria, líneas fluidas*, *formación de imágenes de flujo a lo largo de superficie*, *fotografías por sombras*, *estriogramas*, *gráficas de perfiles*, *gráficas vectoriales* y *gráficas de contornos*. En este capítulo se definen cada una de ellas y se dan ejemplos. En el flujo no estacionario general, las líneas de corriente, las de traza y las de trayectoria difieren, pero *en el flujo estacionario*, *las líneas de corriente*, *las de traza y las de trayectoria coinciden*.

Se necesitan cuatro razones fundamentales del movimiento (*razones de deformación*) para describir por completo la cinemática del flujo de un fluido: la *velocidad* (razón de traslación), la *velocidad angular* (razón de rotación), la *razón de deformación lineal*, y la *razón de deformación por esfuerzo cortante*. La *vorticidad* es una propiedad de los flujos de fluidos que indica la *rotacionalidad* de las partículas del fluido.

Vector vorticidad:
$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{rot}(\vec{V}) = 2\vec{\omega}$$

Una región del flujo es *irrotacional* si la vorticidad es cero en esa región.

Los conceptos aprendidos en este capítulo se usan repetidas veces en todo el resto del libro. Se aplica el RTT para transformar las leyes de conservación de los sistemas cerrados hacia los volúmenes de control en los capítulos 5 y 6, y una vez más en el capítulo 9, en la deducción de las ecuaciones diferenciales del movimiento de fluidos. El papel de la vorticidad y de la irrotacionalidad se analiza nuevamente con mayor detalle en el capítulo 10, en donde se demuestra que la aproximación de irrotacionalidad reduce considerablemente la complejidad de la resolución de los problemas relacionados con flujos de fluidos. Por último, en casi todos los capítulos de este libro se usan varios tipos de visualización del flujo y de gráficas de los datos para describir la cinemática de campos de flujo que se dan como ejemplos.



PROYECTOR DE APLICACIONES ■ Actuadores fluídicos

Autor invitado: Ganesh Raman,
Illinois Institute of Technology

Los actuadores fluídicos son aparatos en los que se utilizan circuitos lógicos de fluidos para producir velocidad oscilatoria o perturbaciones de la presión en chorros y capas de deslizamiento, para retrasar la separación, mejorar el mezclado y suprimir el ruido. Son potencialmente útiles para aplicaciones de control del flujo en la capa de deslizamiento, por muchas razones: no tienen piezas móviles; pueden producir perturbaciones que son controlables en frecuencia, amplitud y fase; pueden operar en medios ambientes térmicos severos y no son susceptibles a la interferencia electromagnética, son fáciles de integrar en un aparato en funcionamiento. Aun cuando la tecnología fluídica ha estado por allí durante muchos años, los avances recientes en la miniaturización y la microfabricación los han convertido en candidatos muy atractivos para el uso práctico. El actuador fluídico produce un flujo oscilatorio autosostenido que aplica los principios de fijación a la pared y contraflujo que ocurren dentro de los pasos en miniatura del aparato.

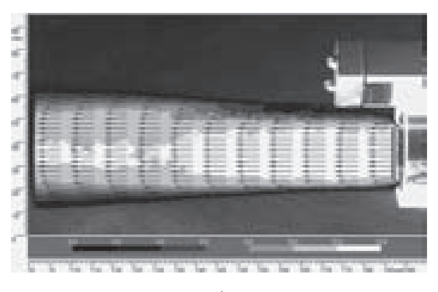
En la figura 4-64 se demuestra la aplicación de un actuador fluídico para dirigir el empuje de un chorro. La dirección fluídica del empuje es importante para los diseños futuros de aeronaves, ya que pueden mejorar la maniobrabilidad, sin la complejidad de las superficies adicionales cercanas al escape de la tobera. En las tres imágenes de la figura 4-64, el chorro primario se descarga de derecha a izquierda y un solo actuador fluídico está ubicado en la parte superior. En la figura 4-64*a*, se muestra el chorro no perturbado. En las figuras 4-64*b* y *c* se muestra el efecto de imprimir dirección en dos niveles de actuación fluídica. Los cambios producidos en el chorro primario se caracterizan con la aplicación de velocimetría por imagen de partículas (PIV, *particle image velocimetry*). Una explicación simplificada es la siguiente: en esta técnica se introducen partículas trazadoras en el flujo y se iluminan mediante una cortina delgada de luz láser a la que se le pulsa para congelar el movimiento de esas partículas. La luz láser dispersada por las partículas se registra en dos instantes usando una cámara digital. Cuando se aplica una correlación espacial cruzada se obtiene el vector de desplazamiento local. Los resultados indican que existe la posibilidad de integrar subelementos fluídicos múltiples en los componentes de aeronaves para mejorar el desempeño.

En realidad, la figura 4-64 es una combinación de gráfica vectorial y gráfica de contornos. Los vectores de velocidad están sobrepuestos a las gráficas de contorno de la magnitud de la velocidad (rapidez). Las regiones blancas representan altas velocidades y las oscuras representan las bajas.

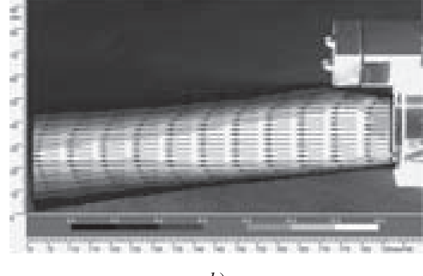
Bibliografía

Raman, G., Packiarajan, S., Papadopoulos, G., Weissman, C. y Raghu, S., "Jet Thrust Vectoring Using a Miniature Fluidic Oscillator", ASME FEDSM 2001-18057, 2001.

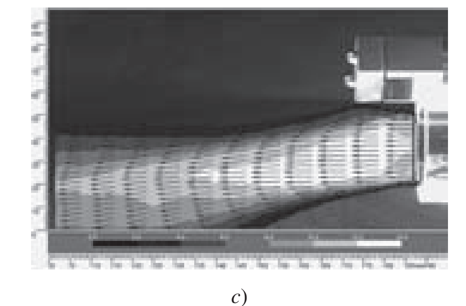
Raman, G., Raghu, S. y Bencic, T. J., "Cavity Resonance Suppression Using Miniature Fluidic Oscillators", artículo 99-1900 de la AIAA, 1999.



a)



b)



c)

FIGURA 4-64
Campo de velocidad promediado en el tiempo, de un chorro de un actuador fluídico. Los resultados son de 150 realizaciones PIV, sobrepuestos sobre una imagen del flujo impregnado de partículas sólidas. Cada séptimo y segundo vector velocidad se muestran en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente. Los niveles de contorno denotan la magnitud del campo de velocidad en m/s. *a*) Sin actuación; *b*) un solo actuador operando a 3 psig; *c*) un solo actuador operando a 9 psig.

Cortesía de Ganesh Raman, Illinois Institute of Technology. Reproducida con autorización.

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. R. J. Adrian, "Particle-Imaging Technique for Experimental Fluid Mechanics", *Annual Reviews in Fluid Mechanics*, 23, pp. 261-304, 1991.
2. J. M. Cimbala, H. Nagib y A. Roshko, "Large Structure in the Far Wakes of Two-Dimensional Bluff Bodies", *Journal of Fluid Mechanics*, 190, pp. 265-298, 1988.
3. R. J. Heinsohn y J. M. Cimbala, *Indoor Air Quality Engineering*, New York: Marcel-Dekker, 2003.
4. P. K. Kundu, *Fluid Mechanics*, San Diego, CA: Academic Press, 1990.
5. W. Merzkirch, *Flow Visualization*, 2a. ed. Orlando, FL: Academic Press, 1987.
6. G. S. Settles, *Schlieren and Shadowgraph Techniques: Visualizing Phenomena in Transparent Media*, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
7. M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.
8. F. M. White, *Viscous Fluid Flow*, 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1991.

PROBLEMAS*

Problemas de introducción

4-1C ¿Qué significa la palabra *cinemática*? Explique qué abarca el estudio de la *cinemática de fluidos*.

4-2 Considere el flujo estacionario de agua por una boquilla axialmente simétrica de una manguera de jardín (Fig. P4-2). A lo largo de la línea central de la boquilla, la magnitud de la velocidad del agua aumenta de u_{entrada} hasta u_{salida}, como se muestra en la figura. Las mediciones revelan que la magnitud de la velocidad del agua en la línea central aumenta en forma parabólica a lo largo de la boquilla. Escriba una ecuación para la magnitud de la velocidad en la línea central, $u(x)$, con base en los parámetros que se dan enseguida, desde $x = 0$ hasta $x = L$.

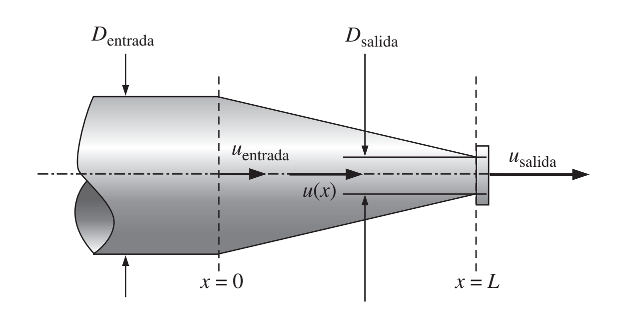
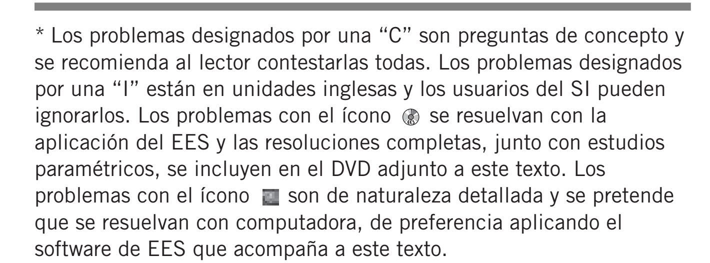


FIGURA P4-2


* Los problemas designados por una "C" son preguntas de concepto y se recomienda al lector contestarlas todas. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelvan con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este texto. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este texto.

4-3 Considere el siguiente campo bidimensional estacionario de velocidad:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 1.2x)\vec{i} + (-2.0 - 1.2y)\vec{j}$$

¿Existe un punto de estancamiento en este campo de flujo? Si es así, ¿dónde está? *Respuesta:* $x = -0.417$, $y = -1.67$

4-4 Considere el siguiente campo bidimensional estacionario de velocidad:

$$\vec{V} = (u, v) = (a^2 - (b - cx)^2)\vec{i} + (-2cby + 2c^2xy)\vec{j}$$

¿Existe un punto de estancamiento en este campo de flujo? Si es así, ¿dónde está?

Descripciones lagrangiana y euleriana

4-5C ¿Cuál es la *descripción lagrangiana* del movimiento de fluidos?

4-6C El método lagrangiano del análisis del flujo de fluidos ¿es más semejante al estudio de un sistema o al de un volumen de control? Explíquelo.

4-7C ¿Cuál es la *descripción euleriana* del movimiento de fluidos? ¿En qué difiere de la descripción lagrangiana?

4-8C Se coloca una sonda estacionaria en el flujo de un fluido y se mide la presión y la temperatura como funciones del tiem-

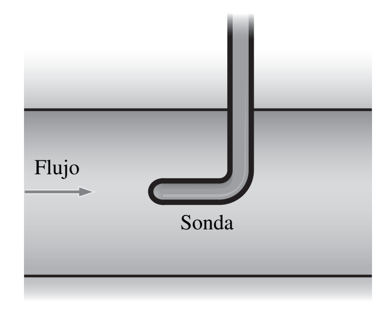


FIGURA P4-8C

po en un lugar del flujo (Fig. P4-8C). ¿Ésta es una medición lagrangiana o una euleriana? Explíquelo.

4-9C Una diminuta sonda electrónica de presión, neutralmente flotante, se libera dentro del tubo de admisión de una bomba de agua y transmite 2 000 lecturas de presión por segundo conforme pasa por dicha bomba. ¿Ésta es una medición lagrangiana o una euleriana? Explíquelo.

4-10C Unos meteorólogos lanzan un globo meteorológico hacia la atmósfera. Cuando el globo alcanza una altitud en donde es neutralmente flotante, transmite información acerca de las condiciones del tiempo hacia las estaciones de monitoreo en tierra (Fig. P4-10C). ¿Ésta es una medición lagrangiana o una euleriana? Explíquelo.

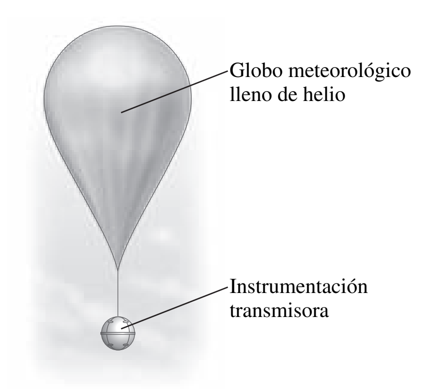


FIGURA P4-10C

4-11C A menudo se puede ver una sonda estática de Pitot que sobresale por la parte inferior de un avión (Fig. P4-11C). Conforme el avión vuela, la sonda mide la velocidad relativa del viento. ¿Ésta es una medición lagrangiana o una euleriana? Explíquelo.



FIGURA P4-11C

4-12C El método euleriano del análisis del flujo de fluidos ¿es más semejante al estudio de un sistema o al de un volumen de control? Explíquelo..

4-13C Defina un *campo estacionario de flujo* en el marco de referencia euleriano. En un flujo estacionario de este tipo, ¿es posible para una partícula de fluido experimentar una aceleración diferente de cero?

4-14C Haga una lista de al menos otros tres nombres para la derivada material y escriba una breve explicación acerca de por qué cada nombre es apropiado.

4-15 Considere el flujo bidimensional, incompresible y estacionario por un ducto convergente (Fig. P4-15). Un sencillo campo aproximado de velocidad para este flujo es:

$$\vec{V} = (u, v) = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j}$$

donde U_0 es la velocidad horizontal en $x = 0$. Note que en esta ecuación se ignoran los efectos viscosos a lo largo de las paredes, pero es una aproximación razonable para toda la gran parte del campo de flujo. Calcule la aceleración material para las partículas de fluido que pasan por este ducto. Dé su respuesta de dos maneras: 1) como las componentes a_x y a_y y de la aceleración y 2) como el vector aceleración $\vec{a}$.

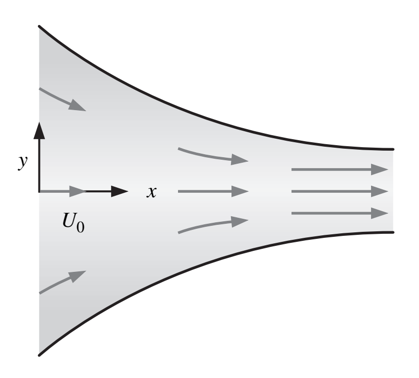


FIGURA P4-15

4-16 Se modela el flujo en un ducto convergente mediante el campo bidimensional y estacionario de velocidad del problema 4-15. El campo de presión se da por:

$$P = P_0 - \frac{\rho}{2}\left[2U_0 bx + b^2(x^2 + y^2)\right]$$

donde P_0 es la presión en $x = 0$. Genere una expresión para la razón de cambio de la presión *siguiendo una partícula de fluido*.

4-17 Se da un campo bidimensional, incompresible y estacionario de velocidad por las siguientes componentes en el plano *xy*:

$$u = 1.1 + 2.8x + 0.65y \qquad v = 0.98 - 2.1x - 2.8y$$

Calcule el campo de aceleración (encuentre expresiones para las componentes a_x y a_y), de la aceleración, y calcule la aceleración en el punto $(x, y) = (-2, 3)$. *Respuestas:* $a_x = -9.233$, $a_y = 14.37$

4-18 Se da un campo bidimensional, incompresible y estacionario de velocidad por las siguientes componentes en el plano *xy*:

$$u = 0.20 + 1.3x + 0.85y \qquad v = -0.50 + 0.95x - 1.3y$$

Calcule el campo de aceleración (encuentre expresiones para las componentes a_x y a_y) de la aceleración, y calcule la aceleración en el punto $(x, y) = (1, 2)$.

4-19 Para el campo de velocidad del problema 4-2, calcule la aceleración del fluido a lo largo de la línea central de la boquilla como función de x y los parámetros dados.

4-20 Considere el flujo estacionario en el difusor de un túnel de viento (Fig. P4-20). A lo largo de la línea central del difusor, la magnitud de la velocidad del aire disminuye de u_{entrada} hasta u_{salida} como se muestra en la figura. Las mediciones revelan que la magnitud de la velocidad del aire en la línea central decrece en forma parabólica a lo largo del difusor. Escriba una ecuación para la magnitud de la velocidad en la línea central, $u(x)$, basada en los parámetros que se dan enseguida, desde $x = 0$ hasta $x = L$.

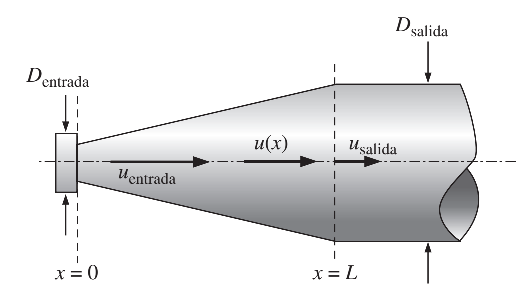


FIGURA P4-20

4-21 Para el campo de velocidad del problema 4-20, calcule la aceleración del fluido a lo largo de la línea central del difusor como función de x y los parámetros dados. Para $L = 2.0$ m, $u_{\text{entrada}} = 30.0$ m/s, y $u_{\text{salida}} = 5.0$ m/s, calcule la aceleración en $x = 0$ y $x = 1.0$ m. *Respuesta:* 0, -297 m/s^2

Patrones de flujo y visualización del flujo

4-22C ¿Cuál es la definición de *línea de corriente*? ¿Qué indican las líneas de corriente?

4-23 Se modela el flujo en un ducto convergente (Fig. P4-15) mediante el campo bidimensional y estacionario de velocidad del problema 4-15. Genere una expresión analítica para las líneas de corriente del flujo.

Respuesta: $y = C/(U_0 + bx)$

4-24E Se modela el flujo en un ducto convergente mediante el campo bidimensional y estacionario de velocidad del problema 4-15. Para el caso en el que $U_0 = 5.0$ ft/s y $b = 4.6$ s^{-1}, trace la gráfica de varias líneas de corriente, desde $x = 0$ ft hasta 5 ft y $y = -3$ ft hasta 3 ft. Cerciórese de mostrar la *dirección* de las líneas de corriente.

4-25C Considere la visualización del flujo sobre un cono de 12° de la figura P4-25C. ¿Se están viendo líneas de corriente, de traza, de trayectoria o línea fluida? Explíquelo.



FIGURA P4-25C
Visualización del flujo sobre un cono de 12°, a un ángulo de ataque de 16° y con un número de Reynolds de 15 000. La visualización se produce por fluido coloreado que se inyecta en el agua por orificios que están en el cuerpo.
Cortesía de ONERA. Fotografía tomada por Werlé.

4-26C ¿Cuál es la definición de *línea de trayectoria*? ¿Qué indican las líneas de trayectoria?

4-27C ¿Cuál es la definición de *línea de traza*? ¿En qué difieren las líneas de traza de las de corriente?

4-28C Considere la visualización del flujo sobre un ala de un planeador delta de 15° de la figura P4-28C. ¿Se están viendo líneas de corriente, de traza, de trayectoria o la línea fluida? Explíquelo.

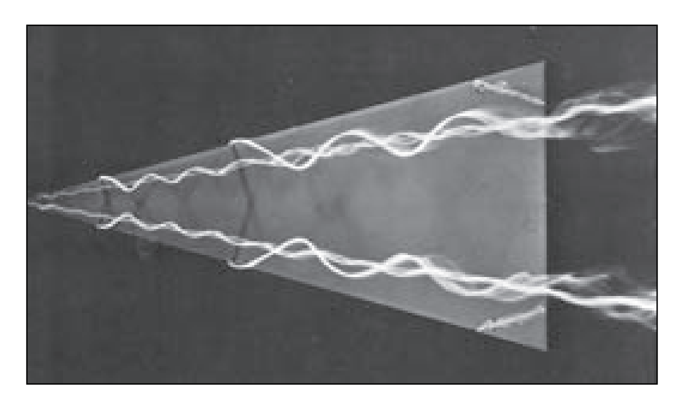


FIGURA P4-28C
Visualización del flujo sobre un ala de un planeador delta de 15°, a un ángulo de ataque de 20° y con un número de Reynolds de 20 000. La visualización se produce por fluido coloreado que se inyecta en el agua por orificios que están sobre la superficie inferior del ala.
Cortesía de ONERA. Fotografía tomada por Werlé.

4-29C Considere la visualización del flujo de un vórtice terrestre de la figura P4-29C. ¿Se están viendo líneas de corriente, de traza, de trayectoria o línea fluida? Explíquelo.

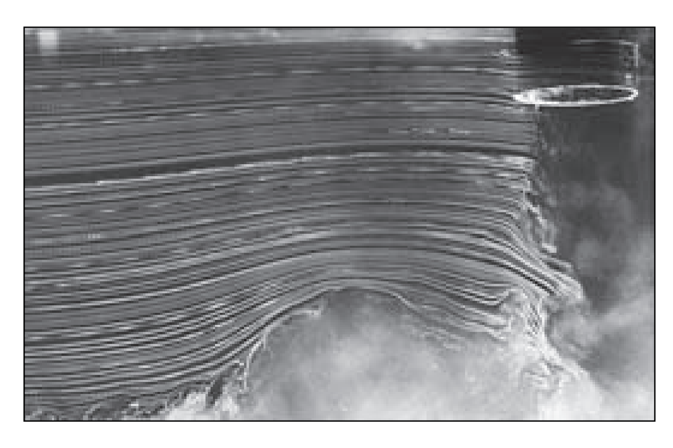


FIGURA P4-29C
Visualización del flujo de un remolino terrestre. Un chorro redondo de aire choca contra el suelo en presencia de un flujo libre de aire de izquierda a derecha (el suelo está en la parte inferior de la fotografía). La porción del flujo que viaje corriente arriba forma un flujo de recirculación conocido como **remolino terrestre**. La visualización se produce por un hilo de humo montado verticalmente a la izquierda del campo de visión.
Fotografía tomada por John M. Cimbala.

4-30C Considere la visualización del flujo sobre una esfera de la figura P4-30C. ¿Se están viendo líneas de corriente, de traza, de trayectoria o línea fluida? Explíquelo.

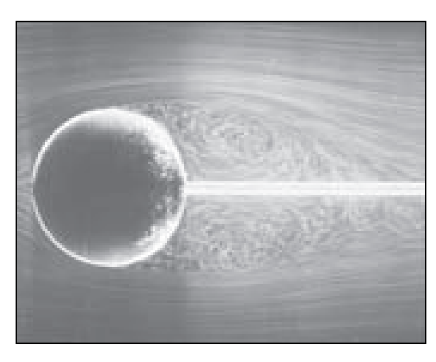


FIGURA P4-30C
Visualización del flujo sobre una esfera, con un número de Reynolds de 15 000. La visualización se produce por una exposición de burbujas de aire en el agua sobre una placa fotográfica por un intervalo.
Cortesía de ONERA. Fotografía tomada por Werlé.

4-31C ¿Cuál es la definición de *línea fluida*? ¿Cómo se pueden producir líneas fluidas en un canal de agua? Nombre una aplicación en donde las líneas fluidas sean más útiles que las de traza.

4-32C Considere una rebanada de sección transversal que atraviesa un arreglo de tubos de un intercambiador de calor (Fig. P4-32C). Para la información deseada, elija cuál clase de gráfica de visualización del flujo (gráfica vectorial o gráfica de contornos) sería la más apropiada y explique por qué.

a) Se debe visualizar la ubicación de la magnitud máxima de la velocidad del fluido.

b) Se debe visualizar la separación del flujo en la parte posterior de los tubos.

c) Se debe visualizar el campo de temperatura en todo el plano.

d) Se debe visualizar la distribución de la componente de la vorticidad normal al plano.

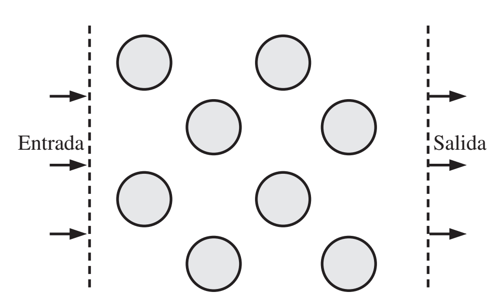


FIGURA P4-32C

4-33 Considere el siguiente campo de velocidad bidimensional, incompresible y estacionario:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 1.2x)\vec{i} + (-2.0 - 1.2y)\vec{j}$$

Genere una expresión analítica para las líneas de corriente del flujo y trace varias de estas líneas en el cuadrante superior derecho, desde $x = 0$ hasta 5 y $y = 0$ hasta 6.

4-34 Considere el campo de velocidad bidimensional, incompresible y estacionario del problema 4-33. Genere una gráfica de los vectores de velocidad en el cuadrante superior derecho, desde $x = 0$ hasta 5 y $y = 0$ hasta 6.

4-35 Considere el campo de velocidad bidimensional, incompresible y estacionario del problema 4-33. Genere una gráfica vectorial del campo de aceleración en el cuadrante superior derecho, desde $x = 0$ hasta 5 y $y = 0$ hasta 6.

4-36 Se da un campo de velocidad bidimensional, incompresible y estacionario por

$$\vec{V} = (u, v) = (1 + 2.5x + y)\vec{i} + (-0.5 - 1.5x - 2.5y)\vec{j}$$

donde las coordenadas x y y están en m y la magnitud de la velocidad está en m/s.

a) Determine si existen puntos de estancamiento en este flujo y, si es así, ¿dónde están?

b) Trace una gráfica de los vectores de velocidad en varios lugares en el cuadrante superior derecho, para $x = 0$ m hasta 4 m y $y = 0$ m hasta 4 m; describa cualitativamente el campo de flujo.

4-37 Considere el campo de velocidad bidimensional, incompresible y estacionario del problema 4-36.

a) Calcule la aceleración material en el punto ($x = 2$ m, $y = 3$ m). *Respuestas:* $a_x = 11.5$ m/s^2, $a_y = 14.0$ m/s^2

b) Trace una gráfica de los vectores aceleración material en el mismo arreglo de valores x y y que en el problema 4-36.

4-38 El campo de velocidad para la *rotación de cuerpo sólido* en el plano $r\theta$ (Fig. P4-38) se da por:

$$u_r = 0 \qquad u_\theta = \omega r$$

donde ω es la magnitud de la velocidad angular ($\vec{\omega}$ apunta en la dirección z). Para el caso con $\omega = 1.0\ \text{s}^{-1}$, trace una gráfica de contornos de la magnitud de la velocidad (rapidez). Específicamente, trace las curvas de magnitud constante de la velocidad $V = 0.5$, 1.0, 1.5, 2.0 y 2.5 m/s. Cerciórese de indicar estas magnitudes en su gráfica.

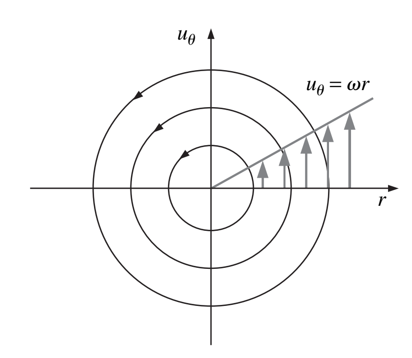


FIGURA P4-38

4-39 El campo de velocidad para un *vórtice líneal* en el plano $r\theta$ (Fig. P4-39) se da por:

$$u_r = 0 \qquad u_\theta = \frac{K}{r}$$

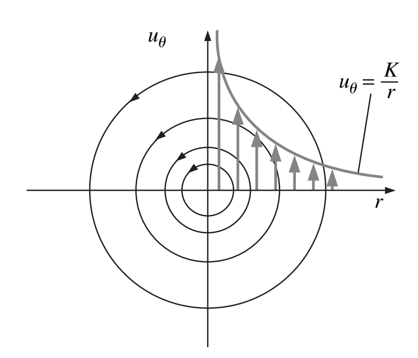


FIGURA P4-39

donde K es la *intensidad del vórtice lineal*. Para el caso con $K = 1.0\ \text{m}^2/\text{s}$, trace una gráfica de contornos de la magnitud de la velocidad (rapidez). Específicamente, trace las curvas de magnitud constante de la velocidad $V = 0.5$, 1.0, 1.5, 2.0 y 2.5 m/s. Asegúrese de indicar estas magnitudes en su gráfica.

4-40 El campo de velocidad para una *fuente lineal* en el plano $r\theta$ (Fig. P4-40) se da por:

$$u_r = \frac{m}{2\pi r} \qquad u_\theta = 0$$

donde m es la intensidad de la fuente lineal. Para el caso con $m/(2\pi) = 1.0\ \text{m}^2/\text{s}$, trace una gráfica de contornos de la magnitud de la velocidad (rapidez). Específicamente, trace las curvas de magnitud constante de la velocidad $V = 0.5$, 1.0, 1.5, 2.0 y 2.5 m/s. Asegúrese de indicar estas magnitudes en su gráfica.

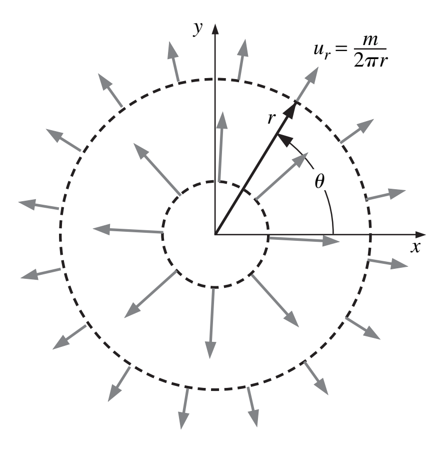


FIGURA P4-40

Movimiento y deformación de los elementos de fluidos

4-41C Nombre y describa con brevedad los cuatro tipos fundamentales de movimiento o deformación de las partículas de fluido.

4-42 Se modela el flujo en un ducto convergente (Fig. P4-15) mediante el campo bidimensional y estacionario de velocidad del problema 4-15. ¿Éste es un campo rotacional o irrotacional? Muestre el procedimiento. *Respuesta:* irrotacional

4-43 Se modela el flujo en un ducto convergente mediante el campo bidimensional y estacionario de velocidad del problema 4-15. Una partícula de fluido (A) está ubicada sobre el eje x en $x = x_A$ en el instante $t = 0$ (Fig. P4-43). En algún instante ulte-

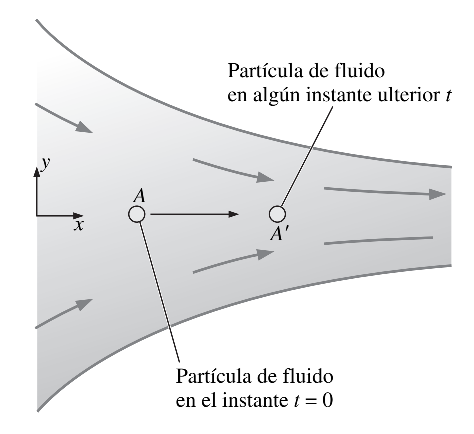


FIGURA P4-43

rior t, la partícula de fluido se ha movido corriente abajo con el flujo hasta una nueva ubicación $x = x_{A'}$, como se muestra en la figura. Puesto que el flujo es simétrico respecto del eje x, la partícula de fluido permanece sobre este eje en todo instante. Genere una expresión analítica para la ubicación x de la partícula de fluido en algún instante arbitrario t, en términos de su ubicación inicial x_A y las constantes U_0 y b. En otras palabras, desarrolle una expresión para $x_{A'}$. (Sugerencia: se sabe que $u = dx_{\text{partícula}}/dt$ cuando sigue una partícula de fluido. Obtenga u, separe variables e integre.)

4-44 Se modela el flujo en un ducto convergente por el campo bidimensional y estacionario de velocidad del problema 4-15. Puesto que el flujo es simétrico respecto del eje x, el segmento rectilíneo AB a lo largo del eje x permanece sobre este eje, pero se estira, de la longitud ξ hasta la longitud $\xi + \Delta\xi$ conforme fluye a lo largo de la línea central del canal (Fig. P4-44). Genere una expresión analítica para el cambio en la longitud del segmento rectilíneo, $\Delta\xi$. (Sugerencia: use el resultado del problema 4-43.) *Respuesta:* $(x_B - x_A)(e^{bt} - 1)$

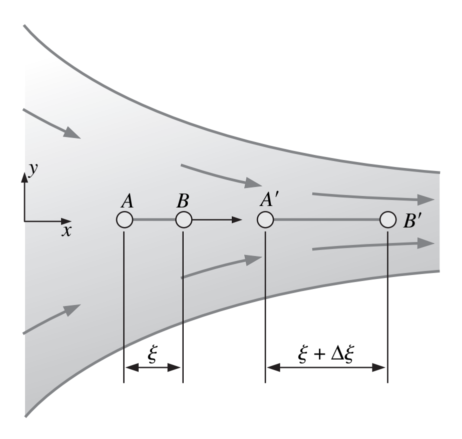


FIGURA P4-44

4-45 Con los resultados del problema 4-44 y la definición fundamental de la razón de deformación lineal (la razón de incremento de la longitud por unidad de longitud), desarrolle una expresión para esa razón en la dirección x (ε_{xx}) de las partículas de fluido localizadas sobre la línea central del canal. Compare su resultado con la expresión general para ε_{xx} en términos del campo de velocidad; es decir, $\varepsilon_{xx} = \partial u/\partial x$. (Sugerencia: tome el límite conforme el tiempo $t \to 0$. Puede ser que necesite un desarrollo truncado en serie para e^{bt}.) *Respuesta:* b

4-46 Se modela el flujo en un ducto convergente por el campo bidimensional y estacionario de velocidad del problema 4-15. Una partícula de fluido (A) está ubicada en $x = x_A$ y $y = y_A$ en el instante $t = 0$ (Fig. P4-46). En algún instante ulterior t, la partícula de fluido se ha desplazado corriente abajo con el flujo hasta una nueva ubicación $x = x_{A'}$, $y = y_{A'}$, como se muestra en la figura. Genere una expresión analítica para la ubicación y de la partícula de fluido en algún instante arbitrario t, en términos de su ubicación inicial y_A y la constante b. En otras palabras, desarrolle una expresión para $y_{A'}$. (Sugerencia: se sabe que $v = dy_{\text{partícula}}/dt$ cuando sigue una partícula de fluido. Sustituya la ecuación para v, separe variables e integre). *Respuesta:* $y_A e^{-bt}$

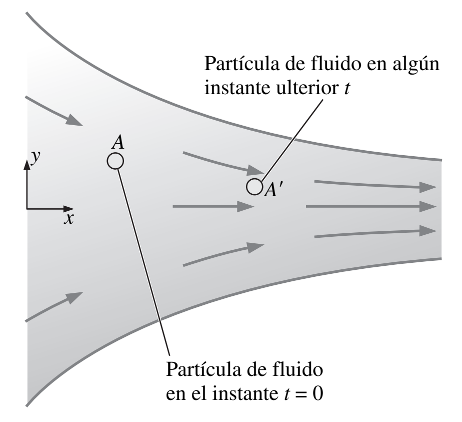


FIGURA P4-46

4-47 Se modela el flujo en un ducto convergente mediante el campo bidimensional y estacionario de velocidad del problema 4-15. A medida que el segmento rectilíneo vertical AB se desplaza corriente abajo, se contrae de la longitud η hasta la longitud $\eta + \Delta\eta$ como se muestra en la figura P4-47. Genere una expresión analítica para el cambio en la longitud del segmento rectilíneo, $\Delta\eta$. Note que el cambio en la longitud $\Delta\eta$, es *negativo*. (Sugerencia: use el resultado del problema 4-46).

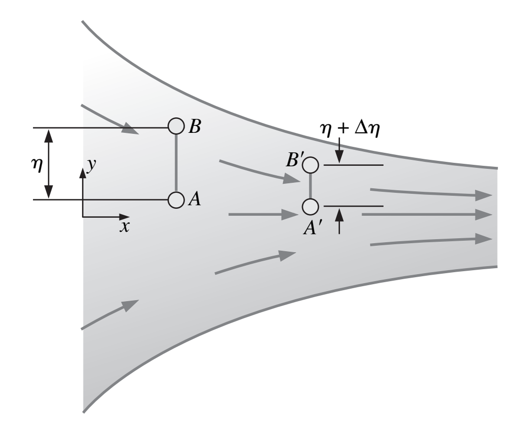


FIGURA P4-47

4-48 Use los resultados del problema 4-47 y la definición fundamental de la razón de deformación lineal (la razón de incremento de la longitud por unidad de longitud), desarrolle una expresión para esa razón en la dirección y (ε_{yy}) de las partículas de fluido que se mueven corriente abajo del canal. Compare su resultado con la expresión general para ε_{yy} en términos del campo de velocidad; es decir, $\varepsilon_{yy} = \partial v/\partial y$. (Sugerencia: tome el límite conforme el tiempo $t \to 0$. Puede ser que necesite un desarrollo truncado en serie para e^{-bt}.)

4-49E Modele el flujo en un ducto convergente mediante el campo bidimensional y estacionario de velocidad del problema 4-15. Para el caso en el que $U_0 = 5.0$ ft/s y $b = 4.6\ \text{s}^{-1}$, considere una partícula inicialmente cuadrada de fluido con dimensiones de las aristas de 0.5 ft y con centro en $x = 0.5$ ft y $y = 1.0$ ft y $t = 0$ (Fig. P4-49I). Calcule con todo cuidado en dónde estará la partícula de fluido y cómo se verá

en el instante $t = 0.2$ s más tarde, y trace la gráfica correspondiente. Haga un comentario acerca de la distorsión de esa partícula (Sugerencia: use los resultados de los problemas 4-43 y 4-46.)

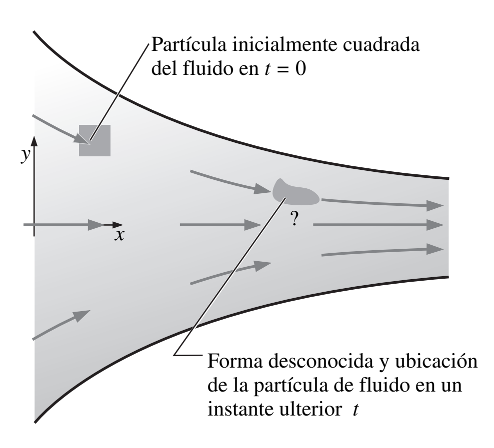


FIGURA P4-49E

4-50E Con base en los resultados del problema 4-49I, verifique que el campo de flujo en el ducto convergente de verdad es incompresible.

4-51 Se modela el flujo en un ducto convergente mediante el campo bidimensional y estacionario de velocidad del problema 4-15. Use la ecuación de la razón de deformación volumétrica para verificar que este campo de flujo es incompresible.

4-52 Una ecuación general para un campo bidimensional y estacionario de velocidad que es lineal en las dos direcciones espaciales (x y y) es:

$$\vec{V} = (u, v) = (U + a_1x + b_1y)\vec{i} + (V + a_2x + b_2y)\vec{j}$$

donde U y V son los coeficientes constantes. Se supone que sus unidades se definen de manera apropiada. Calcule las componentes x y y del campo de aceleración.

4-53 Para el campo de velocidad del problema 4-52, ¿qué relación debe existir entre los coeficientes para garantizar que el campo de flujo es incompresible? *Respuesta:* $a_1 + b_2 = 0$

4-54 Para el campo de velocidad del problema 4-52, calcule las razones de deformación lineal en las direcciones x y y. *Respuesta:* a_1, b_2

4-55 Para el campo de velocidad del problema 4-52, calcule la razón de deformación por esfuerzo cortante en el plano xy.

4-56 Combine sus resultados de los problemas 4-54 y 4-55 para formar el tensor bidimensional de razones de deformación ε_{ij} en el plano xy,

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

¿En qué condiciones los ejes x y y serían los ejes principales? *Respuesta:* $b_1 + a_2 = 0$

4-57 Para el campo de velocidad del problema 4-52, calcule el vector de vorticidad. ¿En cuál dirección apunta el vector de vorticidad? *Respuesta:* $(a_2 - b_1)\vec{k}$

4-58 Considere el **flujo de deslizamiento** bidimensional, incompresible y estacionario para el cual el campo de velocidad es:

$$\vec{V} = (u, v) = (a + by)\vec{i} + 0\vec{j}$$

donde a y b are son constantes. En la figura P4-58 se tiene un esquema de una pequeña partícula rectangular de fluido de dimensiones dx y dy en el instante t. La partícula de fluido se mueve y se deforma con el flujo, de tal manera que en un instante posterior $(t + dt)$, la partícula ya no es rectangular, como también se muestra en la figura. En la figura P4-58 se ha nombrado la ubicación inicial de cada esquina de la partícula de fluido. La esquina inferior izquierda está en (x, y) en el instante t, en donde la componente x de la velocidad es $u = a + by$. En el instante ulterior, esta esquina se mueve hasta $(x + u\,dt, y)$, o:

$$(x + (a + by)\,dt, y)$$

a) De manera semejante, calcule la ubicación de cada una de las otras tres esquinas de la partícula del fluido, en el instante $t + dt$.

b) A partir de la definición fundamental de la *razón de deformación lineal* (la razón de incremento de la longitud por unidad de longitud), calcule las razones de deformación lineal ε_{xx} y ε_{yy}. *Respuesta:* 0, 0

c) Compare sus resultados con los obtenidos a partir de las ecuaciones para ε_{xx} y ε_{yy} en coordenadas cartesianas; es decir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

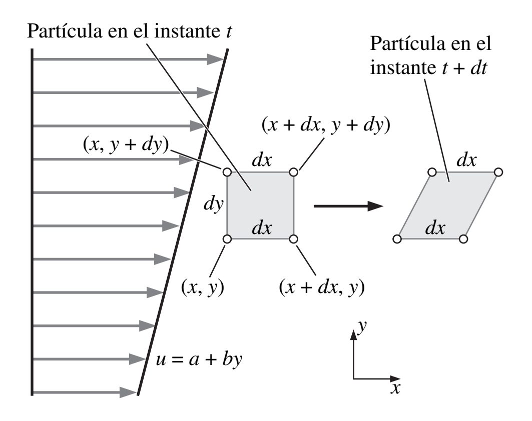


FIGURA P4-58

4-59 Aplique dos métodos para verificar que el flujo del problema 4-58 es incompresible: *a*) calcule el volumen de la partícula de fluido en los dos instantes y *b*) calcule la razón de deformación volumétrica. Nótese que se debe completar el problema 4-58 antes de comenzar.

4-60 Considere el campo bidimensional, incompresible y estacionario de flujo del problema 4-58. Use los resultados del problema 4-58a, y realice lo siguiente:

a) A partir de la definición fundamental de la *razón de deformación por esfuerzo cortante* (la mitad de decrecimiento del ángulo entre dos rectas inicialmente perpendiculares que se

intersecan en un punto), calcule la razón de deformación por esfuerzo cortante, ε_{xy} en el plano xy. (Sugerencia: use las aristas inferior e izquierda de la partícula de fluido, las cuales se intersecan a 90° en la esquina inferior izquierda de la partícula misma en el instante inicial.)

b) Compare sus resultados con los obtenidos a partir de la ecuación para ε_{xy} en coordenadas cartesianas; es decir:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Respuestas: a) $b/2$, *b*) $b/2$

4-61 Considere el campo bidimensional, incompresible y estacionario de flujo del problema 4-58. Use los resultados del problema 4-58*a*, realice lo siguiente:

a) A partir de la definición fundamental de la *razón de rotación* (la razón promedio de rotación de dos rectas inicialmente perpendiculares que se intersecan en un punto), calcule la razón de rotación de la partícula de fluido en el plano ω_z. (Sugerencia: use las aristas inferior e izquierda de la partícula de fluido, las cuales se intersecan a 90° en la esquina inferior izquierda de la propia partícula, en el instante inicial.)

b) Compare sus resultados con los obtenidos a partir de la ecuación para ω_z en coordenadas cartesianas; es decir:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Respuestas: a) $-b/2$, *b*) $-b/2$

4-62 Con base en los resultados del problema 4-61:

a) ¿Este flujo es rotacional o irrotacional?

b) Calcule la componente z de la vorticidad para este campo de flujo.

4-63 Un elemento bidimensional de fluido, de dimensiones dx y dy se traslada y se distorsiona como se muestra en la figura P4-63, durante el periodo infinitesimal $dt = t_2 - t_1$. Las componentes de la velocidad en el punto P en el instante inicial, son u y v en las direcciones x y y, respectivamente. Demuestre que la magnitud de la razón de rotación (velocidad angular) alrededor del punto P en el plano xy es:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

4-64 Un elemento bidimensional de fluido, de dimensiones dx y dy se traslada y se distorsiona como se muestra en la figura P4-63, durante el periodo infinitesimal $dt = t_2 - t_1$. Las componentes de la velocidad en el punto P, en el instante inicial, son u y v en las direcciones x y y, respectivamente. Considere el segmento rectilíneo PA de la figura P4-63 y demuestre que la magnitud de la razón de deformación lineal en la dirección x es:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

4-65 Un elemento bidimensional de fluido, de dimensiones dx y dy se traslada y se distorsiona como se muestra en la figura P4-63, durante el periodo infinitesimal $dt = t_2 - t_1$. Las componentes de la velocidad en el punto P, en el instante inicial, son u y v en las direcciones x y y, respectivamente. Demuestre que la magnitud de la razón de deformación por esfuerzo cortante alrededor del punto P, en el plano xy, es:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

4-66 Considere un campo incompresible, bidimensional y estacionario de flujo en el plano xy. La razón de deformación lineal en la dirección x es $2.5\ s^{-1}$. Calcule la razón de deformación lineal en la dirección y.

4-67 Un tanque cilíndrico de agua gira en una rotación de cuerpo sólido, en contrasentido al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de su eje vertical (Fig. P4-67), con una velocidad angular $\dot{n} = 360$ rpm. Calcule la vorticidad de las partículas de fluido en el tanque. *Respuesta:* $75.4\ \vec{k}$ rad/s

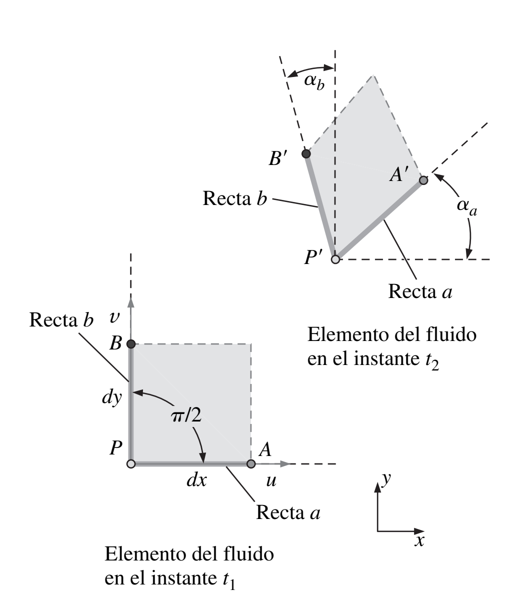


FIGURA P4-63

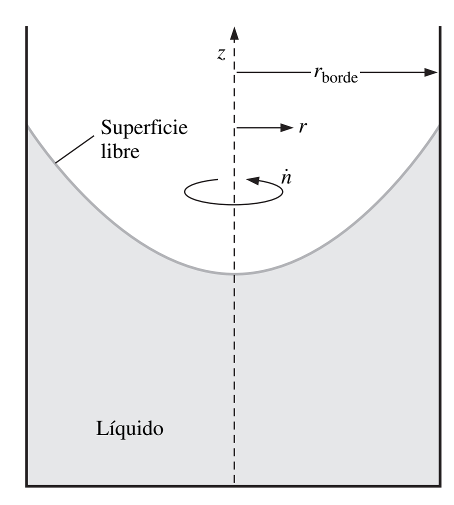


FIGURA P4-67

4-68 Un tanque cilíndrico de agua gira alrededor de su eje vertical (Fig. P4-67). Se usa un sistema PIV para medir el campo de vorticidad del flujo. El valor medido de la vorticidad en la dirección z es de -55.4 rad/s y es constante dentro de un ±0.5 por ciento en todas las partes en las que se mide. Calcule la velocidad angular de rotación del tanque en rpm. ¿Está girando el tanque en el sentido de las manecillas del reloj o en contrasentido alrededor del eje vertical?

4-69 Un tanque cilíndrico de radio $r_{\text{borde}} = 0.35$ m gira alrededor de su eje vertical (Fig. P4-67). El tanque está parcialmente lleno con aceite. La magnitud de la velocidad del borde es de 2.6 m/s en contrasentido al movimiento de las manecillas del reloj (mirándolo desde arriba), y el tanque se ha mantenido girando con rapidez durante un tiempo suficiente como para encontrarse en rotación de cuerpo sólido. Para cualquier partícula de fluido en el tanque, calcule la magnitud de la componente de la vorticidad en la dirección z vertical. *Respuesta:* 15.0 rad/s

4-70C Explique la relación entre la vorticidad y la rotacionalidad.

4-71 Considere un campo bidimensional e incompresible de flujo en el cual se mueve una partícula de fluido inicialmente cuadrada. La dimensión de la partícula de fluido es a en el instante t y está alineada con los ejes x y y como se muestra en la figura 4-71. En cierto instante posterior, la partícula todavía está alineada con los ejes x y y, pero se ha deformado hasta constituir un rectángulo de longitud horizontal $2a$. ¿Cuál es la longitud vertical de la partícula rectangular de fluido en este instante ulterior?

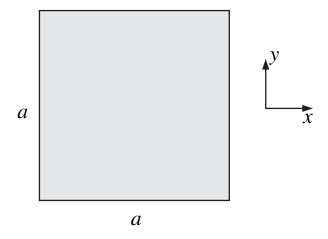


FIGURA P4-71

4-72 Considere un campo bidimensional y *compresible* de flujo en el cual una partícula de fluido inicialmente cuadrada se mueve y se deforma. La dimensión de la partícula de fluido es a en el instante t y está alineada con los ejes x y y, como se muestra en la figura 4-71. En cierto instante ulterior, la partícula todavía está alineada con los ejes x y y pero se ha deformado hasta formar un rectángulo de longitud horizontal $1.06a$ y longitud vertical $0.931a$ (la dimensión de la partícula en la dirección z no cambia, ya que el flujo es bidimensional). ¿En qué porcentaje ha aumentado o disminuido la densidad de la partícula de fluido?

4-73 Considere el siguiente campo tridimensional y estacionario de velocidad:

$$\vec{V} = (u, v, w)$$
$$= (3.0 + 2.0x - y)\vec{i} + (2.0x - 2.0y)\vec{j} + (0.5xy)\vec{k}$$

Calcule el vector vorticidad como función del espacio (x, y, z).

4-74 Considere el **flujo de Couette** (flujo entre dos placas paralelas infinitas separadas por una distancia h, con la placa superior en movimiento y la inferior en reposo, como se ilustra en la figura P4-74), totalmente desarrollado. El flujo es bidimensional, incompresible y estacionario en el plano xy. El campo de velocidad se da por:

$$\vec{V} = (u, v) = V\frac{y}{h}\vec{i} + 0\vec{j}$$

¿Este flujo es rotacional o irrotacional? Si es rotacional, calcule la componente de la vorticidad en la dirección z. Las partículas de fluido en este flujo ¿giran en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj o en contrasentido? *Respuestas:* sí en el sentido de las manecillas del reloj,

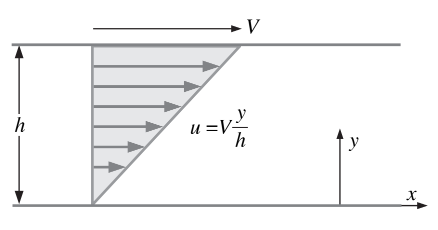


FIGURA P4-74

4-75 Para el flujo de Couette de la figura P4-74, calcule las razones de deformación lineal en las direcciones x y y, y calcule la razón de deformación por esfuerzo cortante ε_{xy}.

4-76 Combine sus resultados del problema 4-75 para formar el tensor bidimensional de razones de deformación, ε_{ij},

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

¿Los ejes x y y son ejes principales?

Teorema del transporte de Reynolds

4-77C Verdadero o falso: para cada proposición, elija si es verdadera o falsa y explique su respuesta con brevedad.

a) El teorema del transporte de Reynolds es útil para transformar las ecuaciones de sus formas en el volumen de control, que se presentan de manera natural, hacia sus formas en sistemas.

b) El teorema del transporte de Reynolds sólo es aplicable a los volúmenes de control que no están deformándose.

c) El teorema del transporte de Reynolds se puede aplicar a los campos de flujo estacionarios y a los no estacionarios.

d) TEl teorema del transporte de Reynolds se puede aplicar tanto a las cantidades escalares como a las vectoriales.

4-78 Considere la forma general del teorema del transporte de Reynolds (RTT) dada por:

$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{CV}} \rho b \, dV + \int_{\text{CS}} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} \, dA$$

donde $\vec{V}_r$ es la velocidad del fluido con relación a la superficie de control. Sea B_{sist} la masa m de un sistema de partículas de fluido. Se sabe que, para un sistema, $dm/dt = 0$ ya que, por definición, ninguna masa entra ni sale del mismo. Use la ecuación dada para deducir la ecuación de conservación de la masa para un volumen de control.

4-79 Considere la forma general del teorema del transporte de Reynolds (RTT), dada por el problema 4-78. Sea B_{sist} el momento lineal $m\vec{V}$ de un sistema de partículas de fluido. Se sabe que, para un sistema, la segunda ley de Newton es:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})_{sist}$$

Use la ecuación del problema 4-78 y esta ecuación para deducir la ecuación de conservación del momento lineal para un volumen de control.

4-80 Considere la forma general del teorema del transporte de Reynolds (RTT), dada en el problema 4-78. Sea B_{sist} el momento angular $\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V}$ de un sistema de partículas de fluido, en donde $\vec{r}$ es el brazo de palanca que produce el momento. Se sabe que, para un sistema, la conservación del momento angular se puede expresar como:

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{H}_{sist}$$

donde $\Sigma\ \vec{M}$ es el momento neto aplicado al sistema. Use la ecuación del problema 4-78 y esta ecuación para deducir la ecuación de conservación del momento angular para un volumen de control.

4-81 Simplifique la expresión siguiente tanto como sea posible:

$$F(t) = \frac{d}{dt}\int_{x=At}^{x=Bt} e^{-2x^2}\,dx$$

(Sugerencia: aplique el teorema unidimensional de Leibnitz.)
Respuesta: $Be^{-B^2t^2} - Ae^{-A^2t^2}$

Problemas de repaso

4-82 Considere el **flujo de Poiseuille** (flujo entre dos placas paralelas infinitas separadas por una distancia , con tanto la placa superior como la inferior en reposo y un gradiente de presión forzada, dP/dx impulsando el flujo, como se ilustra en la figura P4-82), totalmente desarrollado (dP/dx es una constante negativa). El flujo es bidimensional, incompresible y estacionario en el plano xy. Las componentes de la velocidad se dan por:

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}(y^2 - hy) \qquad v = 0$$

donde μ es la viscosidad del fluido. Este flujo ¿es rotacional o irrotacional? Si es rotacional, calcule la componente de la vorticidad en la dirección z. Las partículas de fluido en este flujo ¿giran en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj o en contrasentido?

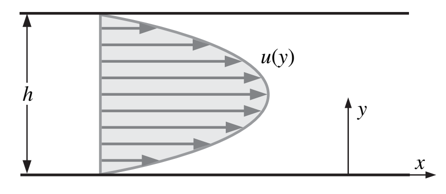


FIGURA P4-82

4-83 Para el flujo bidimensional de Poiseuille del problema 4-82, calcule las razones de deformación lineal en las direcciones x y y, y calcule la razón de deformación por esfuerzo cortante ε_{xy}.

4-84 Combine sus resultados del problema 4-83 para formar el tensor bidimensional de razones de deformación ε_{ij} en el plano xy,

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

Los ejes x y y ¿son ejes principales??

4-85 Considere el flujo bidimensional de Poiseuille del problema 4-82. El fluido entre las placas es agua a 40°C. Suponga que la altura de la ranura es $h = 1.6$ mm y el gradiente de presión, $dP/dx = -230$ N/m³. Calcule y trace las gráficas de siete *líneas de trayectoria* desde $t = 0$ hasta $t = 10$ s. Las partículas de fluido se liberan en $x = 0$ y en $y = 0.2$, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2 y 1.4 mm.

4-86 Considere el flujo bidimensional de Poiseuille del problema 4-82. El fluido entre las placas es agua a 40°C. Suponga que la altura de la ranura es $h = 1.6$ mm y el gradiente de presión, $dP/dx = -230$ N/m³. Calcule y trace las gráficas de siete *líneas de traza* generadas por un tiralíneas de tinte que introduce trazas de ese tinte en $x = 0$ y en $y = 0.2$, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2 y 1.4 mm (Fig. P4-86). El tinte se introduce desde $t = 0$ hasta $t = 10$ s, y se deben trazar las gráficas de las líneas de traza en $t = 10$ s.

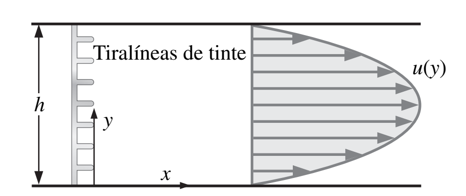


FIGURA P4-86

4-87 Repita el problema 4-86, excepto que el tinte se introduce desde $t = 0$ hasta $t = 10$ s, y se deben trazar líneas de traza en $t = 12$ s en vez de 10 s.

4-88 Compare los resultados de los problemas 4-86 y 4-87 y comente la razón de deformación lineal en la dirección x.

4-89 Considere el flujo bidimensional de Poiseuille del problema 4-82. El fluido entre las placas es agua a

40°C. Suponga que la altura de la ranura es $h = 1.6$ mm y el gradiente de presión, $dP/dx = -230$ N/m^3. Imagine un hilo de burbujas de hidrógeno estirado verticalmente, a través del canal, en $x = 0$ (Fig. P4-89). El hilo se enciende y se apaga en tal forma que las burbujas se producen de manera periódica con la finalidad de crear *líneas fluidas*. Se generan cinco líneas fluidas distintas en $t = 0$, 2.5, 5.0, 7.5 y 10.0 s. Calcule y trace las gráficas de manera que se vean estas cinco líneas en el instante $t = 12.5$ s.

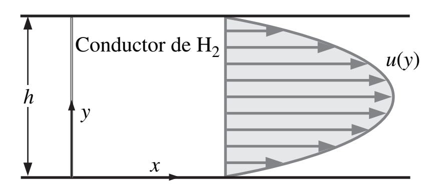


FIGURA P4-89

4-90 Considere el flujo axialmente simétrico de Poiseuille, flujo en un tubo redondo de diámetro R (diámetro $D = 2R$), con un gradiente de presión forzada, dP/dx impulsando el flujo, como se ilustra en la figura P4-90, totalmente desarrollado (dP/dx es una constante negativa). El flujo es axialmente simétrico, incompresible y estacionario en torno al eje x. Las componentes de la velocidad se dan por:

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}(r^2 - R^2) \qquad u_r = 0 \qquad u_\theta = 0$$

donde μ es la viscosidad del fluido. Este flujo ¿es rotacional o irrotacional? Si es rotacional, calcule la componente de la vorticidad en la dirección circunferencial (θ) y comente el signo de la rotación.

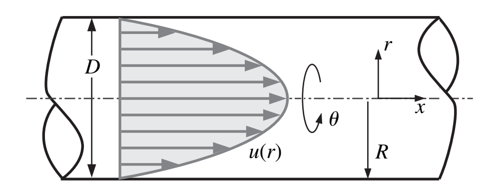


FIGURA P4-90

4-91 Para el flujo axialmente simétrico de Poiseuille del problema 4-90, calcule las razones de deformación lineal en las direcciones x y r, y calcule la razón de deformación por esfuerzo cortante ε_{xr}. El tensor de razones de deformación en las coordenadas cilíndricas (r, θ, x) y (u_r, u_θ, u_x), es:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta x} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{u_\theta}{r}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial r}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{u_\theta}{r}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \end{pmatrix}$$

4-92 Combine sus resultados del problema 4-91 para formar el tensor de razones axialmente simétricas de deformación, ε_{ij},

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix}$$

Los ejes x y r ¿son ejes principales?

4-93 Se obtiene una aproximación del flujo de aire que entra en un accesorio de aspiradora por medio de las componentes siguientes de la velocidad en el plano del centro (el plano xy):

$$u = \frac{-\dot{V}x}{\pi L}\frac{x^2 + y^2 + b^2}{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2b^2 + y^4 - 2y^2b^2 + b^4}$$

y

$$v = \frac{-\dot{V}y}{\pi L}\frac{x^2 + y^2 - b^2}{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2b^2 + y^4 - 2y^2b^2 + b^4}$$

donde b es la distancia hasta el accesorio por arriba del piso, L es la longitud del accesorio y $\dot{V}$ es el gasto volumétrico de aire que se está absorbiendo hacia la manguera (Fig. P4-93). Determine la ubicación de cualquier (cualesquiera) punto(s) de estancamiento en este campo de flujo. *Respuesta:* en el origen

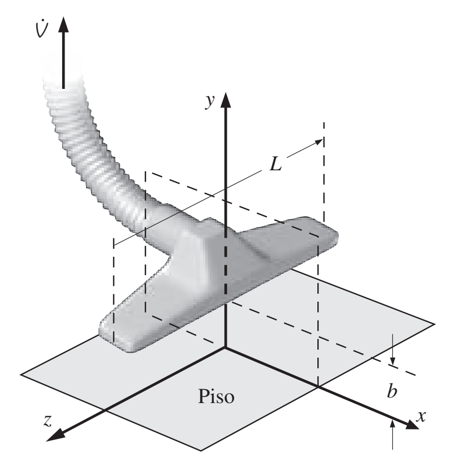


FIGURA P4-93

4-94 Considere la aspiradora del problema 4-93. Para el caso en donde $b = 2.0$ cm, $L = 35$ cm, y $\dot{V} = 0.1098$ m^3/s, cree una gráfica de vectores de velocidad en la mitad superior del plano $x = -3$ cm desde 3 cm hasta $y = 0$ cm hasta 2.5 cm. Trace tantos vectores como necesita para adquirir una buena comprensión del campo de flujo. *Nota*: la velocidad es infinita en el punto (x, y) = (0, 2.0 cm), de modo que no intente trazar un vector de velocidad en ese punto.

4-95 Considere el campo de velocidad aproximada dado para la aspiradora del problema 4-93. Calcule la magnitud de la velocidad del flujo a lo largo del piso. La mayor probabilidad de que las partículas de polvo sean absorbidas por la aspiradora es en el lugar de la magnitud máxima de la velocidad. ¿En

dónde está ese lugar? ¿Cree el lector que la aspiradora realizará una adecuada absorción directamente debajo de la admisión (en el origen)? ¿Por qué sí o por qué no?

4-96 Considere un campo de flujo bidimensional y estacionario en el plano *xy* cuya componente *x* de la velocidad se da por:

$$u = a + b(x - c)^2$$

donde a, b, y c son constantes con unidades apropiadas. ¿De qué forma necesita ser la componente y de la velocidad para que el campo de flujo sea incompresible? En otras palabras, genere una expresión para v como función de x, y, y las constantes de la ecuación dada en tal forma que el flujo sea incompresible. *Respuesta:* $-2b(x - c)y + f(x)$

4-97 En numerosas ocasiones un flujo libre bastante uniforme encuentra un cilindro circular largo normal a dicho flujo (Fig. P4-97). Los ejemplos incluyen el aire que fluye alrededor de la antena de un automóvil, el viento que sopla contra un asta bandera o un poste telefónico, el viento que choca contra los alambres eléctricos y las corrientes oceánicas que chocan contra las vigas redondas sumergidas que soportan las plataformas petroleras. En todos estos casos, el flujo en la parte posterior del cilindro se separa y es no estacionario y, por lo común, turbulento. Sin embargo, el flujo en la mitad delantera del cilindro es mucho más estacionario y predecible. De hecho, excepto por una delgada capa límite cercana a la superficie del cilindro, se puede obtener una aproximación del campo de flujo por medio de las siguientes componentes bidimensionales y estacionarias de la velocidad, en el plano *xy* o $r\theta$:

$$u_r = V\cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad u_\theta = -V\,\text{sen}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

FIGURA P4-97

Este flujo ¿es rotacional o irrotacional? Explíquelo.

4-98 Considere el campo de flujo del problema 4-97 (flujo sobre un cilindro circular). Considere sólo la mitad delantera del flujo ($x < 0$). Existe un punto de estancamiento en la mitad delantera del campo de flujo. ¿En dónde está? Dé su respuesta tanto en coordenadas cilíndricas (r, θ) como en cartesianas (x, y).

4-99 Considere la mitad corriente arriba ($x < 0$) del campo de flujo del problema 4-97 (flujo sobre un cilindro circular). Se introducirá un parámetro llamado **función de corriente**, ψ, el cual es *constante a lo largo de las líneas de corriente* en los flujos bidimensionales, como el que se está considerando aquí (Fig. P4-99). El campo de velocidad del problema 4-97 corresponde a una función de corriente dada por:

$$\psi = V\,\text{sen}\,\theta\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$$

a) Haga ψ igual a una constante y genere una ecuación para una línea de corriente. (Sugerencia: resuelva la ecuación cuadrática para despejar r como función de θ.)

b) Para el caso particular en el que $V = 1.00$ m/s y un radio del cilindro $a = 10.0$ cm, trace las gráficas de varias líneas de corriente en la mitad corriente arriba del flujo ($90° < \theta < 270°$). En beneficio de la coherencia, trace la gráfica en el rango -0.4 m $< x < 0$ m, -0.2 m $< y < 0.2$ m, con valores de la función de corriente igualmente espaciados entre -0.16 m^2/s y 0.16 m^2/s.

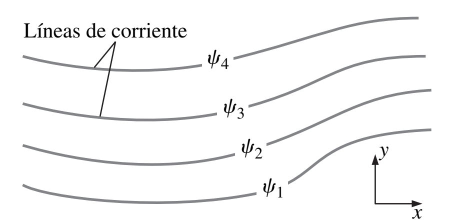


FIGURA P4-99

4-100 Considere el campo de flujo del problema 4-97 (flujo sobre un cilindro circular). Calcule las dos razones de deformación lineal en el plano $r\theta$; es decir, calcule ε_{rr} y $\varepsilon_{\theta\theta}$. Comente si los segmentos lineales de fluido se estiran (o contraen) en este campo de flujo. (Sugerencia: el tensor de razones de deformación en coordenadas cilíndricas se da en el problema 4-91).

4-101 Con base en sus resultados del problema 4-100, analice si el flujo es compresible o incompresible. *Respuesta:* el flujo es incompresible

4-102 Considere el campo de flujo del problema 4-97 (flujo sobre un cilindro circular). Calcule $\varepsilon_{r\theta}$, la razón de deformación por esfuerzo cortante en el plano $r\theta$. Compruebe si las partículas de fluido en este flujo se deforman debido al esfuerzo cortante o no (sugerencia: el tensor de razones de deformación en coordenadas cilíndricas se da en el problema 4-91).

CAPÍTULO

5

ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE MASA, DE BERNOULLI Y DE ENERGÍA

En este capítulo se tratan tres ecuaciones de uso común en la mecánica de fluidos: la ecuación de conservación de masa, de Bernoulli y de energía. La *ecuación de conservación de masa* es una expresión del principio de conservación de masa. La *ecuación de Bernoulli* se refiere a la conservación de la energía cinética, potencial y la energía de flujo de un flujo de fluido y su transformación de una en otra en las regiones del flujo en donde las fuerzas viscosas netas son despreciables y donde se aplican otras condiciones restrictivas. La *ecuación de energía* es un enunciado del principio de conservación de la misma. En la mecánica de fluidos es conveniente separar la *energía mecánica* de la *térmica* y considerar la transformación de la primera en térmica, resultado de los efectos de fricción, como *pérdida de energía mecánica*. Entonces la ecuación de la energía se convierte en el *balance de la energía mecánica.*.

Este capítulo inicia con un panorama general de los principios de conservación y la relación de conservación de la masa. A esto le sigue un análisis de varias formas de energía mecánica y la eficiencia de algunos dispositivos que realizan trabajo mecánico, como las bombas y las turbinas. Enseguida, se deduce la ecuación de Bernoulli por la aplicación de la segunda ley de Newton a un elemento de fluido, a lo largo de una línea de corriente, y se demuestra su uso en diversas aplicaciones. Se continúa con el desarrollo de la ecuación de energía en una forma adecuada para que se emplee en la mecánica de fluidos y se introduce el concepto de *pérdida de carga*. Por último, se aplica la ecuación de energía a varios sistemas de ingeniería.

OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de”

- Aplicar la ecuación de conservación de masa para balancear los gastos entrantes y salientes en un sistema de flujo
- Reconocer varias formas de la energía mecánica y trabajar con eficiencias de transformación de energía
- Entender el uso y limitaciones de la ecuación de Bernoulli y aplicarla para resolver diversos problemas de flujo de fluidos.
- Trabajar con la ecuación de energía que se expresa en función de cargas y se usa para determinar la potencia desarrollada por turbinas y las necesidades de consumo de potencia para los procesos de bombeo.



FIGURA 5-1
Numerosos dispositivos de flujo de fluidos, como esta turbina hidráulica de rueda Pelton, se analizan mediante la aplicación de los principios de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía .

Cortesía de Hydro Tasmania, www.hydro.com.a. Reproducida con autorización.

5-1 ▪ INTRODUCCIÓN

El lector está familiarizado con numerosas **leyes de conservación**, como las leyes de conservación de la masa, de la energía y de la cantidad de movimiento. Originalmente, estas leyes se aplicaron por primera vez a una cantidad fija de materia, llamada *sistema cerrado* o sólo *sistema,* y después se extendieron a regiones en el espacio llamadas *volúmenes de control*. Las relaciones de conservación también se conocen como *ecuaciones de balance*, dado que cualquier cantidad conservada se debe balancear durante un proceso. A continuación, se describen brevemente las relaciones de conservación de la masa, de la cantidad del movimiento y de la energía (Fig. 5-1).

Conservación de la masa

La relación de conservación de la masa para un sistema cerrado que pasa por un cambio se expresa como $m_{\text{sist}} = constante$ o $dm_{\text{sist}}/dt = 0$, lo cual es un enunciado del hecho obvio que la masa del sistema permanece constante durante un proceso. Para un volumen de control (VC), el balance de masa se expresa en la forma de razón como

Conservación de la masa: $$\dot{m}_{\text{ent}} - \dot{m}_{\text{sal}} = \frac{dm_{\text{VC}}}{dt} \qquad \text{(5 1)}$$

donde $\dot{m}_{\text{ent}}$ y $\dot{m}_{\text{sal}}$ son las razones totales de flujo de masa hacia dentro y hacia fuera del volumen de control, respectivamente, y dm_{VC}/dt es la razón de cambio de la masa dentro de las fronteras de ese volumen. En la mecánica de fluidos, la relación de conservación de la masa escrita para un volumen diferencial de control suele llamarse *ecuación de continuidad*. La conservación de la masa se trata en la sección 5-2.

Conservación de la cantidad de movimiento

El producto de la masa y de la velocidad de un cuerpo se llama *momento lineal* o *cantidad de movimiento* del cuerpo, y la cantidad de movimiento de un cuerpo rígido de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{V}$ es $m\vec{V}$. La segunda ley de Newton afirma que la aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa, y que la razón de cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza neta que actúa sobre ese cuerpo. Por lo tanto, la cantidad de movimiento de un sistema permanece constante cuando la fuerza neta que actúa sobre él es cero, y donde se conserva la cantidad de movimiento de esos sistemas. Esto se conoce como el *principio de conservación de la cantidad de movimiento*. En la mecánica de fluidos es común referirse a la segunda ley de Newton como la *ecuación del momento lineal*, la cual se trata en el capítulo 6, junto con la *ecuación del momento angular.*

Conservación de la energía

La energía se puede transferir a un sistema cerrado, o extraerse de éste por medio de calor o de trabajo, y el principio de conservación de la energía exige que la energía neta transferida a un sistema, o extraída de él durante un proceso, sea igual al cambio en el contenido de energía de ese sistema. Los volúmenes de control incluyen la transferencia de energía también por la vía del flujo de masa, y el *principio de conservación de la energía*, también conocido como *balance de energía*, se expresa como:

Conservación de la energía: $$\dot{E}_{\text{ent}} - \dot{E}_{\text{sal}} = \frac{dE_{\text{VC}}}{dt} \qquad \text{(5-2)}$$

donde $\dot{E}_{\text{ent}}$ y $\dot{E}_{\text{sal}}$ son las razones de transferencia de energía hacia dentro y hacia fuera del volumen de control. En la mecánica de fluidos se suele limitar la con-

sideración sólo a las formas mecánicas de la energía. La conservación de la energía se trata en el capítulo 6.

5-2 ▪ CONSERVACIÓN DE LA MASA

El principio de conservación de la masa es uno de los principios más fundamentales de la naturaleza. Todos estamos familiarizados con este principio y es fácil entenderlo Como dice el dicho: ¡no se puede conservar un pastel y también comérselo! Una persona no tiene que ser un científico para imaginarse cuánto aderezo de vinagre y aceite se obtendrá cuando se mezclan 100 g de aceite con 25 g de vinagre. Inclusive las ecuaciones químicas se balancean con base en el principio de conservación de la masa. Cuando 16 kg de oxígeno reaccionan con 2 kg de hidrógeno, se forman 18 kg de agua (Fig. 5-2). En un proceso electrolítico, el agua se separará de vuelta a 2 kg de hidrógeno y 16 kg de oxígeno.

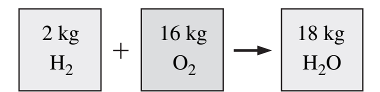


FIGURA 5-2
La masa se conserva, inclusive, durante las reacciones químicas.

La masa, como la energía, es una propiedad que se conserva y no se puede crear ni destruir en el transcurso de un proceso. Sin embargo, según la conocida fórmula propuesta por Albert Einstein (1879-1955):

$$E = mc^2 \qquad \textbf{(5-3)}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, la cual es $c = 2.9979 \times 10^8$ m/s, la masa m y la energía E se pueden convertir una en la otra. Esta ecuación sugiere que la masa de un sistema cambia cuando su energía cambia. No obstante, para todas las interacciones en la práctica, con excepción de las reacciones nucleares, el cambio en la masa es en extremo pequeño y no se puede detectar, aun con los aparatos más sensibles. Por ejemplo, cuando se forma 1 kg de agua a partir de oxígeno e hidrógeno, la cantidad de energía liberada es de 15 879 kJ, lo cual corresponde a una masa de 1.76×10^{-10} kg. Una masa de esa magnitud está más allá de la exactitud necesaria en, prácticamente, todos los cálculos de ingeniería y, en consecuencia, se puede descartar.

Para los *sistemas cerrados*, el principio de conservación de la masa se usa de manera implícita cuando se necesita que la masa del sistema permanezca constante durante el proceso. Sin embargo, para los *volúmenes de control*, la masa puede cruzar las fronteras y, por consiguiente, se debe considerar la razón de la masa que entra y que sale del volumen de control.

Gastos de masa y de volumen

La cantidad de masa que fluye a través de una sección transversal por unidad de tiempo se llama **razón de flujo de masa** o simplemente flujo másico y se denota por $\dot{m}$. Se pone un punto sobre el símbolo para indicar *razón de cambio respecto al tiempo*

Un fluido fluye hacia dentro o hacia fuera de un volumen de control por tubos o ductos. El gasto diferencial de masa de fluido que fluye a través de un pequeño elemento de área, dA_c (el subíndice corresponde a la primera letra de la palabra inglesa cross-section), en una sección transversal de tubo es proporcional al propio dA_c, a la densidad r del fluido y a la componente de la velocidad del flujo normal a dA_c, la cual se denota como V_n, y se expresa como (Fig. 5-3):

$$\delta\dot{m} = \rho V_n \, dA_c \qquad \textbf{(5-4)}$$

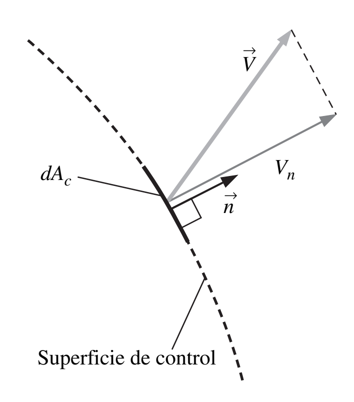


FIGURA 5-3
La velocidad normal V_n para una superficie es la componente de la velocidad perpendicular a esa superficie.

Note que se usan tanto δ como d para indicar las cantidades diferenciales, pero, por lo general, d se usa para cantidades (como calor, trabajo y transferencia de masa) que son *funciones de trayectoria* y tienen *diferenciales inexactas*, en tanto que d se usa para cantidades (como las propiedades) que son *funciones de punto* y tienen *diferenciales exactas*. Por ejemplo, para el flujo en el tubo exterior de

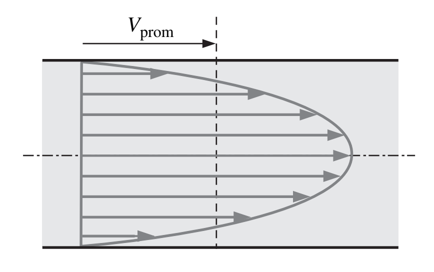


FIGURA 5-4
La velocidad promedio V_{prom} se define como la magnitud promedio de la velocidad de uno a otro lados de una sección transversal.

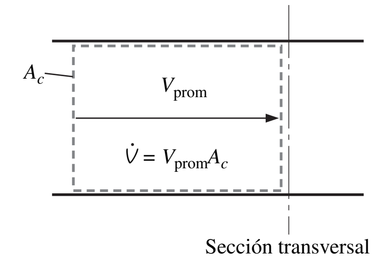


FIGURA 5-5
El gasto volumétrico es el volumen de fluido que fluye a través de una sección transversal por unidad de tiempo.

radio interior r_1 y radio exterior r_2 del ducto que consta de dos tubos concéntricos $\int_1^2 dA_c = A_{c2} - A_{c1} = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ pero $\int_1^2 \delta\dot{m} = \dot{m}_{total}$ (razón de flujo de masa total en el tubo exterior), no $\dot{m}_2 - \dot{m}_1$. Para valores especificados de r_1 y r_2, el valor de la integral de dA_c es fijo (de allí provienen los nombres de función de punto y diferencial exacta), pero éste no es el caso para la integral de $\delta\dot{m}$ (de ahí provienen los nombres de función de trayectoria y diferencial inexacta).

La razón de flujo de masa que cruza toda el área de la sección transversal de un tubo o de un ducto se obtiene por integración:

$$\dot{m} = \int_{A_c} \delta\dot{m} = \int_{A_c} \rho V_n \, dA_c \qquad \text{(kg/s)} \tag{5-5}$$

No obstante que la ecuación 5-5 siempre es válida (de hecho, es *exacta*), no siempre es práctica para los análisis de ingeniería porque implica integrar. En lugar de ello, resultaría conveniente expresar la razón de flujo de masa en términos de valores promedios sobre una sección transversal del tubo. En un flujo compresible general, tanto r como V_n varían de uno a otro lados del tubo. Sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas, la densidad es esencialmente uniforme sobre la sección transversal del tubo y se puede extraer r de la integral de la ecuación 5-5. Pero la velocidad *nunca* es uniforme sobre una sección transversal de un tubo debido a la condición de no deslizamiento en las paredes. Más bien, la velocidad varía desde cero en las paredes hasta algún valor máximo en la línea central del tubo o cerca de éste. Se define la **velocidad promedio** V_{prom} como el valor promedio de V_n a través de toda la sección transversal del tubo (Fig. 5-4):

Velocidad promedio: $$V_{prom} = \frac{1}{A_c}\int_{A_c} V_n \, dA_c \tag{5-6}$$

donde A_c es el área de la sección transversal normal a la dirección del flujo. Note que si la magnitud de la velocidad fuera V_{prom} en toda la sección transversal, el gasto de masa sería idéntico al que se obtiene cuando se integra el perfil real de velocidad. De donde, para el flujo incompresible o inclusive para el flujo compresible para el cual ρ sea uniforme a lo largo de A_c, la ecuación 5-5 queda:

$$\dot{m} = \rho V_{prom} A_c \qquad \text{(kg/s)} \tag{5-7}$$

Para el flujo compresible se puede concebir ρ como la densidad promedio sobre la sección transversal y entonces, no obstante, se usa la ecuación 5-7 como una aproximación razonable. Por sencillez, se elimina el subíndice de la velocidad promedio. A menos que se indique lo contrario, V denota la velocidad promedio en la dirección del flujo. Asimismo, A_c denota el área de la sección transversal normal a la dirección del flujo.

El volumen del fluido que fluye a través de una sección transversal por unidad de tiempo se llama **razón de flujo volumétrico** o gasto volumétrico o simplemente flujo volumétrico $\dot{V}$ (Fig. 5-5) y se da por:

$$\dot{V} = \int_{A_c} V_n \, dA_c = V_{prom} A_c = V A_c \qquad (\text{m}^3/\text{s}) \tag{5-8}$$

En 1628, el monje italiano Benedetto Castelli (1577-1644) publicó una primera forma de la ecuación 5-8. Note que en muchos textos de mecánica de fluidos se usa Q en lugar de $\dot{V}$ para el gasto volumétrico. Aquí se usa $\dot{V}$ para evitar confusión con la transferencia de calor

Las razones de flujo de masa y de volumen están relacionadas por:

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = \frac{\dot{V}}{v} \tag{5-9}$$

donde v es el volumen específico. Esta relación es análoga a $m = m = \rho V = V/v$, la cual es la relación entre la masa y el volumen de un fluido en un recipiente

Principio de conservación de la masa

Este **principio para un volumen de control** se puede expresar como: *la transferencia neta de masa hacia dentro un volumen de control, o hacia fuera de éste durante un intervalo Δt es igual al cambio neto (aumento o disminución) en la masa total que está dentro de ese volumen en el transcurso de Δt*; es decir:

$$\begin{pmatrix}\text{Masa total que entra}\\ \text{al VC durante } \Delta t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Masa total que sale}\\ \text{del VC durante } \Delta t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Cambio neto durante } \Delta t \text{ en la}\\ \text{masa que está dentro del VC}\end{pmatrix}$$

o

$$m_{\text{ent}} - m_{\text{sal}} = \Delta m_{\text{VV}} \qquad \text{(kg)} \tag{5-10}$$

donde $\Delta m_{\text{VC}} = m_{\text{final}} - m_{\text{inicial}}$ es el cambio en la masa del volumen de control durante el proceso (Fig. 5-6). Esto también se puede expresar en la *forma de razón* como:

$$\dot{m}_{\text{ent}} - \dot{m}_{\text{sal}} = dm_{\text{VC}}/dt \qquad \text{(kg/s)} \tag{5-11}$$

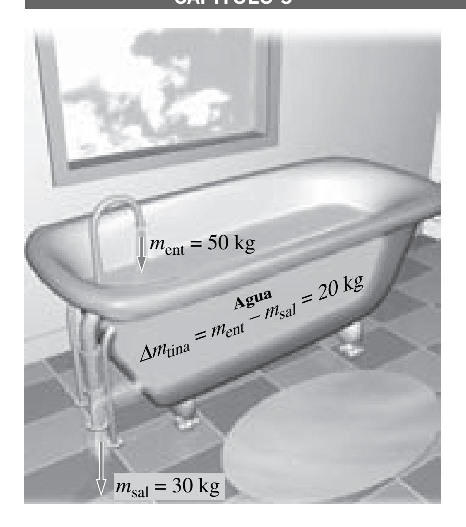


FIGURA 5-6
Principio de conservación de la masa para una tina común de baño.

donde $\dot{m}_{\text{ent}}$ y $\dot{m}_{\text{sal}}$ son las razones totales de flujo de masa hacia dentro y hacia fuera del volumen de control, y dm_{CV}/dt es la razón de cambio de la masa que está dentro de las fronteras de ese volumen. Con frecuencia, se hace mención de las ecuaciones 5-10 y 5-11 como el **balance de masa** y son aplicables a cualquier volumen de control que pase por alguna clase de proceso.

Considere un volumen de control de forma arbitraria, como se muestra en la figura 5-7. La masa de un volumen diferencial dV que esté dentro del volumen de control es $dm = \rho\, dV$. Por integración se determina que la masa total dentro del volumen de control en cualquier instante t es:

Masa total dentro del VC:
$$m_{\text{VC}} = \int_{\text{VC}} \rho\, dV \tag{5-12}$$

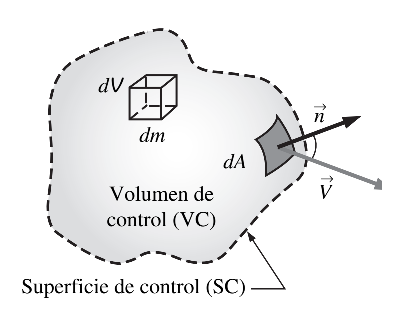


FIGURA 5-7
Volumen diferencial de control, dV, y superficie diferencial de control, dA, usados en la deducción de la relación de conservación de la masa.

Entonces la razón de cambio de la cantidad de masa dentro del volumen de control se puede expresar como

Razón de cambio de la masa dentro del VC:
$$\frac{dm_{\text{CV}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho\, dV \tag{5-13}$$

Para el caso especial en el que nada de masa cruza la superficie de control (es decir, el volumen de control semeja un sistema cerrado), el principio de conservación de la masa se reduce al de un sistema que se puede expresar como $dm_{\text{VC}}/dt = 0$. Esta relación es válida si el volumen de control está fijo, en movimiento o deformándose

Considérese ahora el flujo de masa hacia fuera o hacia dentro del volumen de control a través de un área diferencial dA sobre la superficie de control de un volumen fijo. Sea $\vec{n}$ el vector unitario hacia fuera de dA, normal a ésta, y $\vec{V}$ la velocidad del flujo en dA en relación con un sistema fijo de coordenadas, como se muestra en la figura 5-7. En general, la velocidad puede cruzar dA y forma un ángulo q con el normal de ésta y la razón de flujo de masa es proporcional a la componente normal de la velocidad $\vec{V}_n = \vec{V}\cos\theta$ que va desde un flujo máximo hacia fuera con velocidad $\vec{V}$ para $\theta = 0$ para $q = 0$ (el flujo es normal a dA), pasando por un mínimo de cero, para $\theta = 90°$ (el flujo es tangente a dA), hasta un *flujo* máximo *hacia dentro* con velocidad $\vec{V}$, para $\theta = 180°$ (el flujo es normal a dA, pero en dirección opuesta). Cuando se aplica el concepto del producto punto

de dos vectores, la magnitud de la componente normal de la velocidad se puede expresar como:

Componente normal de la velocidad: $$V_n = V\cos\theta = \vec{V}\cdot\vec{n} \qquad \textbf{(5-14)}$$

La razón de flujo de masa a través de dA es proporcional a la densidad del fluido ρ, a la velocidad normal V_n y al área de flujo dA, y se puede expresar como:

Razón diferencial de flujo de masa:

$$\delta\dot{m} = \rho V_n\, dA = \rho(V\cos\theta)\, dA = \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA \qquad \textbf{(5-15)}$$

La razón neta de flujo de masa hacia adentro o hacia afuera del volumen de control a través de la superficie completa de control se obtiene cuando se integra $\delta\dot{m}$ sobre esa superficie completa de control:

La razón neta de flujo de masa: $$\dot{m}_{\text{neto}} = \int_{SC} \delta\dot{m} = \int_{CS} \rho V_n\, dA = \int_{SC} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA \qquad \textbf{(5-16)}$$

Note que $\vec{V}\cdot\vec{n} = V\cos\theta$ es positiva para $\theta < 90°$ (flujo hacia fuera) y negativa para $\theta > 90°$ (flujo hacia dentro). Por lo tanto, se toma en cuenta de manera automática la dirección del flujo y la integral de la ecuación 5-16 da directamente la razón *neta* de flujo de masa. Un valor positivo para $\dot{m}_{\text{neto}}$ indica flujo neto hacia fuera y uno negativo indica flujo de masa neto hacia dentro

Si se reordena la ecuación 5-11 como $dm_{\text{CV}}/dt + \dot{m}_{\text{sal}} - \dot{m}_{\text{ent}} = 0$, entonces se puede expresar la relación de conservación de la masa para un volumen fijo de control como:

Conservación general de la masa: $$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, dV + \int_{SC} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA = 0 \qquad \textbf{(5-17)}$$

Ésta expresa que *la razón de cambio respecto al tiempo de la masa que está dentro del volumen de control más la razón neta de flujo de masa a través de la superficie de control es igual a cero*

También se puede deducir la relación general de conservación de la masa para un volumen de control con la aplicación del teorema del transporte de Reynolds (RTT, por sus siglas en inglés) cuando se toma la propiedad B como la masa m (capítulo 4). Entonces se tiene $b = 1$, ya que cuando se divide la masa entre la masa para obtener la propiedad por unidad de masa da la unidad. Asimismo, la masa de un sistema es constante y su derivada respecto al tiempo es cero. Es decir $dm_{\text{sist}}/dt = 0$. Entonces la ecuación del transporte de Reynolds se reduce de inmediato a la ecuación 5-17, como se muestra en la figura 5-8 y de este modo se ilustra que el teorema del transporte de Reynolds en verdad es un recurso muy poderoso. En el capítulo 6 se aplica el RTT para obtener las ecuaciones del momento lineal y del angular para los volúmenes de control

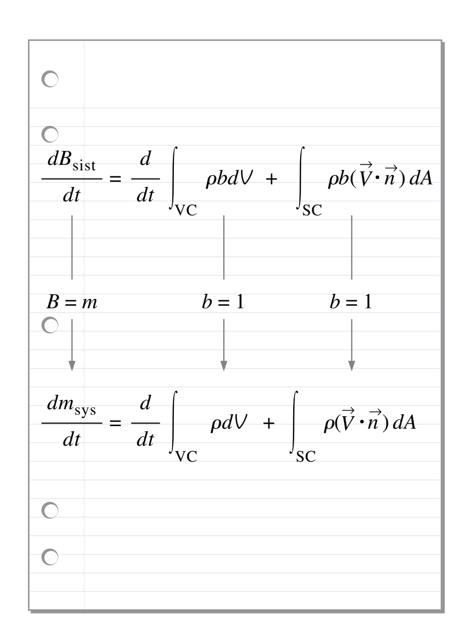


FIGURA 5-8
La ecuación de conservación de masa se obtiene cuando se reemplaza B en el teorema del transporte de Reynolds por la masa m y b por 1 (m por unidad de masa $= m/m = 1$).

Cuando se divide la integral de superficie de la ecuación 5-17 en dos partes —una para las corrientes salientes de flujo (positiva) y otra para las entrantes (negativa)— la relación general de conservación de la masa también se puede expresar como:

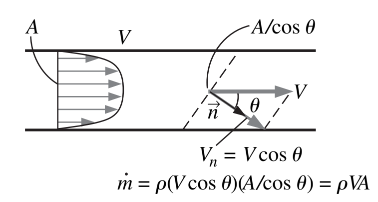
$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, dV + \sum_{\text{sal}} \int_A \rho V_n\, dA - \sum_{\text{ent}} \int_A \rho V_n\, dA = 0 \qquad \textbf{(5-18)}$$

donde A representa el área para una entrada o una salida, y se usa el signo de suma para subrayar que deben considerarse *todas* las entradas y salidas. Si se usa la definición de razón de flujo de masa, la ecuación 5-18 también se puede expresar como:

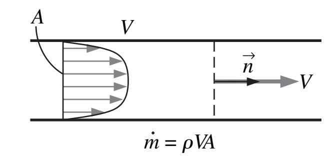
$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, dV = \sum_{\text{ent}} \dot{m} - \sum_{\text{sal}} \dot{m} \quad \text{o} \quad \frac{dm_{\text{VC}}}{dt} = \sum_{\text{ent}} \dot{m} - \sum_{\text{sal}} \dot{m} \qquad \textbf{(5-19)}$$

Se tiene una flexibilidad considerable en la selección de un volumen de control cuando se resuelve un problema. Varias elecciones de este volumen pueden ser

correctas, pero algunas son más convenientes para trabajar. Un volumen de control no debe de introducir complicaciones innecesarias. La elección apropiada de un volumen de control puede hacer que la resolución de un problema aparentemente complicado sea más bien fácil. Una regla sencilla cuando se selecciona un volumen de control es hacer que la superficie de control sea *normal al flujo* en todos los lugares en donde se cruce con ese flujo del fluido siempre que sea posible. De esta manera, el producto punto $\vec{V} \cdot \vec{n}$ se convierte, simplemente, en la magnitud de la velocidad y la integral $\int_A \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA$ se vuelve en rVA (Fig. 5-9).



a) Superficie de control *formando un ángulo* con el flujo



b) Superficie de control *normal* al flujo

FIGURA 5-9
Siempre debe seleccionarse una superficie de control *normal al flujo* en todos los lugares donde se cruce con ese flujo del fluido, para evitar complicaciones, aun cuando el resultado sea el mismo.

Volúmenes de control en movimiento o en deformación

Las ecuaciones 5-17 y 5-18 también son válidas para volúmenes de control en movimiento y en deformación, siempre que se reemplace la *velocidad absoluta* $\vec{V}$ por la *velocidad relativa* $\vec{V}_r$, la cual es la velocidad del fluido con relación a la superficie de control (capítulo 4). En el caso de un volumen de control que no esté deformando, la velocidad relativa es la velocidad del fluido que observa una persona en movimiento con el volumen de control y se expresa como $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{CV}$, en donde $\vec{V}$ es la velocidad del fluido y $\vec{V}_{CV}$ es la velocidad del volumen de control, ambas en relación con un punto fijo en el exterior. Una vez más, note que ésta es una sustracción *vectorial*

En algunos problemas prácticos (como la inyección de un medicamento a través de la aguja de una jeringa por el movimiento forzado del émbolo) intervienen volúmenes de control en deformación. Todavía se pueden usar las relaciones de conservación de la masa desarrolladas para esos volúmenes siempre que la velocidad del fluido que cruza una parte en deformación de la superficie de control se exprese en relación con ésta (es decir, la velocidad del fluido se debe expresar en relación con un marco de referencia sujeto a la parte en deformación de la superficie de control). En este caso, la velocidad relativa en cualquier punto sobre la superficie de control se expresa como $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{SC}$, en donde $\vec{V}_{SC}$ es la velocidad local de esa superficie de control en ese punto en relación con un punto fijo en el exterior del volumen de control.

Balance de masa para procesos de flujo estacionario

En el transcurso de un proceso de flujo estacionario, la cantidad total de masa contenida dentro de un volumen de control no cambia con el tiempo (m_{VC} = constante). Entonces el principio de conservación de la masa exige que la cantidad total de masa que entra en un volumen de control sea igual a la cantidad total de masa que sale de él. Por ejemplo, para la boquilla de una manguera de jardín en operación estacionaria, la cantidad de agua que entra a la boquilla por unidad de tiempo es igual a la cantidad de agua que sale de ella por unidad de tiempo

Cuando se trata con procesos de flujo estacionario no se tiene interés en la cantidad de masa que fluye hacia fuera o hacia dentro de un dispositivo en un transcurso de tiempo; en lugar de ello, se tiene interés en la cantidad de masa que fluye por unidad de tiempo; es decir, *la razón de flujo de masa* $\dot{m}$. *El principio de conservación de la masa* para un sistema general de flujo estacionario con entradas y salidas múltiples se puede expresar en la forma de razón como (Fig. 5-10):

Flujo estacionario: $$\sum_{\text{ent}} \dot{m} = \sum_{\text{sal}} \dot{m} \qquad \text{(kg/s)} \qquad \textbf{(5-20)}$$

Ésta expresa que *la razón total de masa que entra en un volumen de control es igual a la razón total de masa que sale de él*.

Numerosos dispositivos de ingeniería, como toberas, difusores, turbinas, compresores y bombas, forman una sola corriente (sólo una entrada y una salida).

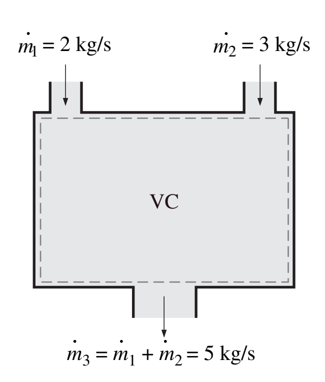


FIGURA 5-10
Principio de conservación de la masa para un sistema de flujo estacionario con dos entradas y una salida.

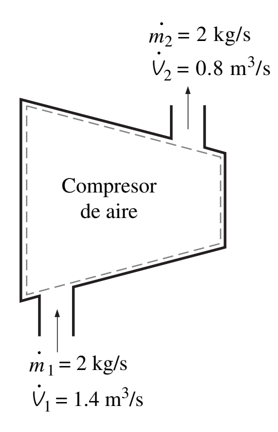


FIGURA 5-11
Cuando transcurre un proceso de flujo estacionario, los gastos volumétricos no se conservan necesariamente, aun cuando sí se conserven los flujos de masa.

Para estos casos se denota el estado de entrada por el subíndice 1 y el de salida por el subíndice 2, y se eliminan los signos de suma. Entonces la ecuación 5-20 se reduce, para *sistemas de flujo estacionario con una sola corriente*, a:

$$\textit{Flujo estacionario (una sola corriente)}: \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad \rightarrow \quad \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \tag{5-21}$$

Caso especial: flujo incompresible

Las relaciones de conservación de la masa se pueden simplificar todavía más cuando el fluido es incompresible, el cual suele ser el caso para los líquidos. Cuando se cancela la densidad en ambos miembros de la relación general del flujo estacionario da:

$$\textit{Flujo estacionario e incompresible}: \quad \sum_{\text{ent}} \dot{V} = \sum_{\text{sal}} \dot{V} \qquad (\text{m}^3/\text{s}) \tag{5-22}$$

Para sistemas de flujo estacionario con una sola corriente queda:

$$\textit{Flujo estacionario e incompresible (una sola corriente)}: \quad \dot{V}_1 = \dot{V}_2 \rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 \tag{5-23}$$

Siempre se debe tener presente que no existen cosas como principio de "conservación del volumen". Por lo tanto, los gastos volumétricos hacia dentro y hacia fuera de un aparato pueden ser diferentes. El gasto volumétrico a la salida de un compresor de aire es mucho menor que el que se tiene en la admisión, aun cuando la razón de flujo de masa de aire a través del compresor es constante (Fig. 5-11). Esto se debe a la densidad más alta del aire a la salida del compresor. Sin embargo, para el flujo estacionario de líquidos, los gastos volumétricos, así como los de masa, permanecen constantes, ya que los líquidos son esencialmente sustancias incompresibles (de densidad constante). El flujo de agua por la boquilla de una manguera de jardín es un ejemplo de este último caso.

El principio de conservación de la masa se basa en observaciones experimentales y exige tomar en cuenta toda pequeña porción de masa durante el transcurso de un proceso. Si el lector puede verificar el saldo de su chequera (mantener al día los depósitos y disposiciones o, sencillamente, si observa el principio de "conservación del dinero"), no debe tener dificultades en aplicar el principio de conservación de la masa a los sistemas de ingeniería.

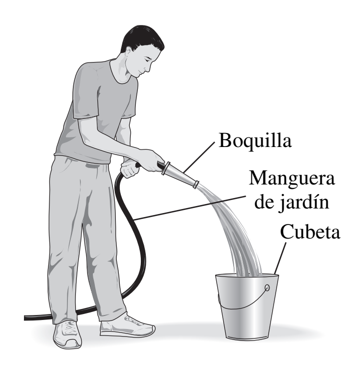


FIGURA 5-12
Esquema para el ejemplo 5-1.

EJEMPLO 5-4 **Flujo de agua por la boquilla de una manguera de jardín**

Se usa una manguera de jardín que tiene una boquilla de riego para llenar una cubeta de 10 gal. El diámetro de la manguera es de 10 cm y se reduce hasta 0.8 cm en la salida de la boquilla (Fig. 5-12). Si transcurren 50 s para llenar la cubeta con agua, determine *a*) las razones de flujo volumétrico y de masa del agua que pasa por la manguera y *b*) la velocidad promedio del agua a la salida de la boquilla.

SOLUCIÓN Se usa una manguera de jardín para llenar una cubeta con agua. Se deben determinar las razones de flujo volumétrico y de masa y la velocidad a la salida.
Hipótesis **1** El agua es una sustancia incompresible. **2** El flujo por la manguera es estacionario. **3** No hay desperdicio de agua por salpicadura.
Propiedades Se toma la densidad del agua como 1000 kg/m³ = 1 kg/L.
Análisis *a*) Note que se descargan 10 gal de agua en 50 s, las razones de flujo volumétrico y de masa son:

$$\dot{V} = \frac{V}{\Delta t} = \frac{10 \text{ gal}}{50 \text{ s}}\left(\frac{3.7854 \text{ L}}{1 \text{ gal}}\right) = \mathbf{0.757\ L/s}$$

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = (1 \text{ kg/L})(0.757 \text{ L/s}) = \mathbf{0.757\ kg/s}$$

b) El área de la sección transversal de la salida de la boquilla es:

$$A_e = \pi r_e^2 = \pi(0.4\ \text{cm})^2 = 0.5027\ \text{cm}^2 = 0.5027 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

El gasto volumétrico por la manguera y por la boquilla es constante; entonces, la velocidad promedio del agua en la salida de la boquilla queda:

$$V_e = \frac{\dot{V}}{A_e} = \frac{0.757\ \text{L/s}}{0.5027 \times 10^{-4}\ \text{m}^2}\left(\frac{1\ \text{m}^3}{1000\ \text{L}}\right) = \mathbf{15.1\ m/s}$$

Discusión Se puede demostrar que la velocidad promedio en la manguera es de 2.4 m/s. Por lo tanto, la boquilla aumenta la velocidad del agua en más de seis veces.

EJEMPLO 5-2 Descarga de agua de un tanque

Un tanque cilíndrico de agua con 4 ft de alto y 3 ft de diámetro cuya parte superior está abierta a la atmósfera está al principio lleno con agua. Ahora, se quita el tapón de descarga que está cerca del fondo del tanque cuyo diámetro es de 0.5 m y un chorro de agua se vierte hacia fuera (Fig. 5-13). La velocidad promedio del chorro se da por $V = \sqrt{2gh}$, en donde h es la altura del agua en el tanque medida desde el centro del agujero (una variable) y g es la aceleración gravitacional. Determínese cuánto tiempo transcurrirá para que el nivel del agua en el tanque descienda hasta 2 ft, medido desde el fondo.

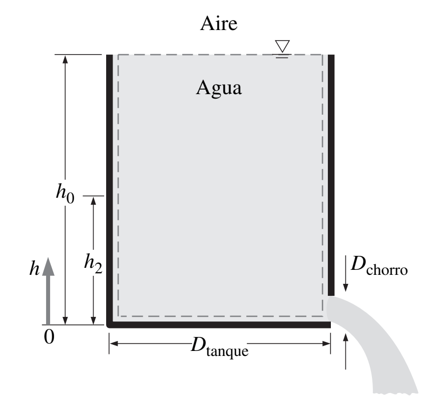


FIGURA 5-13
Esquema para el ejemplo 5-2.

SOLUCIÓN Se quita el tapón cercano al fondo de un tanque de agua. Se debe determinar el tiempo que tarda en descargarse la mitad del agua que está en el tanque.

Hipótesis **1** El agua es una sustancia incompresible. **2** La distancia entre el fondo del tanque y el centro del agujero es despreciable en comparación con la altura total del agua. **3** La aceleración gravitacional es de 32.2 ft/s^2.

Análisis Se toma el volumen ocupado por el agua como el volumen de control. En este caso, decrece el tamaño de este volumen, conforme el nivel del agua desciende y, donde éste es un volumen de control variable (también se pudo tratar esto como un volumen fijo de control, que consiste en el volumen interior del tanque descartando el aire que reemplaza el espacio que deja vacío el agua). Es obvio que es un problema de flujo no estacionario, ya que las propiedades (como la cantidad de masa) en el interior del volumen de control cambian con el tiempo.

La relación de conservación de la masa para un volumen de control que pasa por cualquier proceso se da en la forma de razón como:

$$\dot{m}_{\text{ent}} - \dot{m}_{\text{sal}} = \frac{dm_{\text{VC}}}{dt} \tag{1}$$

En el transcurso de este proceso nada de masa entra al volumen de control ($\dot{m}_{\text{ent}} = 0$), y el gasto de masa del agua descargada se puede expresar como:

$$\dot{m}_{\text{sal}} = (\rho VA)_{\text{sal}} = \rho\sqrt{2gh}A_{\text{chorro}} \tag{2}$$

donde $A_{\text{chorro}} = \pi D_{\text{chorro}}^2/4$ es el área de la sección transversal del chorro, la cual es constante. Nótese que la densidad del agua es constante, la masa del agua en el tanque en cualquier instante es:

$$m_{\text{VC}} = \rho V = \rho A_{\text{chorro}} h \tag{3}$$

donde $A_{\text{tanque}} = \pi D_{\text{tanque}}^2/4$ es el área de la base del tanque cilíndrico. Si se sustituyen las ecuaciones 2 y 3 en la relación de balance de masa (ecuación 1) da:

$$-\rho\sqrt{2gh}A_{\text{chorro}} = \frac{d(\rho A_{\text{tanque}} h)}{dt} \rightarrow -\rho\sqrt{2gh}(\pi D_{\text{chorro}}^2/4) = \frac{\rho(\pi D_{\text{tanque}}^2/4)\, dh}{dt}$$

Cuando se cancelan las densidades y otros términos comunes, y se separan las variables, da:

$$dt = -\frac{D_{\text{tanque}}^2}{D_{\text{chorro}}^2}\frac{dh}{\sqrt{2gh}}$$

Se integra desde $t = 0$, en el cual $h = h_0$, hasta $t = t$, en el cual $h = h_2$, da:

$$\int_0^t dt = -\frac{D_{\text{tanque}}^2}{D_{\text{chorro}}^2\sqrt{2g}}\int_{h_0}^{h_2}\frac{dh}{\sqrt{h}} \quad \rightarrow \quad t = \frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h_2}}{\sqrt{g/2}}\left(\frac{D_{\text{tanque}}}{D_{\text{chorro}}}\right)^2$$

Al sustituir, se determina que el tiempo de descarga es:

$$t = \frac{\sqrt{4 \text{ ft}} - \sqrt{2 \text{ ft}}}{\sqrt{32.2/2 \text{ ft/s}^2}}\left(\frac{3 \times 12 \text{ in}}{0.5 \text{ in}}\right)^2 = 757 \text{ s} = \mathbf{12.6 \text{ min}}$$

Por lo tanto, se vaciará la mitad del tanque en 12.6 min después de quitar el tapón del agujero de descarga.

Discusión Se usa la misma relación, con $h_2 = 0$ da $t = 43.1$ min para que se descargue toda la cantidad de agua que está en el tanque. Por lo tanto, se necesita más tiempo para vaciar la mitad de abajo del tanque que vaciar la mitad de arriba. Esto se debe a la disminución en la velocidad promedio de descarga del agua, cuando decrece *h*.

5-3 ▪ ENERGÍA MECÁNICA Y EFICIENCIA

Gran cantidad de sistemas de fluidos se diseñan para transportar un fluido de un lugar a otro con un gasto, una velocidad y una diferencia de elevación especificados, y durante este proceso el sistema puede generar trabajo mecánico en una turbina o puede consumir este tipo de trabajo en una bomba o en un ventilador. En estos sistemas no interviene la transformación de energía nuclear, química o térmica en energía mecánica. Asimismo, no incluyen transferencia de calor en cualquier cantidad significativa y, en esencia, operan a temperatura constante. Los sistemas de este tipo se pueden analizar de manera conveniente cuando se consideran sólo las *formas mecánicas de energía* y los efectos de fricción que hacen que se pierda la energía mecánica (es decir, que se convierta en energía térmica que suele no poder usarse para algún propósito útil).

La **energía mecánica** se define como *la forma de energía que se puede convertir completa y directamente a trabajo mecánico por medio de un dispositivo mecánico ideal como lo es una turbina ideal*. Las formas comunes de la energía mecánica son la energía cinética y la potencial. Sin embargo, la energía térmica no es energía mecánica, puesto que no se puede convertir en trabajo de manera directa y por completo (segunda ley de la termodinámica).

Una bomba transfiere energía mecánica a un fluido cuando aumenta su presión, y una turbina extrae ese tipo de energía de un fluido cuando hace bajar su presión. Por lo tanto, la presión de un fluido fluyente también está asociada con su energía mecánica. De hecho, la unidad de presión Pa es equivalente a Pa $=$ N/m^2 $=$ N $\cdot$ m/m^3 $=$ J/m^3, lo cual es energía por unidad de volumen, y el producto $P\text{v}$, o su equivalente P/ρ, tiene la unidad de J/kg, lo cual es energía por unidad de masa. Note que la propia presión no es una forma de energía. Pero una fuerza de presión que actúa sobre un fluido a lo largo de una distancia produce trabajo, conocido como *trabajo del flujo*, en la cantidad de P/ρ por unidad de masa. El trabajo del flujo se expresa en función de las propiedades del fluido y es conveniente verlo como parte de la energía de un fluido fluyente y llamarlo

energía de flujo. Por lo tanto, la energía mecánica de un fluido fluyente se puede expresar en cuanto a la unidad de masa como (Fig. 5-14):

$$e_{\text{mec}} = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz$$

donde P/ρ es la *energía de flujo*, $V^2/2$ es la *energía cinética* y gz es la *energía potencial* del fluido, todo por unidad de masa. Entonces, el cambio en la energía mecánica de un fluido en el curso de un flujo incompresible queda:

$$\Delta e_{\text{mec}} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \qquad \text{(kJ/kg)} \tag{5-24}$$

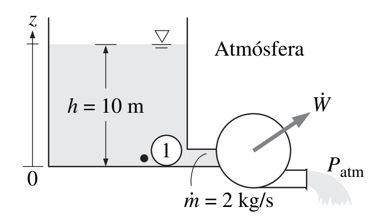
Por lo tanto, la energía mecánica de un fluido no cambia durante el flujo si su presión, densidad, velocidad y elevación permanecen constantes. En ausencia de cualesquiera pérdidas, el cambio en la energía mecánica representa el trabajo mecánico suministrado al fluido (si $\Delta e_{\text{mec}} > 0$) o extraído de éste (si $\Delta e_{\text{mec}} < 0$).

Considérese un depósito de altura h lleno con agua, como se muestra en la figura 5-15, con el nivel de referencia seleccionado en la superficie del fondo. La presión manométrica y la energía potencial por unidad de masa son, respectivamente, $P_A = 0$ y $\text{ep}_A = gh$ en un punto A en la superficie libre, y $P_B = \rho gh$ y $\text{ep}_B = 0$ en el punto B en el fondo del depósito. Una turbina hidráulica ideal produciría el mismo trabajo por unidad de masa, $w_{\text{turbina}} = gh$, si recibe agua (o cualquier otro fluido con densidad constante) desde la parte superior o desde el fondo del depósito. Note que también se supone flujo ideal (ninguna pérdida irreversible) a lo largo del tubo que conduce del tanque a la turbina. Por lo tanto, la energía mecánica total del agua en el fondo equivale a la de la parte superior.

La transferencia de energía mecánica suele realizarse cuando se hace girar una flecha y donde a menudo se hace referencia a la energía mecánica como *trabajo en la flecha*. Una bomba o un ventilador reciben trabajo en la flecha (por lo común proviene de un motor eléctrico) y lo transfieren al fluido como energía mecánica (menos las pérdidas por fricción). Por otro lado, una turbina convierte la energía mecánica de un fluido en trabajo en la flecha. En ausencia de cualesquiera factores irreversibles —como la fricción—, la energía mecánica se puede convertir por completo de una forma mecánica hacia otra y la **eficiencia mecánica** de un dispositivo o proceso se puede definir como (Fig. 5-16):

$$\eta_{\text{mec}} = \frac{\text{Salida de energía mecánica}}{\text{Entrada de energía mecánica}} = \frac{E_{\text{mec, sal}}}{E_{\text{mec, ent}}} = 1 - \frac{E_{\text{mec, pérdida}}}{E_{\text{mec, ent}}} \tag{5-25}$$

Una eficiencia de conversión de menos de 100 por ciento indica que esa conversión es menos que perfecta y se han presentado algunas pérdidas en el curso de ella. Una eficiencia mecánica de 97 por ciento indica que 3 por ciento de la salida de energía mecánica se convierte en energía térmica como resultado del calentamiento por fricción y esto se manifestará como un ligero aumento en la temperatura del fluido.



$$\dot{W}_{\text{máx}} = \dot{m}\frac{P_1 - P_{\text{atm}}}{\rho} = \dot{m}\frac{\rho gh}{\rho} = \dot{m}gh$$
$$= (2 \text{ kg/s})(9.81 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m})$$
$$= 196 \text{ W}$$

FIGURA 5-14
En ausencia de cualesquiera cambios en la velocidad y la elevación del flujo, la potencia producida por una turbina hidráulica ideal es proporcional a la caída de presión del agua a través de la turbina.

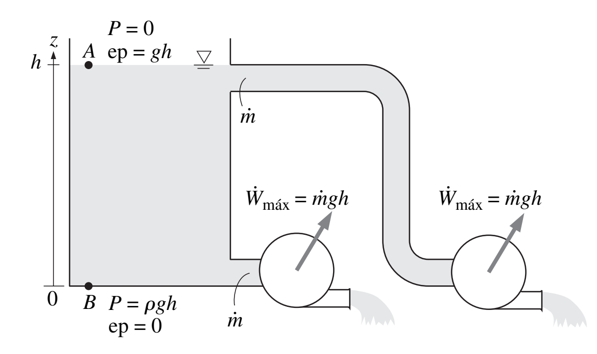
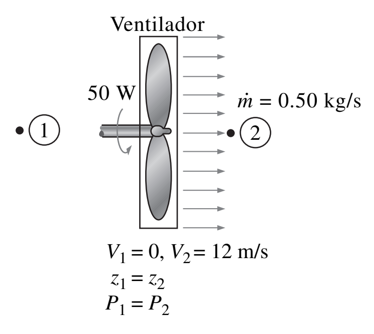


FIGURA 5-15
La energía mecánica del agua en el fondo de un depósito es igual a la energía mecánica a cualquier profundidad, inclusive la superficie libre de ese depósito.



$$\eta_{\text{mec, ventilador}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}}{\dot{W}_{\text{flecha, ent}}} = \frac{\dot{m}V_2^2/2}{\dot{W}_{\text{flecha, ent}}} = \frac{(0.50\text{ kg/s})(12\text{ m/s})^2/2}{50\text{ W}} = 0.72$$

FIGURA 5-16
La eficiencia mecánica de un ventilador es la razón de la energía cinética del aire a la salida de éste a la entrada de potencia mecánica.

En los sistemas de fluidos suele tenerse interés en aumentar la presión, la velocidad o la elevación de un fluido. Esto se realiza al *suministrar energía mecánica al fluido* mediante una bomba, un ventilador o un compresor (se hará referencia a todos ellos como bombas). O se tiene interés en el proceso inverso de *extracción de energía mecánica del fluido* mediante una turbina y producir potencia mecánica mediante una flecha giratoria que puede impulsar un generador o cualquier otro dispositivo rotatorio. El grado de perfección del proceso de conversión entre el trabajo mecánico suministrado o extraído y la energía mecánica del fluido se expresa por la **eficiencia de la bomba** y la **eficiencia de la turbina**, definidas como:

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{\text{Aumento en la energía mecánica del fluido}}{\text{Salida de energía mecánica}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}}{\dot{W}_{\text{flecha, ent}}} = \frac{\dot{W}_{\text{bomba, }u}}{\dot{W}_{\text{bomba}}} \qquad \textbf{(5-26)}$$

donde $\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}} = \dot{E}_{\text{mec, sal}} - \dot{E}_{\text{mec, ent}}$ es la razón de aumento en la energía mecánica del fluido, la cual equivale a la **potencia útil de bombeo**, $\dot{W}_{\text{bomba, }u}$, suministrada al fluido y:

$$\eta_{\text{turbina}} = \frac{\text{Salida de energía mecánica}}{\text{Disminución en la energía mecánica del fluido}} = \frac{\dot{W}_{\text{flecha, sal}}}{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}} = \frac{\dot{W}_{\text{turbina}}}{\dot{W}_{\text{turbina, }e}} \qquad \textbf{(5-27)}$$

donde $|\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}| = \dot{E}_{\text{mec, ent}} - \dot{E}_{\text{mec, sal}}$ es la razón de disminución en la energía mecánica del fluido, la cual equivale a la potencia mecánica extraída del fluido por la turbina $\dot{W}_{\text{turbina, }e}$, y se usa el signo de valor absoluto para evitar tener valores negativos para las eficiencias. Una eficiencia de una bomba o una turbina de 100 por ciento indica una conversión perfecta entre el trabajo en la flecha y la energía mecánica del fluido y se puede tender a este valor (pero nunca alcanzarlo) conforme se minimizan los efectos de la fricción.

La eficiencia mecánica no debe confundirse con la **eficiencia del motor** y la **eficiencia del generador**, las cuales se definen como:

Motor: $$\eta_{\text{motor}} = \frac{\text{Salida de potencia mecánica}}{\text{Entrada de potencia eléctrica}} = \frac{\dot{W}_{\text{flecha, sal}}}{\dot{W}_{\text{eléct, ent}}} \qquad \textbf{(5-28)}$$

y

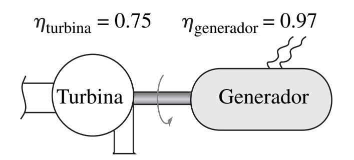
Generador: $$\eta_{\text{generador}} = \frac{\text{Salida de potencia eléctrica}}{\text{Entrada de potencia mecánica}} = \frac{\dot{W}_{\text{eléct, sal}}}{\dot{W}_{\text{flecha, ent}}} \qquad \textbf{(5-29)}$$

Suele formarse un acoplamiento de una bomba con su motor y el de una turbina con su generador. Por lo tanto, por lo general se tiene interés en la **eficiencia combinada** o **total** de las combinaciones bomba-motor y turbogenerador (Fig. 5-17), las cuales se definen como:

$$\eta_{\text{bomba-motor}} = \eta_{\text{bomba}}\eta_{\text{motor}} = \frac{\dot{W}_{\text{bomba, }u}}{\dot{W}_{\text{eléct, ent}}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}}{\dot{W}_{\text{eléct, ent}}} \qquad \textbf{(5-30)}$$

y

$$\eta_{\text{turbogenerador}} = \eta_{\text{turbina}}\eta_{\text{generador}} = \frac{\dot{W}_{\text{eléct, sal}}}{\dot{W}_{\text{turbina, }e}} = \frac{\dot{W}_{\text{eléct, sal}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}|} \qquad \textbf{(5-31)}$$



$$\eta_{\text{turbogenerador}} = \eta_{\text{turbina}}\eta_{\text{generador}} = 0.75 \times 0.97 = 0.73$$

FIGURA 5-17
La eficiencia total de un turbogenerador es el producto de la eficiencia de la turbina y la eficiencia del generador, y representa la fracción de la energía mecánica del fluido convertida en energía eléctrica.

Todas las eficiencias que acaban de definirse varían entre 0 y 100 por ciento. El límite inferior de 0 por ciento corresponde a la conversión de toda la entrada

de energía eléctrica o mecánica en energía térmica y, en este caso, el dispositivo funciona como un calentador de resistencia. El límite superior de 100 por ciento corresponde al caso de conversión perfecta, sin fricción ni otros factores irreversibles y, en consecuencia, no hay conversión de energía mecánica o eléctrica en energía térmica.

EJEMPLO 5-3 Rendimiento de un turbogenerador hidráulico

Se usará el agua de un lago para generar electricidad por medio de la instalación de un turbogenerador hidráulico en un lugar donde la profundidad del agua es de 50 m (Fig. 5-18). El agua se alimentará a razón de 5 000 kg/s. Si se mide que la potencia eléctrica generada es de 1 862 kW y la eficiencia del generador es de 95 por ciento, determínese: *a*) la eficiencia total del turbogenerador, *b*) la eficiencia mecánica de la turbina y *c*) la potencia en la flecha suministrada por la turbina al generador.

SOLUCIÓN Un turbogenerador hidráulico va a generar electricidad a partir del agua de un lago. Deben determinarse la eficiencia total, la eficiencia de la turbina y la potencia en la flecha.

Hipótesis **1** El nivel de agua en el lago permanece constante. **2** La energía mecánica del agua a la salida de la turbina es despreciable.

Propiedades La densidad del agua puede tomarse como $\rho = 1000$ kg/m^3.

Análisis *a*) Por conveniencia, se toma el fondo del lago como el nivel de referencia. Entonces, la energía cinética y la potencial del agua son cero y el cambio en su energía mecánica por unidad de masa queda:

$$e_{\text{mec, ent}} - e_{\text{mec, sal}} = \frac{P}{\rho} - 0 = gh = (9.81 \text{ m/s}^2)(50 \text{ m})\left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}\right) = 0.491 \text{ kJ/kg}$$

Por tanto, la razón a la cual la energía mecánica es suministrada a la turbina por el fluido y la eficiencia total quedan:

$$|\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}| = \dot{m}(e_{\text{mec, ent}} - e_{\text{mec, sal}}) = (5\,000 \text{ kg/s})(0.491 \text{ kJ/kg}) = 2\,455 \text{ kW}$$

$$\eta_{\text{total}} = \eta_{\text{turbogenerador}} = \frac{\dot{W}_{\text{eléct, sal}}}{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}} = \frac{1\,862 \text{ kW}}{2\,455 \text{ kW}} = \mathbf{0.76}$$

b) Si se conoce la eficiencia total y la del generador, la eficiencia mecánica de la turbina se determina a partir de:

$$\eta_{\text{turbogenerador}} = \eta_{\text{turbina}}\ \ \text{generador} \rightarrow \eta_{\text{turbina}} = \frac{\eta_{\text{turbogenerador}}}{\eta_{\text{generador}}} = \frac{0.76}{0.95} = \mathbf{0.80}$$

c) La salida de potencia en la flecha se determina con base en la definición de eficiencia mecánica,

$$\dot{W}_{\text{flecha, sal}} = \eta_{\text{turbina}}|\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}| = (0.80)(2\,455 \text{ kW}) = \mathbf{1\,964 \text{ kW}}$$

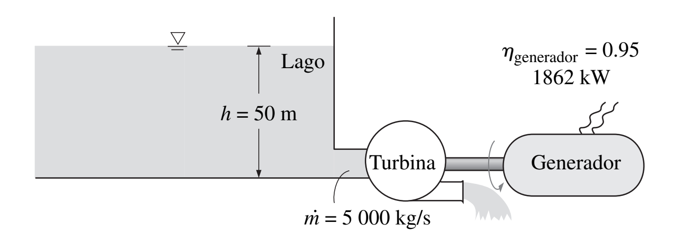


FIGURA 5-18
Esquema para el ejemplo 5-3.

Discusión Note que el lago alimenta 2 455 kW de energía mecánica a la turbina, la cual convierte 1 964 kW de ella en trabajo en la flecha que impulsa el generador, el cual genera 1 862 kW de potencia eléctrica. Se tienen pérdidas irreversibles a través de cada componente.

EJEMPLO 5-4 Conservación de la energía para una bola oscilante de acero

Se analizará el movimiento de una bola de acero en un tazón hemisférico de radio h, que se muestra en la figura 5-19. Inicialmente, la bola se sostiene en el lugar más alto, en el punto *A* y, a continuación, se suelta. Obtenga relaciones para la conservación de la energía de la bola para los casos de los movimientos sin fricción y real.

SOLUCIÓN Se suelta una bola de acero en un tazón. Deben obtenerse relaciones para el balance de energía.
Hipótesis El movimiento es sin fricción y, como consecuencia, la fricción entre la bola, el tazón y el aire es despreciable.
Análisis Cuando la bola se suelta, se acelera por la influencia de la gravedad, alcanza su velocidad máxima (y elevación mínima) en el punto *B* en el fondo del tazón y se mueve hacia arriba, hacia el punto *C*, en el lado opuesto. En el caso ideal de movimiento sin fricción, la bola oscilará entre los puntos *A* y *C*. El movimiento real incluye la conversión de la energía cinética y la potencial de la bola entre sí, junto con el hecho de vencer la resistencia al movimiento debido a la fricción (realizando trabajo contra la fricción). El balance general de energía para cualquier sistema que pasa por cualquier proceso es:

$$\underbrace{E_{\text{ent}} - E_{\text{sal}}}_{\substack{\text{Transferencia neta de energía} \\ \text{por calor, trabajo y masa}}} = \underbrace{\Delta E_{\text{sistema}}}_{\substack{\text{Cambio en las energías interna} \\ \text{cinética, potencial, etcétera}}}$$

Entonces el balance de energía para la bola, para un proceso desde el punto 1 hasta el 2, queda:

$$-w_{\text{fricción}} = (\text{ec}_2 + \text{ep}_2) - (\text{ec}_1 + \text{ep}_1)$$

o

$$\frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + w_{\text{fricción}}$$

ya que no se tiene transferencia de energía por calor o masa y no hay cambio en la energía interna de la bola (el calor generado por el calentamiento debido a la fricción se disipa hacia el aire circundante). A menudo, el término de trabajo

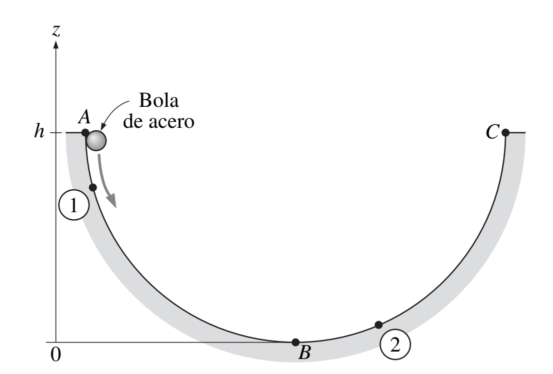


FIGURA 5-19
Esquema para el ejemplo 5-4.

contra la fricción, $w_{\text{fricción}}$, se expresa como $e_{\text{pérdida}}$, con la finalidad de representar la pérdida (conversión) de energía mecánica hacia energía térmica.

Para el caso utópico de movimiento sin fricción, la última relación se reduce a:

$$\frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \qquad \text{o} \qquad \frac{V^2}{2} + gz = C = \text{constante}$$

donde el valor de la constante es $C = gh$. Es decir, cuando los efectos de fricción son despreciables, *la suma de la energía cinética y la potencial de la bola se mantienen constantes*.

Discusión Con certeza, ésta es una forma más intuitiva y conveniente de la ecuación de conservación de la energía, para éste y otros procesos similares, como el movimiento de oscilación del péndulo de un reloj de pared. La relación obtenida es análoga a la ecuación de Bernoulli que se deduce en la sección 5-4.

En la mayoría de los procesos que se presentan en la práctica intervienen sólo ciertas formas de la energía y, en esos casos, es más conveniente trabajar con las versiones simplificadas del balance de energía. Para sistemas que sólo se relacionan con *formas mecánicas de la energía* y su transferencia como *trabajo en la flecha*, el principio de conservación de la energía se puede expresar de manera conveniente como:

$$E_{\text{mec, ent}} - E_{\text{mec, sal}} = \Delta E_{\text{mec, sistema}} + E_{\text{mec, pérdida}} \qquad \textbf{(5-32)}$$

donde $E_{\text{mec, pérdida}}$ representa la conversión de energía mecánica en energía térmica debido a factores irreversibles como la fricción. Para un sistema en operación estacionaria, el balance de energía mecánica queda $\dot{E}_{\text{mec, ent}} = \dot{E}_{\text{mec, sal}} + \dot{E}_{\text{mec, pérdida}}$ (Fig. 5-20).

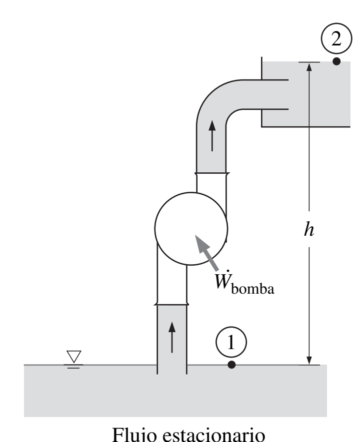


FIGURA 5-20
La mayoría de los problemas de flujo de fluidos incluyen sólo formas mecánicas de la energía y ese tipo de problemas se resuelven de manera conveniente cuando se aplica un balance de *energía mecánica.*

5-4 ▪ LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

La **ecuación de Bernoulli** es *una relación aproximada entre la presión, la velocidad y la elevación* , y es válida en *regiones de flujo estacionario e incompresible en donde las fuerzas netas de fricción son despreciables* (Fig. 5-21). Pese a su simplicidad la ecuación de Bernoulli demostró que es un instrumento muy potente en mecánica de fluidos. En esta sección, se deduce la ecuación de Bernoulli a partir del principio de conservación de momento lineal, se demuestra su utilidad y se analizan sus limitaciones.

La aproximación clave en la deducción de la ecuación de Bernoulli es que *los efectos viscosos son despreciablemente pequeños en comparación con los efectos de inercia, gravitacionales y de la presión*. Puesto que todos los fluidos tienen viscosidad (no existe un "fluido no viscoso"), esta aproximación no puede ser válida para todo un campo de flujo de interés práctico. En otras palabras, no se puede aplicar la ecuación de Bernoulli *en todas partes* en un flujo, sin importar qué pequeña sea la viscosidad del fluido. Sin embargo, resulta que la aproximación *es* razonable en ciertas *regiones* de muchos flujos prácticos. Se hará referencia a esas regiones como *regiones no viscosas del flujo* y se enfatiza que *no* son regiones en donde el propio fluido es no viscoso o sin fricción sino, más bien, que son regiones en donde las fuerzas viscosas o de fricción netas son despreciablemente pequeñas en comparación con las otras fuerzas que actúan sobre las partículas del fluido.

Debe tenerse cuidado cuando se utiliza la ecuación de Bernoulli, porque es una aproximación que sólo se aplica a las regiones no viscosas del flujo. En general, los efectos de la fricción siempre son importantes muy cerca de las paredes sólidas (*capas límite*) y directamente corriente abajo de los cuerpos (*este-*

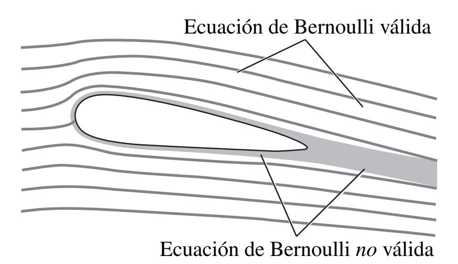


FIGURA 5-21
La *ecuación de Bernoulli* es una ecuación *aproximada* que sólo es válida en *regiones no viscosas del flujo*, donde las fuerzas viscosas netas son despreciablemente pequeñas en comparación con las fuerzas de inercia, gravitacionales y de presión. Ese tipo de regiones se presentan por fuera de las *capas límite* y de las *estelas*.

las). Por tanto, la aproximación de Bernoulli es útil por lo general en regiones del flujo por fuera de las capas límite y estelas, en donde el movimiento del fluido lo rigen los efectos combinados de la presión y la gravedad.

El movimiento de una partícula y la trayectoria que sigue se describen por el *vector velocidad*, como función del tiempo y las coordenadas espaciales, así como de la posición inicial de la partícula. Cuando el flujo es *estacionario* (ningún cambio con el tiempo en un lugar especificado), todas las partículas que pasan por el mismo punto siguen la misma trayectoria (la cual es la *línea de corriente*) y los vectores de velocidad permanecen tangentes a la trayectoria en todo punto.

Aceleración de una partícula de fluido

Con frecuencia conviene describir el movimiento de una partícula en términos de su distancia *s,* a lo largo de una línea de corriente, junto con el radio de curvatura a lo largo de esta línea. La velocidad de la partícula está relacionada con la distancia por $V = ds/dt$, la cual puede variar a lo largo de la línea de corriente. En el flujo bidimensional, la aceleración se puede descomponer en dos elementos: la *aceleración según la corriente* a_s, a lo largo de la línea de corriente, y la *aceleración normal* a_n, en la dirección normal a la línea misma, la cual se da como $a_n = V^2/R$. Note que la aceleración según la corriente se debe a un cambio en la magnitud de la velocidad a lo largo de una línea de corriente, y la normal se debe a un cambio en la dirección. Para las partículas que se mueven a lo largo de una *trayectoria recta*, $a_n = 0$ ya que el radio de curvatura es infinito y, por consiguiente, no hay cambio en la dirección. La ecuación de Bernoulli es resultado de un balance de fuerzas a lo largo de una línea de corriente.

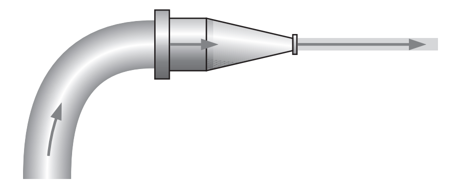


FIGURA 5-22
En el transcurso de un flujo estacionario puede ser que un fluido no se acelere en el tiempo en un punto fijo, pero puede acelerarse en el espacio.

Puede tenerse la tentación de pensar que la aceleración es cero en el flujo estacionario, dado que la aceleración es la razón de cambio de la velocidad con el tiempo, y en este flujo no hay cambio con el tiempo. Sin embargo, la boquilla de una manguera de jardín hace ver que esta apreciación no es correcta. Inclusive, en el flujo estacionario y, por tanto, de un flujo de masa constante, el flujo se acelera a su paso por la boquilla (Fig. 5-22, como se comentó en el capítulo 4). *Estacionario* sencillamente significa *ningún cambio con el tiempo en un lugar especificado*, pero el valor de una cantidad puede cambiar de un lugar a otro. En el caso de una boquilla, la velocidad del agua permanece constante en un punto especificado, pero cambia de la entrada a la salida (el agua se acelera a lo largo de la boquilla).

Matemáticamente esto puede expresarse de la manera siguiente: se toma la velocidad V de una partícula de fluido como una función de s y t. Cuando se toma la diferencial total de $V(s, t)$ y se dividen ambos miembros entre dt da:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt \qquad \text{y} \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \tag{5-33}$$

En el flujo estacionario $\partial V/\partial t = 0$ y donde $V = V(s)$ y la aceleración en la dirección s queda:

$$a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} V = V\frac{dV}{ds} \tag{5-34}$$

donde $V = ds/dt$, si se sigue una partícula de fluido conforme se mueve a lo largo de una línea de corriente. Por lo tanto, la aceleración en el flujo estacionario se debe al cambio de la velocidad con la posición.

Deducción de la ecuación de Bernoulli

Considere el movimiento de una partícula de fluido en un campo de flujo estacionario descrito con detalle en el capítulo 4. Cuando se aplica la segunda ley de

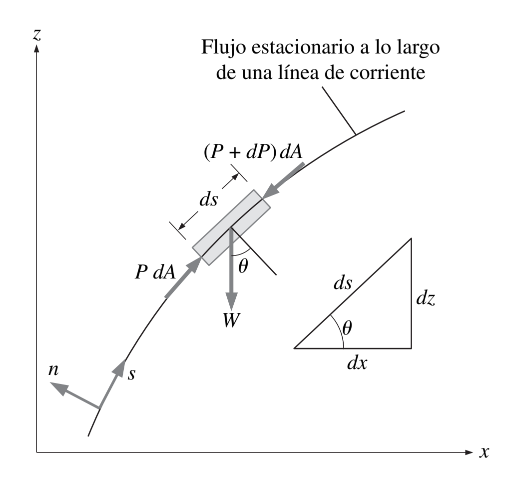


FIGURA 5-23
Fuerzas que actúan sobre una partícula de fluido a lo largo de una línea de corriente.

Newton (la cual se menciona como la relación de *conservación del momento lineal* en la mecánica de fluidos) en la dirección *s,* sobre una partícula en movimiento a lo largo de una línea de corriente da:

$$\sum F_s = ma_s \tag{5-35}$$

En regiones del flujo en donde las fuerzas netas de fricción son despreciables, las fuerzas significativas que actúan en la dirección *s* son la presión (que actúa sobre ambos lados) y la componente del peso de la partícula en la dirección *s* (Fig. 5-23). Por lo tanto, la ecuación 5-35 queda:

$$P\,dA - (P + dP)\,dA - W \operatorname{sen}\theta = mV\,\frac{dV}{ds} \tag{5-36}$$

donde θ es el ángulo entre la normal a la línea de corriente y el eje vertical z en ese punto, $m = \rho V\!\!\!/ = \rho\,dA\,ds$ es la masa, $W = mg = \rho g\,dA\,ds$ es el peso de la partícula de fluido y $\operatorname{sen}\theta = dz/ds$. Se sustituye:

$$-dP\,dA - \rho g\,dA\,ds\,\frac{dz}{ds} = \rho\,dA\,ds\,V\,\frac{dV}{ds} \tag{5-37}$$

Cuando se cancela dA de cada término y se simplifica,

$$-dP - \rho g\,dz = \rho V\,dV \tag{5-38}$$

Se nota que $V\,dV = \frac{1}{2}\,d(V^2)$ y si divide cada término entre ρ da

$$\frac{dP}{\rho} + \tfrac{1}{2}\,d(V^2) + g\,dz = 0 \tag{5-39}$$

Se integra (Fig. 5-24),

$$\textit{Flujo estacionario}: \quad \int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante (a lo largo de una línea)} \tag{5-40}$$

ya que los dos últimos términos son diferenciales exactas. En el caso del flujo incompresible, el primer término también se convierte en una diferencial exacta y su integración da:

Flujo estacionario e incompresible:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante (a lo largo de una línea)} \tag{5-41}$$

Ésta es la famosa **ecuación de Bernoulli**, la cual es de uso común en mecánica de fluidos para el flujo estacionario e incompresible**,** a lo largo de una línea de corriente**,** en las regiones no viscosas del flujo. El valor de la constante puede

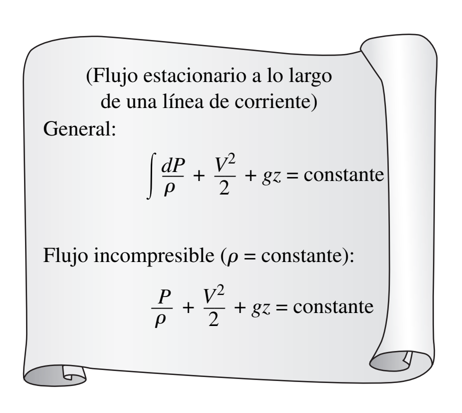


FIGURA 5-24
La ecuación de Bernoulli se deduce cuando se supone un flujo incompresible y, en consecuencia, no debe usarse para flujos con efectos significativos de compresibilidad.

evaluarse en cualquier punto de la línea de corriente en donde se conozcan la presión, densidad, velocidad y elevación. La ecuación de Bernoulli también puede escribirse entre dos puntos cualesquiera sobre la misma línea de corriente como:

Flujo estacionario e incompresible: $$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \quad \textbf{(5-42)}$$

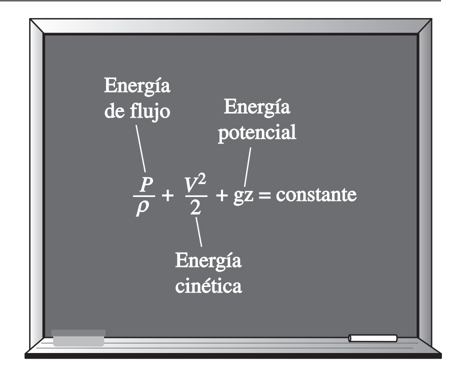


FIGURA 5-25
La ecuación de Bernoulli afirma que la suma de la energía cinética, la potencial y la de flujo de una partícula de fluido es constante a lo largo de una línea de corriente en el transcurso del flujo estacionario.

La ecuación de Bernoulli se obtiene a partir de la conservación de la cantidad de movimiento para una partícula de fluido que se desplaza a lo largo de una línea de corriente. También puede obtenerse basándose en la *primera ley de la termodinámica* aplicada al sistema de flujo estacionario, como se muestra en la sección 5-7.

La ecuación de Bernoulli fue enunciada por primera vez en palabras por el matemático suizo Daniel Bernoulli (1700-1782), en un texto escrito en 1738, cuando trabajaba en San Petersburgo, Rusia. Después fue deducida en forma de ecuación por su asociado Leonhard Euler, en 1775. Se reconoce $V^2/2$ como la *energía cinética*, *gz* como la *energía potencial* y *P*/*r* como la *energía de flujo*, todo por unidad de masa. Por lo tanto, la ecuación de Bernoulli puede concebirse como una expresión del *balance de energía mecánica* y se puede enunciar del modo siguiente (Fig. 5-25):

> La suma de la energía cinética, la potencial y de flujo de una partícula de fluido es constante a lo largo de una línea de corriente en el transcurso del flujo estacionario, cuando los efectos de la compresibilidad y de la fricción son despreciables.

La energía cinética, la potencial y de flujo son las formas mecánicas de la energía, como se comenta en la sección 5-3, y la ecuación de Bernoulli puede concebirse como el "principio de conservación de la energía mecánica". Esto equivale al principio general de conservación de la energía para los sistemas que no se relacionan con la conversión de la energía mecánica y la térmica entre sí y, en consecuencia, la energía mecánica y la térmica se conservan por separado. La ecuación de Bernoulli expresa que, en el transcurso del flujo estacionario e incompresible, con fricción despreciable, las diversas formas de la energía mecánica se transforman entre sí, pero su suma permanece constante. En otras palabras, no se tiene disipación de energía mecánica en el curso de ese tipo de flujos, puesto que no existe fricción que convierta esa energía mecánica en energía térmica sensible (interna).

Debe recordarse que la energía se transfiere a un sistema como trabajo cuando se aplica una fuerza a este sistema a lo largo de una distancia. Si se toma en cuenta la segunda ley de Newton del movimiento, la ecuación de Bernoulli también puede concebirse como: *el trabajo realizado por las fuerzas de presión y de gravedad sobre la partícula de fluido es igual al aumento en la energía cinética de esa partícula*.

Pese a las aproximaciones intensamente restrictivas que su usaron en su deducción, la ecuación de Bernoulli es de uso común en la práctica, ya que diversos problemas prácticos de flujo de fluidos pueden analizarse con ella, con exactitud razonable. Esto se debe a que numerosos flujos de interés práctico en la ingeniería son estacionarios (o, por lo menos, estacionarios en sus valores medios), los efectos de la compresibilidad son relativamente pequeños y las fuerzas netas de fricción son despreciables en las regiones de interés en el flujo.

Balance de fuerzas a través de las líneas de corriente

Se deja como ejercicio demostrar que un balance de fuerzas en la dirección *n* normal a la línea de corriente da como resultado la relación siguiente aplicable *a través* de las líneas de corriente para el flujo estacionario e incompresible:

$$\frac{P}{\rho} + \int \frac{V^2}{R}\,dn + gz = \text{constante} \qquad \text{(a lo largo de una línea)} \quad \textbf{(5-43)}$$



Para el flujo a lo largo de una recta, $R \rightarrow \infty$ y, donde, la relación (ecuación 5-44) se reduce a $P/\rho + gz =$ constante, o $P = -\rho gz +$ constante**,** la cual es una expresión para la variación de la presión hidrostática con la distancia vertical para una masa de fluido en reposo. Por lo tanto, la variación de la presión con la elevación en el flujo estacionario e incompresible a lo largo de una recta es la misma que aquella en el fluido en reposo (Fig. 5-26).

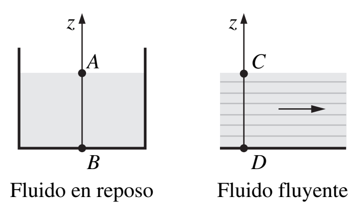


FIGURA 5-26
La variación de la presión con la elevación en el flujo estacionario e incompresible a lo largo de una recta es la misma que en el fluido en reposo (pero éste no es el caso para una sección curva del flujo).

Flujo no estacionario y compresible

De manera análoga, cuando se usan los dos términos de la expresión de la aceleración (ecuación 5-33), se puede demostrar que la ecuación de Bernoulli para el *flujo no estacionario y compresible* es:

Flujo no estacionario y compresible:
$$\int \frac{dP}{\rho} + \int \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \qquad \textbf{(5-44)}$$

Presiones estática, dinámica y de estancamiento

La ecuación de Bernoulli determina que la suma de la energía de flujo, la cinética y la potencial de una partícula de fluido a lo largo de una línea de corriente es constante. Por lo tanto, la energía cinética y la potencial del fluido pueden convertirse a energía de flujo (y viceversa) en el curso del flujo, lo cual hace que cambie la presión. Este fenómeno puede hacerse más visible cuando se multiplica la ecuación de Bernoulli por la densidad ρ:

$$P + \frac{V^2}{2} + \rho gz = \text{constante (a lo largo de una línea de corriente)} \qquad \textbf{(5-45)}$$

Cada término de esta ecuación tiene unidades de presión y, por tanto, cada uno representa alguna clase de presión:

- P es la **presión estática** (no incorpora efectos dinámicos); representa la presión termodinámica real del fluido. Ésta es la misma que la presión usada en la termodinámica y las tablas de propiedades.
- $\rho V^2/2$ es la **presión dinámica**, representa el aumento en la presión cuando el fluido en movimiento se detiene de manera isentrópica.
- ρgz es la **presión hidrostática**, la cual no es presión en un sentido real, porque su valor depende del nivel de referencia seleccionado; explica los efectos del aumento, es decir, del peso del fluido sobre la presión.

La suma de la presión estática, la dinámica y la hidrostática se llama **presión total**. Por lo tanto, la ecuación de Bernoulli expresa que la *presión total a lo largo de una línea de corriente es constante*.

La suma de la presión estática y la dinámica se llama **presión de estancamiento** y se expresa como:

$$P_{\text{estanc}} = P + \frac{V^2}{2} \qquad \text{(kPa)} \qquad \textbf{(5-46)}$$

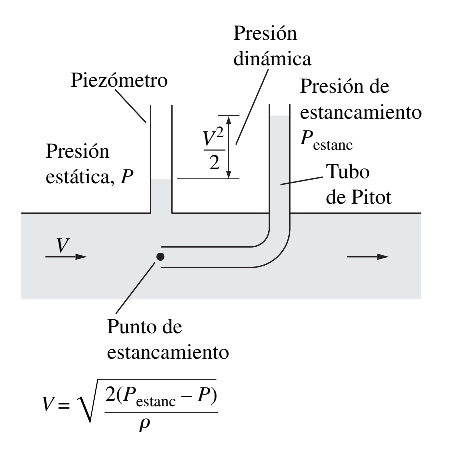


FIGURA 5-27
Presiones estática, dinámica y de estancamiento.

La presión de estancamiento representa la presión en un punto en donde el fluido se detiene totalmente de manera isentrópica. En la figura 5-27 se muestran la presión estática, la dinámica y de estancamiento. Cuando la presión estática y de estancamiento se miden en un lugar especificado, puede calcularse la velocidad del fluido en ese lugar a partir de:

$$V = \sqrt{\frac{2(P_{\text{estanc}} - P)}{\rho}} \qquad \textbf{(5-47)}$$

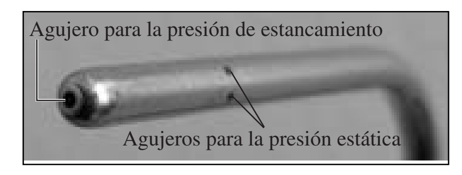


FIGURA 5-28
Acercamiento de la imagen de una sonda de Pitot y de presión (tubo de Prandtl) en la que se muestran el agujero para la presión de estancamiento y dos de los cinco agujeros circunferenciales para la presión estática.
Fotografía tomada por Po-Ya Abel Chuang. Reproducida con autorización.

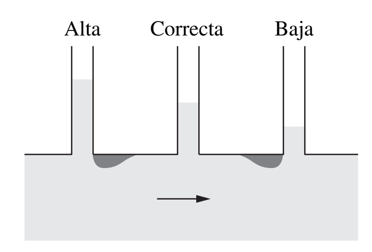


FIGURA 5-29
La falta de cuidado en el taladrado, para la toma de presión estática, puede dar como resultado una lectura errónea de la presión.

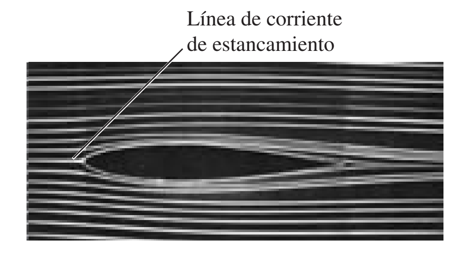


FIGURA 5-30
Líneas de traza producidas por el fluido coloreado que se introdujo corriente arriba de un perfil aerodinámico; como el flujo es estacionario, las líneas de traza son las mismas que las de corriente y las de trayectoria. Está marcada la línea de corriente de estancamiento.
Cortesía de ONERA. Fotografía realizada por Werlé.

La ecuación 5-47 es útil en la medición de la velocidad del flujo cuando se usa una combinación de una toma de presión estática y un tubo de Pitot, como se ilustra en la figura 5-27. Una **toma de presión estática** es, simplemente, un pequeño agujero taladrado en una pared en tal forma que el plano de ese agujero es paralelo a la dirección del flujo. Éste mide la presión estática. Un **tubo de Pitot** es un tubo pequeño con su extremo abierto alineado *hacia* el flujo de manera que sienta la presión plena de impacto del fluido fluyente. Éste mide la presión de estancamiento. En situaciones en que la presión estática y de estancamiento de un *líquido* fluyente son mayores que la presión atmosférica puede fijarse un tubo vertical transparente, llamado **tubo piezométrico** (o **piezómetro**) a la toma de presión y al tubo de Pitot, como se ilustra en la figura 5-27. El líquido sube en el tubo piezométrico hasta una altura de columna (*carga*) que es proporcional a la presión que se está midiendo. Si las presiones que se medirán están abajo de la atmosférica, o si se miden presiones en *gases*, los tubos piezométricos no funcionan. Sin embargo, inclusive pueden usarse la toma de presión estática y el tubo de Pitot, pero debe conectarse a alguna otra clase de aparato para la medición de la presión, como un manómetro diferencial en U o un transductor de presión (capítulo 3). A veces es conveniente integrar los agujeros para la presión estática en una sonda de Pitot. El resultado es una **sonda de Pitot de presión estática** (también conocida como el tubo de Prandtl), como se muestra en la figura 5-28 y se trata con más detalle en el capítulo 8. Un tubo de Prandtl conectado a un transductor de presión o a un manómetro mide la presión dinámica (y, por tanto, la velocidad del fluido) directamente.

Cuando se mide la presión estática taladrando un agujero en la pared del tubo, debe tenerse cuidado en cerciorarse que la abertura del agujero está al ras con la superficie de la propia pared, sin extrusiones antes o después de él (Fig. 5-29). De lo contrario, la lectura incorporará algunos efectos dinámicos y, en consecuencia, será errónea.

Cuando un cuerpo estacionario se sumerge en una corriente, el fluido se detiene en la nariz del mismo (el **punto de estancamiento**). La línea de corriente del flujo que se extiende desde lejos llega hasta el punto de estancamiento y se llama **línea de corriente de estancamiento** (Fig. 5-30). Para un flujo bidimensional en el plano *xy*, el punto de estancamiento en realidad es una *recta* paralela al eje *z* y la línea de corriente de estancamiento en realidad es una *superficie* que separa el fluido que fluye *sobre* el cuerpo del que fluye *debajo* de éste. En un flujo incompresible, el fluido se desacelera casi isentrópicamente, desde su valor de velocidad de flujo libre hasta cero en el punto de estancamiento y, de este modo, la presión en éste es la presión de estancamiento.

Limitaciones en el uso de la ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli (ecuación 5-41) es una de las que con más frecuencia se usan, aunque indebidamente, en la mecánica de fluidos. Su versatilidad, sencillez y facilidad de aplicación la hacen una herramienta muy valiosa para utilizarse en el análisis, pero los mismos atributos la hacen muy tentadora para usarla indebidamente. Por lo tanto, es importante conocer las restricciones acerca de la posibilidad de aplicarla y observar las limitaciones relativas a su uso, como se explica a continuación:

1. **Flujo estacionario** La primera limitación de la ecuación de Bernoulli consiste en que es aplicable al *flujo estacionario*. Por lo tanto, no debe usarse durante los periodos de arranque y de paro, o durante los periodos de cambio en las condiciones de flujo. Note que existe una forma no estacionaria de la ecuación de Bernoulli (ecuación 5-44), cuya estudio está fuera de los objetivos de este texto (véase Panton, 1996).

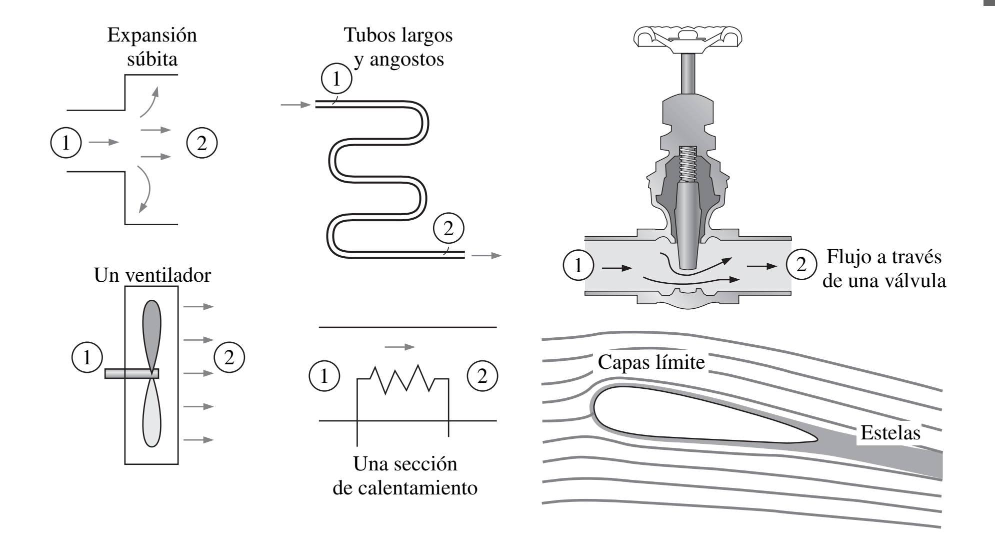
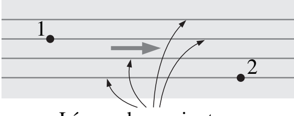


FIGURA 5-31
Los efectos de la fricción y los componentes que perturban la estructura aerodinámica del flujo en una sección de éste invalidan la ecuación de Bernoulli.

2. **Flujo sin fricción** En todo flujo interviene algo de fricción, sin importar qué tan pequeña sea, y los *efectos de la fricción* pueden ser despreciables. o no. La situación se complica aún más por la magnitud del error que puede tolerarse. En general, los efectos de la fricción son despreciables para secciones cortas del flujo, con secciones transversales grandes, en especial con velocidades bajas del flujo. Los efectos de la fricción suelen ser importantes en pasos largos y angostos del flujo, en la región de la estela corriente abajo de un objeto y en las *secciones de flujo divergente*, como los difusores, debido a la mayor posibilidad de que el fluido se separe de las paredes en esas configuraciones geométricas. Los efectos de la fricción también son significativos cerca de las superficies sólidas y, por tanto, la ecuación de Bernoulli suele ser aplicable a lo largo de una línea de corriente en la región del núcleo del flujo, pero no a lo largo de la línea de corriente cercana a la superficie (Fig. 5-31).

   Un accesorio que perturbe la estructura de líneas de corriente del flujo y, en consecuencia, cause una mezcla y un contraflujo considerables, como una entrada aguda de un tubo, o una válvula parcialmente cerrada en una sección del flujo pueden hacer que la ecuación de Bernoulli no pueda aplicarse.
3. **Ningún trabajo en la flecha** La ecuación de Bernoulli se dedujo basándose en un balance de fuerzas sobre una partícula en movimiento a lo largo de una línea de corriente. Por lo tanto, esta ecuación no se aplica en una sección del flujo en el que intervenga una bomba, una turbina, un ventilador o cualquier otra máquina o impulsor, ya que estos aparatos destruyen las líneas de corriente y llevan a cabo interacciones de energía con las partículas del fluido. Cuando la sección considerada del flujo incluye cualquiera de estos aparatos, debe usarse la ecuación de la energía para tomar en cuenta la entrada o salida de trabajo en la flecha. Sin embargo, puede aplicarse la ecuación de Bernoulli a una sección del flujo antes o después de pasar por una máquina (en el supuesto, claro, que se satisfacen las otras restricciones referentes a su uso). En esos casos, la constante de Bernoulli cambia de corriente arriba a corriente abajo del dispositivo..
4. **Flujo incompresible** Una de las hipótesis establecidas en la deducción de la ecuación de Bernoulli es que ρ = constante y, por tanto, el flujo es incompresible. Esta condición la satisfacen los líquidos y también los gases con números de Mach menores a 0.3, en virtud de que los efectos de la compresibilidad y, por lo tanto, las variaciones de la densidad de los gases son despreciables a esas velocidades relativamente bajas. Note que existe



$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

FIGURA 5-32
Cuando el flujo es irrotacional, la ecuación de Bernoulli se vuelve aplicable entre dos puntos cualesquiera a lo largo del flujo (no sólo sobre la misma línea de corriente).



una forma compresible de la ecuación de Bernoulli (ecuaciones 5-40 y 5-44).

5. **Ninguna transferencia de calor** La densidad de un gas es inversamente proporcional a la temperatura y no debe usarse la ecuación de Bernoulli para las secciones del flujo en el que se tenga un cambio significativo en la temperatura, como las secciones de calentamiento o enfriamiento.
6. **Flujo a lo largo de una línea de corriente** Es decir, la ecuación de Bernoulli, $P/\rho + V^2/2 + gz = C$ es aplicable a lo largo de una línea de corriente y, en general, el valor de la constante C es diferente para distintas líneas de corriente. Pero cuando una región del flujo es *irrotacional* y, en consecuencia, no hay *vorticidad* en el campo de flujo, el valor de la constante C continúa siendo el mismo para todas las líneas de corriente y, por lo tanto, la ecuación de Bernoulli se vuelve también aplicable *a través* de esas líneas de corriente (Fig. 5-32). Por lo tanto, no es necesario preocuparse por las líneas de corriente cuando el flujo es irrotacional y puede aplicarse la ecuación de Bernoulli entre dos puntos cualesquiera en la región irrotacional del flujo (capítulo 10).

En beneficio de la sencillez, la ecuación de Bernoulli se dedujo cuando se consideró el flujo bidimensional en el plano xz, pero la ecuación también es válida para el flujo general tridimensional, en tanto se aplique a lo largo de la misma línea de corriente. Siempre deben tenerse presentes las hipótesis establecidas en la deducción de la ecuación de Bernoulli y verificar que se cumplan.

Línea de gradiente hidráulico (LGH) y línea de energía (LE)

Con frecuencia es conveniente representar de manera gráfica el nivel de la energía mecánica, usando *alturas*, con la finalidad de facilitar la visualización de los diversos términos de la ecuación de Bernoulli. Esto se realiza cuando se divide cada término de esa ecuación entre g, para dar:

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = H = \text{constante} \qquad \text{(a lo largo de una línea de corriente)} \tag{5-48}$$

Cada término de esta ecuación tiene las dimensiones de longitud y representa algún tipo de "carga" de un fluido fluyente, como se describe a continuación:

- $P/\rho g$ es la **carga de presión**: representa la altura de una columna de fluido que produce la presión estática P.
- $V^2/2g$ es la **carga de velocidad**: representa la elevación necesaria para que un fluido alcance la velocidad V durante una caída libre sin fricción.
- z es la **carga de elevación**: representa la energía potencial del fluido.

Asimismo, H es la **carga total** para el flujo. Por lo tanto, la ecuación de Bernoulli se puede expresar en términos de cargas como: *la suma de las cargas de presión, de velocidad y de elevación a lo largo de una línea de corriente que es constante en el transcurso del flujo estacionario, cuando los efectos de la compresibilidad y de la fricción son despreciables* (Fig. 5-33).

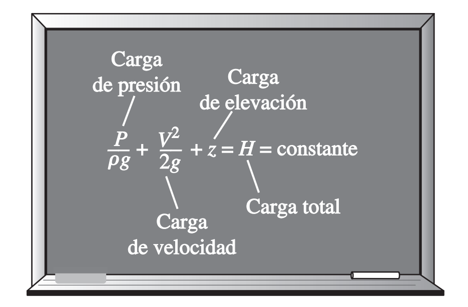


FIGURE 5-33
Una forma alternativa de la ecuación de Bernoulli se expresa en términos de cargas como: *la suma de las cargas de presión, de velocidad y de elevación es constante a lo largo de una línea de corriente.*

Si se coloca un piezómetro (éste mide la presión estática) en una toma en un tubo, como se muestra en la figura 5-34, el líquido subiría hasta una altura de $P/\rho g$ por arriba del centro del tubo. *La línea de gradiente hidráulico* (LGH, o HGL por sus siglas en inglés, *hydraulic grade line*), también conocida como *línea piezométrica* o *línea de alturas piezométricas*, se obtiene cuando se hace esto en varios lugares a lo largo del tubo y se traza una línea que pase por los niveles del líquido en los piezómetros. La distancia vertical hacia arriba del centro del

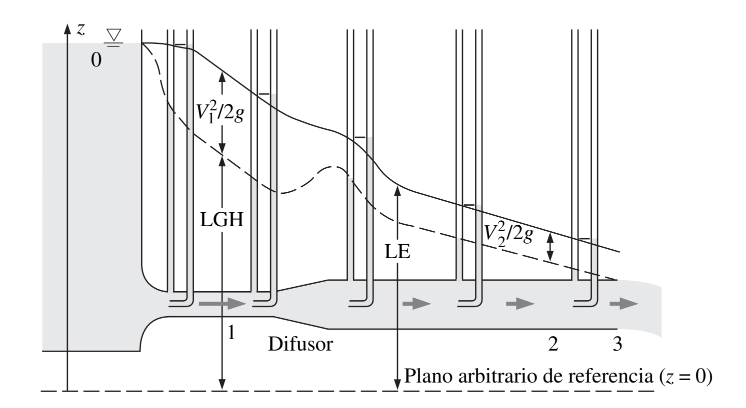


FIGURA 5-34
Línea de gradiente hidráulica (LGH) y *línea de energía* (LE) para la descarga libre desde un depósito por un tubo horizontal con un difusor.

tubo es una medida de presión dentro de éste. De manera análoga, si se coloca un tubo de Pitot (éste mide la presión estática + la dinámica) en una toma en un tubo, el líquido subiría hasta una altura de $P/\rho g + V^2/2g$ por arriba del centro del tubo, o a una distancia de $V^2/2g$ arriba de la PH. La *línea de energía* (LE, EGL por sus siglas en inglés, *energy grade line*), también conocida como la *línea de alturas totales*, se obtiene cuando se hace esto en varios lugares a lo largo del tubo y se traza una línea que pase por los niveles del líquido en los tubos de Pitot.

Note que el fluido también tiene la carga de elevación z (a menos que se tome el nivel de referencia en la línea central del tubo), la LGH y la LE se pueden definir de la manera siguiente: la línea que representa la suma de las cargas de presión estática y de elevación, $P/\rho g + z$, llama **línea de gradiente hidráulico.** La línea que representa la carga total del fluido, $P/\rho g + V^2/2g + z$, se llama **línea de energía**. La diferencia entre las alturas de la LE y la LGH es igual a la carga dinámica $V^2/2g$. Se observa lo siguiente acerca de la LGH y la LE:

- Para las *masas en reposo*, como los depósitos o los lagos, la LE y la LGH coinciden con la superficie libre del líquido. En estos casos, la elevación z de la superficie libre representa tanto la LE como la LGH, porque que la velocidad es cero y la presión estática (manométrica) es cero.
- La LE siempre está a una distancia $V^2/2g$ arriba de la LGH. Estas dos líneas se aproximan entre sí conforme disminuye la velocidad y divergen cuando ésta aumenta. La altura de la LGH decrece cuando aumenta la velocidad y viceversa.
- En un *flujo idealizado del tipo de Bernoulli*, la LE es horizontal y su altura se mantiene constante. Éste también sería el caso para la LGH cuando la velocidad del flujo fuera constante (Fig. 5-35).
- Para el *flujo en canal abierto*, la LGH coincide con la superficie libre del líquido y la LE está a una distancia $V^2/2g$ arriba de esa superficie libre.
- A la *salida de un tubo*, la carga de presión es cero (presión atmosférica) y, donde, la LGH coincide con esa salida (ubicación 3 en la figura 5-34).
- La *pérdida de energía mecánica* debida a los efectos de fricción (conversión a energía térmica) hace que la LE y la LGH se inclinen hacia abajo en la dirección del flujo. La pendiente es una medida de la pérdida de carga en el tubo (lo que se trata con detalle en el capítulo 8). Un accesorio que genere efectos considerables de fricción, como una válvula, causa una caída repentina tanto en la LE como en la LGH en ese lugar.
- Se tiene un *salto excesivo* en la LE y la LGH siempre que se añade energía mecánica al fluido (por medio de una bomba, por ejemplo). Del mismo modo ocurre una *caída excesiva* en la LE y la LGH siempre que se extrae energía

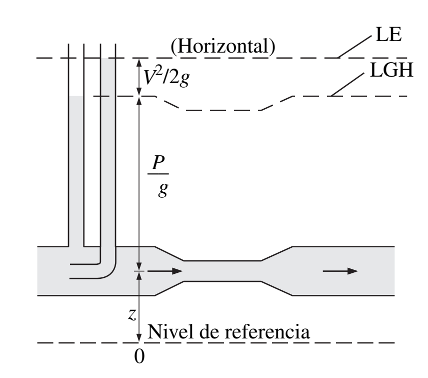


FIGURA 5-35
En un flujo idealizado del tipo de Bernoulli, la LE es horizontal y su altura se mantiene constante. Pero éste no es el caso para LGH en donde la velocidad del flujo varía a lo largo de este último.

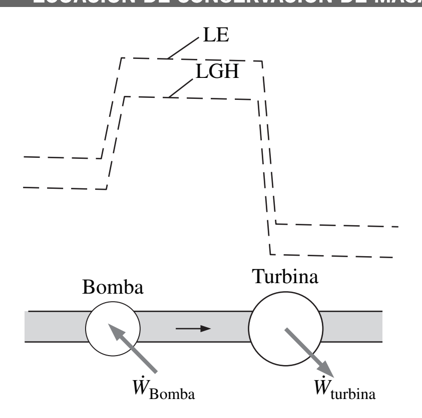


FIGURA 5-36
Se tiene un *salto empinado* en la LE y en la LGH siempre que se añade energía mecánica al fluido mediante una bomba, y se tiene una *caída empinada* siempre que se extrae energía mecánica del fluido por medio de una turbina.

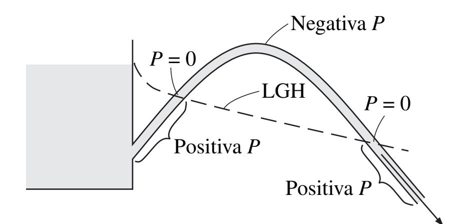


FIGURA 5-37
La presión (manométrica) de un fluido es cero en los lugares en donde la LGH *se interseca* con dicho fluido y la presión es negativa (vacío) en una sección del flujo que esté arriba de la LGH.

mecánica del fluido (mediante una turbina, por ejemplo), como se muestra en la figura 5-36.

- La presión (manométrica) de un fluido es cero en los lugares en donde la LGH *se interseca* con el fluido. La presión en una sección del flujo que esté arriba de la LGH es negativa y la presión en una sección que esté abajo de la LGH es positiva (Fig. 5-37). Por lo tanto, puede usarse un dibujo exacto de un sistema de tuberías y la LGH con la finalidad de determinar las regiones en donde la presión en el tubo sea negativa (por abajo de la presión atmosférica).

La última observación permite evitar situaciones en donde la presión cae por abajo de la presión de vapor del líquido (lo cual causa *cavitación*, como se comenta en el capítulo 2). La consideración apropiada es necesaria en la colocación de una bomba de líquido para verificar que la presión del lado de la succión no caiga demasiado, en especial a temperaturas altas en donde la presión de vapor es más alta que a bajas temperaturas.

Ahora se examinará la figura 5-34 de manera más cuidadosa. En el punto 0 (en la superficie del líquido), la LE y la LGH están al nivel de la superficie del líquido puesto que allí no hay flujo. La LGH decrece con rapidez a medida que el líquido se acelera dentro del tubo; sin embargo, la LE decrece muy lentamente a través de la entrada redondeada del tubo. La LE decae de manera continua a lo largo de la dirección del flujo debido a la fricción y a otras pérdidas irreversibles en ese flujo. La LE no puede aumentar en la dirección del flujo, a menos que se alimente energía al fluido. La LGH puede subir o caer en la dirección del flujo, pero nunca puede sobrepasar a la LE. La LGH sube en la sección del difusor conforme la velocidad disminuye y la presión estática se recobra un poco; sin embargo, la presión total *no* se recobra y la LE decrece a través del difusor. La diferencia entre la LE y la LGH es $V_1^2/2g$ en el punto 1 y $V_2^2/2g$ en el punto 2. Puesto que $V_1 > V_2$, la diferencia entre las dos líneas es más grande en el punto 1 que en el 2. La pendiente hacia abajo de las dos líneas es más grande para la sección de diámetro más pequeño del tubo, puesto que la pérdida de carga por fricción es más grande. Por último, la LGH decae hasta la superficie del líquido a la salida, dado que la presión allí es la atmosférica. Pero, la LE, no obstante, está más arriba que la LGH en la cantidad de $V_2^2/2g$ en virtud de que, a la salida, $V_3 = V_2$

5-5 ▪ APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

En la sección 5-4, se trataron los aspectos fundamentales de la ecuación de Bernoulli. En esta sección, se demuestra con ejemplos su uso en una amplia gama de aplicaciones.

EJEMPLO 5-5 **Agua rociada en el aire**

Fluye agua de una manguera que está conectada a una tubería principal que está a 400 kPa de presión manométrica (Fig. 5-38). Un niño coloca su dedo pulgar para cubrir la mayor parte de la salida de la manguera, y hace que salga un chorro delgado de agua a alta velocidad. Si la manguera se sostiene hacia arriba, ¿a qué altura máxima podría llegar el chorro?

SOLUCIÓN Se rocía agua hacia el aire desde una manguera conectada a la tubería principal. Debe determinarse la altura máxima que puede alcanzar el chorro.

Hipótesis **1** El flujo que sale hacia el aire es estacionario, incompresible e irrotacional (de modo que es aplicable la ecuación de Bernoulli). **2** La presión del

agua en la manguera cerca de la salida es igual a la de la tubería principal. **3** Los efectos de la tensión superficial son despreciables. **4** La fricción entre el agua y el aire es despreciable. **5** Los efectos irreversibles que pueden ocurrir a la salida de la manguera debido a la abrupta expansión, son despreciables .

Propiedades La densidad del agua se toma como 1 000 kg/m³.

Análisis Este problema considera la transformación de la energía de flujo, la cinética y la potencial entre sí, sin que intervengan bombas, turbinas ni componentes de disipación con pérdidas grandes por fricción y es adecuado para aplicar la ecuación de Bernoulli. La altura del agua será máxima con las hipótesis planteadas. La velocidad dentro de la manguera es más o menos baja ($V_1 \cong 0$) y se toma la salida de ella como el nivel de referencia ($z_1 = 0$). En la punta de la trayectoria del agua $V_2 = 0$ y corresponde a la presión atmosférica. Entonces la ecuación de Bernoulli se simplifica a:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}\nearrow^0 + z_1\nearrow^0 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}\nearrow^0 + z_2 \quad \rightarrow \quad \frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_{atm}}{\rho g} + z_2$$

Si se despeja z_2 y se sustituye,

$$z_2 = \frac{P_1 - P_{atm}}{g} = \frac{P_{1,\,man}}{g} = \frac{400 \text{ kPa}}{(1\,000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)}\left(\frac{1\,000 \text{ N/m}^2}{1 \text{ kPa}}\right)\left(\frac{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}{1 \text{ N}}\right)$$

$$= \mathbf{40.8}$$

Por lo tanto, en este caso, el chorro de agua puede llegar a una altura de 40.8 m.

Discusión El resultado obtenido por medio de la ecuación de Bernoulli representa el límite superior y debe interpretarse como tal. Éste afirma que el agua posiblemente no puede subir más de 40.8 m y, con toda probabilidad, llegará hasta menos de 40.8 m debido a las pérdidas irreversibles que se despreciaron.

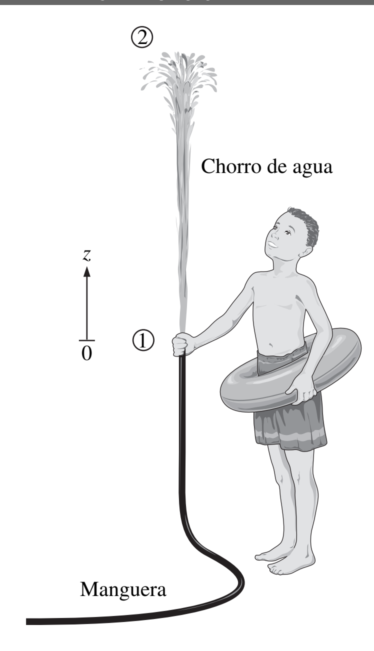


FIGURA 5-38
Esquema para el ejemplo 5-5.

EJEMPLO 5-6 Descarga de agua desde un tanque grande

Un tanque grande está abierto a la atmósfera y lleno con agua hasta una altura de 5 m, proveniente desde la toma de salida (Fig. 5-39). Ahora se abre una toma cercana al fondo del tanque y el agua fluye hacia afuera por la salida lisa y redondeada. Determine la velocidad del agua en la salida.

SOLUCIÓN Se abre una toma cerca del fondo de un tanque. Debe determinarse la velocidad de salida del agua del tanque.

Hipótesis **1** El flujo es incompresible e irrotacional (excepto muy cerca de las paredes). **2** El agua drena con lentitud suficiente como para que pueda considerarse aproximadamente como estacionario (en realidad cuasiestacionario cuando el tanque empieza a drenar).

Análisis Este problema incluye la transformación de las energías de flujo, cinética y potencial entre sí, sin que intervengan bombas, turbinas ni componentes de disipación con pérdidas grandes por fricción y resulta adecuado para la aplicación de la ecuación de Bernoulli. Se toma el punto 1 en la superficie libre del agua, de modo que $P_1 = P_{atm}$ (abierto a la atmósfera), $V_1 \cong 0$ (el tanque es grande en relación con la salida) y $z_1 = 5$ m y $z_2 = 0$ (se toma el nivel de referencia en el centro de la salida). Asimismo, $P_2 = P_{atm}$ (el agua se descarga hacia la atmósfera). Entonces la ecuación de Bernoulli se simplifica a:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}\nearrow^0 + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\nearrow^0 \quad \rightarrow \quad z_1 = \frac{V_2^2}{2g}$$

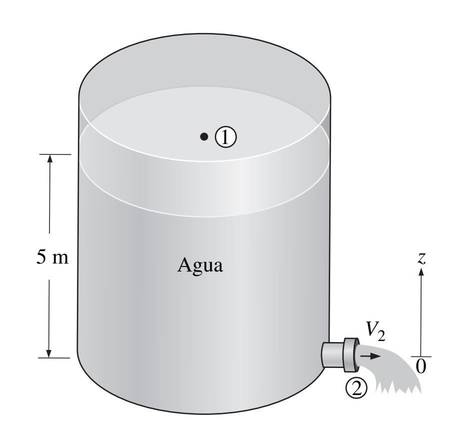


FIGURA 5-39
Esquema para el ejemplo 5-6.

Si se despeja V_2 y se sustituye:

$$V_2 = \sqrt{2gz_1} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m})} = \mathbf{9.9 \text{ m/s}}$$

La relación $V = \sqrt{2gz}$ se llama **ecuación de Torricelli**.

Por lo tanto, el agua sale del tanque con una velocidad inicial de 9.9 m/s. Ésta es la misma velocidad que se manifestaría si se dejara caer un sólido a lo largo de una distancia de 5 m, en ausencia de resistencia al movimiento del aire por fricción (¿cuál sería la velocidad si la toma estuviera en el fondo del tanque en lugar del costado?).

Discusión Si el orificio tuviera los bordes afilados en lugar de redondeados, entonces se alteraría el flujo y la velocidad sería menor de 9.9 m/s, en especial cerca de los bordes. Debe tenerse cuidado cuando se intente aplicar la ecuación de Bernoulli en situaciones en donde se tienen expansiones o contracciones abruptas, ya que, en esos casos, la fricción y la perturbación del flujo pueden no ser despreciables.

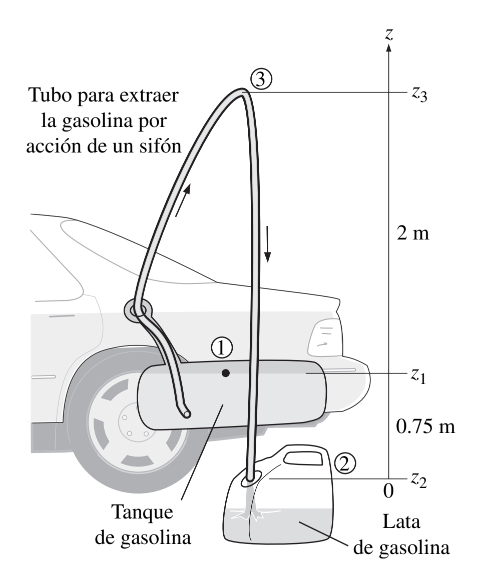


FIGURA 5-40
Esquema para el ejemplo 5-7.

EJEMPLO 5-7 Extracción de gasolina por acción de un sifón en un tanque de combustible

En un viaje a la playa (P_{atm} = 1 atm = 101.3 kPa), a un automóvil se le acaba la gasolina y es necesario extraer gasolina por acción de un sifón del automóvil de un buen samaritano (Fig. 5-40). El sifón es una manguera con diámetro pequeño y para iniciar la acción es necesario introducir uno de los extremos en el tanque lleno de gasolina, llenar la manguera de ésta mediante succión y, enseguida, poner el otro extremo en una lata que está colocada abajo del nivel del tanque. La diferencia en la presión entre el punto 1 (en la superficie libre de la gasolina en el tanque) y el punto 2 (a la salida del tubo) hace que el líquido fluya de la mayor elevación hacia la menor. En este caso, el punto 2 está ubicado 0.75 m abajo del punto 1, y el 3 está 2 m arriba del 1. El diámetro del sifón es de 4 mm y deben descartarse las pérdidas por fricción en él. Determine: *a*) el tiempo mínimo para llevar 4 L de gasolina del tanque a la lata y *b*) la presión en el punto 3. La densidad de la gasolina es de 750 kg/m^3.

SOLUCIÓN Se va a extraer gasolina de un tanque, por acción de un sifón. Deben determinarse el tiempo mínimo que transcurre para extraer 4 L de gasolina y la presión en el punto más alto del sistema.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Aun cuando la ecuación de Bernoulli no es válida a lo largo del tubo debido a las pérdidas por fricción, de cualquier manera se empleará esta ecuación para obtener una estimación para el mejor de los casos. **3** El cambio en el nivel de la superficie de la gasolina en el interior del tanque es despreciable en comparación con las elevaciones z_1 y z_2 en el transcurso de la acción del sifón

Propiedades Se da la densidad de la gasolina, que es de 750 kg/m^3.

Análisis *a*) Se toma que el punto 1 está en la superficie libre de la gasolina dentro del tanque, de modo que $P_1 = P_{atm}$ (abierto a la atmósfera), $V_1 \cong 0$ (el tanque es grande en relación con el diámetro del tubo) y $z_2 = 0$ (el punto 2 se toma como el nivel de referencia). Asimismo, $P_2 = P_{atm}$ (la gasolina se descarga hacia la atmósfera). Entonces la ecuación de Bernoulli se simplifica a:

$$\cancel{\frac{P_1}{\rho g}} + \frac{V_1^2}{2g}\nearrow^0 + z_1 = \cancel{\frac{P_2}{\rho g}} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\nearrow^0 \quad \rightarrow \quad z_1 = \frac{V_2^2}{2g}$$

Si se despeja V_2 y se sustituye:

$$V_2 = \sqrt{2gz_1} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.75 \text{ m})} = 3.84 \text{ m/s}$$

El área de la sección transversal del tubo y el gasto de la gasolina son:

$$A = \pi D^2/4 = \pi(5 \times 10^{-3}\text{ m})^2/4 = 1.96 \times 10^{-5}\text{ m}^2$$

$$\dot{V} = V_2 A = (3.84\text{ m/s})(1.96 \times 10^{-5}\text{ m}^2) = 7.53 \times 10^{-5}\text{ m}^3\text{/s} = 0.0753\text{ L/s}$$

Entonces el tiempo necesario para extraer 4 L de gasolina queda:

$$\Delta t = \frac{V}{\dot{V}} = \frac{4\text{ L}}{0.0753\text{ L/s}} = \mathbf{53.1\text{ s}}$$

b) Se puede determinar la presión en el punto 3 cuando se escribe la ecuación de Bernoulli entre los puntos 2 y 3. Nótese que $V_2 = V_3$ (conservación de la masa), $z_2 = 0$, y $P_2 = P_{atm}$:

$$\frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2^{\nearrow 0} = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 \quad \rightarrow \quad \frac{P_{atm}}{\rho g} = \frac{P_3}{\rho g} + z_3$$

Si se despeja P_3 y se sustituye:

$$\begin{aligned} P_3 &= P_{atm} - \rho g z_3 \\ &= 101.3\text{ kPa} - (750\text{ kg/m}^3)(9.81\text{ m/s}^2)(2.75\text{ m})\left(\frac{1\text{ N}}{1\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1\text{ kPa}}{1000\text{ N/m}^2}\right) \\ &= \mathbf{81.1\text{ kPa}} \end{aligned}$$

Discusión El tiempo para realizar la acción del sifón se determina cuando se desprecian los efectos de fricción y, por tanto, éste es el tiempo mínimo necesario. En realidad, el tiempo será mayor a 53.1 s debido a la fricción entre la gasolina y la superficie del tubo. Del mismo modo, la presión en el punto 3 está por abajo de la atmosférica. Si la diferencia de elevación entre los puntos 1 y 3 es demasiado grande, la presión en el punto 3 puede caer por abajo de la presión de vapor de la gasolina, a la temperatura que se encuentre esta última, y puede evaporarse (cavitar) algo de ella. Entonces, el vapor puede formar una bolsa en la parte superior y detener el flujo de gasolina.

EJEMPLO 5-8 Medición de la velocidad por medio de un tubo de Pitot

Un piezómetro y un tubo de Pitot están fijos a tomas en un tubo horizontal de agua, como se muestra en la figura 5-41, con el fin de medir las presiones estática y de estancamiento (estática + dinámica). Para las alturas indicadas de columnas de agua, determine la velocidad en el centro del tubo.

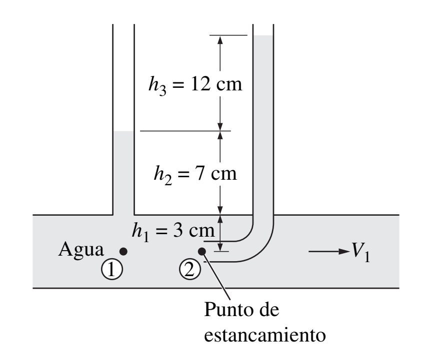


FIGURA 5-41
Esquema para el ejemplo 5-8.

SOLUCIÓN Se miden las presiones estática y de estancamiento en un tubo horizontal. Debe determinarse la velocidad en el centro del tubo.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Los puntos 1 y 2 están suficientemente cercanos entre sí para que la pérdida irreversible de energía entre ellos sea despreciable y, de este modo, puede aplicarse la ecuación de Bernoulli.

Análisis Se toman los puntos 1 y 2 a lo largo de la línea central del tubo, teniendo el punto 1 directamente abajo del piezómetro y el 2 en la punta del tubo de Pitot. Éste es un flujo estacionario con líneas de corriente rectas y paralelas, y las presiones manométricas en los puntos 1 y 2 pueden expresarse como:

$$P_1 = \rho g(h_1 + h_2)$$

$$P_2 = \rho g(h_1 + h_2 + h_3)$$

Note que el punto 2 es un punto de estancamiento y, por tanto, $V_2 = 0$ y $z_1 = z_2$, la aplicación de la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 da:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + \cancel{z_1} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}\nearrow^0 + \cancel{z_2} \quad \rightarrow \quad \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g}$$

Cuando se sustituyen las expresiones de P_1 y P_2 da:

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} = \frac{\rho g(h_1 + h_2 + h_3) - \rho g(h_1 + h_2)}{\rho g} = h_3$$

Si se despeja V_1 y se sustituye:,

$$V_1 = \sqrt{2gh_3} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.12 \text{ m})} = \mathbf{1.53 \text{ m/s}}$$

Discusión Note que para determinar la velocidad del flujo todo lo que se necesita es medir la altura de la columna de fluido en exceso en el tubo de Pitot.

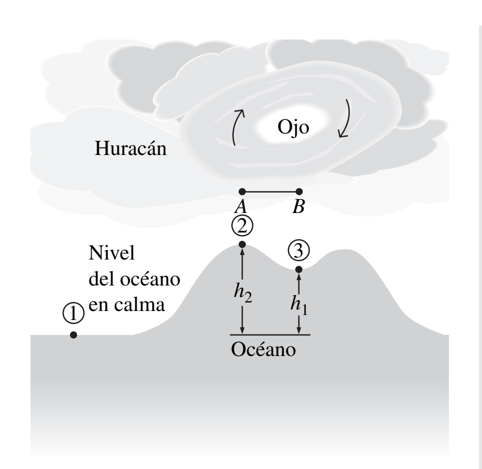


FIGURA 5-42
Esquema para el ejemplo 5-9. La escala vertical está muy exagerada.

EJEMPLO 5-9 La marea alta del océano causada por un huracán

Un huracán es una tormenta tropical formada sobre el océano por presiones atmosféricas bajas. Conforme un huracán se aproxima a tierra, lo acompañan prominencias oceánicas inmoderadas (mareas muy altas). Un huracán de la clase 5 se caracteriza por vientos de más de 155 mph, aunque la velocidad del viento en el "ojo" es muy baja.

En la figura 5-42, se ilustra un huracán que flota en el aire sobre una prominencia oceánica de abajo. La presión atmosférica a 200 mi del ojo es de 30.0 in Hg (en el punto 1, por lo general normal para el océano) y los vientos están calmados. La presión atmosférica del huracán, en el ojo de la tormenta, es de 22.0 in Hg. Estime la prominencia oceánica en *a*) el ojo del huracán, en el punto 3, y *b*) el punto 2, en donde la velocidad del viento es de 155 mph. Tome las densidades del agua de mar y del mercurio como 64 lbm/ft^3 y 848 lbm/ft3, respectivamente, y la densidad del aire a la temperatura y presión normales a nivel del mar como 0.076 lbm/ft^3.

SOLUCIÓN Un huracán se avanza sobre el océano. Deben determinarse los tamaños de las prominencias oceánicas en el ojo y en las regiones activas del huracán.

Hipótesis **1** El flujo del aire dentro del huracán es estacionario, incompresible e irrotacional (de modo que la ecuación de Bernoulli es aplicable). (En verdad, ésta es una hipótesis muy cuestionable para un flujo intensamente turbulento, pero se justifica en la resolución.) **2** El efecto del agua que se arrastra hacia el aire es despreciable.

Propiedades Se dan las densidades del aire a las condiciones normales, del agua de mar y del mercurio como 0.076 lbm/ft^3, 64 lbm/ft^3 y 848 lbm/ft^3, respectivamente.

Análisis *a*) La presión atmosférica reducida sobre el agua hace que ésta se eleve. En consecuencia, la presión disminuida en el punto 2 en relación con la del 1 provoca que el agua del océano se eleve en el punto 2. Lo mismo se cumple para el punto 3, en donde la velocidad del aire de la tormenta es despreciable. La diferencia de presión dada en términos de la altura de la columna de mercurio puede expresarse en términos de la altura de la columna de agua de mar por:

$$\Delta P = (\rho g h)_{\text{Hg}} = (\rho g h)_{\text{am}} \rightarrow h_{\text{am}} = \frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{am}}} h_{\text{Hg}}$$

Entonces la diferencia de presión entre los puntos 1 y 3, en términos de la altura de la columna de agua de mar, queda:

$$h_1 = \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{am}} h_{Hg} = \left(\frac{848 \text{ lbm/ft}^3}{64 \text{ lbm/ft}^3}\right)[(30 - 22) \text{ in Hg}]\left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}}\right) = \mathbf{8.83 \text{ ft}}$$

lo cual equivale al oleaje de la tormenta en el *ojo del huracán*, ya que la velocidad del viento allí es despreciable y no se tienen efectos dinámicos.

b) Para determinar la elevación adicional del agua del océano en el punto 2, debida a los fuertes vientos en ese punto, se escribe la ecuación de Bernoulli entre los puntos *A* y *B*, los cuales se encuentran en la parte superior de los puntos 2 y 3, respectivamente. Note que $V_B \cong 0$ (la región del ojo del huracán está en relativa calma) y $z_A = z_B$ (los dos puntos están sobre la misma recta horizontal), la ecuación de Bernoulli se simplifica a:

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + \cancel{z_A} = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g}\nearrow^0 + \cancel{z_B} \quad \rightarrow \quad \frac{P_B - P_A}{\rho g} = \frac{V_A^2}{2g}$$

Se sustituye:

$$\frac{P_B - P_A}{\rho g} = \frac{V_A^2}{2g} = \frac{(155 \text{ mph})^2}{2(32.2 \text{ ft/s}^2)}\left(\frac{1.4667 \text{ ft/s}}{1 \text{ mph}}\right)^2 = 803 \text{ ft}$$

en donde ρ es la densidad del aire en el huracán. Debe notarse que la densidad de un gas ideal a temperatura constante es proporcional a la presión absoluta y que la densidad del aire a la presión atmosférica normal de 14.7 psia $\cong$ 30 in Hg es de 0.076 lbm/ft^3, la densidad del aire en el huracán es:

$$\rho_{aire} = \frac{P_{aire}}{P_{atm\ aire}} \rho_{atm\ aire} = \left(\frac{22 \text{ in Hg}}{30 \text{ in Hg}}\right)(0.076 \text{ lbm/ft}^3) = 0.056 \text{ lbm/ft}^3$$

Con la aplicación de la relación desarrollada antes en el inciso *a*), se determina que la altura de la columna de agua de mar equivalente a 803 ft de altura de la columna de aire es:

$$h_{dinámica} = \frac{\rho_{aire}}{\rho_{am}} h_{aire} = \left(\frac{0.056 \text{ lbm/ft}^3}{64 \text{ lbm/ft}^3}\right)(803 \text{ ft}) = 0.70 \text{ ft}$$

Por lo tanto, la presión en el punto 2 es 0.70 ft de columna de agua de mar más baja que la presión en el punto 3, debido a las altas velocidades del viento, lo que hace que el océano se eleve 0.70 ft más. Entonces, el oleaje total de la tormenta en el punto 2 queda:

$$h_2 = h_1 + h_{dinámica} = 8.83 + 0.70 = \mathbf{9.53 \text{ ft}}$$

Discusión En este problema interviene un flujo intensamente turbulento y la intensa desintegración de las líneas de corriente y, como consecuencia, la apli-cabilidad de la ecuación de Bernoulli en el inciso *b*) es cuestionable. Además, el flujo en el ojo de la tormenta no es irrotacional y la constante de esta ecuación cambia a través de esas líneas (vea el capítulo 10). Se puede pensar en el análisis de Bernoulli como el caso ideal límite y se muestra que la elevación del agua de mar debida a los vientos de alta velocidad no puede ser más de 0.70 ft.

El poder del viento de los huracanes no es la única causa del daño a las zonas costeras. La inundación y la erosión oceánicas que provienen de las mareas excesivas son precisamente tan graves como lo son las altas olas que se generan por la turbulencia y la energía de la tormenta.

EJEMPLO 5-10 Ecuación de Bernoulli para el flujo compresible

Deduzca, cuando los efectos de la compresibilidad no son despreciables, para un gas ideal que pasa por *a*) un proceso isotérmico y *b*) un proceso isentrópico.

SOLUCIÓN Debe obtenerse la ecuación de Bernoulli para el flujo compresible, para un gas ideal, para los procesos isotérmicos e isentrópico.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario y los efectos de la fricción son despreciables. **2** El fluido es un gas ideal, de modo que la relación $P = \rho RT$ es aplicable. **3** Los calores específicos son constantes, de modo que P/ρ^k = constante en el curso de un proceso isentrópico.

Análisis *a*) Cuando los efectos de la compresibilidad son considerables y no puede suponerse que el flujo sea incompresible, la ecuación de Bernoulli se da por la ecuación 5-40 como:

$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \qquad \text{(a lo largo de una línea de corriente)} \tag{1}$$

Los efectos de la compresibilidad pueden considerarse de manera apropiada al expresar r en términos de la presión y, a continuación, realizar la integración $\int dP/\rho$ de la ecuación 1. Pero esto demanda una relación entre P y ρ para el proceso. Para la expansión o compresión *isotérmicas* de un gas ideal, la integral de la ecuación 1 puede llevarse a cabo con facilidad cuando se observa que T = constante y cuando se sustituye $\rho = P/RT$; esto da:

$$\int \frac{dP}{\rho} = \int \frac{dP}{P/RT} = RT \ln P$$

Se sustituye en la ecuación 1 y se da la relación deseada:

Proceso isotérmico:
$$\mathbf{RT \ln P + \frac{V^2}{2} + gz = constante} \tag{2}$$

b) Un caso más práctico de flujo compresible es el flujo isentrópico de los gases ideales en equipo, en el que interviene flujo de alta velocidad de fluidos, como las toberas, los difusores y los pasos entre las álabes de las turbinas. En el caso de estos dispositivos se obtiene una muy buena aproximación del flujo isentrópico (es decir, reversible y adiabático) que se caracteriza por la relación $P/\rho^k = C$ = constante, en donde k es la razón de los calores específicos del gas. Despejando ρ de $P/\rho^k = C$ da $\rho = C^{-1/k}P^{1/k}$. Se realiza la integración:

$$\int \frac{dP}{\rho} = \int C^{1/k}P^{-1/k}\,dP = C^{1/k}\frac{P^{-1/k+1}}{-1/k+1} = \frac{P^{1/k}}{\rho}\frac{P^{-1/k+1}}{-1/k+1} = \left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{P}{\rho} \tag{3}$$

Cuando se sustituye, la ecuación de Bernoulli para el flujo estacionario, isentrópico y compresible queda:

Flujo isentrópico:
$$\mathbf{\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = constante} \tag{4a}$$

o bien.

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \tag{4b}$$

Una situación práctica común se relaciona con la aceleración de un gas que parte del reposo (condiciones de estancamiento en el estado 1), con cambio despreciable en la elevación. En ese caso, se tiene $z_1 = z_2$ y $V_1 = 0$. Note que, para los gases ideales, $\rho = P/RT$, P/ρ^k = constante para el flujo isentrópico y el núme-

ro de Mach se define como Ma = V/c en donde $c = \sqrt{kRT}$ es la velocidad local del sonido para los gases ideales, se simplifica la ecuación 4b para quedar:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\mathrm{Ma}_2^2\right]^{k/(k-1)} \qquad \textbf{(4c)}$$

en donde el estado 1 es el estado de estancamiento y el 2 es cualquier estado a lo largo del flujo.

Discusión Puede demostrarse que los resultados obtenidos cuando se usan las ecuaciones para el flujo compresible y para el incompresible se desvían no más de 2 por ciento cuando el número de Mach es menor a 0.3. Por lo tanto, el flujo de un gas ideal puede considerarse incompresible cuando Ma $\leqslant$ 0.3. Para el aire atmosférico en condiciones normales, esto corresponde a una velocidad del flujo de alrededor de 100 m/s, o sea, 360 km/h, lo cual cubre el rango que interesa.

5-6 ▪ ECUACIÓN GENERAL DE LA ENERGÍA

Una de las leyes más fundamentales de la naturaleza es la **primera ley de la termodinámica,** también conocida como **principio de conservación de la energía**, la cual proporciona una base sólida para el estudio de las relaciones entre las diversas formas de la energía y de las interacciones de energía. Esta ley expresa que *la energía no se puede crear ni destruir en el transcurso de un proceso; sólo puede cambiar de formas*. Por lo tanto, en un proceso debe considerarse toda pequeña parte de energía.

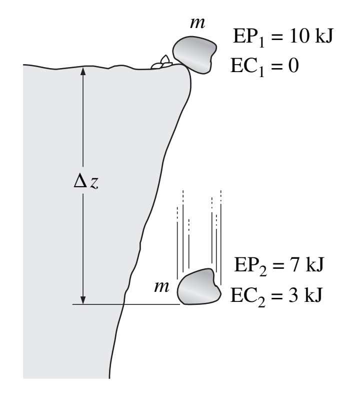


FIGURA 5-43
La energía no se puede crear ni destruir en el transcurso de un proceso, sólo puede cambiar de formas.

Por ejemplo, una roca que cae desde un risco adquiere velocidad como resultado de su energía potencial que está convirtiéndose en energía cinética. Los datos experimentales muestran que la disminución en la energía potencial es igual al aumento en la cinética cuando la resistencia del aire es despreciable; de este modo se confirma el principio de conservación de la energía. Este principio también forma la espina dorsal de la industria dietética: una persona que tiene mayor entrada de energía (alimentos) que la salida de ésta (ejercicio) aumentará de peso (energía almacenada en forma de grasa), y una que tiene menor entrada de energía a la que sale bajará de peso. El cambio en el contenido de energía de un sistema es igual a la diferencia entre la entrada de energía y la salida de ésta, y el principio de conservación de la energía para cualquier sistema se puede expresarse, sencillamente, como $E_{\text{ent}} - E_{\text{sal}} = \Delta E$.

La transferencia de cualquier cantidad (como la masa, la cantidad de movimiento y la energía) se reconoce *en la frontera* como la cantidad *que cruza la frontera*. Se dice que una cantidad *entra* a un sistema si cruza la frontera del exterior hacia el interior y *sale* del sistema si se desplaza en la dirección inversa. Una cantidad que se desplaza de un lugar a otro dentro de un sistema no se considera como una cantidad transferida en un análisis, ya que no entra al sistema ni sale de éste. Por lo tanto, es importante especificar el sistema y, de este modo, identificar con claridad sus fronteras antes de que se realice un análisis de ingeniería.

El contenido de energía de una cantidad fija de masa (un sistema cerrado) se puede cambiar por medio de dos mecanismos: la *transferencia de calor Q*, y la *transferencia de trabajo W*. Entonces la conservación de la energía para una cantidad fija de masa se puede expresar en la forma de razón como (Fig. 5-44):

$$\dot{Q}_{\text{ent neta}} + \dot{W}_{\text{ent neta}} = \frac{dE_{\text{sist}}}{dt} \qquad \text{o} \qquad \dot{Q}_{\text{ent neta}} + \dot{W}_{\text{ent neta}} = \frac{d}{dt}\int_{\text{sist}} \rho e \, d \qquad \textbf{(5-49)}$$

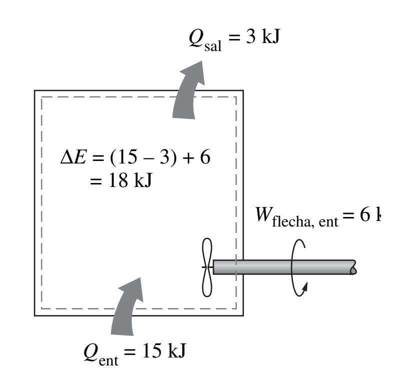


FIGURA 5-44
El cambio de energía de un sistema en el transcurso de un proceso es igual al trabajo y a la transferencia de calor *netos* entre ese sistema y sus alrededores.

donde $\dot{Q}_{\text{ent neta}} = \dot{Q}_{\text{ent}} - \dot{Q}_{\text{sal}}$ es la razón neta de transferencia de calor hacia el sistema (negativa, si es desde el sistema), $\dot{W}_{\text{ent neta}} = \dot{W}_{\text{ent}} - \dot{W}_{\text{sal}}$ es la entrada neta de potencia hacia el sistema en todas las formas (negativa, si es salida de potencia) y dE_{sist}/dt es la razón de cambio del contenido total de energía del sistema. El punto colocado arriba representa la razón de cambio respecto al tiempo. Para los sistemas compresibles simples, la energía total consiste en la energía interna, la cinética y la potencial, y se expresa, en términos de la unidad de masa, como (vea el capítulo 2):

$$e = u + \text{ec} + \text{ep} = u + \frac{V^2}{2} + gz \tag{5-50}$$

Note que la energía total es una propiedad y su valor no cambia a menos que cambie el estado del sistema.

Transferencia de energía por calor, *Q*

En la vida cotidiana es frecuente que se haga referencia a las formas sensible y latente de la energía interna como *calor* y se habla acerca del contenido de calor de los cuerpos. Científicamente el nombre más correcto para estas formas de energía es el de *energía térmica*. Para las sustancias de una sola fase, un cambio en la energía térmica de una masa dada conduce a un cambio en la temperatura y, por tanto, la temperatura es una buena representante de esa energía. La energía térmica tiende a desplazarse de manera natural en la dirección de la temperatura decreciente y la transferencia de esta energía de un sistema a otro, como resultado de una diferencia de temperatura, se llama **transferencia de calor**. Por lo tanto, una interacción de energía sólo es transferencia de calor si ocurre debido a una diferencia de temperatura. Por ejemplo el calentamiento de una bebida enlatada en un cuarto cálido se debe a la transferencia de calor (Fig. 5-45). La razón de transferencia de calor respecto al tiempo se llama **razón de transferencia de calor** y se denota por $\dot{Q}$.

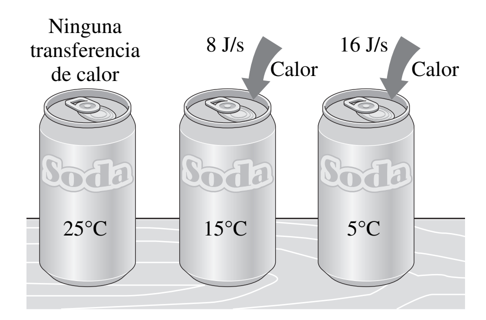


FIGURA 5-45
La diferencia de temperatura es la fuerza impulsora para la transferencia de calor. Entre mayor sea la diferencia de temperatura, más alta es la razón de transferencia de calor.

La dirección de la transferencia de calor siempre será del cuerpo de más alta temperatura al cuerpo de baja temperatura. Cuando la temperatura es igual en los cuerpos, la transferencia de calor se interrumpe. No puede haber transferencia de calor entre dos sistemas (o un sistema o sus alrededores) si éstos tienen la misma temperatura.

Un proceso durante el cual no hay transferencia de calor se llama **proceso adiabático**. Existen dos maneras para que un proceso sea adiabático: el sistema está adecuadamente aislado de modo que sólo una cantidad despreciable de calor puede pasar a través de la frontera del sistema, o, tanto el sistema como los alrededores están a la misma temperatura y, no se tiene fuerza impulsora (diferencia de temperatura) para la transferencia de calor. Un proceso adiabático no debe de confundirse con uno isotérmico. Aun cuando en el curso de un proceso adiabático no hay transferencia de calor, no obstante se puede cambiar el contenido de energía y, en consecuencia, la temperatura por otros medios, como la transferencia de trabajo.

Transferencia de energía por trabajo, *W*

Una interacción de energía es **trabajo** si está asociada con una fuerza que actúa a lo largo de una distancia. Un émbolo que asciende, una flecha rotatoria y un conductor eléctrico que crucen la frontera del sistema están relacionados con interacciones de trabajo. La razón de realización de trabajo respecto al tiempo se llama **potencia** y se denota por $\dot{W}$. Los motores de automóvil y las turbinas hidráulicas, de vapor y de gas producen trabajo; los compresores, las bombas, los ventiladores y las mezcladoras consumen trabajo

Los dispositivos que consumen trabajo transfieren energía al fluido y, por tanto, aumentan la energía de ese fluido. Por ejemplo, un ventilador en un cuarto moviliza el aire y aumenta su energía cinética. La energía eléctrica que consume un ventilador primero se convierte en energía mecánica mediante su motor que

fuerza a que gire la flecha con las aspas. Entonces, esta energía mecánica se transfiere al aire, como resulta evidente por el aumento en la velocidad de éste. La transferencia de energía al aire nada tiene que ver con una diferencia de temperatura, de modo que no puede ser transferencia de calor. Por lo tanto, debe ser trabajo. Llega el momento en que el aire descargado por el ventilador se detiene y de esta manera pierde su energía mecánica como resultado de la fricción entre sus partículas de velocidades diferentes. Pero ésta no es una "pérdida" en el sentido real, es sencillamente la transformación de la energía mecánica en una cantidad equivalente de energía térmica (lo cual tiene un valor limitado y, de allí, el término de *pérdida*) según el principio de conservación de la energía. Si un ventilador funciona durante un tiempo largo en un cuarto sellado, se puede sentir la acumulación de esta energía térmica por un aumento en la temperatura del aire.

Un sistema puede incluir numerosas formas de trabajo y el trabajo total se puede expresar como:

$$W_{\text{total}} = W_{\text{flecha}} + W_{\text{presión}} + W_{\text{viscoso}} + W_{\text{otro}} \quad \textbf{(5-51)}$$

donde W_{flecha} es el trabajo transmitido por una flecha rotatoria, $W_{\text{presión}}$ es el trabajo realizado por las fuerzas de presión sobre la superficie de control, W_{viscoso} es el trabajo realizado por las componentes normal y cortante de las fuerzas viscosas sobre la superficie de control, W_{otro} es el trabajo realizado por otras fuerzas, como la eléctrica y la magnética, y la tensión superficial, las cuales son insignificantes para los sistemas compresibles simples y no se consideran en este texto. Tampoco se considera W_{viscoso} ya que, por lo general, es pequeño en relación con otros términos en el análisis del volumen de control. Pero debe tenerse presente que el trabajo que se realiza por fuerzas cortantes, como las de las álabes, puede ser que se considere en un análisis meticuloso de turbomaquinaria.

Trabajo en la flecha

En numerosos sistemas de flujo interviene una máquina, como una bomba, una turbina, un ventilador o un compresor, cuya flecha sobresale a través de la superficie de control y la transferencia de trabajo relacionado con todos esos tipos de dispositivos, simplemente, se menciona como *trabajo en la flecha*, W_{flecha}. La potencia que se transmite vía una flecha rotatoria es proporcional al par de torsión (torque) de la misma $\mathrm{T}_{\text{flecha}}$, y se expresa como:

$$\dot{W}_{\text{flecha}} = \omega \mathrm{T}_{\text{flecha}} + 2\pi \dot{n}\, \mathrm{T}_{\text{flecha}} \quad \textbf{(5-52)}$$

donde ω es la velocidad angular de la flecha en rad/s y $\dot{n}$ se define como el número de revoluciones de esa flecha por unidad de tiempo, con frecuencia se expresa en rev/min o rpm.

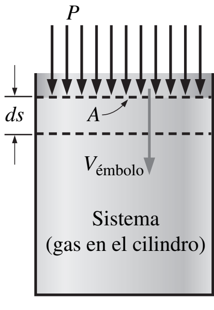
Trabajo que realizan las fuerzas de presión

Considere un gas que se está comprimiendo en el dispositivo de cilindro-émbolo que se muestra en la figura 5-46*a*. Cuando el émbolo recorre hacia abajo una distancia diferencial ds bajo la influencia de la fuerza de presión PA, donde A es el área de la sección transversal del émbolo, el trabajo de la frontera efectuado *sobre* el sistema es $\delta W_{\text{frontera}} = PA\, ds$. Si se dividen los dos miembros de esta relación entre el intervalo diferencial de tiempo dt se obtiene la razón respecto al tiempo del trabajo deen la frontera (es decir, *potencia*):

$$\delta \dot{W}_{\text{presión}} = \delta \dot{W}_{\text{frontera}} = PAV_{\text{émbolo}}$$

donde $V_{\text{pistón}} = ds/dt$ es la velocidad del émbolo, la cual es la velocidad de la frontera en movimiento en la cara de ese émbolo.

Considere ahora una porción de fluido (un sistema) de forma arbitraria, la cual se mueve con el flujo y tiene libertad de deformarse bajo la influencia de la pre-



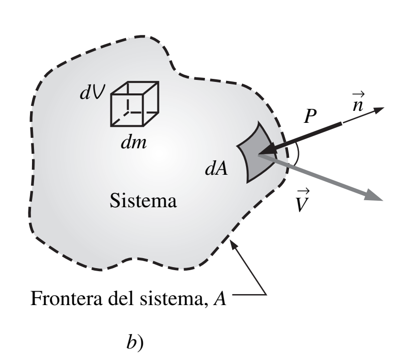


FIGURA 5-46
Fuerza de presión que actúa sobre *a*) la frontera móvil de un sistema en un aparato de pistón-cilindro y *b*) el área superficial diferencial de un sistema de forma arbitraria.

sión, como se muestra en la figura 5-46*b*. La presión siempre actúa hacia dentro y normal a la superficie, y la fuerza de presión que actúa sobre un área diferencial *dA* es *P dA*. Una vez más, note que el trabajo es fuerza multiplicada por la distancia y que la distancia recorrida por unidad de tiempo es la velocidad, la razón respecto al tiempo a la cual se realiza el trabajo por las fuerzas de presión sobre esta parte diferencial del sistema es

$$\delta \dot{W}_{\text{presión}} = -P\, dA\, V_n = -P\, dA(\vec{V} \cdot \vec{n}) \tag{5-53}$$

ya que la componente normal de la velocidad a través del área diferencial *dA* es $V_n = V \cos\theta = \vec{V} \cdot \vec{n}$. Note que $\vec{n}$ es el normal exterior de *dA* y, donde, la cantidad $\vec{V} \cdot \vec{n}$ es positiva para la expansión y negativa para la compresión. El signo negativo en la ecuación 5-33 asegura que el trabajo que se realiza por las fuerzas de presión sea positivo cuando se efectúa *sobre* el sistema y negativo cuando el sistema *lo* realiza, lo cual concuerda con la costumbre establecida respecto a los signos. La razón total del trabajo efectuado por las fuerzas de presión se obtiene cuando se integra $\delta \dot{W}_{\text{presión}}$ sobre la superficie *A* completa,

$$\dot{W}_{\text{presión, ent neta}} = -\int_A P(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA = -\int_A \frac{P}{\rho} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA \tag{5-54}$$

Si se consideran estas indicaciones, la transferencia neta de potencia puede expresarse como:

$$\dot{W}_{\text{ent neta}} = \dot{W}_{\text{flecha, ent neta}} + \dot{W}_{\text{presión, ent neta}} = \dot{W}_{\text{flecha, ent neta}} - \int_A P(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA \tag{5-55}$$

Entonces la forma de razón de la relación de conservación de la energía para un sistema cerrado queda:

$$\dot{Q}_{\text{ent neta}} + \dot{W}_{\text{flecha, ent neta}} + \dot{W}_{\text{presión, ent neta}} = \frac{dE_{\text{sist}}}{dt} \tag{5-56}$$

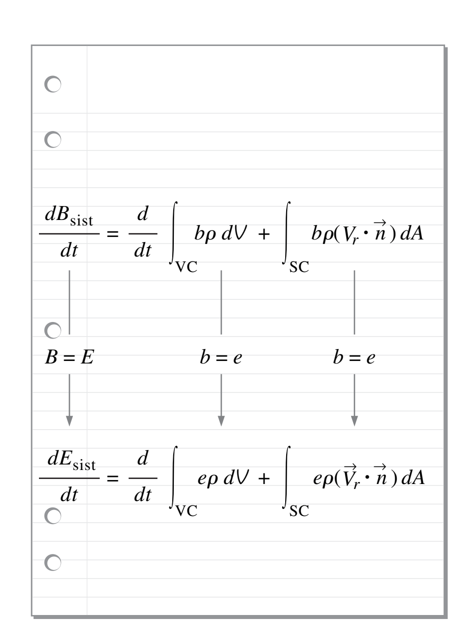


FIGURA 5-47
La ecuación de conservación de la energía se obtiene cuando se reemplaza *B* del teorema del transporte de Reynolds por la energía *E*, y *b* por *e*.

Con la finalidad de obtener una relación para la conservación de la energía para un *volumen de control*, se aplica el teorema del transporte de Reynolds, se reemplaza *B* con la energía total *E*, y *b* con la energía total por unidad de masa *e*, la cual es $e = u + \text{ec} + \text{ep} = u + V^2/2 + gz$ (Fig. 5-47); esto conduce a:

$$\frac{dE_{\text{sist}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} e\rho\, dV + \int_{SC} e\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})A \tag{5-57}$$

Se sustituye el segundo miembro de la ecuación 5-56 en la 5-57, la forma general de la ecuación de la energía que se aplica a volúmenes de control fijos, en movimiento o en deformación queda:

$$\dot{Q}_{\text{ent neta}} + \dot{W}_{\text{flecha, ent neta}} + \dot{W}_{\text{presión, ent neta}} = \frac{d}{dt}\int_{VC} e\rho\, dV + \int_{SC} e\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA \tag{5-58}$$

lo cual puede expresarse como:

$$\left(\begin{array}{c}\text{La razón neta de transferencia}\\ \text{de energía hacia un VC por}\\ \text{transferencia de calor}\\ \text{o de trabajo}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{La razón de cambio}\\ \text{respecto al tiempo del}\\ \text{contenido de energía}\\ \text{del VC}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{El gasto neto de energía}\\ \text{hacia fuera de la}\\ \text{superficie de control}\\ \text{por flujo de masa}\end{array}\right)$$

Aquí, $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{CS}$ es la velocidad del fluido relativa a la superficie de control y el producto $\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$ representa el gasto de masa a través del elemento de área *dA*, hacia dentro o hacia afuera del volumen de control. De nuevo, se nota que $\vec{n}$ es el normal exterior de *dA*, la cantidad $\vec{V}_r \cdot \vec{n}$ y, por tanto, el flujo de masa es positiva para el flujo hacia afuera y negativa por el flujo hacia adentro.

Cuando se sustituye la integral de superficie para la razón del trabajo de presión de la ecuación 5-54 en la 5-58 y se combina con la integral de superficie del segundo miembro da:

$$\dot{Q}_{\text{ent neta}} + \dot{W}_{\text{flecha, ent neta}} = \frac{d}{dt}\int_{CV} e\rho\, dV + \int_{CS}\left(\frac{P}{\rho} + e\right)\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA \qquad \textbf{(5-59)}$$

Ésta es una forma muy conveniente para la ecuación de la energía, ya que ahora el trabajo de presión está combinado con la energía del fluido que cruza la superficie de control y ya no se tiene que tratar con el trabajo de presión.

El término $P/\rho = Pv = w_{\text{flujo}}$ es el **trabajo del flujo**, el cual es el trabajo relacionado con empujar un fluido hacia adentro o hacia afuera de un volumen de control por unidad de masa. Note que la velocidad del fluido en una superficie sólida es igual a la velocidad de esta superficie, en virtud de la condición de no deslizamiento, y es cero para las superficies que no están en movimiento. Como resultado, el trabajo de presión a lo largo de las porciones de la superficie de control que coinciden con las superficies sólidas que no están en movimiento es cero. Por lo tanto, el trabajo de presión para los volúmenes fijos de control sólo puede existir a lo largo de la parte imaginaria de la superficie de control, en donde el fluido entra al volumen de control y sale de éste; es decir, entradas y salidas.

Para un volumen fijo de control (ningún movimiento ni deformación del volumen de control) $\vec{V}_r = \vec{V}$ y la ecuación 5-59 de energía queda:

$$\textit{Fixed CV:}\ \dot{Q}_{\text{ent neta}} + \dot{W}_{\text{flecha, ent neta}} = \frac{d}{dt}\int_{VC} e\rho\, dV + \int_{SC}\left(\frac{P}{\rho} + e\right)\rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA \qquad \textbf{(5-60)}$$

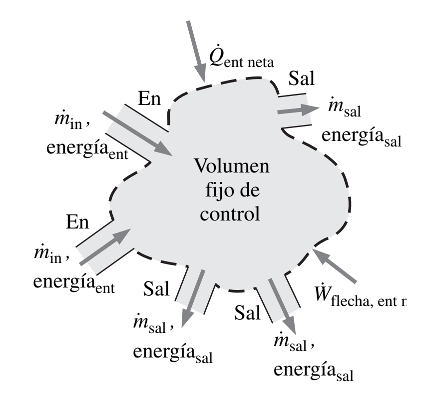


FIGURA 5-48
En un problema típico de ingeniería, el volumen de control puede contener muchas entradas y salidas; la energía fluye hacia adentro en cada entrada y hacia afuera en cada salida. La energía también entra al volumen de control a través de transferencia neta de calor y trabajo neto en la flecha.

Esta ecuación no se encuentra en una forma conveniente para la resolución de problemas prácticos de ingeniería debido a la presencia de las integrales y, en consecuencia, es conveniente reescribirla en términos de velocidades y gastos de masa promedios a través de entradas y salidas. Si $P/\rho + e$ es casi uniforme a lo largo de una entrada o una salida, puede simplificarse si se extrae de la integral. Se hace notar que $\dot{m} = \int_{A_c} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA_c$ es el gasto de masa a través de una entrada o de una salida, se puede tener una aproximación de la razón del flujo hacia adentro o hacia afuera de la energía a través de la entrada o salida como $\dot{m}(P/\rho + e)$. Entonces la ecuación de la energía queda (Fig. 5-48):

$$\dot{Q}_{\text{ent neta}} + \dot{W}_{\text{flecha, ent neta}} = \frac{d}{dt}\int_{CV} e\rho\, dV + \sum_{\text{sal}} \dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + e\right) - \sum_{\text{ent}} \dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + e\right) \qquad \textbf{(5-61)}$$

donde $e = u + V^2/2 + gz$ (ecuación 5-50) es la energía total por unidad de masa tanto para el volumen de control como para las corrientes del flujo. Entonces:

$$\dot{Q}_{\text{ent neta}} + \dot{W}_{\text{flecha, ent neta}} = \frac{d}{dt}\int_{CV} e\rho\, dV + \sum_{\text{sal}} \dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{\text{ent}} \dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz\right) \qquad \textbf{(5-62)}$$

o

$$\dot{Q}_{\text{ent neta}} + \dot{W}_{\text{flecha, ent neta}} = \frac{d}{dt}\int_{VC} e\rho\, dV + \sum_{\text{sal}} \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{\text{ent}} \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) \qquad \textbf{(5-63)}$$

donde se utilizó la definición de entalpía $h = u + Pv = u + P/\rho$. Las dos últimas ecuaciones son expresiones bastante generales de la conservación de la energía, pero su uso, sin embargo, se limita a los volúmenes fijos de control, flujo uniforme en las entradas y salidas y trabajo despreciable debido a las

fuerzas viscosas y otros efectos. Asimismo, el subíndice “ent net” representa “entrada neta” y, por tanto, cualquier transferencia de calor o de trabajo es positiva si es *hacia* el sistema y negativa si *sale* de éste.

5-7 ▪ ANÁLISIS DE ENERGÍA DE LOS FLUJOS ESTACIONARIOS

Para los flujos estacionarios, la razón de cambio respecto al tiempo del contenido de energía del volumen de control es cero y la ecuación 5-63 se simplifica para quedar:

$$\dot{Q}_{\text{ent neta}} + \dot{W}_{\text{flecha, ent neta}} = \sum_{\text{sal}} \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{\text{ent}} \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) \qquad \textbf{(5-64)}$$

Ésta expresa que *la razón neta de transferencia de energía a un volumen de control por transferencias de calor o trabajo, en el curso del flujo estacionario es igual a la diferencia entre las razones de los flujos entrantes y salientes de energía con la masa*.

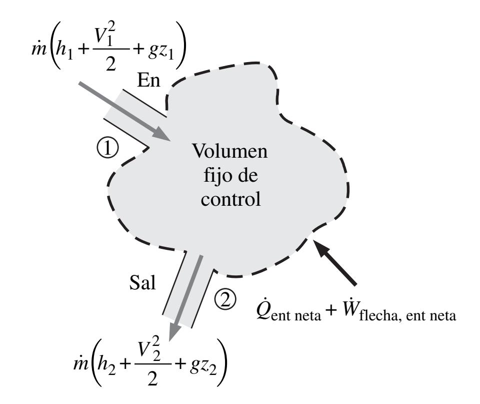


FIGURA 5-49
Volumen de control con sólo una entrada y una salida e interacciones de energía.

Una gran cantidad de problemas prácticos incluyen sólo una entrada y una salida (Fig. 5-49). El gasto de masa para estos **dispositivos de una sola corriente** se mantiene constante y la ecuación 5-64 se reduce a:

$$\dot{Q}_{\text{ent neta}} + \dot{W}_{\text{flecha, ent neta}} = \dot{m}\left(h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)\right) \qquad \textbf{(5-65)}$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a la entrada y a la salida, respectivamente. La ecuación de la energía del flujo estacionario en términos de la unidad de masa se obtiene cuando se divide la ecuación 5-65 entre el gasto de masa $\dot{m}$,

$$q_{\text{ent neta}} + w_{\text{flecha, ent neta}} = h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \qquad \textbf{(5-66)}$$

donde $q_{\text{ent neta}} = \dot{Q}_{\text{ent neta}}/\dot{m}$ es la transferencia neta de calor al fluido por unidad de masa y $w_{\text{flecha, ent neta}} = \dot{W}_{\text{flecha, ent neta}}/\dot{m}$ es la entrada neta de trabajo en la flecha al fluido por unidad de masa. Cuando se aplica la definición de entalpía $h = u + P/\rho$ y se reordena, la ecuación de energía del flujo estacionario también se puede expresar como:

$$w_{\text{flecha, ent neta}} + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + (u_2 - u_1 - q_{\text{ent neta}}) \qquad \textbf{(5-67)}$$

donde u es la *energía interna*, P/ρ es la *energía de flujo*, $V^2/2$ es la *energía cinética* y gz es la *energía potencial* del fluido, todas por unidad de masa. Estas relaciones son válidas tanto para los flujos compresibles como para los incompresibles.

La parte izquierda de la ecuación 5-67 representa la entrada de energía mecánica, en tanto que los tres primeros términos de la parte derecha representan la salida de esa energía. Si el flujo es ideal, sin factores irreversibles como la fricción, la energía mecánica total debe conservarse y el término entre paréntesis $(u_2 - u_1 - q_{\text{ent neta}})$ debe ser igual a cero; es decir:

Flujo ideal (ninguna pérdida de energía mecánica): $$q_{\text{ent neta}} - u_2 - u_1 \qquad \textbf{(5-68)}$$

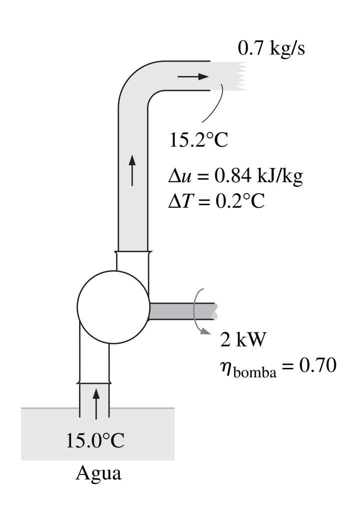


FIGURA 5-50
La energía mecánica perdida en un sistema de flujo de fluidos conduce a un aumento en la energía interna del fluido y, como consecuencia, a una elevación de la temperatura del mismo.

Cualquier aumento en $u_2 - u_1$ por arriba de $q_{\text{ent neta}}$ se debe a la conversión irreversible de energía mecánica en energía térmica y, de donde, $u_2 - u_1 - q_{\text{ent neta}}$ representa la pérdida de energía mecánica (Fig. 5-50); es decir:

Pérdida de energía mecánica: $$e_{\text{mec, pérdidas}} - u_2 - u_1 - q_{\text{ent neta}} \qquad \textbf{(5-69)}$$

Para fluidos de una sola fase (un gas o un líquido), se tiene $u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1)$ donde c_v es el calor específico a volumen constante.

La ecuación de la energía del flujo estacionario en términos de la unidad de masa puede escribirse de manera conveniente como balance de **energía mecánica**:

$$e_{\text{mec, ent}} = e_{\text{mec, sal}} + e_{\text{mec, pérdida}} \tag{5-70}$$

o bien,

$$w_{\text{flecha, ent neta}} + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{{}^{2}_{1}}{2} + g\ {}_{1} = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + e_{\text{mec, pérdida}} \tag{5-71}$$

Se hace notar que $w_{\text{flecha, ent neta}} = w_{\text{flecha, ent}} - w_{\text{flecha, sal}} = w_{\text{bomba}} - w_{\text{turbina}}$, el balance de energía mecánica se puede escribir de manera más explícita como:

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + w_{\text{bomba}} = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + w_{\text{turbina}} + e_{\text{mec, pérdida}} \tag{5-72}$$

donde w_{bomba} es la entrada de trabajo mecánico (debida a la presencia de un bomba, ventilador, compresor, etcétera) y w_{turbina} es la salida de ese mismo trabajo. Cuando el flujo es incompresible puede usarse la presión absoluta o la manométrica para P, ya que P_{atm}/ρ aparecería en ambos miembros y se cancelaría.

Cuando se multiplica la ecuación 5-72 por el gasto de masa, $\dot{m}$ da:

$$\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right) + \dot{W}_{\text{bomba}} = \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) + \dot{W}_{\text{turbina}} + \dot{E}_{\text{mec, pérdida}} \tag{5-73}$$

donde $\dot{W}_{\text{bomba}}$ es la entrada de potencia en la flecha a través de la flecha de la bomba, $\dot{W}_{\text{turbina}}$ es la salida de potencia en la flecha a través de la flecha de la turbina y $\dot{E}_{\text{mec, pérdida}}$ es la pérdida *total* de potencia mecánica, la cual consiste en las pérdidas de la bomba y de la turbina, así como de las pérdidas por fricción en la red de tuberías; es decir:

$$\dot{E}_{\text{mec, pérdida}} = \dot{E}_{\text{pérdida mec, bomba}} + \dot{E}_{\text{pérdida mec, turbina}} + \dot{E}_{\text{pérdida mec, tubería}}$$

Por costumbre, las pérdidas irreversibles de la bomba y de la turbina se tratan por separado de las pérdidas irreversibles debidas a otros componentes del sistema de tuberías. Por tanto, la ecuación de la energía puede expresarse en su forma más común, en términos de cargas como (Fig. 5-51):

$$\frac{P_1}{\rho_1 g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba}, u} = \frac{P_2}{\rho_2 g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina}, e} + h_L \tag{5-74}$$

donde $h_{\text{bomba}, u} = \dfrac{w_{\text{bomba}, u}}{g} = \dfrac{\dot{W}_{\text{bomba}, u}}{\dot{m}g} = \dfrac{\eta_{\text{bomba}}\dot{W}_{\text{bomba}}}{\dot{m}g}$ es la *carga útil entregada al fluido por la bomba*. Debido a las pérdidas irreversibles en la bomba, $h_{\text{bomba}, u}$ es *menor* que $\dot{W}_{\text{bomba}}/\dot{m}g$ en el factor h_{bomba}. De manera análoga, $h_{\text{turbina}, u} = \dfrac{w_{\text{turbina}, e}}{g} = \dfrac{\dot{W}_{\text{turbina}, e}}{\dot{m}g} = \dfrac{\dot{W}_{\text{turbina}}}{{}_{\text{turbina}}\dot{m}g}$ es la *carga extraída que la turbina saca del fluido*. Debido a las pérdidas irreversibles en la turbina, $h_{\text{turbina}, e}$ es *mayor* que $\dot{W}_{\text{bomba}}/\dot{m}g$ en el factor η_{turbina}. Por último, $h_L = \dfrac{e_{\text{pérdida mec, tubería}}}{g} = \dfrac{\dot{E}_{\text{pérdida mec, tubería}}}{\dot{m}g}$ es la *pérdida* irreversible *de carga* entre 1 y 2 debida a todos los componentes del sistema de tuberías que no sean la bomba o la turbina. Note que la pérdida de carga, h_L representa las pérdidas por fricción relacionadas con el flujo del fluido en la tubería y no incluye las pérdidas que ocurren dentro de la bomba o de la turbina debidas a las ineficiencias de estos aparatos (estas pérdidas se toman en cuenta por η_{bomba} y η_{turbina}). La ecuación 5-74 se ilustra en forma esquemática en la figura 5-51.

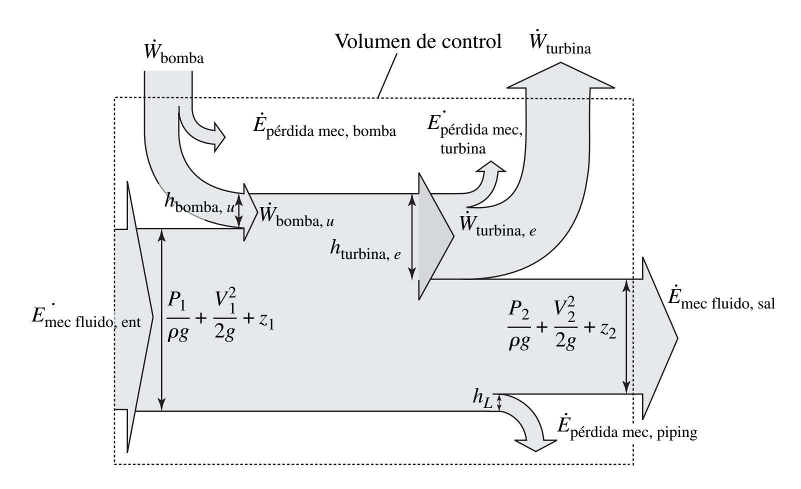


FIGURA 5-51
Diagrama de flujo de la energía mecánica para un sistema de flujo de fluido que contiene una bomba y una turbina. Las dimensiones verticales muestran cada término de energía expresado como una altura equivalente de columna de fluido, es decir, *carga*, correspondiente a cada término de la ecuación 5-74.

La *carga de la bomba* es cero si el sistema de tuberías no contiene una bomba, un ventilador o un compresor, y la *carga de la turbina* es cero si el sistema no contiene una turbina. Asimismo, a veces se puede ignorar la *pérdida de carga h_L*, cuando las pérdidas por fricción en el sistema de tuberías son despreciablemente pequeñas en comparación con los otros términos de la ecuación 5-74.

Caso especial: flujo incompresible sin aparatos de trabajo mecánico y con fricción despreciable

Cuando las pérdidas en la tubería son despreciables se tiene disipación despreciable de energía mecánica en energía térmica y de donde $h_L = e_{\text{pérdida mec, tubería}}/g \cong 0$, como se demuestra más adelante en el ejemplo 5-11. También, $h_{\text{bomba}, u} = h_{\text{turbina}, e} = 0$, cuando no existen dispositivos de trabajo mecánico como ventiladores, bombas o turbinas. Entonces la ecuación 5-74 se reduce a:

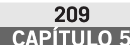
$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2 \qquad \text{o} \qquad \frac{P}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z=\text{constante} \tag{5-75}$$

la cual es la **ecuación de Bernoulli** deducida anteriormente con la aplicación de la segunda ley de Newton del movimiento.

Factor de corrección de la energía cinética, α

La velocidad promedio del flujo V_{prom} se definió en tal manera que la relación ρV_{prom} da el gasto real de masa. Por lo tanto, no existe tal cosa como un factor de corrección para el gasto de masa. Sin embargo, como demostró Gaspard Coriolis (1792-1843), la energía cinética de una corriente de fluido obtenida a partir de $V^2/2$ no es la misma que la energía cinética real de esa corriente de fluido, ya que el cuadrado de una suma no es igual a la suma de los cuadrados de sus componentes (Fig. 5-52). Este error puede corregirse cuando se reemplazan los términos de la energía cinética $V^2/2$ de la ecuación de la energía por $\alpha V_{prom}^2/2$, donde a es el **factor de corrección de la energía cinética**. Con el empleo de las ecuaciones para la variación de la velocidad con la distancia radial, puede demostrarse que el factor de corrección es 2.0 para el flujo laminar totalmente desarrollado en un tubo y que varía entre 1.04 y 1.11 para el flujo turbulento totalmente desarrollado en un tubo circular.

A menudo se ignoran los factores de corrección de la energía cinética (es decir, a se hace igual a 1) en un análisis elemental ya que 1) la mayoría de los flujos que se encuentran en la práctica son turbulentos, para los cuales el factor de co-



rrección es casi la unidad, y 2) con frecuencia los términos de la energía cinética son pequeños en relación con los otros términos de la ecuación de la energía y cuando se multiplican por un factor menor que 2.0 no produce mucha diferencia. Además, cuando la velocidad y la energía cinética son altas, el flujo se vuelve turbulento. Sin embargo, el lector debe tener presente que puede encontrar algunas situaciones para las que estos factores *son* importantes, en especial cuando el flujo es laminar. Por lo tanto, se recomienda incluir siempre el factor de corrección de la energía cinética cuando se analicen problemas de flujo de fluidos. Cuando se incluyen los factores de corrección de la energía cinética, las ecuaciones de la energía para el *flujo estacionario e incompresible* (ecuaciones 5-73 y 5-74) quedan:

$$\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right) + \dot{W}_{\text{bomba}} = \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) + \dot{W}_{\text{turbina}} + \dot{E}_{\text{mec, pérdida}} \quad \textbf{(5-76)}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba},u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina},e} + h_L \quad \textbf{(5-77)}$$

Si el flujo en una entrada o una salida es flujo turbulento totalmente desarrollado en un tubo, se recomienda usar $\alpha = 1.05$ como una estimación razonable del factor de corrección. Esto conduce a una estimación más conservadora de la pérdida de carga y no demanda mucho esfuerzo adicional incluir *a* en las ecuaciones.

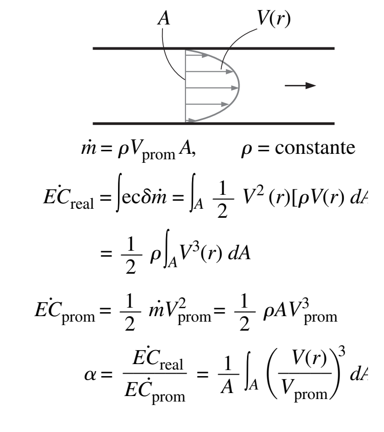


FIGURA 5-52
Determinación del *factor de corrección de la energía cinética* con el uso de la distribución real de velocidad, $V(r)$, y la velocidad promedio V_{prom} en una sección transversal.

EJEMPLO 5-11 **Efecto de la fricción sobre la temperatura del fluido y la pérdida de carga**

Demuestre que en el transcurso del flujo estacionario e incompresible de un fluido en una sección adiabática del flujo *a*) la temperatura se mantiene constante y no hay pérdida de carga, cuando se ignora la fricción; y *b*) la temperatura aumenta y se tiene cierta pérdida de carga cuando se consideran los efectos de la fricción. Explique si es posible que disminuya la temperatura del fluido en el transcurso de ese flujo (Fig. 5-53).

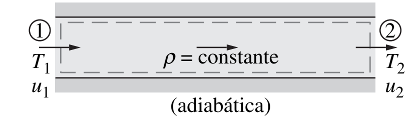


FIGURA 5-53
Esquema para el ejemplo 5-11.

SOLUCIÓN Se considera el flujo estacionario e incompresible por una sección adiabática. Deben determinarse los efectos de la fricción sobre la temperatura y la pérdida de carga.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** La sección del flujo es adiabática y, en consecuencia, no hay transferencia de calor $q_{\text{ent neta}} = 0$.

Análisis La densidad de un fluido permanece constante en el curso del flujo incompresible y el cambio de entropía es:

$$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Esta relación representa el cambio de entropía del fluido por unidad de masa conforme fluye de un lado a otro de la sección de flujo del estado 1, en la entrada, al estado 2, en la salida. El cambio de entropía lo causan dos efectos: 1) la transferencia de calor y 2) los factores irreversibles. Por lo tanto, en ausencia de transferencia de calor, el cambio de entropía se debe sólo a los factores irreversibles, cuyo efecto siempre es aumentar la entropía.

a) El cambio de entropía del fluido en una sección adiabática del flujo ($q_{\text{net in}} =$ 0) es cero cuando en el proceso no intervienen factores irreversibles, como la fricción y el arremolinamiento, y, por tanto, para el *flujo reversible*, se tiene:

Cambio de temperatura: $$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} = 0 \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1$$

Pérdida de energía mecánica:

$$e_{\text{pérdida mec, tubería}} = u_2 - u_1 - q_{\text{ent neta}} = c_v(T_2 - T_1) - q_{\text{net in}} = 0$$

Pérdida de calor: $$h_L = e_{\text{pérdida mec, tubería}}/g = 0$$

Por tanto, se llega a la conclusión que cuando la transferencia de calor y los efectos de la fricción son despreciables, 1) la temperatura del fluido permanece constante, 2) nada de energía mecánica se convierte en energía térmica y 3) no hay pérdida irreversible de carga.

b) Cuando se consideran factores irreversibles, como la fricción, el cambio de entropía es positivo y se tiene:

Cambio de temperatura: $$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} > 0 \rightarrow T_2 > T_1$$

Pérdida de energía mecánica:

$$e_{\text{pérdida mec, tubería}} = u_2 - u_1 - q_{\text{net in}} = c_v(T_2 - T_1) > 0$$

Pérdida de carga: $$h_L = e_{\text{pérdida mec, tubería>}}/g > 0$$

Por tanto, se llega a la conclusión que cuando el flujo es adiabático e irreversible, 1) la temperatura del fluido aumenta, 2) algo de energía mecánica se convierte en energía térmica y 3) se tienen algunas pérdidas irreversibles de carga.

Discusión Es imposible que la temperatura del fluido disminuya en el curso de un flujo estacionario, incompresible y adiabático ya que esto implicaría que disminuyera la entropía de un sistema adiabático, lo cual constituiría una violación de la segunda ley de la termodinámica.

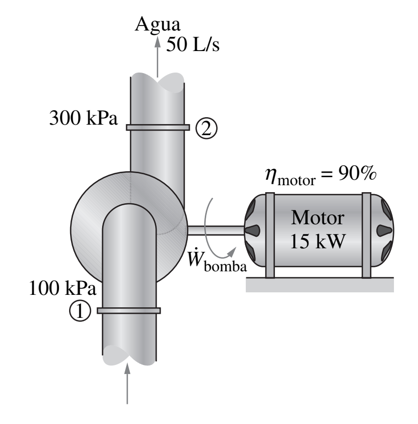


FIGURA 5-54
Esquema para el ejemplo 5-12.

EJEMPLO 5-12 Potencia de bombeo y calentamiento por fricción en una bomba

Un motor eléctrico de 15 kW cuya eficiencia es de 90 por ciento suministra potencia a una bomba de un sistema de distribución de agua (Fig. 5-54). El gasto de agua que pasa por la bomba es de 50 L/s. Los diámetros de los tubos de admisión y de descarga son iguales y la diferencia de elevación de uno a otro lado de la bomba es despreciable. Si se mide que las presiones en la admisión y a la descarga de la bomba son 100 kPa y 300 kPa (absolutos), respectivamente, determine *a*) la eficiencia mecánica de la bomba y *b*) el aumento en la temperatura del agua conforme fluye por la bomba debido a la ineficiencia mecánica.

SOLUCIÓN Se miden las presiones en ambos de una bomba. Deben determinarse la eficiencia mecánica de la bomba y el aumento en la temperatura del agua.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** La bomba es accionada por un motor externo, de modo que el calor generado por el motor se disipa hacia la atmósfera. **3** La diferencia de elevación entre la admisión y la descarga de la bomba es despreciable, $z_1 \cong z_2$. **4** Los diámetros de la admisión y la descarga son iguales y, por tanto, las velocidades a la entrada y a la salida, así como los factores de corrección de la energía cinética son iguales, $V_1 = V_2$ y a1 $\alpha_1 = \alpha_2$.

Propiedades La densidad del agua se toma como 1 kg/L = 1 000 kg/m^3 y su calor específico como 4.18 kJ/kg · °C.

Análisis *a*) El flujo másico de agua que pasa por la bomba es:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = (1 \text{ kg/L})(50 \text{ L/s}) = 50 \text{ kg/s}$$

El motor consume 15 kW de potencia y tiene una eficiencia de 90 por ciento. La potencia mecánica (en la flecha) que se suministra a la bomba es:

$$\dot{W}_{\text{bomba, flecha}} = \eta_{\text{motor}} \dot{W}_{\text{eléctrica}} = (0.90)(15 \text{ kW}) = 13.5 \text{ kW}$$

Para determinar la eficiencia mecánica de la bomba se necesita conocer el aumento en la energía mecánica del fluido conforme fluye a través de la bomba, el cual es:

$$\Delta\dot{E}_{\text{mec, fluido}} = \dot{E}_{\text{mec, sal}} - \dot{E}_{\text{mec, ent}} = \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) - \dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho} + {}_1\frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)$$

Se simplifica ésta para este caso y se sustituyen los valores dados:

$$\Delta\dot{E}_{\text{mec, fluido}} = \dot{m}\left(\frac{P_2 - P_1}{\rho}\right) = (50 \text{ kg/s})\left(\frac{(300 - 100) \text{ kPa}}{1\,000 \text{ kg/m}^3}\right)\left(\frac{1 \text{ kJ}}{1 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3}\right) = 10 \text{ kW}$$

Entonces la eficiencia mecánica de la bomba queda:

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{\dot{W}_{\text{bomba},u}}{\dot{W}_{\text{bomba, flecha}}} = \frac{\Delta\dot{E}_{\text{mec, fluido}}}{\dot{W}_{\text{bomba, flecha}}} = \frac{10 \text{ kW}}{13.5 \text{ kW}} = \mathbf{0.741} \text{ o sea } \mathbf{74.1\%}$$

b) De la potencia mecánica de 13.5 kW suministrada por la bomba, sólo se imparten 10 kW al fluido como energía mecánica. Los 3.5 kW restantes se convierten en energía térmica debido a los efectos de la fricción y esta energía mecánica "perdida" se manifiesta como un efecto de calentamiento en el fluido:

$$\dot{E}_{\text{mec, pérdida}} = \dot{W}_{\text{bomba, flecha}} - \Delta\dot{E}_{\text{mec, fluido}} = 13.5 - 10 = 3.5 \text{ kW}$$

El aumento en la temperatura del agua debido a esta ineficiencia mecánica se determina con base en el balance de la energía térmica, $\dot{E}_{\text{mec, pérdida}} = \dot{m}(u_2 - u_1) = \dot{m}c\Delta T$. Cuando se despeja ΔT,

$$\Delta T = \frac{\dot{E}_{\text{mec, pérdida}}}{\dot{m}\ c} = \frac{3.5 \text{ kW}}{(50 \text{ kg/s})(4.18 \text{ kJ/ kg} \cdot °\text{C})} = \mathbf{0.017°C}$$

Por lo tanto, el agua experimentará un aumento en la temperatura de 0.017°C debido a la ineficiencia mecánica, lo cual es muy pequeño, cuando fluye a través de la bomba.

Discusión En una aplicación real, el aumento en la temperatura del agua probablemente será menor, ya que parte del calor generado se transferirá a la carcasa de la bomba y, de ésta, al aire circundante. Si el motor completo de la bomba estuviera sumergido en agua, entonces los 1.5 kW disipados al aire debido a la ineficiencia del motor también se transferirían al agua circundante como calor. Esto haría que la temperatura del agua aumentara más.

EJEMPLO 5-13 **Generación de potencia hidroeléctrica originada por una presa**

En una planta generadora hidroeléctrica, 100 m^3/s de agua fluyen desde una elevación de 120 m hasta una turbina, en donde se genera la potencia eléctrica (Fig. 5-55). Se determina que la pérdida total irreversible de carga en el sistema de tuberías, desde el punto 1 hasta el 2 (se excluye la unidad de turbina) es de 35 m. Si la eficiencia total del turbogenerador es de 80 por ciento, estime la salida de potencia eléctrica.

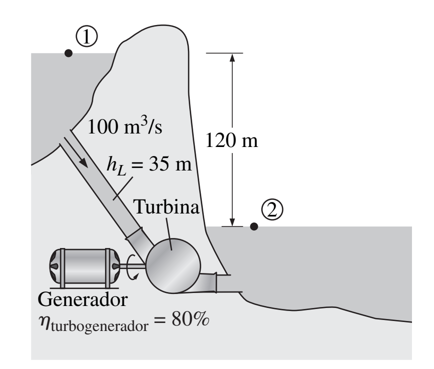


FIGURA 5-55
Esquema para el ejemplo 5-13.

SOLUCIÓN Se dan la carga disponible, el gasto, la pérdida de carga y la eficiencia de una turbina hidroeléctrica. Debe determinarse la salida de potencia eléctrica.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Los niveles del agua en el depósito y en el sitio de descarga permanecen constantes.

Propiedades La densidad del agua se toma como 1 000 kg/m^3.

Análisis El flujo másico del agua que pasa por la turbina es:

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = (1\,000 \text{ kg/m}^3)(100 \text{ m}^3\text{/s}) = 10^5 \text{ kg/s}$$

Se toma el punto 2 como el nivel de referencia y, donde, $z_2 = 0$. Asimismo, los dos puntos 1 y 2 están abiertos a la atmósfera ($P_1 = P_2 = P_{atm}$) y las velocidades del flujo son despreciables en los dos puntos ($V_1 = V_2 = 0$). Entonces la ecuación de la energía para el flujo estacionario e incompresible se reduce a:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba},u}^{\nearrow 0} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2^{\nearrow 0} + h_{\text{turbina},\,e} + h_L \rightarrow$$

$$h_{\text{turbina},\,e} = z_1 - h_L$$

Se sustituye la carga extraída por la turbina y la potencia correspondiente de ésta son:

$$h_{\text{turbina},\,e} = z_1 - h_L = 120 - 35 = 85 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{\text{turbina},\,e} = \dot{m}gh_{\text{turbina},\,e} = (10^5 \text{ kg/s})(9.81 \text{ m/s}^2)(85 \text{ m})\left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1\,000 \text{ m}^2\text{/s}^2}\right) = 83\,400 \text{ kW}$$

Por lo tanto, un turbogenerador perfecto generaría 83 400 kW de electricidad a partir de este recurso. La potencia eléctrica generada por la unidad real es:

$$\dot{W}_{\text{eléctrica}} = \eta_{\text{turbogenerador}}\dot{W}_{\text{turbina},\,e} = (0.80)(83.4 \text{ MW}) = \mathbf{66.7\ MW}$$

Discusión Note que la generación de potencia aumentaría en casi 1 MW por cada punto porcentual de mejora en la eficiencia de la unidad del turbogenerador.

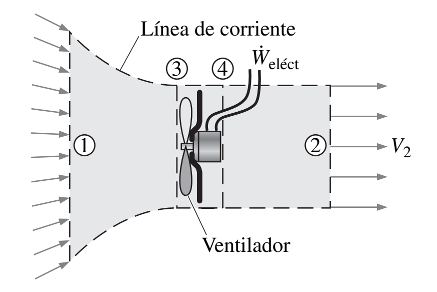


FIGURA 5-56
Esquema para el ejemplo 5-14.

EJEMPLO 5-14 Selección del ventilador para enfriamiento por aire de una computadora

Debe seleccionarse un ventilador para enfriar una computadora cuyas dimensiones son 12 cm × 40 cm × 40 cm (Fig. 5-56). Se espera que la mitad del volumen de la computadora esté lleno con componentes y que la otra mitad sea espacio de aire. Se cuenta con un agujero de 5 cm de diámetro en la parte posterior de la computadora para la instalación del ventilador que debe reemplazar al aire en los espacios vacíos una vez cada segundo. En el mercado se encuentran unidades combinadas ventilador-motor de baja potencia y se estima que su eficiencia es de 30 por ciento. Determine *a*) la potencia de la unidad ventilador-motor que debe comprarse y *b*) la diferencia de presión de uno a otro lado del ventilador. Tome la densidad del aire como 1.20 kg/m^3.

SOLUCIÓN Un ventilador debe enfriar una computadora reemplazando al aire del interior una vez cada segundo. Debe determinarse la potencia del ventilador y la diferencia de presión de uno a otro lado de él.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Las pérdidas que no son las debidas a la ineficiencia de la unidad ventilador-motor son despreciables ($h_L = 0$). **3** El flujo a la salida es bastante uniforme, excepto cerca del centro (debido a la estela del motor del ventilador), y el factor de corrección de la energía cinética a la salida es 1.10.

Propiedades Se da que la densidad del aire es de 1.20 kg/m^3.

Análisis *a*) Se observa que la mitad del volumen de la computadora está ocupado por los componentes, el volumen de aire en la computadora es:

$$V = (\text{Fracción vacía})(\text{Volumen total de la computadora})$$
$$= 0.5(12 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}) = 9\,600 \text{ cm}^3$$

Por lo tanto, el gasto volumétrico y el de masa de aire que pasan por la computadora son:

$$\dot{V} = \frac{V}{\Delta t} = \frac{9\ 600\ \text{cm}^3}{1\ \text{s}} = 9\ 600\ \text{cm}^3/\text{s} = 9.6 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = (1.20\ \text{kg/m}^3)(9.6 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}) = 0.0115\ \text{kg/s}$$

El área de la sección transversal de la abertura en la computadora y la velocidad promedio del aire a través de la salida son:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(0.05\ \text{m})^2}{4} = 1.96 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

$$V = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{9.6 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}}{1.96 \times 10^{-3}\ \text{m}^2} = 4.90\ \text{m/s}$$

Se dibuja el volumen de control alrededor del ventilador en tal manera que tanto la entrada como la salida del aire se encuentren a la presión atmosférica ($P_1 = P_2 = P_{atm}$), como se muestra en la figura 5-56, y la sección 1 de la salida es grande y está lejos del ventilador, de modo que la velocidad del flujo en esa sección es despreciable ($V_1 \cong 0$). Se observa que $z_1 = z_2$ y que se descartan las pérdidas por fricción en el flujo, las pérdidas mecánicas constan sólo de las pérdidas del ventilador y la ecuación de la energía (ecuación 5-76) se simplifica para quedar:

$$\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1\frac{V_1^2}{2}\overset{\nearrow 0}{} + gz_1\right) + \dot{W}_{\text{ventilador}} = \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho} + \alpha_2\frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) + \dot{W}_{\text{turbina}}\overset{\nearrow 0}{} + \dot{E}_{\text{pérdida mec, ventilador}}$$

Se despeja $\dot{W}_{\text{ventilador}} - \dot{E}_{\text{pérdida mec, ventilador}} = \dot{W}_{\text{ventilador}, u}$ y se sustituye:

$$\dot{W}_{\text{ventilador}, u} = \dot{m}\alpha_2\frac{V_2^2}{2} = (0.0115\ \text{kg/s})(1.10)\frac{(4.90\ \text{m/s})^2}{2}\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = 0.152\ \text{W}$$

Entonces se determina que la entrada necesaria de potencia eléctrica hacia el ventilador es:

$$\dot{W}_{\text{eléct}} = \frac{\dot{W}_{\text{ventilador}, u}}{\eta_{\text{ventilador-motor}}} = \frac{0.152\ \text{W}}{0.3} = \mathbf{0.506\ W}$$

Por lo tanto, un ventilador-motor con una capacidad nominal de alrededor de medio watt es adecuado para esta tarea.

b) Para determinar la diferencia de presión de uno a otro lados de la unidad del ventilador, se toman los puntos 3 y 4 de modo que estén en los dos lados de este último sobre una recta horizontal. En esta ocasión, de nuevo $z_3 = z_4$ y $V_3 = V_4$ ya que el ventilador tiene una sección transversal angosta, y la ecuación de la energía se reduce a:

$$\dot{m}\frac{P_3}{\rho} + \dot{W}_{\text{ventilador}} = \dot{m}\frac{P_4}{\rho} + \dot{E}_{\text{pérdida mec,ventilador}} \quad \rightarrow \quad \dot{W}_{>\text{ventilador}, u} = \dot{m}\frac{P_4 - P_3}{\rho}$$

Se despeja y se sustituye:

$$P_4 - P_3 = \frac{\dot{W}_{\text{ventilador}, u}}{\dot{m}} = \frac{(1.2\ \text{kg/m}^3)(0.152\ \text{W})}{0.0115\ \text{kg/s}}\left(\frac{1\ \text{Pa}\cdot\text{m}^3}{1\ \text{Ws}}\right) = \mathbf{15.8\ Pa}$$

Por lo tanto, la elevación de la presión de uno a otro lados del ventilador es de 15.8 Pa.

Discusión Se tiene que la eficiencia de la unidad ventilador-motor es de 30 por ciento, lo cual significa que 30 por ciento de la potencia eléctrica $\dot{W}_{\text{eléctrica}}$ consumida por esa unidad se convierte en energía mecánica útil, en tanto que el resto (70 por ciento) se "pierde" y se convierte en energía térmica. Asimismo, en un sistema real, se necesita un ventilador más potente para vencer las pérdidas por fricción en el interior de la computadora. Note que si se hubiera ignorado el factor de corrección de la energía cinética en la salida, la potencia eléctrica necesaria y el aumento de la presión habrían sido 10 por ciento menores en este caso (0.460 W y 14.4 Pa, respectivamente).

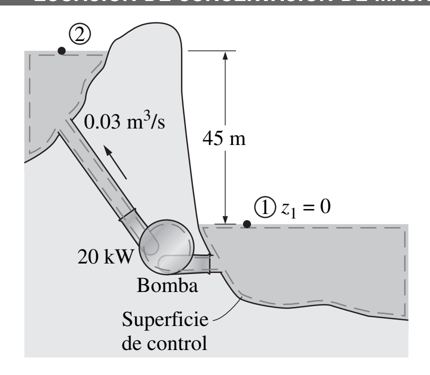


FIGURA 5-57
Esquema para el ejemplo 5-15.

EJEMPLO 5-15 Pérdida de carga y de potencia durante el bombeo de agua

Se bombea agua desde un depósito inferior hacia otro más alto mediante una bomba que suministra 20 kW de potencia mecánica útil al agua (Fig. 5-57). La superficie libre del depósito superior está 45 m más arriba que la superficie del inferior. Si se mide que el gasto de agua es de 0.03 m^3/s, determine la pérdida irreversible de carga del sistema y la potencia mecánica perdida en el transcurso de este proceso.

SOLUCIÓN Se bombea agua desde un depósito inferior hacia otro más alto. Deben determinarse las pérdidas de la carga y de potencia relacionadas con este proceso.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** La diferencia de elevación entre los depósitos es constante.

Propiedades Se toma la densidad del agua como 1 000 kg/m^3.

Análisis El flujo de masa del agua en el sistema es:

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = (1\,000 \text{ kg/m}^3)(0.03 \text{ m}^3\text{/s}) = 30 \text{ kg/s}$$

Se eligen los puntos 1 y 2 en las superficies libres de los depósitos inferior y superior, respectivamente, y se toma la superficie del inferior como el nivel de referencia ($z_1 = 0$). Los dos puntos están abiertos a la atmósfera ($P_1 = P_2 = P_{atm}$) y las velocidades en los dos lugares son despreciables ($V_1 = V_2 = 0$). Entonces la ecuación de la energía para el flujo estacionario e incompresible para un volumen de control entre 1 y 2, se reduce a:

$$\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2}^{\nearrow 0} + g z_1^{\nearrow 0}\right) + \dot{W}_{\text{bomba}}$$

$$= \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2}^{\nearrow 0} + g z_2\right) + \dot{W}_{\text{turbina}}^{\nearrow 0} + \dot{E}_{\text{mec, pérdida}}$$

$$\dot{W}_{\text{bomba}} = \dot{m} g z_2 + \dot{E}_{\text{mec, pérdida}} \quad \rightarrow \quad \dot{E}_{\text{mec, pérdida}} = \dot{W}_{\text{bomba}} - \dot{m} g z_2$$

Al sustituir, se determina que la potencia mecánica perdida y la pérdida de carga son:

$$\dot{E}_{\text{mec, pérdida}} = 20 \text{ kW} - (30 \text{ kg/s})(9.81 \text{ m/s}^2)(45 \text{ m})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)\left(\frac{1 \text{ kW}}{1\,000 \text{ N}\cdot\text{m/s}}\right)$$

$$= \mathbf{6.76\ kW}$$

Se nota que las pérdidas mecánicas por entero se deben a pérdidas por fricción en la tubería y, donde, $\dot{E}_{\text{mec, pérdida}} = \dot{E}_{\text{mec, pérdida, tubería}}$, se determina que la pérdida irreversible de carga es:

$$h_L = \frac{\dot{E}_{\text{mec, pérdida, tubería}}}{\dot{m} g} = \frac{6.76 \text{ kW}}{(30 \text{ kg/s})(9.81 \text{ m/s}^2)}\left(\frac{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}{1 \text{ N}}\right)\left(\frac{1\,000 \text{ N}\cdot\text{m/s}}{1 \text{ kW}}\right) = \mathbf{23.0\ m}$$

Discusión Los 6.76 kW de potencia se utilizan para vencer la fricción en el sistema de tuberías. Note que la bomba podría subir el agua a 23 m más si no hubiera pérdidas irreversibles de carga en el sistema. En este caso teórico, la bomba funcionaría como una turbina cuando se dejara fluir el agua del recipiente superior al inferior y se extraerían 20 kW de potencia de dicha agua.

RESUMEN

En este capítulo se trata de la ecuación de la masa, de Bernoulli y de la energía, así como de sus aplicaciones. La cantidad de masa que fluye a través de una sección transversal por unidad de tiempo se llama *razón de flujo* y se expresa como:

$$\dot{m} = \rho V A_c = \rho \dot{V}$$

donde ρ es la densidad, V es la velocidad promedio, $\dot{V}$ es el gasto volumétrico del fluido y A_c es el área de la sección transversal normal a la dirección del flujo. La relación de conservación de la masa para un volumen de control se expresa como:

$$\frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho \, dV + \int_{\text{SC}} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA = 0 \quad \text{o}$$

$$\frac{dm_{\text{VC}}}{dt} = \sum_{\text{ent}} \dot{m} - \sum_{\text{sal}} \dot{m}$$

Ésta expresa que *la razón de cambio respecto al tiempo de la masa que está dentro del volumen de control más el gasto neto de masa que atraviesa la superficie de control es igual a cero.*

Para dispositivos de flujo estacionario, el principio de conservación de la masa se expresa como:

Flujo estacionario: $\sum_{\text{sal}} \dot{m} = \sum_{\text{sal}} \dot{m}$

Flujo estacionario (*una sola corriente*):

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad \rightarrow \quad \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

Flujo estacionario e incompresible: $\sum_{\text{ent}} \dot{V} = \sum_{\text{sal}} \dot{V}$

Flujo estacionario e incompresible (*una sola corriente*):

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2$$

La *energía mecánica* es la forma de la energía relacionada con la velocidad, el aumento y la presión del fluido y se puede convertir por completo y de manera directa a trabajo mecánico mediante un dispositivo mecánico ideal. Las eficiencias de varios dispositivos se definen como:

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}}{\dot{W}_{\text{flecha, ent}}} = \frac{\dot{W}_{\text{bomba}, u}}{\dot{W}_{\text{bomba}}}$$

$$\eta_{\text{turbina}} = \frac{\dot{W}_{\text{flecha, sal}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}|} = \frac{\dot{W}_{\text{turbina}}}{\dot{W}_{\text{turbina}, e}}$$

$$\eta_{\text{motor}} = \frac{\text{Salida de potencia mecánica}}{\text{Entrada de potencia eléctrica}} = \frac{\dot{W}_{\text{flecha, sal}}}{\dot{W}_{\text{eléct, ent}}}$$

$$\eta_{\text{generador}} = \frac{\text{Salida de potencia eléctrica}}{\text{Entrada de potencia mecánica}} = \frac{\dot{W}_{\text{eléct, sal}}}{\dot{W}_{\text{flecha, ent}}}$$

$$\eta_{\text{bomba-motor}} = \eta_{\text{bomba}}\eta_{\text{motor}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}}{\dot{W}_{\text{eléct, ent}}} = \frac{\dot{W}_{\text{bomba}, u}}{\dot{W}_{\text{eléct, ent}}}$$

$$\eta_{\text{turbo}} = \eta_{\text{turbina}}\eta_{\text{generador}} = \frac{\dot{W}_{\text{eléct, sal}}}{\Delta \dot{E}_{\text{mec, fluido}}} = \frac{\dot{W}_{\text{eléct, sal}}}{\dot{W}_{\text{turbina}, e}}$$

La *ecuación de Bernoulli* es una relación entre la presión, la velocidad y la elevación en el flujo estacionario e incompresible, y se expresa a lo largo de una línea de corriente y en regiones en donde las fuerzas viscosas netas son despreciables como:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$$

También puede expresarse entre dos puntos cualesquiera sobre una línea de corriente como:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

La ecuación de Bernoulli es una expresión del balance de energía mecánica y puede enunciarse como: *la suma de la energía cinética, la potencial y la de flujo de una partícula de fluido es constante a lo largo de una línea de corriente en el curso del flujo estacionario, cuando los efectos de la compresibilidad y de la fricción son despreciables*. Si se multiplica la ecuación de Bernoulli por la densidad da:

$$P + \rho\frac{V^2}{2} + \rho gz = \text{constante}$$

donde P es la *presión estática*, la cual representa la presión real del fluido; $\rho V^2/2$ es la *presión dinámica*, la cual representa el aumento de la presión cuando el fluido en movimiento se lleva hasta detenerlo, y ρgz es la *presión hidrodinámica*, la cual explica los efectos del peso del fluido sobre la presión. La suma de la presión estática, la dinámica e hidrostática se llama *presión total*. La ecuación de Bernoulli expresa que *la presión total a lo largo de una línea de corriente es constante*. La suma de la presión estática y dinámica se llama *presión de estancamiento*, la cual representa la presión en un punto donde el fluido se lleva hasta detenerlo totalmente de una manera sin fricción. La ecuación de Bernoulli también se puede representar en términos de "cargas" cuando se divide cada término entre g:

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = H = \text{constante}$$

donde $P/\rho g$ es la *carga de presión*, la cual representa la altura de una columna de fluido que produce la presión estática P, $V^2/2g$ es la *carga de velocidad*, la cual representa la necesaria para que un fluido alcance la velocidad V en el curso de una caída libre sin fricción, y z es la *carga de elevación*, la cual representa la energía potencial del fluido. Asimismo, H es la *carga total* para el flujo. La línea que representa la suma de las cargas de presión estática y de elevación, $P/\rho g + z$, se llama *línea de gradiente hidráulico* (LGH, HGL, por sus siglas en inglés) y la que repre-

senta la carga total del fluido $P/\rho g + V^2/2g + z$, se llama *línea de energía* (LE, EGL, por sus siglas en inglés).

La *ecuación de energía* para el flujo estacionario e incompresible se puede expresar como:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba}, u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina}, e} + h_L$$

donde

$$h_{\text{bomba}, u} = \frac{w_{\text{bomba}, u}}{g} = \frac{\dot{W}_{\text{bomba}, u}}{\dot{m}g} = \frac{\eta_{\text{bomba}}\dot{W}_{\text{bomba}}}{\dot{m}g}$$

$$h_{\text{turbina}, e} = \frac{w_{\text{turbina}, e}}{g} = \frac{\dot{W}_{\text{turbina}, e}}{\dot{m}g} = \frac{\dot{W}_{\text{turbina}}}{\eta_{\text{turbina}}\dot{m}g}$$

$$h_L = \frac{e_{\text{pérdida mec, tubería}}}{g} = \frac{\dot{E}_{\text{pérdida mec, tubería}}}{\dot{m}g}$$

$$e_{\text{mec, pérdida}} = u_2 - u_1 - q_{\text{ent neta>}}$$

La ecuación de masa, de Bernoulli y de energía son tres de las relaciones más fundamentales de la mecánica de fluidos y se usan de manera extensa en los capítulos siguientes. En el capítulo 6 se usa la ecuación de Bernoulli o la de energía, junto con la ecuación de masa y de cantidad de movimiento, para determinar las fuerzas y pares de torsión que actúan sobre los sistemas de fluidos. En los capítulos 8 y 14, se usan la ecuación de masa y de energía para determinar las necesidades de potencia de bombeo en los sistemas de fluidos, así como en el diseño y análisis de la turbomaquinaria. En los capítulos 12 y 13, también se usa la ecuación de energía con cierta amplitud en el análisis del flujo compresible y del flujo en canal abierto.

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. C. T. Crowe, J. A. Roberson y D. F. Elger, *Engineering Fluid Mechanics*, 7a. ed., Nueva York: Wiley, 2001.
2. R. C. Dorf, editor en jefe, *The Engineering Handbook*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995.
3. B. R. Munson, D. F. Young y T. Okiishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4a. ed., Nueva York: Wiley, 2002.
4. R. L. Panton, *Incompressible Flow*, 2a. ed., Nueva York: Wiley, 1996.
5. M. C. Potter y D. C. Wiggert, *Mechanics of Fluids*, 2a. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
6. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*, Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.

PROBLEMAS*

Conservación de la masa

5-1C Nombre cuatro cantidades físicas que se conserven y dos que no se conserven durante un proceso.

5-2C Defina flujo de masa y gasto volumétrico. ¿Cómo están relacionados entre sí?

5-3C La cantidad de masa que entra a un volumen de control ¿tiene que ser igual a la cantidad de masa que sale durante un proceso de flujo no estacionario?

5-4C ¿Cuándo es estacionario el flujo que pasa por un volumen de control?

5-5C Considere un dispositivo con una entrada y una salida. Si los gastos volumétricos en la entrada y en la salida son los mismos, ¿el flujo que pasa por este dispositivo es necesariamente estacionario? ¿Por qué?

5-6I Se usa una manguera de jardín que tiene una boquilla para llenar una cubeta de 20 gal. El diámetro interior de la manguera es de 1 in y se reduce hasta 0.5 in a la salida de la boquilla. Si la velocidad promedio en la manguera es de 8 ft/s, determine *a*) los gastos volumétrico y de masa del agua que pasa por la manguera, *b*) cuánto tardará en llenarse la cubeta con el agua y *c*) la velocidad promedio del agua a la salida de la boquilla.

5-7 Entra aire de manera estacionaria a una tobera a 2.21 kg/m³ y 30 m/s, y sale a 0.762 kg/m³ y 180 m/s. Si el área de la entrada de la tobera es de 80 cm², determine *a*) el flujo de masa que pasa por la tobera y *b*) el área de salida de ésta. *Respuestas: a*) 0.530 kg/s, *b*) 38.7 cm²

5-8 A Una secadora de cabello es un ducto de diámetro constante en el cual se colocan unas cuantas capas de resistencias

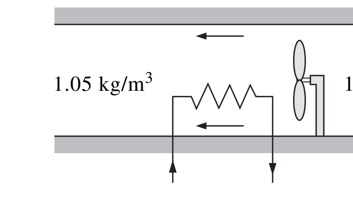


FIGURA P5-8

* Los problemas designados por una “C” son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una “I” están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

eléctricas. Un pequeño ventilador hace que el aire entre y lo fuerza a pasar a través de las resistencias, en donde se calienta. Si la densidad del aire es de 1.20 kg/m^3 a la entrada y 1.05 kg/m^3 a la salida, determine el porcentaje de aumento en la velocidad del aire conforme fluye por la secadora.

5-9I Se tiene aire cuya densidad es de 0.078 lbm/ft^3 que entra al ducto de un sistema de aire acondicionado con un gasto volumétrico de 450 ft^3/min. Si el diámetro del ducto es de 10 in, determine la velocidad del aire a la entrada del ducto y el flujo de masa de ese aire.

5-10 Un tanque rígido de 1 m^3 contiene aire cuya densidad es de 1.18 kg/m^3. Está conectado a una línea de alimentación de alta presión a través de una válvula. Ésta se abre y se deja entrar aire al tanque hasta que la densidad en éste se eleva a 7.20 kg/m^3. Determine la masa de aire que ha entrado al tanque. *Respuestas:* 6.02 kg

5-11 El ventilador que extrae el aire del cuarto de baño de un edificio tiene un gasto volumétrico de 30 L/s y funciona de manera continua. Si la densidad del aire en el interior es de 1.20 kg/m^3, determine la masa de aire que se extrae en un día.

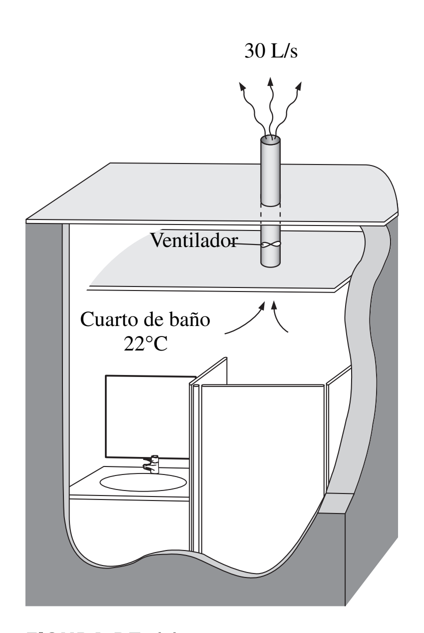


FIGURA P5-11

5-12 Se va a enfriar una computadora de escritorio mediante un ventilador cuyo gasto es de 0.34 m^3/min. Determine el flujo de masa del aire que pasa por el ventilador a una altitud de 3 400 m, en donde la densidad del aire es de 0.7 kg/m^3. Asimismo, si la velocidad promedio del aire no sobrepasa el valor de 110 m/min, determine el diámetro del ventilador. *Respuestas:* 0.238 kg/min, 0.063 m

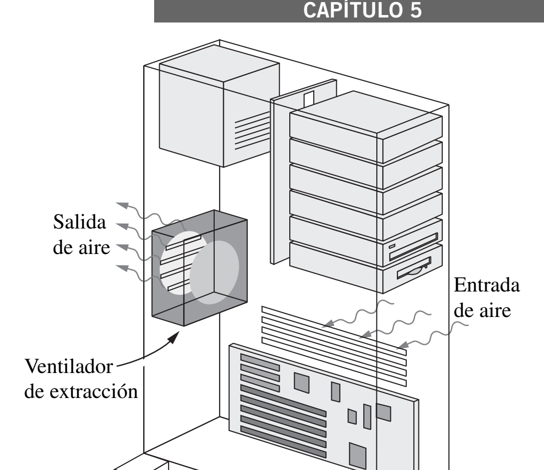


FIGURA P5-12

5-13 Un salón de fumar tiene capacidad para 15 personas. Se especifica que la necesidad mínima de aire fresco para este tipo de salones es de 30 L/s por persona (ASHRAE, norma 62, 1989). Determine el gasto mínimo necesario de aire fresco para alimentar al salón y el diámetro del ducto, si la velocidad del aire no debe sobrepasar el valor de 8 m/s.

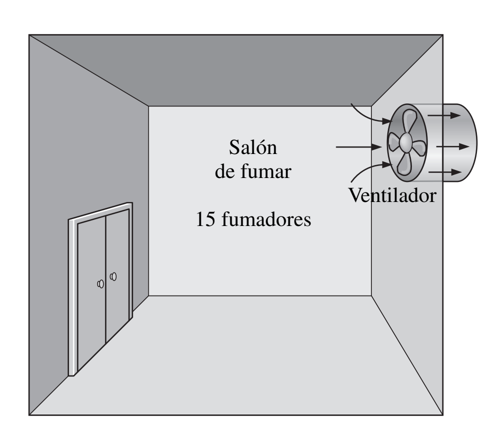


FIGURA P5-13

5-14 Se especifica que la necesidad mínima de aire fresco de un edificio residencial es un cambio de aire por hora de 0.35 (ASHRAE, norma 62, 1989). Es decir, cada hora debe reemplazarse 35 por ciento de todo el aire contenido en una residencia por aire fresco del exterior. Si se debe satisfacer por completo mediante un ventilador la necesidad de ventilación de una residencia de 2.7 m de alto y 200 m^2, determine la capacidad de flujo en L/min del ventilador que se necesita instalar. Determine también el diámetro del ducto, si la velocidad del aire no debe ser mayor a 6 m/s.

Energía y eficiencia mecánicas

5-15C ¿Qué es la energía mecánica? ¿En qué difiere de la energía térmica? ¿Cuáles son las formas de la energía mecánica de un flujo de fluido?

5-16C ¿Qué es la eficiencia mecánica? ¿Qué significa una eficiencia mecánica de 100 por ciento para una turbina hidráulica?

5-17C ¿Cómo se define la eficiencia combinada bomba-motor de un sistema de bomba y motor eléctrico? ¿Puede ser mayor la eficiencia combinada bomba-motor que la de la bomba o la del motor?

5-18C Defina la eficiencia de la turbina, la eficiencia del generador y la eficiencia combinada del turbogenerador.

5-19 Considere un río que fluye hacia un lago a una velocidad promedio de 3 m/s a razón de 500 m^3/s en un lugar 90 m por arriba de la superficie del lago. Determine la energía mecánica total del agua del río por unidad de masa y el potencial de generación de potencia del río completo en ese lugar. *Respuesta:* 444 MW

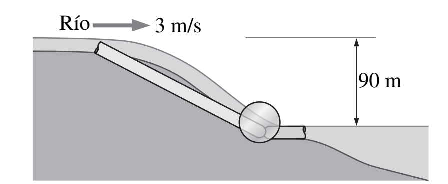


FIGURA P5-19

5-20 Se va a generar potencia eléctrica a través de la instalación de un turbogenerador hidráulico, en un sitio que está 70 m por abajo de la superficie libre de un depósito grande de agua que puede suministrar ésta a razón de 1 500 kg/s, de manera uniforme. Si la salida de potencia mecánica de la turbina es de 800 kW y la generación de potencia eléctrica es de 750 kW, determine la eficiencia de la turbina y la eficiencia combinada del turbogenerador de esta planta. Desprecie las pérdidas en los tubos.

5-21 En cierto lugar el viento está soplando uniformemente a 12 m/s. Determine la energía mecánica del aire por unidad de masa y el potencial de generación de potencia de una turbina de viento con álabes de 50 m de diámetro en ese lugar. Determine también, la generación real de potencia eléctrica si se supone una eficiencia total de 30 por ciento. Tome la densidad del aire como 1.25 kg/m^3.

5-22 Vuelva a considerar el problema 5-21. Use el Software de EES (o cualquier otro programa de este tipo)e investigue el efecto de la velocidad del viento y del diámetro cubierto por las álabes sobre la generación eólica de potencia. Suponga que la velocidad varía de 5 hasta 20 m/s, en incrementos de 5 m/s, y que el diámetro varía de 20 hasta 80 m, en incrementos de 20 m. Elabore una tabla de los resultados y analice su significado

5-23I Un sensor de termopar diferencial en la admisión y la descarga de una bomba indican que la temperatura del agua aumenta 0.072°F conforme fluye a través de esa bomba a razón de 15 ft^3/s. Si el consumo de potencia por la bomba es de 27 hp, determine la eficiencia mecánica de dicha bomba. *Respuesta:* 64.7 por ciento

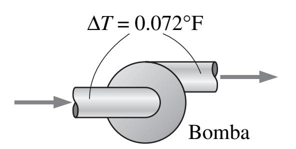


FIGURA P5-23E

5-24 Se bombea agua desde un lago hasta un tanque de almacenamiento que está 20 m arriba, a razón de 70 L/s, en tanto que se consumen 20.4 kW de electricidad. Se descartan cualesquiera pérdidas por fricción en los tubos y cualesquiera cambios en la energía cinética, determine *a*) la eficiencia total de la unidad bomba-motor y *b*) la diferencia de presión entre la admisión y la descarga de la bomba.

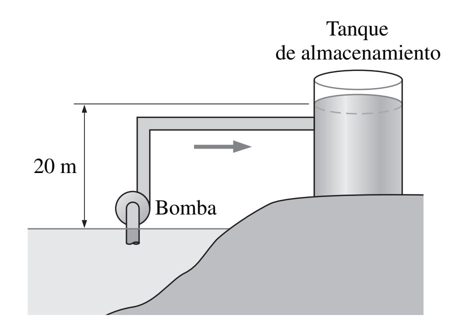


FIGURA P5-24

Ecuación de Bernoulli

5-25C ¿Qué es la aceleración en la dirección del flujo? ¿En qué difiere respecto de la aceleración normal? ¿Puede acelerarse una partícula en el flujo estacionario?

5-26C Exprese la ecuación de Bernoulli de tres maneras diferentes, use *a*) energías, *b*) presiones y *c*) cargas.

5-27C ¿Cuáles son las tres hipótesis importantes que se establecen en la deducción de la ecuación de Bernoulli?

5-28C Defina presión estática, presión dinámica y presión hidrostática. ¿En qué condiciones su suma es constante para un flujo de flujo?

5-29C ¿Qué es la presión de estancamiento? Explique cómo se puede medir.

5-30C Defina carga de presión, carga de velocidad y carga de elevación para un flujo de fluido y expréselas para uno de estos flujos cuya presión es P, velocidad es V y elevación es z.

5-31C ¿Qué es la línea de gradiente hidráulico? ¿En qué difiere respecto a la línea de energía? ¿En qué condiciones las dos líneas coinciden con la superficie libre de un líquido?

5-32C ¿Cómo es la ubicación de la línea de gradiente hidráulico determinada por el flujo en canal abierto? ¿Cómo se determina a la salida de un tubo que está descargando a la atmósfera?

5-33C El nivel del agua de un tanque que está sobre el techo de un edificio es de 20 m por arriba del suelo. Una manguera va del fondo del tanque hasta el suelo. El extremo de la manguera tiene una boquilla la cual se apunta directo hacia arriba. ¿Cuál es la altura máxima hasta la que podría llegar el agua? ¿Qué factores reducirían esta altura?

5-34C En cierta aplicación debe hacerse pasar un sifón por arriba de un muro alto. ¿Es posible que agua o aceite con gravedad específica de 0.8 pasen por arriba de un muro más alto? ¿Por qué?

5-35C Explique cómo y por qué funciona un sifón. Alguien propone hacer pasar agua fría, por acción de un sifón, sobre un muro de 7 m de alto. ¿Es factible esto? Explíquelo.

5-36C Una estudiante pasa agua, por acción de un sifón, sobre un muro de 8.5 m de alto a nivel del mar. Después sube a la cima del Monte Shasta (altitud 4 390 m, P_{atm} = 58.5 kPa) e intenta el mismo experimento. Comente sus posibilidades de tener éxito.

5-37C Se conecta un manómetro de vidrio, con aceite como fluido de trabajo a un ducto de aire, como se muestra en la figura P5-37C. ¿El aceite fluirá en el manómetro como se ve en la figura P5-37C*a* o como se ve en la *b*? Explíquelo. ¿Cuál sería su respuesta si se invirtiera la dirección del flujo?

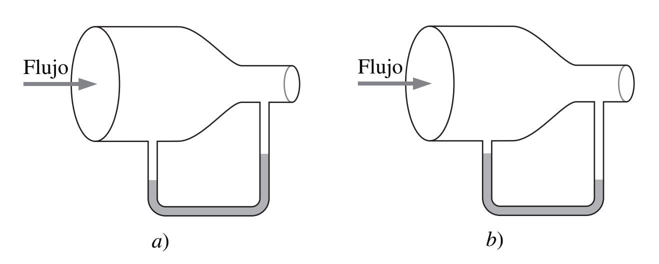


FIGURA P5-37C

5-38C Se va a medir la velocidad de un fluido que fluye en un tubo mediante dos manómetros diferentes de mercurio, del tipo de Pitot, como se muestra en la figura P5-38C. ¿Esperaría el lector que los manómetros predecirían la misma velocidad para el agua que fluye? Si no es así, ¿cuál sería el más exacto? Explíquelo. ¿Cuál sería su respuesta si fluyera aire en lugar de agua en el tubo?

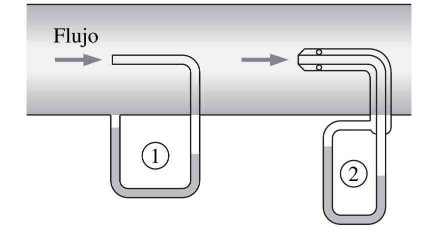


FIGURA P5-38C

5-39 En climas fríos, los tubos de agua pueden congelarse y reventarse si no se toman las precauciones apropiadas. En uno de esos sucesos, la parte expuesta de un tubo que está sobre el suelo se rompe y el agua se dispara hacia arriba hasta 34 m. Estime la presión manométrica del agua en el tubo. Enuncie sus hipótesis y explique si la presión real es mayor o menor que el valor que predijo.

5-40 Se usa una sonda de Pitot y de presión estática (tubo de Prandtl) para medir la velocidad de un avión que vuela a 3 000 m. Si la lectura de la presión diferencial es de 3 kPa, determine su velocidad.

5-41 Mientras circula por un camino en mal estado, el fondo de un automóvil choca contra una roca filosa y esto causa un agujero pequeño en el tanque de gasolina. Si la altura de la gasolina que está en el tanque es de 30 cm, determine la velocidad inicial de la gasolina en el agujero. Explique cómo cambiará la velocidad con el tiempo y cómo se afectaría el flujo si el tapón del tanque está cerrado con fuerza. *Respuesta:* 2.43 m/s

5-42I El agua para beber que se necesita en una oficina se surte en garrafones de agua. Se introduce uno de los extremos de una manguera de plástico de 0.25 in de diámetro en el garrafón que se coloca sobre un pedestal alto, en tanto que el otro extremo, con una válvula para abrir y cerrar, se mantiene 2 ft abajo del fondo del garrafón. Si el nivel del agua en el garrafón está a 1.5 ft cuando está lleno, determine cuánto tiempo mínimo se necesitará para llenar un vaso de 8 oz (= 0.00835 ft^3) *a*) cuando el garrafón acaba de abrirse y *b*) cuando está casi vacío.

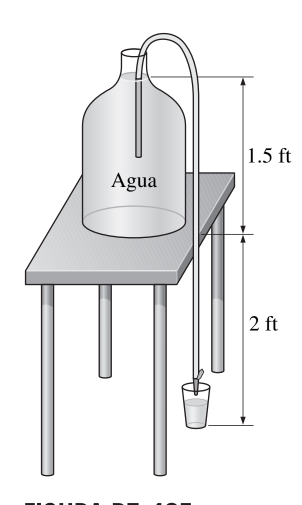


FIGURA P5-42E

5-43 Un piezómetro y un tubo de Pitot se fijan a tomas en un tubo horizontal de agua de 3 cm de diámetro y se mide que las alturas de las columnas de agua son de 20 cm, en el piezómetro, y de 35 cm, en el tubo de Pitot (las dos medidas desde la superficie superior del tubo de agua). Determine la velocidad en el centro de este tubo.

5-44 El diámetro de un tanque cilíndrico de agua es D_T y su altura es H. El tanque está lleno con agua, y abierto a la atmósfera. En el fondo se abre un orificio de diámetro D_o con una entrada de bordes redondeados (sin pérdidas). Desarrolle una relación para el tiempo necesario para que el tanque *a*) se vacíe a la mitad y *b*) se vacíe totalmente.

5-45 Un tanque presurizado de agua tiene un orificio de 10 cm de diámetro en el fondo, donde el agua se descarga hacia la atmósfera. El nivel del agua está 3 m arriba de la salida. La presión del aire en el tanque, arriba del nivel del agua, es de 300 kPa (presión absoluta) en tanto que la presión atmosférica es de 100 kPa. Desprecie los efectos de la fricción y determine la razón inicial de descarga del agua del tanque. *Respuesta:* 0.168 m^3/s

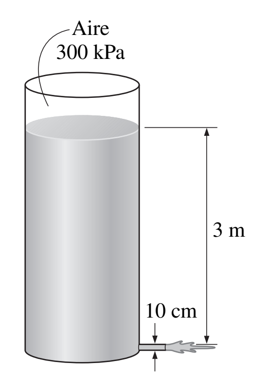


FIGURA P5-45

5-46 Vuelva a considerar el problema 5-45. Use el Software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) e investigue el efecto de la altura del agua sobre la velocidad de descarga. Suponga que la altura del agua varía de 0 hasta 5 m, en incrementos de 0.5 m. Elabore una tabla y trace la gráfica de los resultados.

5-47I Un sifón bombea agua desde un depósito grande hacia un tanque más abajo que está inicialmente vacío. El tanque también tiene un orificio de bordes redondeados a 15 ft hacia abajo de la superficie del depósito, en donde el agua sale del tanque. Tanto el diámetro del sifón como el del orificio son de 2 in. Ignore las pérdidas por fricción, determine hasta qué altura llegará el agua en el tanque en el equilibrio.

5-48 Entra agua de manera estacionaria a un tanque de diámetro D_T, con un flujo de masa de $\dot{m}_{in}$. Un orificio de diámetro D_o que está en el fondo deja que el agua se escape. El orificio tiene bordes redondeados, de modo que las pérdidas por fricción son despreciables. Si el tanque está vacío al inicio, *a*) determine la altura máxima a la que llegará el agua en el tanque y *b*) obtenga una relación para la altura *z* del agua, como función del tiempo

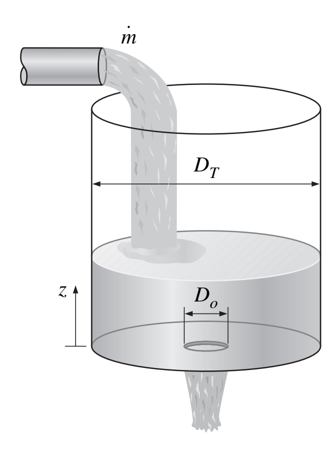


FIGURA P5-48

5-49I Se tiene agua que fluye por un tubo horizontal a razón de 1 gal/s. El tubo consta de dos secciones con diámetros de 4 in y 2 in, con una sección reductora suave. Se mide la diferencia de presión entre las dos secciones del tubo mediante un manómetro de mercurio. Desprecie los efectos de la fricción y determine la altura diferencial del mercurio entre las dos secciones del tubo. *Respuesta:* 0.52 in

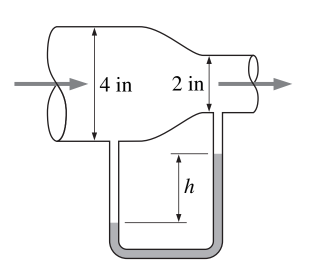


FIGURA P5-49E

5-50 Un avión vuela a una altitud de 12 000 m. Determine la presión manométrica en el punto de estancamiento sobre la nariz del avión, si la velocidad de éste es de 200 km/h. ¿Cómo resolvería este problema si la velocidad fuera de 1 050 km/h? Explíquelo.

5-51 Se va a medir la velocidad del aire en el ducto de un sistema de calefacción mediante una sonda de Pitot y presión estática (tubo de Prandtl) introducida en ese ducto, paralela al flujo. Si la altura diferencial entre las columnas de agua conectadas a las dos salidas de la sonda es de 2.4 cm, determine *a*) la velocidad del flujo y *b*) la elevación de la presión en la punta de la sonda. La temperatura y la presión del aire en ducto son de 45°C y 98 kPa, respectivamente.

5-52 Se va a vaciar el agua de una alberca de 10 m de diámetro y 2 m de alto arriba del suelo Se destapará un tubo horizontal de 3 cm de diámetro y 25 m de largo fijo al fondo de la alberca. Determine la razón máxima de descarga del agua por el tubo. También, explique por qué el gasto real será menor.

5-53 Vuelva a considerar el problema 5-52. Determine cuánto tiempo transcurrirá para que la alberca se vacíe. *Respuesta:* 19.7 h

5-54 Vuelva a considerar el problema 5-52. Use el Software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) e investigue el efecto del diámetro del tubo de descarga sobre el tiempo necesario para vaciar la alberca. Suponga que el diámetro varía de 1 hasta 10 cm, en incrementos de 1 cm. Elabore una tabla y trace la gráfica de los resultados.

5-55 Se tiene aire a 110 kPa y 50°C que fluye hacia arriba por un ducto inclinado de 6 cm de diámetro, a razón de 45 L/s. Entonces, mediante un reductor, el diámetro del ducto se reduce hasta 4 cm. Se mide el cambio de presión de uno a otro extremo del reductor mediante un manómetro de agua. La dife-

rencia de elevación entre los dos puntos del tubo en donde se fijan las dos ramas del manómetro es de 0.20 m. Determine la altura diferencial entre los niveles del fluido de las dos ramas del manómetro.

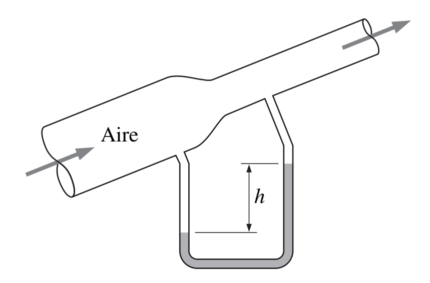


FIGURA P5-55

5-56I Fluye aire por un medidor de Venturi cuyo diámetro es de 2.6 in en la parte de entrada (ubicación 1) y 1.8 in en la garganta (ubicación 2). Se mide que la presión absoluta es de 12.2 psia a la entrada, y de 11.8 psia en la garganta. Desprecie los efectos de la fricción y demuestre que el gasto volumétrico puede expresarse como:

$$\dot{V} = A_2\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(1 - A_2^2/A_1^2)}}$$

y determine el gasto del aire. Tome la densidad del aire como 0.075 lbm/ft^3.

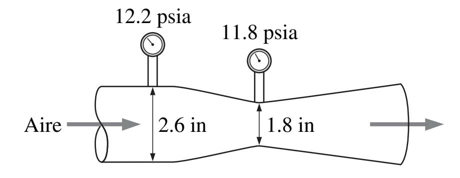


FIGURA P5-56E

5-57 La presión del agua en las tuberías principales de una ciudad, en un lugar determinado, es de 400 kPa manométricos. Determine si esta tubería principal puede alimentar agua a los vecinos que están 50 m arriba de este lugar.

5-58 Se puede usar una bomba manual, para inflar llantas de bicicleta, como un atomizador para generar una fina niebla de pintura o plaguicida cuando se fuerza aire a una velocidad alta por un pequeño agujero y se coloca un tubo corto entre el depósito de líquido y el aire a alta velocidad, cuya baja presión hace que ese líquido suba por el tubo. En un atomizador de ese tipo, el diámetro del agujero es de 0.3 cm, la distancia vertical entre el nivel del líquido en el tubo y el agujero es de 10 cm y el diámetro interior y la carrera de la bomba de aire son de 5 cm y 20 cm, respectivamente. Si las condiciones atmosféricas son 20°C y 95 kPa, determine la velocidad mínima con la que debe desplazarse el émbolo en el cilindro durante el bombeo con el fin de iniciar el efecto de atomización. El depósito de líquido está abierto a la atmósfera.

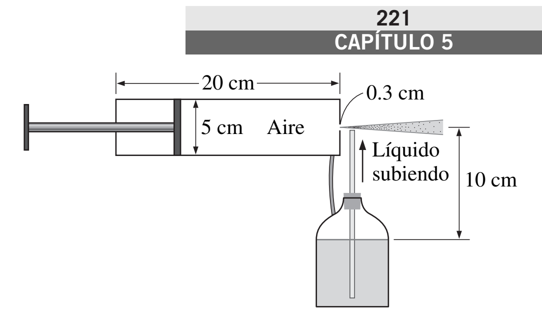


FIGURA P5-58

5-59 El nivel del agua en un tanque está 20 m arriba del suelo. Se conecta una manguera al fondo del tanque y la boquilla que está en el extremo de dicha manguera se apunta directo hacia arriba. La cubierta del tanque es hermética y la presión manométrica del aire arriba de la superficie del agua es de 2 atm. El sistema está a nivel del mar. Determine la altura máxima hasta la cual podría subir el chorro de agua. *Respuesta:* 40.7 m

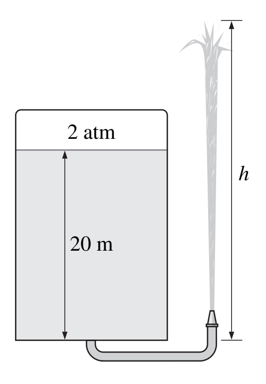


FIGURA P5-59

5-60 Se usa una sonda de Pitot y presión (tubo de Prandtl) conectada a un manómetro de agua para medir la velocidad del aire. Si la deflexión (la distancia vertical entre los niveles de fluido en las dos ramas) es de 7.3 cm, determine la velocidad del aire. Tome la densidad del aire como 1.25 kg/m^3.

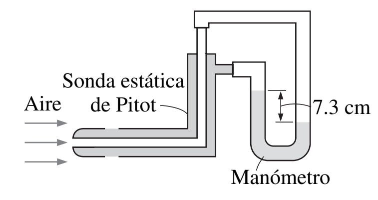


FIGURA P5-60

5-61I Se mide la velocidad del aire en un ducto por medio de una sonda de Pitot y presión (tubo de Prandtl) conectada a un manómetro diferencial. Si el aire está a 13.4 psia de presión absoluta y 70°F y la lectura del manómetro diferencial es de 0.15 psi, determine la velocidad del aire. *Respuesta:* 143 ft/s

5-62 En una planta generadora hidroeléctrica, el agua entra a las toberas de la turbina a 700 kPa de presión absoluta, con una velocidad baja. Si las salidas de las toberas están expuestas a la presión atmosférica de 100 kPa, determine la velocidad máxima a la que se puede acelerar el agua por medio de las toberas antes de chocar contra los álabes de la turbina.

Ecuación de energía

5-63C Considere el flujo estacionario y adiabático de un fluido incompresible. ¿Puede disminuir la temperatura del fluido en el curso del flujo? Explíquelo.

5-64C Considere el flujo estacionario y adiabático de un fluido incompresible. Si la temperatura del fluido se mantiene constante en el curso del flujo, ¿es exacto decir que los efectos de la fricción son despreciables?

5-65C ¿Qué es la pérdida irreversible de carga? ¿Cómo se relaciona con la pérdida de energía mecánica?

5-66C ¿Qué es la carga útil de la bomba? ¿Cómo se relaciona con la entrada de potencia a la bomba?

5-67C ¿Qué es el factor de corrección de la energía cinética? ¿Es significativo?

5-68C El nivel del agua en un tanque está 20 m arriba del suelo. Se conecta una manguera al fondo del tanque y la boquilla que está en el extremo de dicha manguera se apunta directo hacia arriba. Se observa que el chorro de agua que sale por la boquilla se eleva 25 m por arriba del suelo. Explique qué puede causar que el agua de la manguera se eleve por arriba del nivel del tanque.

5-69 Se quiere bombear agua del subsuelo mediante una bomba sumergida de 3 kW y con 70 por ciento de eficiencia hasta un estanque cuya superficie libre está 30 m arriba de dicha agua. El diámetro del tubo es de 7 cm en el lado de la admisión y de 5 cm en el de la descarga. Determine *a*) el gasto máximo de agua y *b*) la diferencia de presión de uno a otro lado de la bomba. Suponga que la diferencia de elevación entre la entrada y la salida de la bomba así como el efecto de los factores de corrección de la energía cinética son despreciables.

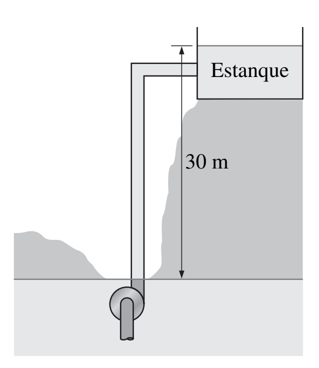


FIGURA P5-69

5-70 Vuelva a considerar el problema 5-69. Determine el gasto de agua y la diferencia de presión de uno a otro lado de la bomba, si la pérdida irreversible de carga del sistema de tuberías es de 5 m.

5-71I En una planta generadora hidroeléctrica, el agua fluye desde una altura de 240 ft hasta una turbina, en donde se genera potencia eléctrica. Para una eficiencia total del turbogenerador de 83 por ciento, determine el gasto mínimo necesario para generar 100 kW de electricidad. *Respuesta:* 370 lbm/s

5-72E Vuelva a considerar el problema 5-71I. Determine el gasto de agua si la pérdida irreversible de carga del sistema de tuberías entre las superficies libres de la fuente y el sumidero es de 36 ft.

5-73 Se debe seleccionar un ventilador para renovar el aire de un cuarto de baño cuyas dimensiones son 2 m × 3 m × 3 m. La velocidad del aire no debe sobrepasar 8 m/s para minimizar la vibración y el ruido. La eficiencia combinada de la unidad ventilador-motor que se usará puede tomarse como 50 por ciento. Si el ventilador debe reemplazar todo el volumen de aire en 10 min, determine *a*) la potencia de la unidad motor-ventilador que debe comprarse, *b*) el diámetro del ventilador y *c*) la diferencia de presión de uno a otro lado de este último. Tome la densidad del aire como 1.25 kg/m^3 y descarte el efecto de los factores de corrección de la energía cinética.

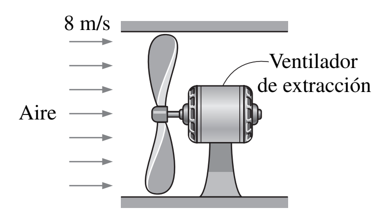


FIGURA P5-73

5-74 Se está bombeando agua desde un lago grande hasta un depósito que está 25 m arriba, a razón de 25 L/s, a través de una bomba (potencia en la flecha) de 10 kW. Si la pérdida irreversible de carga del sistema de tuberías es de 7 m, determine la eficiencia mecánica de la bomba. *Respuesta:* 78.5 por ciento

5-75 Vuelva a considerar el problema 5-74. Use el Software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) e investigue el efecto de la pérdida irreversible de carga sobre la eficiencia mecánica de la bomba. Suponga que la pérdida de carga varía de 0 hasta 15 m, en incrementos de 1 m. Trace la gráfica de los resultados y analícelos.

5-76 Se usa una bomba de 7 hp (potencia en la flecha) para subir agua hasta una altura de 15 m. Si la eficiencia mecánica de la bomba es de 82 por ciento, determine el gasto volumétrico máximo de agua.

5-77 Fluye agua en un tubo horizontal, cuyo diámetro se reduce de 15 cm hasta 8 cm mediante un reductor, a razón de 0.035 m^3/s. Si se mide que la presión en la línea central es de 470 kPa y 440 kPa, antes y después del reductor, respectivamente, determine la pérdida irreversible de carga en éste. Tome los factores de corrección de la energía cinética como 1.05. *Respuesta:* 0.68 m

5-78 El nivel del agua en un tanque está 20 m arriba del suelo. Se conecta una manguera al fondo del tanque y la boquilla que está en el extremo de dicha manguera se apunta

directo hacia arriba. El tanque está a nivel del mar y la superficie del agua está abierta a la atmósfera. En la línea que conduce del tanque a la boquilla está una bomba, la cual aumenta la presión del agua. Si el chorro de agua se eleva hasta una altura de 27 m por arriba del suelo, determine el aumento mínimo de presión suministrado por la bomba a la línea de agua.

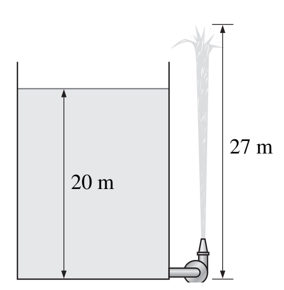


FIGURA P5-78

5-79 Una turbina hidráulica tiene 85 m de carga disponible con un gasto de 0.25 m^3/s y la eficiencia total de su turbogenerador es de 78 por ciento. Determine la salida de potencia eléctrica de esta turbina.

5-80 La demanda de energía eléctrica suele ser mucho más alta durante el día que en la noche y, con frecuencia, las compañías generadoras de servicio público venden la energía en la noche a precios más bajos con el fin de alentar a los consumidores a que usen la capacidad disponible de generación de potencia y evitar la construcción de nuevas plantas generadoras costosas que sólo se utilizarán un tiempo corto durante los periodos pico. Estas compañías también están deseando comprar la energía producida durante el día por empresas privadas a un precio alto.

Suponga que una compañía generadora de servicio público vende energía eléctrica a 0.03 dólar/kWh, en la noche, y desea pagar 0.08 dólar/kWh por la potencia producida durante el día. Para aprovechar esta oportunidad, un empresario considera construir un depósito grande 40 m arriba del nivel del lago, bombear agua de éste hacia ese depósito en la noche, usando energía barata, y dejar que el agua fluya del depósito de regreso al lago durante el día, produciendo potencia cuando la unidad bomba-motor opere como un turbogenerador en el desarrollo del flujo inverso. Un análisis preliminar muestra que puede usarse un gasto de agua de 2 m^3/s en cualquiera de las dos direcciones, y la pérdida irreversible de carga del sistema de tuberías es de 4 m. Se espera que las eficiencias combinadas de la bomba-motor y del turbogenerador sea de 75 por ciento cada una. Se supone que el sistema opera durante 10 h en los modos de bomba y de turbina, cada uno, en un día normal; determine el ingreso potencial que este sistema de bomba-turbina puede generar por año.

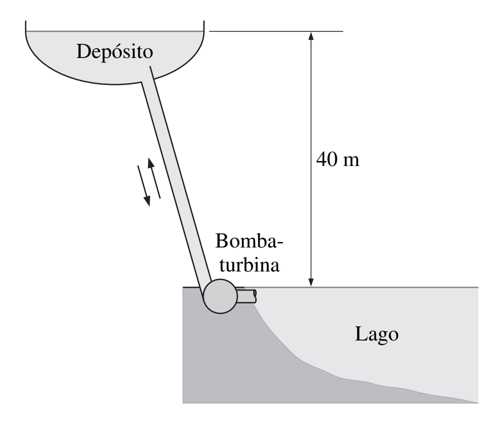


FIGURA P5-80

5-81 Fluye agua por un tubo horizontal, cuyo diámetro es constante de 3 cm, a razón de 20 L/s. Se mide que la caída de presión a través de una válvula en el tubo es de 2 kPa. Determine la pérdida irreversible de carga de la válvula y la potencia útil de bombeo necesaria para vencer la caída resultante de presión. *Respuestas:* 0.204 m, 40 W

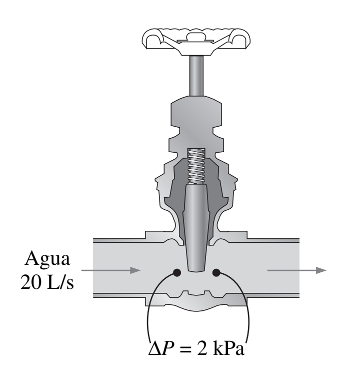


FIGURA P5-81

5-82I El nivel del agua en un tanque está 66 ft arriba del suelo. Se conecta una manguera al fondo del tanque a nivel del piso y la boquilla que está en el extremo de dicha manguera se apunta directo hacia arriba. La cubierta del tanque es hermética, pero se desconoce la presión sobre la superficie del agua. Determine la presión (manométrica) mínima del aire en el tanque que hará que el chorro de agua que sale por la boquilla se eleve hasta 90 ft por arriba del suelo.

5-83 Un tanque grande está inicialmente lleno con agua 2 m arriba del centro de un orificio de 10 cm de diámetro con bordes agudos. La superficie del agua en el tanque está abierta a la atmósfera y el orificio drena también hacia la atmósfera. Si la pérdida irreversible total de carga en el sistema es de 0.3 m, determine la velocidad inicial de descarga del agua del tanque. Tome el factor de corrección de la energía cinética en el orificio como 1.2.

5-84 Entra agua a una turbina hidráulica por un tubo de 30 cm de diámetro a razón de 0.6 m^3/s y sale por un tubo de 25 cm de diámetro. Con un termómetro de mercurio, se mide que la caída de presión en la turbina es de 1.2 m. Para una eficiencia combinada del turbogenerador de 83 por ciento, determine

la salida neta de potencia eléctrica. Descarte el efecto de los factores de corrección de la energía cinética.

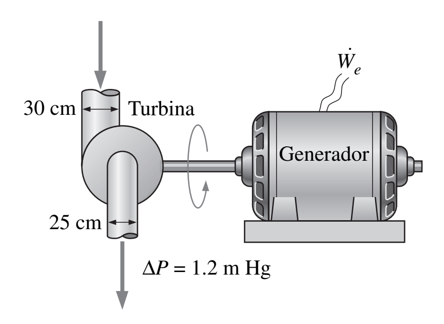


FIGURA P5-84

5-85 Suele darse una aproximación del perfil de velocidad para el flujo turbulento en un tubo circular como $u(r) = u_{máx}(1 - r/R)^{1/n}$, donde $n = 7$. Determine el factor de corrección de la energía cinética para este flujo.

5-86 Una bomba de aceite consume 35 kW cuando bombea aceite con $\rho = 860$ kg/m^3, a razón de 0.1 m^3/s. Los diámetros de entrada y salida del tubo son 8 cm y 12 cm, respectivamente. Si se mide que el aumento de presión del aceite en la bomba es de 400 kPa y la eficiencia del motor es de 90 por ciento, determine la eficiencia mecánica de la bomba. Tome el factor de corrección de la energía cinética como 1.05.

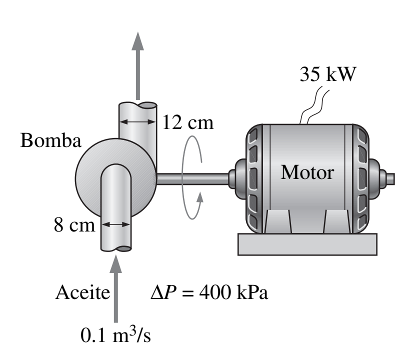


FIGURA P5-86

5-87I Una bomba de 12 hp con una eficiencia de 73 por ciento bombea agua de un lago hacia un estanque cercano, a razón de 1.2 ft^3/s, por un tubo de diámetro constante. La superficie libre del estanque está 35 ft arriba de la del lago. Determine la pérdida irreversible de carga del sistema de tuberías, en ft, y la potencia mecánica usada para vencerla.

5-88 Un bote de bomberos va a combatir incendios en las zonas costeras y extraerá agua de mar con una densidad de 1 030 kg/m^3 por un tubo de 20 cm de diámetro, a razón de 0.1 m^3/s. La descargará por la boquilla de una manguera que tiene un diámetro de salida de 5 cm. La pérdida irreversible total de carga del sistema es de 3 m y la posición de la boquilla está a 4 m arriba del nivel del mar. Para una eficiencia de la bomba de 70 por ciento, determine la potencia necesaria en la flecha de esa bomba y la velocidad de descarga del agua. *Respuestas:* 201 kW, 50.9 m/s

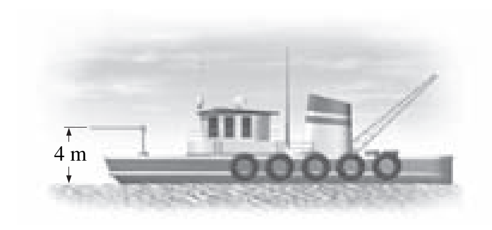


FIGURA P5-88

Problemas de repaso

5-89 Un tanque con diámetro D_o = 10 m está inicialmente lleno con agua 2 m arriba del centro de una válvula con un diámetro de 10 cm y cercana al fondo. La superficie del tanque está abierta a la atmósfera y dicho tanque drena por un tubo con un largo L = 100 m que está conectado a la válvula. Se sabe que el factor de fricción del tubo es f = 0.015 y la velocidad de descarga se expresa como $V = \sqrt{\dfrac{2gz}{1.5 + fL/D}}$, donde z es la altura del agua arriba del centro de la válvula. Determine *a*) la velocidad inicial de descarga del tanque y *b*) el tiempo necesario para vaciar el tanque. Puede considerarse que el tanque está vacío cuando el nivel del agua cae hasta el centro de la válvula.

5-90 Se bombea agua del subsuelo hasta un estanque cuya sección transversal mide 3 m × 4 m, en tanto que el agua se descarga por un orificio de 5 cm de diámetro con una velocidad promedio constante de 5 m/s. Si el nivel del agua en el estanque sube a razón de 1.5 cm/min, determine la razón a la cual se suministra el agua al estanque, en m^3/s.

5-91 La velocidad de un líquido que fluye en un tubo circular de radio R varía desde cero en la pared hasta un máximo en su centro. La distribución de velocidad en el tubo puede representarse como $V(r)$, donde r es la distancia radial al centro del tubo. Con base en la definición de gasto de masa, $\dot{m}$, obtenga una relación para la velocidad promedio en términos de $V(r)$, R y r.

5-92 Se tiene aire a 4.18 kg/m^3 que entra con una velocidad de 120 m/s en una tobera que tiene una razón entrada a salida de 2:1, y sale con una velocidad de 380 m/s. Determine la densidad del aire a la salida. *Respuesta:* 2.64 kg/m^3

5-93 Se reemplazará por completo el aire en un cuarto de hospital de 6 m× 5 m × 4 m por aire acondicionado cada 20 min. Si la velocidad promedio del aire en el ducto circular que conduce al cuarto no debe ser mayor que 5 m/s, determine el diámetro mínimo del ducto.

5-94 Un tanque presurizado de agua de 2 m de diámetro tiene un orificio de 10 cm de diámetro en el fondo, en donde el agua se descarga hacia la atmósfera. El nivel del agua está inicialmente 3 m arriba de la salida. La presión del aire en el tanque,

arriba del nivel del agua, se mantiene a 450 kPa de presión absoluta en tanto que la presión atmosférica es de 100 kPa. Desprecie los efectos de la fricción y determine *a*) cuánto tiempo transcurrirá para que se descargue la mitad del agua del tanque y *b*) el nivel del agua en el tanque después de 10 s.

5-95 Fluye aire por un tubo a razón de 200 L/s. El tubo consta de dos secciones con diámetros de 20 cm y 10 cm, con una sección reductora suave que las conecta. Se mide la diferencia de presión entre las dos secciones del tubo mediante un manómetro de agua. Desprecie los efectos de la fricción y determine la altura diferencial del agua entre las dos secciones del tubo. Tome la densidad del aire como 1.20 kg/m^3. *Respuesta:* 3.7 cm

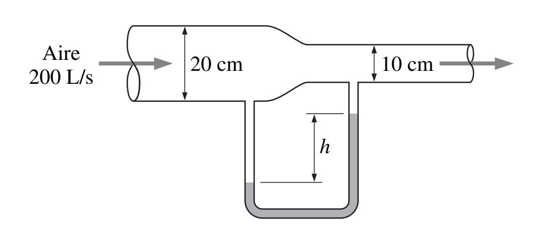


FIGURA P5-95

5-96 Se tiene aire a 100 kPa y 25°C que fluye en un ducto horizontal de sección transversal variable. La columna de agua del manómetro que mide la diferencia entre dos secciones tiene un desplazamiento vertical de 8 cm. Si la velocidad en la primera sección es baja y la fricción es despreciable, determine la velocidad en la segunda sección. Asimismo, si la lectura del manómetro tiene un error posible de ±2 mm, realice un análisis de error con el fin de estimar el rango de validez de la velocidad encontrada.

5-97 Un tanque muy grande contiene aire a 102 kPa en un lugar en donde al aire atmosférico está a 100 kPa y 20°C. Ahora, se abre una toma de 2 cm de diámetro. Determine el gasto máximo de aire que pasa por el agujero. ¿Cuál sería su respuesta si el aire se descargara a través de un tubo de 2 m de largo y 4 cm de diámetro, con una tobera de 2 cm de diámetro? ¿Resolvería el problema de la misma manera si la presión en el tanque de almacenamiento fuera de 300 kPa?

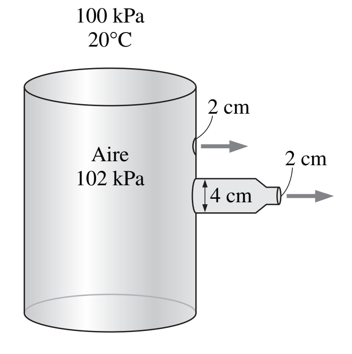


FIGURA P5-97

5-98 Fluye agua por un medidor de Venturi cuyo diámetro es de 7 cm en la parte de entrada y de 4 cm en la garganta. Se mide que la presión es de 430 kPa a la entrada y de 120 kPa en la garganta. Desprecie los efectos de la fricción y determine el gasto del agua. *Respuesta:* 0.538 m^3/s

5-99E El nivel del agua en un tanque está 80 ft arriba del suelo. Se conecta una manguera al fondo del tanque y la boquilla que está en el extremo de la manguera apunta directo hacia arriba. El tanque está a nivel del mar y la superficie del agua está abierta a la atmósfera. En la línea que conduce del tanque a la boquilla está una bomba, la cual aumenta la presión del agua en 10 psia. Determine la altura máxima hasta la cual podría subir el chorro de agua.

5-100 Un túnel de viento toma aire atmosférico a 20°C y 101.3 kPa mediante un ventilador grande que se ubica cerca de la salida del túnel. Si la velocidad del aire en éste es de 80 m/s, determine la presión en el propio túnel.

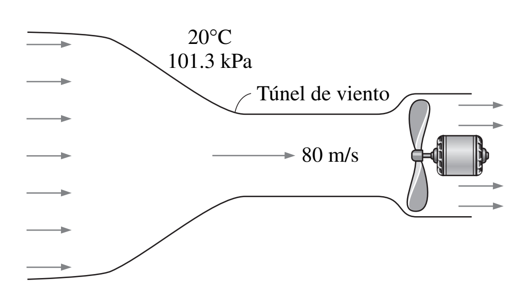


FIGURA P5-100

5-101 Fluye agua por un tubo horizontal cuyo diámetro aumenta de 6 cm hasta 11 cm por medio de una sección de ensanchamiento, a razón de 0.025 m^3/s. Si la pérdida de carga a través de la sección de ensanchamiento es de 0.45 m y el factor de corrección de la energía cinética tanto a la entrada como a la salida es 1.05, determine el cambio de presión.

5-102 Un tanque grande de 2 m de altura está inicialmente lleno con agua. La superficie del agua en el tanque está abierta a la atmósfera y un orificio de 10 cm de diámetro con bordes agudos, que está en el fondo del tanque, drena a la atmósfera por un tubo horizontal de 100 m de largo. Si se determina que la pérdida irreversible total de carga en el sistema es de 1.5 m, determine la velocidad inicial del agua proveniente del tanque. Descarte el efecto de los factores de corrección de la energía cinética. *Respuesta:* 3.13 m/s

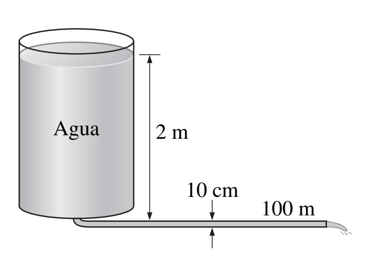


FIGURA P5-102

5-103 Vuelva a considerar el problema 5-102. Use el Software de EES (o cualquier otro programa de este tipo)e investigue el efecto de la altura del tanque sobre la velocidad inicial de descarga del agua proveniente del tanque totalmente lleno. Suponga que la altura del tanque varía de 2 hasta 15 m, en incrementos de 1 m, y que la pérdida irreversible de carga se mantiene constante. Elabore una tabla y trace la gráfica de los resultados.

5-104 Vuelva a considerar el problema 5-102. Para drenar el tanque más rápido, se instala una bomba cerca de la salida del tanque. Determine la entrada de carga necesaria de la bomba para establecer una velocidad promedio del agua de 6 m/s cuando el tanque está lleno.

Problemas de diseño y ensayo

5-105 Utilice una cubeta grande cuyo volumen se conozca y mida el tiempo que transcurre para llenarla con agua que proviene de una manguera de jardín, determine el flujo de masa y de la velocidad promedio del agua a través de la manguera.

5-106 La compañía en la que el lector trabaja prepara un experimento que incluye la medición del gasto de aire en un ducto y se le pide que lleve la instrumentación apropiada. Investigue las técnicas e instrumentos de los que se dispone para la medición de gasto de aire: analice las ventajas y desventajas de cada una de las técnicas y haga una recomendación.

5-107 Los diseños realizados por computadora, el uso de mejores materiales y las técnicas mejores de fabricación han dado por resultado un aumento tremendo en la eficiencia de las bombas, turbinas y motores eléctricos. Póngase en contacto con varios fabricantes de bombas, turbinas y motores y obtenga información acerca de la eficiencia de sus productos. En general, ¿cómo varía la eficiencia con la potencia nominal de estos aparatos?

5-108 Utilice una bomba para inflar llantas de bicicleta para generar un chorro de aire, una lata de refresco como recipiente del agua y un popote como el tubo, diseñe y construya un atomizador. Estudie los efectos de diversos parámetros como la longitud del tubo, el diámetro del agujero de salida y la velocidad de bombeo sobre el rendimiento.

5-109 Use un popote flexible para beber y una regla graduada, explique cómo podría medir la velocidad de flujo del agua en un río.

5-110 La potencia generada por una turbina de viento es proporcional al cubo de la velocidad del viento. Inspirado por la aceleración de un fluido en una tobera, alguien propone instalar una cubierta reductora para capturar la energía del viento proveniente de un área más grande y acelerar ese viento antes de que choque contra los álabes de la turbina, como se muestra en la figura P5-110. Evalúe si la modificación propuesta debe dar origen a una consideración en el diseño de nuevas turbinas de viento.

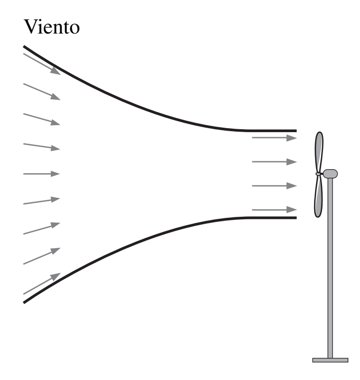


FIGURA P5-110

CAPÍTULO

6

ANÁLISIS DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE LOS SISTEMAS DE FLUJO

Cuando se trata con problemas de ingeniería, es conveniente obtener soluciones rápidas y exactas a un costo mínimo. La mayoría de los problemas de ingeniería, inclusive los relacionados con el flujo de fluidos, pueden analizarse con la aplicación de uno de tres procedimientos básicos: los diferenciales, los experimentales y los de volumen de control. En los *procedimientos diferenciales*, el problema se formula con exactitud con el uso de cantidades diferenciales, pero la resolución de las ecuaciones diferenciales resultantes es difícil, por lo general se necesita usar métodos numéricos con códigos extensos de computadora. Los *procedimientos experimentales* complementados con análisis dimensional son sumamente exactos, pero lo usual es que son tardados y caros. El *procedimiento del volumen finito de control* descrito en este capítulo es notablemente rápido y sencillo y suele dar respuestas bastante exactas para la mayoría de los propósitos de ingeniería. Por lo tanto, pese a las aproximaciones con las que se relaciona, el análisis básico del volumen finito de control llevado a cabo con papel y lápiz siempre ha sido un recurso indispensable para los ingenieros.

En el capítulo 5 se presentó el análisis de masa y de energía de los sistemas de flujo de fluidos. En este capítulo se presenta el análisis de la cantidad de movimiento del volumen finito de control de los problemas de flujo de fluidos. En primer lugar, se da un panorama general de las leyes de Newton y de las relaciones de conservación para los momentos lineal y angular. A continuación, con la aplicación del teorema del transporte de Reynolds, se desarrollan las ecuaciones de los momentos lineal y angular para los volúmenes de control y se usan para determinar las fuerzas y momentos de torsión relacionados con el flujo de fluidos.

OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Identificar las diversas clases de fuerzas y de momentos que actúan sobre un volumen de control.
- Usar el análisis del volumen de control con el fin de determinar las fuerzas asociadas con el flujo de fluidos.
- Usar el análisis del volumen de control con el propósito de determinar los momentos causados por el flujo de fluidos y el momento de torsión transmitido.

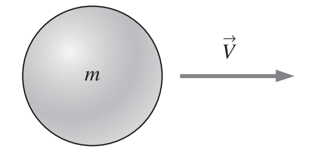
6-1 ▪ LEYES DE NEWTON Y CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Las leyes de Newton son relaciones entre los movimientos de los cuerpos y las fuerzas que actúan sobre ellos. La primera Ley de Newton expresa que *un cuerpo en reposo permanece en reposo y un cuerpo en movimiento sigue en movimiento a la misma velocidad en una trayectoria recta cuando la fuerza neta que actúa sobre él es cero*. Por lo tanto, un cuerpo tiende a mantener su estado de inercia. La segunda Ley de Newton expresa que *la aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él y es inversamente proporcional a su masa*. La tercera Ley de Newton expresa que *cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre un segundo cuerpo, este último ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el primero*. Por lo tanto, la dirección de una fuerza de reacción depende del cuerpo tomado como sistema.

Para un cuerpo rígido de masa m, la segunda Ley de Newton se expresa como:

Segunda Ley de Newton: $$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \quad \textbf{(6-1)}$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo y $\vec{a}$ es la aceleración de ese cuerpo bajo la influencia de $\vec{F}$.



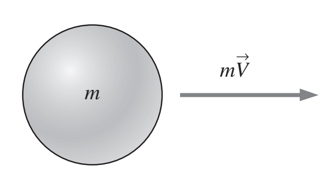


FIGURA 6-1
El momento lineal es el producto de la masa y la velocidad, y su dirección es la dirección de la velocidad.

El producto de la masa y de la velocidad de un cuerpo se llama *momento lineal* o *cantidad de movimiento* de ese cuerpo. La cantidad de movimiento de un cuerpo rígido de masa m que se avanza con una velocidad $\vec{V}$ es $m\vec{V}$ (Fig. 6-1). Entonces, la segunda Ley de Newton expresada en la ecuación 6-1 también se puede enunciar como *la razón de cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza neta que actúa sobre él* (Fig. 6-2). Este enunciado es más congruente con el enunciado original de Newton de la segunda Ley y es más apropiado para usarse en la mecánica de fluidos cuando se estudian las fuerzas generadas como resultado de los cambios de velocidad de los flujos de fluidos. Por lo tanto, en la mecánica de fluidos suele hacerse referencia a la segunda Ley de Newton como la *ecuación del momento lineal*.

La cantidad de movimiento de un sistema se mantiene constante cuando la fuerza neta que actúa sobre él es cero y, por lo tanto, la cantidad de movimiento de esos sistemas se conserva. Éste se conoce como el *principio de conservación de la cantidad de movimiento*. Este principio ha probado ser muy útil cuando se analizan las colisiones como las que se tienen entre pelotas; entre pelotas y raquetas, bates o palos de golf; entre átomos y partículas subatómicas; y las explosiones como las que ocurren en cohetes, misiles y cañones. Por ejemplo, la cantidad de movimiento de un rifle cargado debe ser cero después de ser disparado, ya que es cero antes del disparo y, en consecuencia, el rifle debe tener una cantidad de movimiento igual a la de la bala en la dirección opuesta, de modo que la suma vectorial de las dos sea cero.

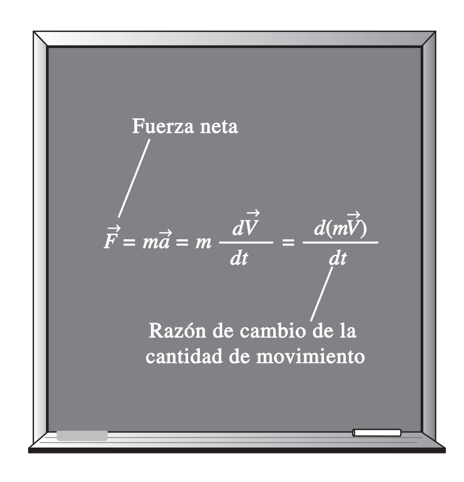


FIGURA 6-2
La segunda Ley de Newton también se expresa como *la razón de cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza neta que actúa sobre él*.

Note que la fuerza, la aceleración, la velocidad y la cantidad de movimiento son cantidades vectoriales y, como tales, tienen dirección así como magnitud. Asimismo, la cantidad de movimiento es un múltiplo constante de la velocidad y donde la dirección de la cantidad de movimiento es la de la velocidad. Cualquier ecuación vectorial se puede escribir en forma escalar, para una dirección especificada, con el uso de magnitudes; por ejemplo, $F_x = ma_x = d(mV_x)/dt$, en la dirección x.

La contraparte de la segunda Ley de Newton para los cuerpos rígidos en rotación se expresa como $\vec{M} = I\vec{\alpha}$, donde $\vec{M}$ es el momento o momento de torsión (torque) neto que se aplica sobre el cuerpo, I es el momento de inercia de éste respecto al eje de rotación y $\vec{\alpha}$ es la aceleración angular. Esto también se puede expresar en términos de la razón de cambio del momento angular $d\vec{H}/dt$ como:

Ecuación del momento angular: $$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad \textbf{(6-2)}$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular. Para un cuerpo rígido que gira en torno a un eje x fijo, la ecuación del momento angular puede escribirse en forma escalar como:

Momento angular respecto al eje x: $$M_x = I_x\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{dH_x}{dt} \quad \textbf{(6-3)}$$

La ecuación del momento angular puede enunciarse como *la razón de cambio del momento angular de un cuerpo es igual al momento neto de torsión que actúa sobre él* (Fig. 6-3) .

El momento angular total de un cuerpo en rotación permanece constante cuando el par neto de torsión que actúa sobre él es cero y, entonces, el momento angular de los sistemas de este tipo se conserva. Esto se conoce como el *principio de conservación del momento angular* y se expresa como $I\omega$ = constante. Numerosos fenómenos interesantes, como el de los patinadores sobre hielo que giran cada vez con mayor rapidez cuando acercan sus brazos a sus cuerpos y como los clavadistas que giran más rápido cuando realizan giros después del salto, se pueden explicar con facilidad con ayuda del principio de conservación del momento angular (en los dos casos, se disminuye el momento de inercia y, de este modo, se aumenta la velocidad angular ω conforme las partes exteriores del cuerpo se acercan al eje de rotación).

Par neto de torsión

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

Razón de cambio del momento angular

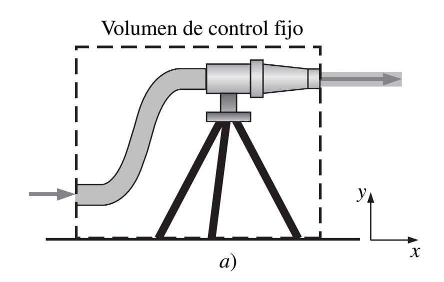
FIGURA 6-3
La razón de cambio del momento angular de un cuerpo es igual al par neto de torsión que actúa sobre él.

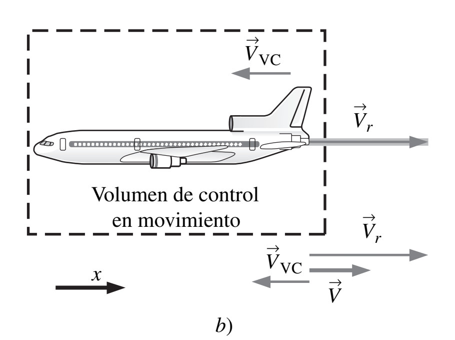
6-2 ▪ ELECCIÓN DE UN VOLUMEN DE CONTROL

Enseguida, se comenta cómo seleccionar *de manera idónea* un volumen de control. Un volumen de control puede seleccionarse como cualquier región arbitraria en el espacio por la cual el fluido se desplaza y su superficie limitante de control puede estar fija, en movimiento e inclusive deformándose en el curso del flujo. La aplicación de una ley básica de conservación es sencillamente un procedimiento sistemático de contabilizar o tomar en cuenta la cantidad que se esté considerando y, por lo tanto, es en extremo importante que las fronteras del volumen de control estén definidas adecuadamente en el desarrollo de un análisis. También, el gasto flujo de cualquier cantidad que entre o salga de un volumen de control depende de la velocidad del flujo *relativa a la superficie de control* y, en consecuencia, resulta esencial saber si este volumen de control se mantiene en reposo durante el flujo o si se mueve.

Muchos sistemas de flujo incluyen accesorios estacionario en reposo fijos a una superficie también estacionaria y la mejor manera de analizarlos es con el empleo de volúmenes *fijos* de control. Por ejemplo, cuando se determina la fuerza de reacción que actúa sobre un trípode que sostiene la boquilla de una manguera, una selección natural del volumen de control es aquel que pasa perpendicularmente por el flujo de salida de esa boquilla y por los regatones de las patas del trípode (Fig. 6.4*a*). Éste es un volumen fijo de control y la velocidad del agua en relación con un punto fijo sobre el suelo es igual a la velocidad del agua en relación con el plano de salida de la boquilla.

Cuando se analizan sistemas de flujo que están en movimiento o deformándose, es más conveniente dejar que el volumen de control *se mueva* o *se deforme*. Por ejemplo, en la determinación del empuje producido por el motor de propulsión de un avión en vuelo de crucero a velocidad constante, una elección adecuada del volumen de control es uno que encierre el avión y corte pasando por el plano de salida de la tobera (Fig. 6-4*b*). En este caso, el volumen de control se mueve con velocidad $\vec{V}_{VC}$, la cual es idéntica a la velocidad de crucero del avión en relación con un punto fijo sobre la Tierra. Cuando se determina el gasto flujo de los gases de escape que salen de la tobera, la velocidad apropiada que





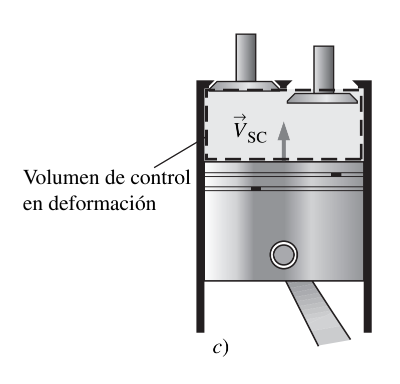


FIGURA 6-4
Ejemplos de volúmenes de control: *a*) fijo, *b*) en movimiento y *c*) en deformación.

debe usarse es la de los gases de escape en relación con plano de salida de la tobera; es decir, la *velocidad relativa* $\vec{V}_r$. Puesto que el volumen de control completo se mueve a la velocidad $\vec{V}_{VC}$, la velocidad relativa queda $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{VC}$, donde $\vec{V}$ es la *velocidad absoluta* de los gases de escape; es decir, la velocidad con relación a un punto fijo sobre la Tierra. Note que $\vec{V}_r$ es la velocidad del fluido expresada con relación a un sistema de coordenadas que se mueve *con* el volumen de control. También, ésta es una ecuación vectorial y las velocidades en las direcciones opuestas tienen signos opuestos. Por ejemplo, si el avión está en vuelo de crucero a 500 km/h hacia la izquierda y la velocidad de los gases de escape es de 800 km/h hacia la derecha con relación al suelo, la velocidad de los gases de escape con relación a la salida de la tobera es

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{VC} = 800\vec{i} - (-500\vec{i}) = 1\,300\vec{i}\text{ km/h}$$

Es decir, los gases de escape salen de la tobera a 1 300 km/h hacia la derecha, en relación con la salida de la tobera (en dirección opuesta a la del avión); ésta es la velocidad que debe usarse cuando se evalúa el flujo de salida de los gases de escape a través de la superficie de control (Fig. 6-4*b*). Note que los gases de escape parecerían estar inmóviles para un observador que está sobre el suelo, si la velocidad relativa y la velocidad del avión tuvieran magnitudes iguales.

Cuando se analiza la purga de los gases de escape de un motor reciprocante de combustión interna, una selección adecuada para el volumen de control es que incluye el espacio entre la superficie superior del émbolo y la cabeza del cilindro (Fig. 6-4*c*). Éste es un volumen de control *en deformación*, ya que parte de la superficie de control se mueve en relación con las otras partes. Entonces, la velocidad relativa para una entrada o una salida en la parte en deformación de una superficie de control (no se tienen ese tipo de entradas o salidas en la figura 6-4*c*) se da por $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{SC}$ donde $\vec{V}$ es la velocidad absoluta del fluido y $\vec{V}_{SC}$ es la velocidad de la superficie de control, las dos en relación con un punto fijo afuera del volumen de control. Note que $\vec{V}_{SC} = \vec{V}_{VC}$ para los volúmenes de control en movimiento, pero no en deformación y $\vec{V}_{SC} = \vec{V}_{VC} = 0$ para los fijos.

6-3 ▪ FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN VOLUMEN DE CONTROL

Éstas actúan sobre un volumen de control y constan de **fuerzas del cuerpo**, que actúan en todo el cuerpo de ese volumen (como la fuerza de gravedad, eléctrica y magnética), y las **fuerzas superficiales**, que actúan sobre la superficie de control (como la fuerza de presión y la viscosa, así como las fuerzas de reacción en los puntos de contacto).

En el análisis del volumen de control, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control en un instante en particular se representa por $\Sigma\,\vec{F}$ y se expresa como:

Fuerza total que actúa sobre el volumen de control:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{cuerpo}} + \sum \vec{F}_{\text{superficial}} \tag{6-4}$$

Las fuerzas del cuerpo actúan sobre cada porción volumétrica del volumen de control. En la figura 6-5 se muestra la fuerza del cuerpo que actúa sobre un elemento diferencial de fluido de volumen dV, dentro del volumen de control y se debe efectuar una integral de volumen para considerar la fuerza neta del cuerpo sobre el volumen completo. Las *fuerzas superficiales* actúan sobre cada porción de la superficie de control. En la figura 6-5 se muestra un elemento diferencial de superficie, de área dA, y el vector normal unitario hacia fuera, $\vec{n}$, sobre la superficie de control, junto con la fuerza superficial que actúa sobre él. Se debe efectuar una integral de área para obtener la fuerza neta superficial que actúa sobre la superficie

de control completa. Como se muestra en el esquema, la fuerza superficial puede actuar en una dirección independiente a la del vector normal hacia fuera.

La fuerza del cuerpo más común es la de **gravedad**, la cual ejerce una fuerza hacia abajo sobre cada elemento diferencial del volumen de control. Aun cuando otras fuerzas del cuerpo, como las eléctricas y las magnéticas, pueden ser importantes en algunos análisis, en este texto sólo se considerarán las fuerzas gravitacionales.

La fuerza diferencial del cuerpo $d\vec{F}_{\text{cuerpo}} = d\vec{F}_{\text{gravedad}}$ que actúa sobre el pequeño elemento de fluido que se muestra en la figura 6-6 es sencillamente su peso:

Fuerza gravitacional que actúa sobre un elemento de fluido: $$d\vec{F}_{\text{gravedad}} = \rho \vec{g}\, d\mathcal{V} \quad \textbf{(6-5)}$$

donde ρ es la densidad promedio del elemento y $\vec{g}$ es el vector gravitacional. En coordenadas cartesianas se adopta la costumbre de que $\vec{g}$ actúa en la dirección z negativa, como en la figura 6-6, de modo que:

Vector gravitacional en coordenadas cartesianas: $$\vec{g} = -g\vec{k} \quad \textbf{(6-6)}$$

Note que los ejes de coordenadas de la figura 6-6 se han girado respecto de su orientación usual de modo que el vector gravedad actúe *hacia abajo*, en la dirección $-z$. Sobre la Tierra, a nivel del mar, la constante gravitacional g es igual a 9.807 m/s^2. Ya que la gravedad es la única fuerza del cuerpo que se está considerando, la integración de la ecuación 6-5 produce:

Fuerza total del cuerpo que actúa sobre el volumen de control:

$$\sum \vec{F}_{\text{cuerpo}} = \int_{\text{VC}} \rho \vec{g}\, d\mathcal{V} = m_{\text{VC}}\vec{g} \quad \textbf{(6-7)}$$

Las fórmulas superficiales no son tan sencillas de analizar ya que constan tanto de componentes *normales* como de *tangenciales*. Además, aun cuando la fuerza física que actúa sobre una superficie es independiente de la orientación de los ejes de coordenadas, la *descripción* de la fuerza en términos de sus componentes a lo largo de los ejes cambia con la orientación (Fig. 6-7). Por otra parte, rara vez se tiene la fortuna suficiente como para tener cada una de las superficies de control alineada con uno de los ejes de coordenadas. Aun cuando no se desee profundizar en el álgebra tensorial, es forzoso definir un **tensor de segundo orden** llamado **tensor de esfuerzos**, σ_{ij}, para describir de manera adecuada los esfuerzos superficiales en un punto en el flujo:

Tensor de esfuerzos en coordenadas cartesianas: $$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \textbf{(6-8)}$$

Las componentes de la diagonal de este tensor, σ_{xx}, σ_{yy} y σ_{zz}, se llaman **esfuerzos normales**; éstos están formados por los esfuerzos de presión (la cual siempre actúa normal hacia dentro) y los viscosos. Los esfuerzos viscosos se comentan con mayor detalle en el capítulo 9. Las componentes afuera de la diagonal, σ_{xy}, σ_{zx}, etcétera, se llaman **esfuerzos cortantes**; puesto que la presión sólo puede actuar normal a la superficie, los esfuerzos cortantes consisten totalmente de esfuerzos viscosos.

Cuando la cara no es paralela a uno de los ejes de coordenadas, pueden aplicarse las leyes matemáticas para los ejes de rotación y los tensores con la finalidad de calcular las componentes normales y tangenciales que actúan en esa cara. Asimismo, una notación alternativa, llamada **notación tensorial**, es conveniente cuando se trabaja con tensores, pero suele reservarse para los estudios de graduados (para obtener un análisis con mayor profundidad de los tensores y la notación tensorial vea, por ejemplo, Kundu, 1990).

En la ecuación 6-8, σ_{ij} se define como el esfuerzo (fuerza por unidad de área) en la dirección j que actúa sobre una cara cuya normal está en la dirección i. Note que i y j son sólo *índices* del tensor y no son lo mismo que los vectores unita-

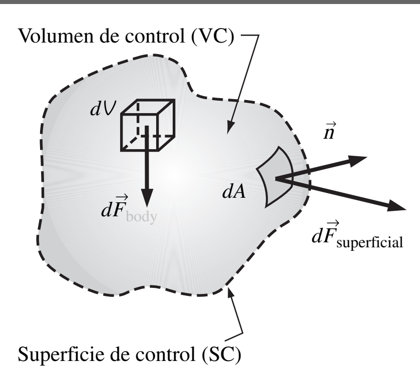


FIGURA 6-5
La fuerza total que actúa sobre un volumen de control está formada por fuerzas del cuerpo y fuerzas superficiales; la fuerza del cuerpo se muestra sobre un elemento diferencial de volumen y la superficial se muestra sobre un elemento diferencial de superficie.

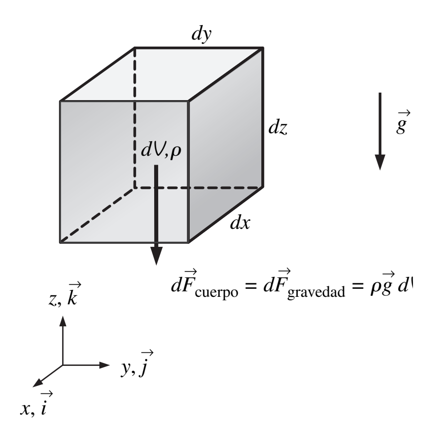
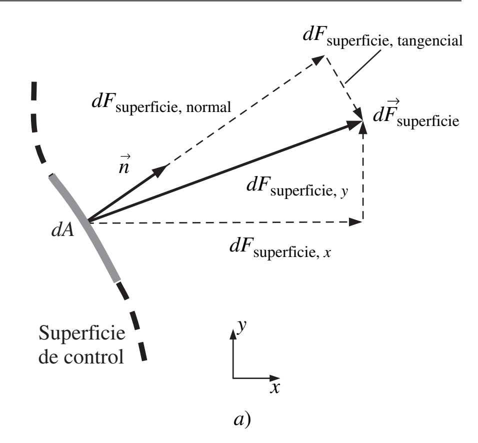


FIGURA 6-6
La fuerza gravitacional que actúa sobre un elemento diferencial de volumen de fluido es igual a su peso; se han girado los ejes de modo que el vector gravedad actúe *hacia abajo*, en la dirección z negativa.



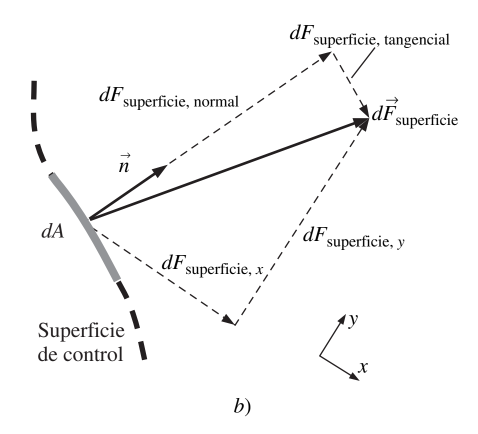


FIGURA 6-7
Cuando se giran los ejes de coordenadas de *a*) hacia *b*), las componentes de la fuerza superficial cambian, aun cuando la propia fuerza continúe siendo la misma; aquí sólo se muestran dos dimensiones.

rios $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Por ejemplo, σ_{xy} se define como positivo para el esfuerzo que apunta en la dirección y sobre una cara cuya normal hacia fuera está en la dirección x. En la figura 6-8 se muestra esta componente del tensor de esfuerzos, para el caso de un elemento diferencial de fluido alineado con los ejes en coordenadas cartesianas. Todas las componentes de la figura 6-8 se muestran sobre caras positivas (derecha, superior y del frente) y en su orientación positiva por definición. Las componentes positivas de esfuerzos sobre las caras opuestas del elemento de fluido (no se muestran) apuntan exactamente en las direcciones opuestas.

El producto punto de un tensor de segundo orden y un vector da lugar a un segundo vector; a menudo esta operación se conoce como **producto contraído** o **producto interior** de un tensor y un vector. En el caso presente resulta que el producto interior del tensor de esfuerzos σ_{ij} y el vector normal unitario hacia fuera $\vec{n}$ de un elemento diferencial de superficie da por resultado un vector cuya magnitud es la fuerza por unidad de área que actúa sobre ese elemento y cuya dirección es la de la fuerza superficial. De forma matemática se escribe,

Fuerza superficial que actúa sobre un elemento diferencial de superficie:

$$d\vec{F}_{\text{superficie}} = \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA \qquad \textbf{(6-9)}$$

Por último, se integra la ecuación 6-9 sobre toda la superficie de control,

Fuerza superficial total que actúa sobre la superficie de control:

$$\sum \vec{F}_{\text{superficie}} = \int_{\text{SC}} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA \qquad \textbf{(6-10)}$$

La sustitución de las ecuaciones 6-7 y 6-10 en la 6-4 da:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{cuerpo}} + \sum \vec{F}_{\text{superficie}} = \int_{\text{VC}} \rho \vec{g}\, dV + \int_{\text{SC}} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA \qquad \textbf{(6-11)}$$

Esta ecuación es bastante útil en la deducción de la forma diferencial de conservación del momento lineal, como se comenta en el capítulo 9. Sin embargo, para el análisis práctico del volumen de control es raro que sea necesario usar la ecuación 6-11, en especial la incómoda integral de superficie que contiene.

Una selección cuidadosa del volumen de control permite escribir la fuerza total que actúa sobre el mismo, $\Sigma \vec{F}$, como la suma de cantidades de las que se dispone con más facilidad, como la fuerza de peso, de presión y de reacción. Se recomienda el análisis siguiente para el volumen de control:

Fuerza total:

$$\underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{fuerza total}} = \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{gravedad}}}_{\text{fuerza del cuerpo}} + \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{presión}} + \sum \vec{F}_{\text{viscosa}} + \sum \vec{F}_{\text{otra}}}_{\text{fuerzas superficiales}} \qquad \textbf{(6-12)}$$

El primer término del segundo miembro de la ecuación 6-12 es la fuerza de *peso* del cuerpo, supuesto que la gravedad es la única fuerza del cuerpo que se está considerando. Los otros tres términos se combinan para formar la fuerza neta superficial; son la fuerza de presión, la fuerza viscosa y "otras" fuerzas que actúan sobre la superficie de control. $\Sigma \vec{F}_{\text{otra}}$ se compone de las fuerzas de reacción necesarias para hacer cambiar de dirección al flujo; las fuerzas en los pernos, cables, puntales o paredes a los cuales corta la superficie de control; entre otros.

Todas estas fuerzas superficiales surgen conforme se aísla el volumen de control de sus alrededores para el análisis, y el efecto de cualquier objeto separado se toma en consideración por medio de una fuerza en ese lugar. Esto es semejante a trazar un diagrama de cuerpo libre en las clases de estática y dinámica. Se debe elegir el volumen de control de tal manera que las fuerzas en las que no

se tenga interés permanezcan como internas y, de este modo, no compliquen el análisis. En un volumen de control elegido correctamente se exponen sólo las fuerzas que deben determinarse (como las fuerzas de reacción) y un número mínimo de otras fuerzas.

En el análisis, sólo se consideran fuerzas externas. Las fuerzas internas (como la fuerza de presión entre un fluido y las superficies interiores de la sección de flujo) no se consideran en un análisis de volumen de control, a menos que se expongan para hacer pasar la superficie de control por esa zona

Una simplificación común en la aplicación de las leyes de Newton del movimiento es restar la *presión atmosférica* y trabajar con presiones manométricas. Esto se debe a que la presión atmosférica actúa en todas direcciones y su efecto se cancela en cada dirección (Fig. 6-9). Además significa que también se pueden ignorar las fuerzas de presión en las secciones de salida en donde el fluido se descarga a la atmósfera ya que, en esos casos, las presiones de descarga serán muy cercanas a la atmosférica, a velocidades subsónicas.

Un ejemplo de cómo elegir de manera adecuada un volumen de control es considerar el análisis de volumen de control del agua que fluye de manera estacionaria por una llave con un grifo de válvula de compuerta parcialmente cerrado (Fig. 6-10). Se desea calcular la fuerza neta sobre la brida para tener la seguridad de que los pernos de la misma sean suficientemente fuertes. Existen muchas elecciones posibles para este volumen de control. Algunos ingenieros restringen sus volúmenes de control al propio fluido, como se indica por VC A (el volumen de control al centro de la figura). Con este volumen de control, se tienen fuerzas de presión que varían a lo largo de la superficie de control, existen fuerzas viscosas a lo largo de la pared del tubo y en lugares dentro de la válvula, y hay una fuerza del cuerpo, a saber, el peso del agua en ese volumen. Por fortuna, para calcular la fuerza neta sobre la brida, *no* se necesitan integrar los esfuerzos de presión y viscosos a lo largo de toda la superficie de control. En lugar de lo anterior, se pueden amontonar las fuerzas desconocidas de presión y viscosas en una fuerza de reacción, que represente la fuerza neta de las paredes sobre el agua. Esta fuerza, más el peso de la llave y del agua, es igual a la fuerza neta sobre la brida (por supuesto, se debe ser muy cuidadoso con los signos).

Cuando se elige un volumen de control, no se está limitado sólo al fluido. Con frecuencia, es más conveniente cortar con la superficie de control *pasando* por objetos sólidos, como las paredes, los puntales o los pernos, como se ilustra por medio de VC B (el volumen de control en gris, a los extremos de la figura en la figura 6-10. Inclusive, un volumen de control puede rodear todo un objeto, como el que se muestra en la figura. El volumen de control B es una selección adecuada porque no es necesario preocuparse de detalles del flujo o, inclusive, de la configuración geométrica dentro del propio volumen. Para el caso de VC B, se asigna una fuerza de reacción neta que actúa en las porciones de la superficie de control que rebanan la brida. Entonces, los únicos otras datos que se necesitan conocer son la presión manométrica del agua en la brida (la entrada al volumen de control) y los pesos del agua y del conjunto de la llave. La presión en todas las demás partes a lo largo de la superficie de control es la atmosférica (presión manométrica de cero) y se cancela. Este problema se vuelve a tocar en la sección 6-4, ejemplo 6-7.

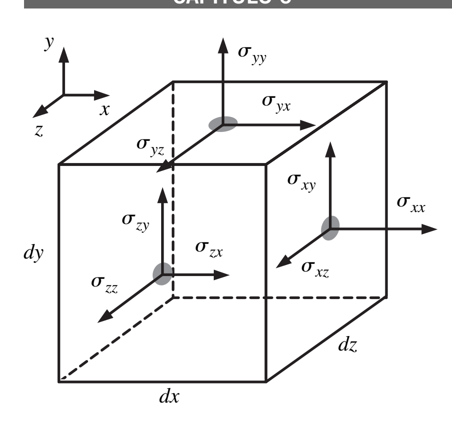


FIGURA 6-8
Componentes del tensor de esfuerzos, en coordenadas cartesianas, sobre las caras derecha, superior y del frente.

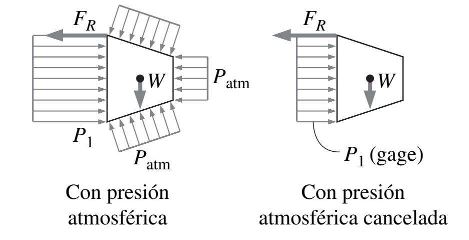


FIGURA 6-9
La presión atmosférica actúa en todas direcciones y, por lo tanto, puede ignorarse cuando se realizan balances de fuerzas, ya que su efecto se cancela en cada una de las direcciones.

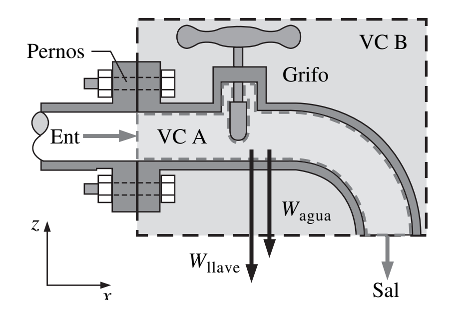


FIGURA 6-10
Sección transversal a lo largo del conjunto de una llave, en la que se ilustra la importancia de elegir un volumen de control de manera adecuada; es mucho más fácil trabajar con VC B que con VC A.

6-4 ▪ LA ECUACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

La segunda Ley de Newton para un sistema de masa m sometido a una fuerza neta $\vec{F}$ se expresa como:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) \quad \textbf{(6-13)}$$

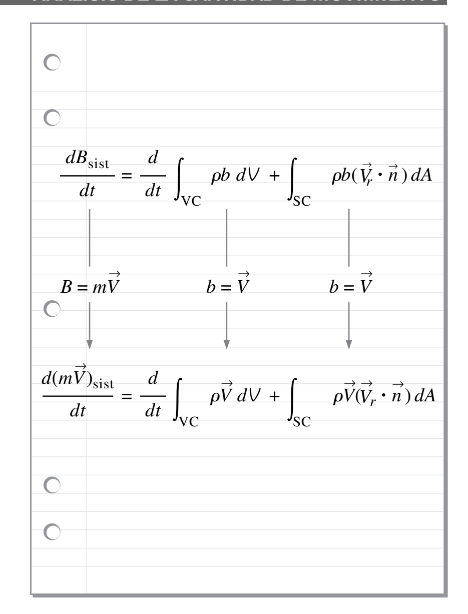


FIGURA 6-11
La ecuación del momento lineal se obtiene cuando se reemplaza B en el teorema del transporte de Reynolds por la cantidad de movimiento, $m\vec{V}$, y b por la cantidad de movimiento por unidad de masa $\vec{V}$.

donde $m\vec{V}$ es el **momento lineal** del sistema. Note que tanto la densidad como la velocidad pueden cambiar de punto a punto dentro del sistema, la segunda Ley de Newton se puede expresar de manera más general como:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{sist} \rho\vec{V}\, dV \quad \textbf{(6-14)}$$

donde $\delta m = \rho dV$ es la masa de un elemento diferencial de volumen, dV, y $\rho\vec{V}\, dV$ es su cantidad de movimiento. Por lo tanto, la segunda Ley de Newton puede enunciarse como *la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es igual a la razón de cambio respecto al tiempo del momento lineal de ese sistema*. Este enunciado es válido para un sistema de coordenadas que esté en reposo o se mueva con velocidad constante, conocido como *sistema inercial de coordenadas* o *marco inercial de referencia*. Los sistemas en aceleración, como los aviones durante el despegue, se analizan de mejor manera con el uso de sistemas no-inerciales (o en aceleración) de coordenadas, fijos al avión. Note que la ecuación 6-14 es una relación vectorial y, en consecuencia, las cantidades $\vec{F}$ y $\vec{V}$ tienen tanto dirección como magnitud.

La ecuación 6-14 es para una masa dada de un sólido y es de uso limitado en la mecánica de fluidos, ya que la mayoría de los sistemas de flujo se analizan con el uso de volúmenes de control. El *teorema del transporte de Reynolds* que se desarrolló en la Sección 4-5 proporciona las herramientas necesarias para pasar de la formulación de sistema a la de volumen de control. Si se hace $b = \vec{V}$ y entonces $B = m\vec{V}$, el teorema del transporte de Reynolds puede expresarse para el momento lineal como (Fig. 6-11):

$$\frac{d(m\vec{V})_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\vec{V}\, dV + \int_{SC} \rho\vec{V}\,(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA \quad \textbf{(6-15)}$$

Pero, por la ecuación 6-13, la parte izquierda de esta ecuación es igual a $\Sigma\vec{F}$. Cuando se sustituye, se obtiene que la forma general de la ecuación del momento lineal que se aplica a los volúmenes de control fijos, en movimiento o en deformación, es:

General:
$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\vec{V}\, dV + \int_{SC} \rho\vec{V}(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA \quad \textbf{(6-16)}$$

lo cual se puede enunciar como:

$$\begin{pmatrix}\text{La suma de todas}\\ \text{las fuerzas externas}\\ \text{que actúan sobre}\\ \text{un VC}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{La razón de cambio}\\ \text{respecto al tiempo del}\\ \text{momento lineal}\\ \text{del contenido de VC}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{El flujo neto del momento}\\ \text{lineal hacia fuera de la}\\ \text{superficie de control por}\\ \text{el flujo de masa}\end{pmatrix}$$

En este caso, $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{SC}$ es la velocidad del fluido con relación a la superficie de control (para usarse en los cálculos de flujo de masa en todos los lugares por donde el fluido cruza la superficie de control) y $\vec{V}$ es la velocidad del fluido como se ve desde un marco inercial de referencia. El producto $\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$ representa el flujo de masa que pasa por el elemento de área dA, hacia dentro o hacia fuera del volumen de control.

Para un volumen fijo de control (no hay movimiento ni deformación del volumen de control), $\vec{V}_r = \vec{V}$ y la ecuación del momento lineal queda:

VC fijo:
$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\vec{V}\, dV + \int_{SC} \rho\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA \quad \textbf{(6-17)}$$

Note que la ecuación de la cantidad de movimiento es una *ecuación vectorial* y, donde, cada término debe tratarse como un vector. Asimismo, por conveniencia, las componentes de esta ecuación pueden resolverse a lo largo de coordenadas

ortogonales (como x, y y z en el sistema de coordenadas cartesianas). En la mayoría de los casos, la fuerza $\vec{F}$ consiste en fuerzas de peso, fuerzas de presión y fuerzas de reacción (Fig. 6-12). La ecuación de la cantidad de movimiento es de uso común para calcular las fuerzas (por lo general sobre los sistemas o conectores de apoyo) inducidas por el flujo.

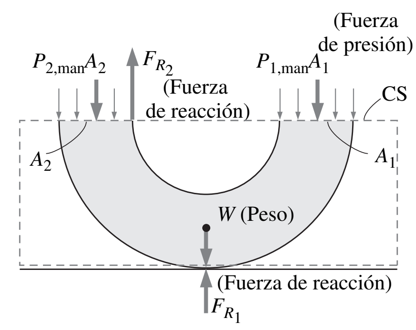


FIGURA 6-12
En la mayoría de los sistemas de flujo, la fuerza $\vec{F}$ consta de fuerzas de peso, de presión y de reacción. En este caso, se usan presiones manométricas, porque la presión atmosférica se cancela sobre todos los lados de la superficie de control.

Casos especiales

En el transcurso del *flujo estacionario en reposo*, la magnitud de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control permanece constante y, por lo tanto, la razón de cambio del momento lineal del contenido de ese volumen (el primer término de la parte derecha de la ecuación 6-16) es cero. Esto da:

Flujo estacionario en reposo:
$$\sum \vec{F} = \int_{SC} \rho \vec{V}\,(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA \qquad \textbf{(6-18)}$$

La mayoría de los problemas referentes a la cantidad de movimiento que se consideran en este texto son estacionarios en reposo.

Aunque la ecuación 6-17 es exacta para los volúmenes fijos de control, no siempre es conveniente cuando se trata de resolver problemas prácticos de ingeniería, debido a las integrales. En lugar de ello, como se hizo para la conservación de la masa, sería conveniente volver a escribir la ecuación 6-17 en términos de velocidades promedios y flujos de masa a través de entradas y salidas. En otras palabras, se desea volver a escribir la ecuación en forma *algebraica* en lugar de *integral*. En numerosas aplicaciones prácticas, el fluido cruza las fronteras del volumen de control en una o más entradas y en una o más salidas, y lleva con él algo de cantidad de movimiento hacia dentro o hacia fuera de ese volumen. Por sencillez, siempre se traza la superficie de control de tal manera que corte normal a la velocidad del flujo hacia dentro o hacia fuera en cada una de esas entradas y salidas (Fig. 6-13).

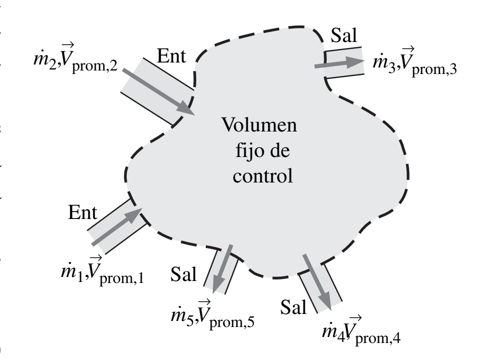


FIGURA 6-13
En un problema típico de ingeniería, el volumen de control puede contener muchas entradas y salidas; en cada entrada o salida, se define el flujo de masa, $\dot{m}$ y la velocidad promedio $\vec{V}_{\text{prom}}$.

El flujo de masa, $\dot{m}$ hacia dentro o hacia fuera del volumen de control a través de una entrada o salida, en el cual ρ es aproximadamente constante es:

Flujo de masa a través de una entrada o salida:
$$\dot{m} = \int_{A_c} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA_c = \rho V_{\text{prom}} A_c \qquad \textbf{(6-19)}$$

Cuando se compara la ecuación 6-19 con la ecuación 6-17, se observa una velocidad adicional en la integral de la superficie de control de la ecuación 6-17. Si $\vec{V}$ fuera uniforme ($\vec{V} = \vec{V}_{\text{prom}}$) a través de la entrada o salida, sencillamente podría sacarse de la integral. Entonces podría escribirse la razón del flujo hacia dentro o hacia fuera de la cantidad de movimiento a través de la entrada o salida en una forma algebraica sencilla:

Flujo de la cantidad de movimiento a través de una entrada o salida uniformes:
$$\int_{A_c} \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA_c = \rho V_{\text{prom}}\; A_c \vec{V}_{\text{prom}} = \dot{m} \vec{V}_{\text{prom}} \qquad \textbf{(6-20)}$$

La aproximación como flujo uniforme es razonable en algunas entradas y salidas; por ejemplo, la entrada redondeada a un tubo, el flujo en la entrada a la sección de pruebas de un túnel de viento y un corte a través de un chorro de agua que se mueve a través del aire con una magnitud aproximadamente uniforme de la velocidad (Fig. 6-14). En cada una de esas entradas o salidas, puede aplicarse directamente la ecuación 6-20.

Factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento, β

Por desgracia, la velocidad a través de la mayoría de las entradas y salidas de interés para la ingeniería práctica *no* es uniforme. Sin embargo, resulta que no

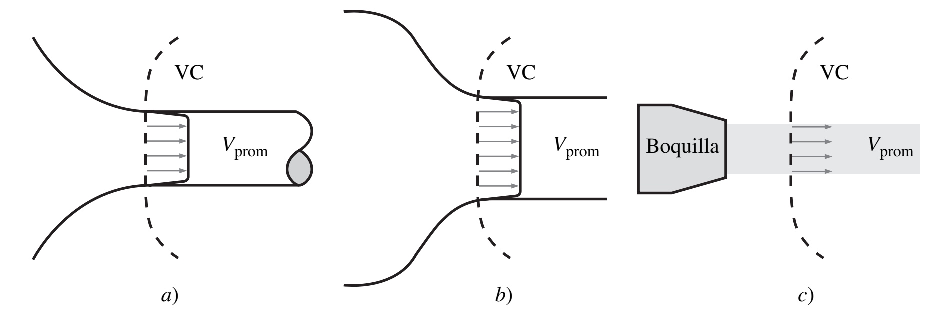


FIGURA 6-14
Ejemplos de entradas o salidas en las cuales la aproximación de flujo uniforme es razonable: *a*) la entrada redondeada a un tubo, *b*) la entrada a la sección de pruebas de un túnel de viento y *c*) un corte a través de un chorro de agua en el aire.

obstante puede convertirse la integral de la superficie de control de la ecuación 6-17 en una forma algebraica, pero se necesita un factor adimensional de corrección *b*, llamado **factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento**, según lo demostró por primera vez el científico francés Joseph Boussinesq (1842-1929). Entonces, la forma algebraica de la ecuación 6-17 para un volumen fijo de control se escribe como:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \vec{V}\, dV + \sum_{sal} \beta \dot{m} \vec{V}_{prom} - \sum_{ent} \beta \dot{m} \vec{V}_{prom} \qquad \textbf{(6-21)}$$

donde se aplica un valor único del factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento a cada entrada y cada salida en la superficie de control. Note que $\beta = 1$ *para el caso de flujo uniforme* sobre una entrada o salida, como en la figura 6-14. Para el caso general, se define β de tal manera que la forma integral del flujo de la cantidad de movimiento hacia adentro o hacia afuera de la superficie de control, en una entrada o salida con área A_c de la sección transversal, se pueda expresar en términos del flujo de masa $\dot{m}$ a través de esa entrada o salida, y la velocidad promedio $\vec{V}_{prom}$ a través de éstas:

Flujo de la cantidad de movimiento a través de una entrada o salida:

$$\int_{A_c} \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA_c = \beta \dot{m} \vec{V}_{prom} \qquad \textbf{(6-22)}$$

Para el caso en el cual la densidad es uniforme sobre la entrada o salida y $\vec{V}$ tiene la misma dirección que $\vec{V}_{prom}$ sobre ellas, se despeja β en la ecuación 6-22:

$$\beta = \frac{\int_{A_c} \rho V(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA_c}{\dot{m} V_{prom}} = \frac{\int_{A_c} \rho V(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA_c}{V_{prom} A_c V_{prom}} \qquad \textbf{(6-23)}$$

donde se ha sustituido $\dot{m}$ por $\rho V_{prom} A_c$ en el denominador. Las densidades se cancelan y puesto que V_{prom} es constante, puede introducirse a la integral. Es más, si la superficie de control corta normal al área de la entrada o salida, se tiene $(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA_c = V\, dA_c$. Entonces la ecuación 6-23 se simplifica a:

Factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento:

$$\beta = \frac{1}{A_c}\int_{A_c} \left(\frac{V}{V_{prom}}\right)^2 dA_c \qquad \textbf{(6-24)}$$

Resulta que, para cualquier perfil de velocidad que pueda imaginarse, β siempre es mayor que la unidad o igual a ésta.

EJEMPLO 6-1 Factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento para el flujo laminar en un tubo

Considere el flujo laminar a través de una sección recta muy larga de un tubo circular. En el capítulo 8 se demuestra que el perfil de velocidad a través de un área de sección transversal del tubo es parabólico (Fig. 6-15), con la componente axial de la velocidad dada por:

$$V = 2V_{\text{prom}}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \textbf{(1)}$$

donde R es el radio de la pared interior del tubo y V_{prom} es la velocidad promedio. Calcule el factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento a través de una sección transversal del tubo para el caso en donde el flujo en éste representa una salida del volumen de control, como se ilustra en la figura 6-15.

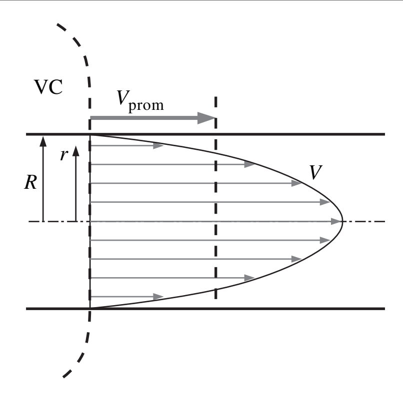


FIGURA 6-15
Perfil de velocidad sobre una sección transversal de un tubo en el cual el flujo está totalmente desarrollado y es laminar.

SOLUCIÓN Para una distribución dada de velocidad, debe calcularse el factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento.

Hipótesis **1** El flujo es incompresible y estacionario en reposo. **2** El volumen de control se corta a través del tubo normal al eje de éste, como se ilustra en la figura 6-15.

Análisis En la ecuación 6-24 se sustituye V por el perfil dado de velocidad y se integra, en donde $dA_c = 2\pi r\,dr$,

$$\beta = \frac{1}{A_c}\int_{A_c}\left(\frac{V}{V_{\text{prom}}}\right)^2 dA_c = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 2\pi r\,dr \quad \textbf{(2)}$$

Se define una nueva variable de integración $y = 1 - r^2/R^2$ y así $dy = -2r\,dr/R^2$ (también, $y = 1$ en $r = 0$ y $y = 0$ en $r = R$) y se realiza la integración, el factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento para el flujo laminar totalmente desarrollado queda:

Flujo laminar: $$\beta = -4\int_1^0 y^2\,dy = -4\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^0 = \frac{4}{3} \quad \textbf{(3)}$$

Discusión Se ha calculado β para una salida, pero se habría obtenido el mismo resultado si se hubiera considerado la sección transversal del tubo como una *entrada* al volumen de control.

Con base en el ejemplo 6-1, se observa que β no está muy cercano a la unidad para el flujo laminar totalmente desarrollado en tubos, e ignorar β potencialmente conduciría a un error importante. Si fuera a realizarse el mismo tipo de integración que el del ejemplo 6-1, para el flujo *turbulento* totalmente desarrollado, en vez de laminar, en un tubo se encontraría que β va desde 1.01 hasta 1.04. Dado que estos valores están tan cercanos a la unidad, muchos ingenieros en ejercicio descartan por completo el factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento. Aun cuando se desprecie β en los cálculos del flujo turbulento puede tener un efecto insignificante sobre los resultados finales, es conveniente mantenerlo en las ecuaciones correspondientes. Hacerlo así no sólo mejora la exactitud de los cálculos, sino también sirve de recordatorio para incluir este factor cuando se resuelven problemas de flujo laminar en el volumen de control.

Para el flujo turbulento β puede tener un efecto insignificante en las entradas y salidas pero, para el flujo laminar β, puede ser importante y no debe despreciarse. Es conveniente incluir β en todos los problemas referentes a la cantidad de movimiento en el volumen de control.

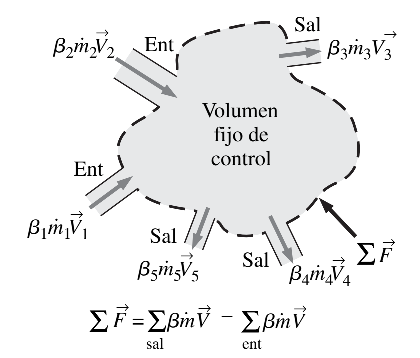


FIGURA 6-16
La fuerza neta que actúa sobre el volumen de control en el curso del flujo estacionario en reposo es igual a la diferencia entre los flujos de la cantidad de movimientos entrantes y salientes.

Flujo estacionario en reposo

Si el flujo también es *estacionario en reposo*, el término de la derivada respecto al tiempo de la ecuación 6-21 se anula y queda:

Ecuación del momento lineal en flujo estacionario en reposo:

$$\sum \vec{F} = \sum_{sal} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{ent} \beta\dot{m}\vec{V} \qquad \text{(6-25)}$$

donde se ha eliminado el subíndice "prom" de la velocidad promedio. La ecuación 6-25 expresa que *la fuerza neta que actúa sobre el volumen de control en el curso del flujo estacionario en reposo es igual a la diferencia entre las razones de los flujos entrantes y salientes de la cantidad de movimiento*. En la figura 6-16 se ilustra este enunciado. También puede expresarse en cualquier dirección, ya que la ecuación 6-25 es una ecuación vectorial.

Flujo estacionario en reposo con una entrada y una salida

En muchos problemas prácticos intervienen sólo una entrada y una salida (Fig. 6-17). El flujo de masa para esos **sistemas de una sola corriente** se mantiene constante y la ecuación 6-25 se reduce a:

Una entrada y una salida:

$$\sum \vec{F} = \dot{m}\,(\beta_2\vec{V}_2 - \beta_1\vec{V}_1) \qquad \text{(6-26)}$$

donde se ha adoptado la costumbre usual de que el subíndice 1 implica la entrada y el 2 la salida, y $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ denotan las velocidades *promedio* a través de la entrada y de la salida, respectivamente.

Se enfatiza una vez más que todas las relaciones antes dadas son ecuaciones *vectoriales* y, donde, todas las adiciones y sustracciones son *vectoriales*. Recuerde que restar un vector equivale a sumarlo después de invertir su dirección (Fig. 6-18). Asimismo, cuando se escribe la ecuación de la cantidad de movimiento a lo largo de una coordenada especificada (como el eje x), se usan las proyecciones de los vectores sobre ese eje. Por ejemplo, la ecuación 6-26 puede escribirse a lo largo de la coordenada x como:

A lo largo de la coordenada x:

$$\sum F_x = \dot{m}(\beta_2 V_{2,x} - \beta_1 V_{1,x}) \qquad \text{(6-27)}$$

donde ΣF_x es la suma vectorial de las componentes x de las fuerzas, y $V_{2,x}$ y $V_{1,x}$ son las componentes x de las velocidades de entrada y de salida del flujo de fluido, respectivamente. Las componentes de la fuerza o de la velocidad en la dirección x positiva son cantidades positivas y aquéllas en la dirección x negativa son cantidades negativas. También, es una práctica adecuada tomar la dirección de las fuerzas desconocidas en las direcciones positivas (a menos que el problema sea muy directo). Un valor negativo que se obtenga para una fuerza desconocida indica que la dirección supuesta no es la correcta y debe invertirse.

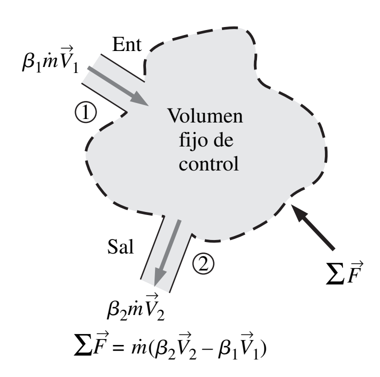


FIGURA 6-17
Un volumen de control con sólo una entrada y una salida.

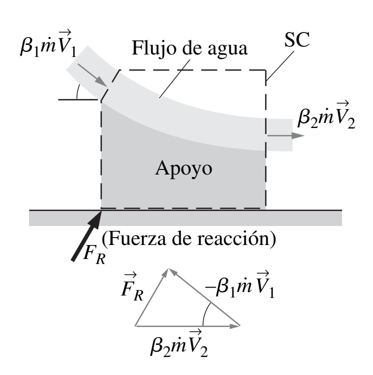


FIGURA 6–18
Determinación por adición vectorial de la fuerza de reacción sobre el apoyo causada por un cambio de dirección del agua.

Flujo sin fuerzas externas

Surge una situación interesante cuando no se tienen fuerzas externas, como las fuerzas de peso, de presión y de reacción, que actúan sobre el cuerpo en la dirección del movimiento (una situación común para los vehículos espaciales y los satélites). Para un volumen de control con entradas y salidas múltiples, la ecuación 6-21 se reduce en este caso a:

Sin fuerzas externas:

$$0 = \frac{d(m\vec{V})_{VC}}{dt} + \sum_{sal} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{ent} \beta\dot{m}\vec{V} \qquad \text{(6-28)}$$

Ésta es una expresión del principio de conservación de la cantidad de movimiento, el cual se puede enunciar como *en ausencia de fuerzas externas, la razón de cambio de la cantidad de movimiento de un volumen de control es igual a la diferencia entre las razones de los flujos entrantes y salientes de la cantidad de movimiento.*

Cuando la masa m del volumen de control permanece aproximadamente constante, el primer término de la ecuación 6-28 se convierte sencillamente en la masa multiplicada por la aceleración, ya que:

$$\frac{d(m\vec{V})_{VC}}{dt} = m_{VC}\frac{d\vec{V}_{VC}}{dt} = (m\vec{a})_{VC}$$

Por lo tanto, en este caso, el volumen de control se puede tratar como un cuerpo sólido, con una fuerza neta o **empuje** de:

Empuje: $$\vec{F}_{\text{cuerpo}} = m_{\text{cuerpo}}\vec{a} = \sum_{\text{ent}} \beta \dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{sal}} \beta \dot{m}\vec{V} \qquad \textbf{(6-29)}$$

que actúa sobre el cuerpo mismo. Se puede aplicar este procedimiento con el fin de determinar la aceleración lineal de los vehículos espaciales cuando se dispara un cohete (Fig. 6-19).

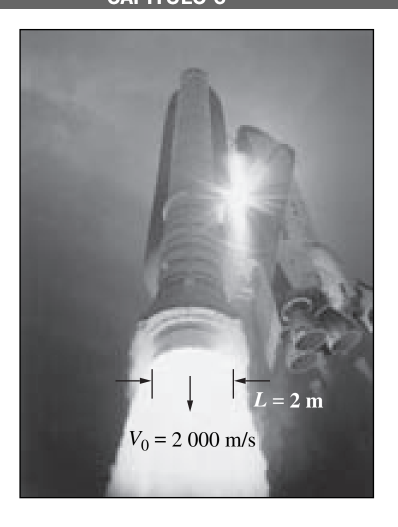


FIGURA 6-19
El empuje necesario para elevar el transbordador espacial se genera por medio de los cohetes, como resultado del cambio de la cantidad de movimiento del combustible conforme se acelera desde alrededor de cero hasta una velocidad de salida de 2 000 m/s, después de la combustión.
NASA

EJEMPLO 6-2 Fuerza necesaria para sostener un codo deflector en su lugar

Se usa un codo reductor para desviar hacia arriba a 30° un flujo de agua que viene por un tubo horizontal a razón de 14 kg/s, mientras acelera al mismo tiempo (Fig. 6-20). El codo descarga el agua hacia la atmósfera. El área de la sección transversal del codo es de 113 cm^2 a la entrada y de 7 cm^2 a la salida. La diferencia de elevación entre los centros de la salida y de la entrada es de 30 cm. Se considera que el peso del codo y del agua en él es despreciable. Determine *a*) la presión manométrica en el centro de la entrada del codo y *b*) la fuerza de anclaje necesaria para sostener el codo en su lugar.

SOLUCIÓN Un codo reductor desvía el agua hacia arriba y la descarga a la atmósfera. Se deben determinar la presión en la entrada del codo y la fuerza necesaria para sostenerlo en su lugar.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario en reposo y los efectos de la fricción son despreciables. **2** El peso del codo y del agua en él es despreciable. **3** El agua se descarga a la atmósfera y, por consiguiente, la presión manométrica a la salida es cero. **4** El flujo es turbulento y totalmente desarrollado tanto a la entrada como a la salida del volumen de control y se toma el factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento como $\beta = 1.03$.

Propiedades La densidad del agua se toma como 1 000 kg/m^3.

Análisis *a*) Se toma el codo como el volumen de control y se designan la entrada por 1 y la salida por 2. También se toman las coordenadas x y z como se muestra. La ecuación de continuidad para este sistema de flujo estacionario en reposo con una entrada y una salida es $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = 14$ kg/s. Note que $\dot{m} = \rho AV$, las velocidades del agua a la entrada y la salida son:

$$V_1 = \frac{\dot{m}}{A_1} = \frac{14 \text{ kg/s}}{(1\,000 \text{ kg/m}^3)(0.0113 \text{ m}^2)} = 1.24 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{\dot{m}}{A_2} = \frac{14 \text{ kg/s}}{(1\,000 \text{ kg/m}^3)(7 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} = 20.0 \text{ m/s}$$

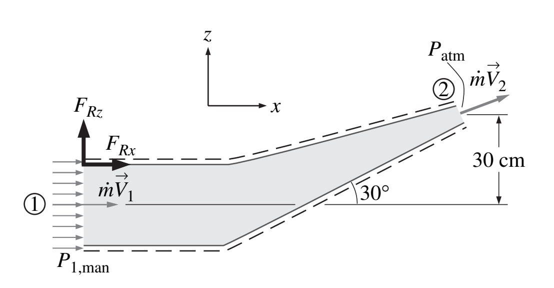


FIGURA 6-20
Esquema para el ejemplo 6-2.

Se usa la ecuación de Bernoulli (capítulo 5), como una primera aproximación para calcular la presión. En el capítulo 8 se aprenderá cómo tomar en cuenta las pérdidas por fricción a lo largo de las paredes. Se toma el centro de la sección transversal de la entrada como el nivel de referencia ($z_1 = 0$) y se nota que $P_2 = P_{atm}$, la ecuación de Bernoulli para una línea de corriente que pasa por el centro del codo se expresa como:

$$\frac{P_1}{g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$P_1 - P_2 = g\left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + z_2 - z_1\right)$$

$$P_1 - P_{atm} = (1\,000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)$$

$$\times\left(\frac{(20 \text{ m/s})^2 - (1.24 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} + 0.3 - 0\right)\left(\frac{1 \text{ kN}}{1\,000 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$

$$P_{1,\text{ man}} = 202.2 \text{ kN/m}^2 = \mathbf{202.2\ kPa} \quad \text{(manométricos)}$$

b) La ecuación de la cantidad de movimiento para el flujo unidimensional estacionario en reposo es:

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{sal}} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta\dot{m}\vec{V}$$

Considere que las componentes x y z de la fuerza de anclaje del codo son F_{Rx} y F_{Rz}, y supóngase que están en la dirección positiva. También se usará la presión manométrica, ya que la presión atmosférica actúa sobre toda la superficie de control. Entonces, las ecuaciones de la cantidad de movimiento a lo largo de los ejes x y z quedan:

$$F_{Rx} + P_{1,\text{ man}}A_1 = \beta\dot{m}V_2 \cos\theta - \beta\dot{m}V_1$$

$$F_{Rz} = \beta\dot{m}V_2 \operatorname{sen}\theta$$

Se despeja F_{Rx} y F_{Rz} y se sustituyen los valores dados:

$$F_{Rx} = \beta\dot{m}(V_2\cos\theta - V_1) - P_{1,\text{ man}}A_1$$

$$= 1.03(14 \text{ kg/s})[(20 \cos 30° - 1.24) \text{ m/s}]\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$

$$- (202\,200 \text{ N/m}^2)(0.0113 \text{ m}^2)$$

$$= 232 - 2\,285 = \mathbf{-2\,053\ N}$$

$$F_{Rz} = \beta\dot{m}V_2 \operatorname{sen}\theta = (1.03)(14 \text{ kg/s})(20 \operatorname{sen} 30° \text{ m/s})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = \mathbf{144\ N}$$

El resultado negativo para F_{Rx} indica que la dirección supuesta es errónea y que debe invertirse. Por lo tanto, F_{Rx} actúa en la dirección x negativa.

Discusión Existe una distribución de presión diferente de cero a lo largo de las paredes interiores del codo, pero como el volumen de control está afuera del codo, estas presiones no aparecen en el análisis. El valor real de $P_{1,\text{ man}}$ será más alto que el calculado aquí, debido a las pérdidas por fricción y otras pérdidas irreversibles en el codo.

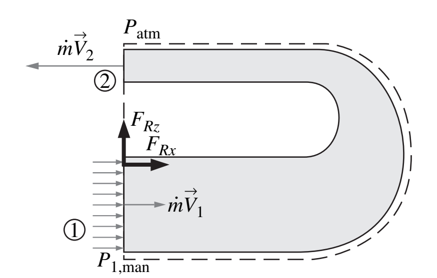


FIGURA 6-21
Esquema para el ejemplo 6-3.

EJEMPLO 6-3 Fuerza necesaria para sostener un codo de inversión en su lugar

El codo deflector del Ejemplo 6-2 se reemplaza por uno de inversión, tal que el fluido realiza una vuelta en U de 180° antes de ser descargado, como se muestra

en la figura 6-21. No obstante, la diferencia de elevación entre los centros de las secciones de entrada y de salida es de 0.3 m. Determine la fuerza de anclaje necesaria para sostener el codo en su lugar.

SOLUCIÓN Las velocidades en la entrada y la salida y la presión en el codo continúan siendo las mismas, pero la componente vertical de la fuerza de anclaje en la conexión del codo y el tubo es cero en este caso (F_{Rz} = 0), ya que no existe otra fuerza ni flujo de cantidad de movimiento en la dirección vertical (se está despreciando el peso del codo y el agua). La componente horizontal de la fuerza de anclaje se determina con base en la ecuación de la cantidad de movimiento escrita en la dirección *x*. Note que la velocidad de salida es negativa, puesto que se encuentra en la dirección *x* negativa, se tiene:

$$F_{Rx} + P_{1,\,\text{man}}A_1 = \beta_2\dot{m}(-V_2) - \beta_1\dot{m}V_1 = -\beta\dot{m}(V_2 + V_1)$$

Se despeja F_{Rx} y se sustituyen los valores conocidos:

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= -\beta\dot{m}(V_2 + V_1) - P_{1,\,\text{man}}A_1 \\ &= -(1.03)(14\text{ kg/s})[(20 + 1.24)\text{ m/s}]\left(\frac{1\text{ N}}{1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) - (202\,200\text{ N/m}^2)(0.0113\text{ m}^2) \\ &= -306 - 2\,285 = \mathbf{-2\,591\text{ N}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fuerza horizontal sobre la brida es de 2 591 N y actúa en la dirección x negativa (el codo está tratando de separarla del tubo). Esta fuerza es equivalente al peso de alrededor de una masa de 260 kg y, donde, los conectores (como los pernos) que se usen deben ser suficientemente fuertes para soportar esta fuerza.

Discusión La fuerza de reacción en la dirección x es mayor que la del ejemplo 6-2, ya que las paredes hacen que el agua describa un ángulo mayor. Si el codo de inversión se reemplazara por una boquilla recta (como la que usan los bomberos) de modo que el agua se descargue en la dirección x positiva, la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección x quedaría:

$$F_{Rx} + P_{1,\,\text{man}}A_1 = \beta\dot{m}V_2 - \beta\dot{m}V_1 \quad \rightarrow \quad F_{Rx} = \beta\dot{m}(V_2 - V_1) - P_{1,\,\text{man}}A_1$$

ya que tanto V_1 como V_2 están en la dirección x positiva. Esto permite ver la importancia de usar el signo correcto (positivo, si corresponde a la dirección positiva y negativo si se trata de la dirección opuesta) para las velocidades y las fuerzas.

EJEMPLO 6-4 Chorro de agua que choca contra una placa en reposo

Se acelera agua mediante una boquilla hasta alcanzar una magnitud promedio de velocidad de 20 m/s y choca contra una placa vertical en reposo a razón de 10 kg/s, con una velocidad normal de 20 m/s (Fig. 6-22). Después del choque, el chorro de agua se dispersa en todas direcciones en el plano de la placa. Determine la fuerza necesaria para impedir que la placa se mueva horizontalmente debido al chorro de agua.

SOLUCIÓN Un chorro de agua choca normalmente contra una placa vertical en reposo. Se debe determinar la fuerza necesaria para mantener la placa en su lugar.

Hipótesis **1** El flujo del agua a la salida de la boquilla es estacionario en reposo. **2** El agua se dispersa en direcciones normales a la dirección incidente del chorro de agua. **3** El chorro de agua está expuesto a la atmósfera y sobre este chorro y sobre el agua dispersada que sale del volumen de control actúa la presión atmosférica, la cual se descarta ya que actúa sobre todo el sistema. **4** No se consideran las fuerzas verticales ni los flujos de cantidad de movimiento dado que no tienen

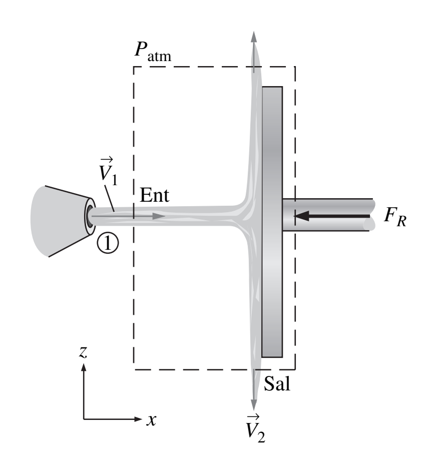


FIGURA 6–22
Esquema para el ejemplo 6-4.

efecto sobre la fuerza horizontal de reacción. **5** El efecto del factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento es despreciable y, por lo tanto, $\beta \cong 1$.

Análisis Se traza el volumen de control para este problema en tal forma que contenga la placa completa y corte normalmente el chorro de agua y la barra de soporte. La ecuación de la cantidad de movimiento para el flujo unidimensional y estacionario en reposo se da como:

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{sal}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta \dot{m} \vec{V}$$

Se escribe para este problema en la dirección *x* (sin olvidar el signo negativo para las fuerzas y velocidades que se encuentran en la dirección *x* negativa) y se nota que $V_{1,\,x} = V_1$ y $V_{2,\,x} = 0$ da:

$$-F_R = 0 - \beta \dot{m} \vec{V}_1$$

Se sustituyen los valores dados:

$$F_R = \beta \dot{m} \vec{V}_1 = (1)(10 \text{ kg/s})(20 \text{ m/s})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = \mathbf{200\ N}$$

Por lo tanto, el soporte debe aplicar una fuerza horizontal de 200 N (equivalente al peso de alrededor de una masa de 20 kg) en la dirección negativa (la dirección opuesta a la del chorro de agua) para mantener la placa en su lugar.

Discusión La placa absorbe todo el impacto de la cantidad de movimiento del chorro de agua, ya que la cantidad de movimiento en la dirección *x* a la salida del volumen de control es cero. Si, en lugar de cómo se hizo, se trazara el volumen de control a lo largo de la interfase entre el agua y la placa, se tendrían fuerzas adicionales (desconocidas) de presión en el análisis. Pero, cuando se hace el corte del volumen de control a través del soporte, se evita tener que tratar con esta complejidad adicional. Éste es un ejemplo de una selección "inteligente" del volumen de control.

EJEMPLO 6-5 Generación de potencia y carga del viento de una turbina de viento

Un generador eólico, con un diámetro del círculo que describen las puntas de los álabes de 30 ft, tiene una magnitud de velocidad de incidencia del viento (magnitud mínima de velocidad para la generación de potencia) de 7 mph, velocidad a la cual la turbina genera 0.4 kW de potencia eléctrica (Fig. 6-23). Determínese *a*) la eficiencia de la unidad del turbogenerador eólico y *b*) la fuerza horizontal ejercida por el viento sobre el mástil de soporte de la turbina de viento. ¿Cuál es el efecto de duplicar la velocidad del viento hasta 14 mph sobre la generación de potencia y sobre la fuerza ejercida? Suponga que la eficiencia continúa siendo la misma y tome la densidad del aire como 0.076 lbm/ft³.

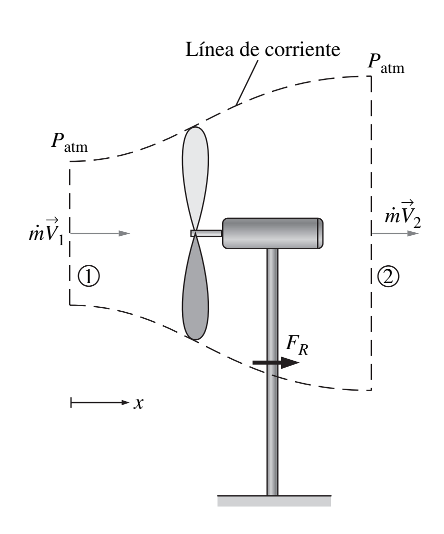


FIGURA 6-23
Esquema para el ejemplo 6-5.

SOLUCIÓN Deben analizarse la generación de potencia y la carga de una turbina de viento. Deben determinarse la eficiencia y la fuerza ejercida sobre el mástil, así como investigarse los efectos de duplicar la velocidad del viento.

Hipótesis **1** El flujo del viento es estacionario en reposo e incompresible. **2** La eficiencia del turbogenerador es independiente de la magnitud de la velocidad del viento. **3** Los efectos de la fricción son despreciables y, por lo tanto, nada de la energía cinética entrante se convierte en energía térmica. **4** La velocidad promedio del aire que pasa de uno a otro lado de la turbina de viento es igual a la velocidad del viento (en realidad, es considerablemente menor; vea el comentario que sigue al ejemplo). **5** El flujo de viento es uniforme y el factor de corrección de la cantidad de movimiento es $\beta \cong 1$.

Propiedades La densidad del aire se da como 0.076 lbm/ft^3.

Análisis *a*) La energía cinética es una forma de energía y, en consecuencia, puede convertirse por completo en trabajo. Por lo tanto, el potencial de generación de potencia del viento es proporcional a su energía cinética, la cual es $V^2/2$ por unidad de masa y, donde, la potencia máxima es $\dot{m}V^2/2$ para determinado flujo de masa:

$$V_1 = (7 \text{ mph})\left(\frac{1.4667 \text{ ft/s}}{1 \text{ mph}}\right) = 10.27 \text{ ft/s}$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_1 V_1 \frac{\pi D^2}{4} = (0.076 \text{ lbm/ft}^3)(10.27 \text{ ft/s}) \frac{\pi (30 \text{ ft})^2}{4} = 551.7 \text{ lbm/s}$$

$$\begin{aligned}\dot{W}_{\text{máx}} &= \dot{m}\text{ec}_1 = \dot{m}\frac{V_1^2}{2} \\ &= (551.7 \text{ lbm/s})\frac{(10.27 \text{ ft/s})^2}{2}\left(\frac{1 \text{ lbf}}{32.2 \text{ lbm}\cdot\text{ft/s}^2}\right)\left(\frac{1 \text{ kW}}{737.56 \text{ lbf}\cdot\text{ft/s}}\right) \\ &= 1.225 \text{ kW}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la potencia disponible para la turbina de viento es de 1.225 kW, a la velocidad del viento de 7 mph. Entonces, la eficiencia del turbogenerador queda:

$$\eta_{\text{turbina de viento}} = \frac{\dot{W}_{\text{real}}}{\dot{W}_{\text{máx}}} = \frac{0.4 \text{ kW}}{1.225 \text{ kW}} = \mathbf{0.327} \qquad (\text{o } \mathbf{32.7\%})$$

b) Se supone que los efectos de la fricción son despreciables y la parte de la energía cinética entrante que no se convierte en potencia eléctrica deja a la turbina de viento como energía cinética saliente. Note que el flujo de masa se mantiene constante y se determina que la velocidad de salida es:

$$\dot{m}\text{ec}_2 = \dot{m}\text{ec}_1(1 - \eta_{\text{turbina de viento}}) \quad \rightarrow \quad \dot{m}\frac{V_2^2}{2} = \dot{m}\frac{V_1^2}{2}(1 - \eta_{\text{turbina de viento}})$$

o

$$V_2 = V_1\sqrt{1 - \eta_{\text{turbina de viento}}} = (10.27 \text{ ft/s})\sqrt{1 - 0.327} = 8.43 \text{ ft/s}$$

Se traza un volumen de control en torno a la turbina de viento en tal manera que el viento sea normal a la superficie de control tanto a la entrada como a la salida, y esa superficie está a presión atmosférica. La ecuación de la cantidad de movimiento para el flujo unidimensional estacionario en reposo se da como:

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{sal}} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta\dot{m}\vec{V}$$

Se escribe a lo largo de la dirección x y se nota que $\beta = 1$, $V_{1,x} = V_1$ y $V_{2,x} = V_2$ da:

$$F_R = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

Cuando se sustituyen los valores conocidos da:

$$\begin{aligned}F_R &= \dot{m}(V_2 - V_1) = (551.7 \text{ lbm/s})(8.43 - 10.27 \text{ ft/s})\left(\frac{1 \text{ lbf}}{32.2 \text{ lbm}\cdot\text{ft/s}^2}\right) \\ &= -31.5 \text{ lbf}\end{aligned}$$

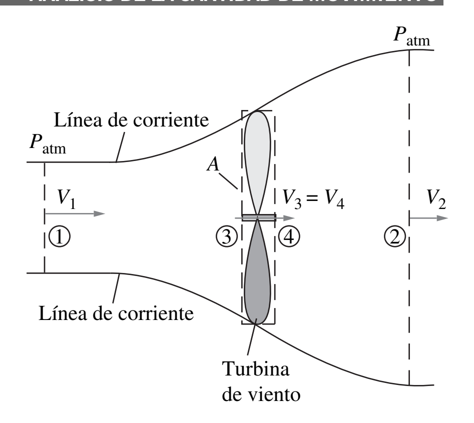


FIGURA 6–24
Volúmenes de control grande y pequeño, para el análisis de una turbina de viento, limitados por las líneas de corriente superior e inferior.

El signo negativo indica que la fuerza de reacción actúa en la dirección x negativa, como era de esperarse. Entonces la fuerza ejercida por el viento sobre el mástil queda $V_{mástil} = -F_R =$ **31.5 lbf**.

La potencia generada es proporcional a V^3, ya que el flujo de masa es proporcional a V y la energía cinética a V^2. Por lo tanto, duplicar la velocidad del viento a 14 mph incrementará la generación de potencia en un factor de $2^3 = 8$ hasta $0.4 \times 8 = 3.2$ kW. La fuerza ejercida por el viento sobre el mástil de soporte es proporcional a V^2. Por lo tanto, duplicar la velocidad del viento a 14 mph incrementará la fuerza del viento en un factor de $2^2 = 4$ hasta $31.5 \times 4 = 126$ lbf.

Discusión Para comprender mejor la operación de los dispositivos con hélices o turbinas, como los helicópteros, las turbinas de viento, las turbinas hidráulicas y los motores de propulsión de tipo de turboventiladores, se volverá a considerar la turbina de viento y se trazarán dos líneas de corriente, como se muestra en la figura 6-24 (en el caso de los dispositivos que consumen potencia, como un ventilador y un helicóptero, las líneas de corriente convergen, en lugar de divergir, ya que la velocidad de salida será más alta y, en consecuencia, el área de salida será más pequeña). Pueden considerarse las líneas de corriente superior e inferior para formar un "ducto imaginario" para el flujo del aire a través de la turbina. Las secciones 1 y 2 están suficientemente lejos de la turbina, de modo que $P_1 = P_2 = P_{atm}$. Se obtuvo que la ecuación de la cantidad de movimiento para este volumen grande de control, entre las secciones 1 y 2, es:

$$F_R = \dot{m}(V_2 - V_1) \quad \textbf{(1)}$$

El volumen de control más pequeño, entre las secciones 3 y 4, encierra la turbina y $A_3 = A_4 = A$ y $V_3 = V_4$ dado que ese volumen es muy delgado. La turbina es un dispositivo que causa un cambio de presión y, por lo tanto, P_3 y P_4 son diferentes. La ecuación de la cantidad de movimiento aplicada al volumen de control más pequeño da:

$$F_R + P_3A - P_4A = 0 \qquad \rightarrow \qquad F_R = (P_4 - P_3)A \quad \textbf{(2)}$$

La ecuación de Bernoulli no es aplicable entre las secciones 1 y 2 debido a que la trayectoria cruza una turbina, pero sí puede aplicarse por separado entre las secciones 1 y 3 y las secciones 4 y 2:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 \qquad \text{y} \qquad \frac{P_4}{\rho g} + \frac{V_4^2}{2g} + z_4 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Si se suman estas dos ecuaciones y se observa que $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$, $V_3 = V_4$, y $P_1 = P_2 = P_{atm}$ da:

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = \frac{P_4 - P_3}{\rho} \quad \textbf{(3)}$$

Se realiza la sustitución $\dot{m} = \rho A V_3$ en la ecuación 1 y, a continuación, se combina con la 2 y la 3 y da:

$$V_3 = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad \textbf{(4)}$$

De donde se llega a la conclusión de que *la velocidad promedio del fluido a través de una turbina es el promedio aritmético de las velocidades corriente arriba y corriente abajo*. Por supuesto, la validez de este resultado se ve limitada por la aplicabilidad de la ecuación de Bernoulli.

Ahora se regresa a la turbina de viento. La velocidad a través de la turbina se puede expresar como $V_3 = V_1(1 - a)$, donde $a < 1$ puesto que $V_3 < V_1$. Se combina esta expresión con la ecuación 4 y da $V_2 = V_1(1 - 2a)$. Asimismo, el flujo de masa a través de la turbina queda $\dot{m} = \rho A V_3 = \rho A V_1(1 - a)$. Cuando se

desprecian los efectos de la fricción y las pérdidas, la potencia generada por una turbina de viento es sencillamente la diferencia entre las energías cinéticas entrante y las salientes:

$$\dot{W} = \dot{m}(\text{ec}_1 - \text{ec}_2) = \frac{\dot{m}(V_1^2 - V_2^2)}{2} = \frac{AV_1(1-a)[V_1^2 - V_1^2(1-2a)^2]}{2}$$

$$= 2\rho A V_1^3 a(1-a)^2$$

Si se divide esto entre la potencia disponible del viento, $\dot{W}_{\text{máx}} = \dot{m}V_1^2/2$ da la eficiencia de la turbina de viento en términos de a,

$$\eta_{\text{turbina de viento}} = \frac{\dot{W}}{\dot{W}_{\text{máx}}} = \frac{2\rho A V_1^3 a(1-a)^2}{(\rho A V_1)V_1^2/2}$$

El valor de a que maximiza la eficiencia se determina si se iguala a cero la derivada de $\eta_{\text{turbina de viento}}$ respecto a a y se despeja ésta. Esto da $a = 1/3$. Se sustituye este valor en la relación de la eficiencia que acaba de presentarse, se obtiene $\eta_{\text{turbina de viento}} = 16/27 = 0.593$, lo cual constituye el límite superior de la eficiencia de las turbinas y hélices. Esto se conoce como **límite de Betz**. La eficiencia de las turbinas reales de viento es alrededor de la mitad de este valor ideal.

EJEMPLO 6-6 Reubicación de un satélite

Un satélite en órbita tiene una masa de $m_{\text{sat}} = 5\,000$ kg y viaja a una velocidad constante de V_0. Para alterar su órbita, tiene integrado un cohete que descarga $m_f = 100$ kg de gases provenientes de la reacción de combustible sólido, a una velocidad $V_f = 3\,000$ m/s, en relación con el satélite, en una dirección opuesta a V_0 (Fig. 6-25). La razón de descarga del combustible es constante durante 2 s. Determine *a*) la aceleración del satélite en el transcurso de este periodo de 2 s, *b*) el cambio de velocidad del satélite en el transcurso de este periodo y *c*) el empuje ejercido sobre el satélite.

SOLUCIÓN Se realiza la descarga de los productos de combustión del cohete de un satélite en la dirección opuesta al movimiento. Deben determinarse la aceleración, el cambio de velocidad y el empuje.

Hipótesis **1** El flujo de los gases de la combustión es estacionario en reposo y unidimensional en el transcurso del periodo de proceso de combustión. **2** No hay fuerzas externas que actúen sobre el satélite y el efecto de la fuerza de presión en la salida de la tobera es despreciable. **3** La masa del combustible descargado es despreciable en relación con la masa del satélite y donde este último puede tratarse como un cuerpo sólido con una masa constante. **4** La tobera está diseñada adecuadamente, de tal manera que el efecto del factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento es despreciable y, donde, $\beta \cong 1$.

Análisis *a*) Se elige un marco de referencia en el cual el volumen de control se mueva con el satélite. Entonces, las velocidades de los flujos de fluido se vuelven, sencillamente, sus velocidades en relación con el cuerpo en movimiento. Se toma la dirección del movimiento del satélite como la dirección positiva a lo largo del eje *x*. No se tienen fuerzas externas que actúen sobre el satélite y su masa es aproximadamente constante. Por lo tanto, el satélite puede tratarse como un cuerpo sólido con masa constante y, en este caso, la ecuación de la cantidad de movimiento es simplemente la ecuación 6-28:

$$0 = \frac{d(m\vec{V})_{\text{VC}}}{dt} + \sum_{\text{sal}} \beta \dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta \dot{m}\vec{V} \quad \rightarrow \quad m_{\text{sat}}\frac{d\vec{V}_{\text{sat}}}{dt} = -\dot{m}_f \vec{V}_f$$

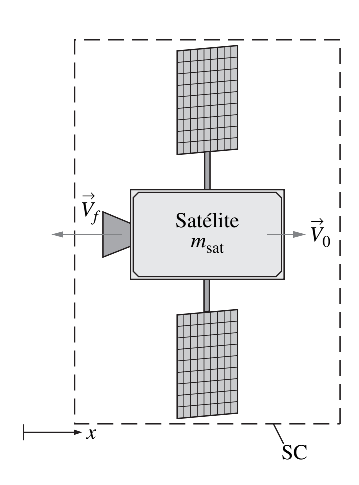


FIGURA 6-25
Esquema para el ejemplo 6-6.

Note que el movimiento es sobre una recta y que los gases descargados se mueven en la dirección x negativa, se puede escribirse la ecuación de la cantidad de movimiento, con el uso de magnitudes, como:

$$m_{sat}\frac{dV_{sat}}{dt} = \dot{m}_f V_f \quad \rightarrow \quad \frac{dV_{sat}}{dt} = \frac{\dot{m}_f}{m_{sat}} V_f = \frac{m_f/\Delta t}{m_{sat}} V_f$$

Se sustituye y se determina que la aceleración del satélite en el transcurso de los primeros 2 s es:

$$a_{sat} = \frac{dV_{sat}}{dt} = \frac{m_f/\Delta t}{m_{sat}} V_f = \frac{(100 \text{ kg})/(2 \text{ s})}{5\,000 \text{ kg}}(3\,000 \text{ m/s}) = \mathbf{30\ m/s^2}$$

b) Cuando ya se conoce la aceleración, la cual es constante, a partir de la definición de aceleración, $a_{sat} = dV_{sat}/dt$, se determina que el cambio de velocidad del satélite en el transcurso de los primeros 2 s es:

$$dV_{sat} = a_{sat}\,dt \quad \rightarrow \quad \Delta V_{sat} = a_{sat}\,\Delta t = (30 \text{ m/s}^2)(2 \text{ s}) = \mathbf{60\ m/s}$$

c) Por la ecuación 6-29, el empuje que se ejerce sobre el satélite es:

$$F_{sat} = 0 - \dot{m}_f(-V_f) = -(100/2 \text{ kg/s})(-3\,000 \text{ m/s})\left(\frac{1 \text{ kN}}{1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = \mathbf{150\ kN}$$

Discusión Note que si este satélite estuviera sujeto de alguna parte, ejercería una fuerza de 150 kN (equivalente al peso de una masa de 15 toneladas) sobre su soporte. Esto puede verificarse cuando se toma al satélite como el sistema y se aplica la ecuación de la cantidad de movimiento.

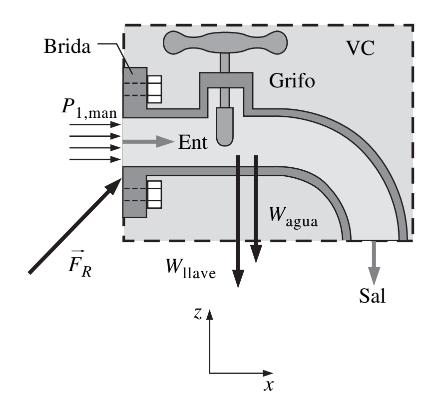


FIGURA 6-26
Volumen de control para el ejemplo 6-7 con todas las fuerzas mostradas; por conveniencia, se usa la presión manométrica.

EJEMPLO 6-7 Fuerza neta sobre una brida

Fluye agua a razón de 18.5 gal/min por una llave que está sujeta mediante una brida que tiene un grifo con válvula de compuerta parcialmente cerrada (Fig. 6-26). El diámetro interior del tubo en la ubicación de la brida es de 0.780 in (= 0.650 ft) y se mide que la presión en ese lugar es de 13.0 psig. El peso total del conjunto de la llave, más al agua que está en su interior, es de 12.8 lbf. Calcule la fuerza neta sobre la brida.

SOLUCIÓN Se considera el flujo de agua por una llave sujeta mediante una brida. Debe calcularse la fuerza neta que actúa sobre ésta.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario en reposo e incompresible. **2** El flujo a la entrada y a la salida es turbulento y totalmente desarrollado, de modo que el factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento es alrededor de 1.03. **3** El diámetro del tubo a la salida de la llave es igual al que existe en la brida.
Propiedades La densidad del agua a la temperatura ambiente es de 62.3 lbm/ft^3.
Análisis Se elige la llave y sus alrededores inmediatos como el volumen de control, como se muestra en la figura 6-26, junto con todas las fuerzas que actúan sobre ella. Éstas incluyen el peso del agua y el peso del conjunto de la llave, la fuerza de la presión manométrica a la entrada del volumen de control y la fuerza

neta de la brida sobre este volumen, a la cual se le llama $\vec{F}_R$. Por conveniencia, se usa la presión manométrica, ya que este tipo de presión sobre el resto de la superficie de control es cero (presión atmosférica). Note que la presión a través de la salida del volumen de control también es la atmosférica, dado que se está suponiendo un flujo incompresible; de aquí que la presión manométrica también sea cero a través de la salida.

Ahora se aplican las leyes de conservación del volumen de control. En este caso, la conservación de la masa es trivial dado que sólo se tienen una entrada y una salida; entonces, el flujo de masa hacia el volumen de control es igual al flujo de masa que sale de ese volumen. Asimismo, las velocidades promedio del flujo hacia fuera y el flujo hacia dentro son idénticas, dado que el diámetro interior es constante y el agua es incompresible, y se determina que son:

$$V_2 = V_1 = V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{18.5 \text{ gal/min}}{\pi(0.065 \text{ ft})^2/4}\left(\frac{0.1337 \text{ ft}^3}{1 \text{ gal}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 12.42 \text{ ft/s}$$

También:

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = (62.3 \text{ lbm/ft}^3)(18.5 \text{ gal/min})\left(\frac{0.1337 \text{ ft}^3}{1 \text{ gal}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 2.568 \text{ lbm/s}$$

Enseguida, se aplica la ecuación de la cantidad de movimiento para el flujo estacionario en reposo:

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{sal}} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta\dot{m}\vec{V}$$

Considere que las componentes x y z de la fuerza que actúa sobre la brida son F_{Rx} y F_{Rz}, y suponga que tienen las direcciones positivas. La magnitud de la velocidad en la dirección x es $+V_1$ a la entrada, pero cero a la salida. La magnitud de la velocidad en la dirección z es cero a la entrada, pero $-V_2$ a la salida. También, el peso de la llave y del agua dentro de ella actúa en la dirección $-z$, como una fuerza del cuerpo. Ninguna fuerza de presión o viscosa actúa sobre el volumen de control elegido en la dirección z.

Las ecuaciones de la cantidad de movimiento a lo largo de las direcciones x y z quedan:

$$F_{Rx} + P_{1,\text{ man}}A_1 = 0 - \dot{m}(+V_1)$$
$$F_{Rz} - W_{\text{llave}} - W_{\text{agua}} = \dot{m}(-V_2) - 0$$

Si se despejan F_{Rx} y F_{Rz}, y se sustituyen los valores dados:

$$\begin{aligned}
F_{Rx} &= -\dot{m}V_1 - P_{1,\text{ man}}A_1 \\
&= -(2.568 \text{ lbm/s})(12.42 \text{ ft/s})\left(\frac{1 \text{ lbf}}{32.2 \text{ lbm}\cdot\text{ft/s}^2}\right) - (13 \text{ lbf/in}^2)\,\frac{\pi(0.780 \text{ in})^2}{4} \\
&= -7.20 \text{ lbf}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{Rz} &= -\dot{m}V_2 + W_{\text{llave + agua}} \\
&= -(2.568 \text{ lbm/s})(12.42 \text{ ft/s})\left(\frac{1 \text{ lbf}}{32.2 \text{ lbm}\cdot\text{ft/s}^2}\right) + 12.8 \text{ lbf} = 11.8 \text{ lbf}
\end{aligned}$$

Entonces la fuerza neta de la brida sobre el volumen de control puede expresarse como:

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\vec{i} + F_{Rz}\vec{k} = -7.20\vec{i} + 11.8\vec{k} \quad \text{lbf}$$

A partir de la tercera Ley de Newton, la fuerza que ejerce la llave sobre la brida es la negativa de $\vec{F}_R$,

$$\vec{F}_{\text{llave sobre la brida}} = -\vec{F}_R = \mathbf{7.20}\vec{i} - \mathbf{11.8}\vec{k} \quad \textbf{lbf}$$

Discusión El conjunto de la llave tira hacia la derecha y hacia abajo; esto concuerda con la intuición. Es decir, el agua ejerce alta presión a la entrada, pero la presión a la salida es la atmosférica. Además, la cantidad de movimiento del agua a la entrada, en la dirección x, se pierde en el cambio de dirección y causa una fuerza adicional hacia la derecha sobre las paredes del tubo. El conjunto de la llave pesa mucho más que el efecto de la cantidad de movimiento del agua, de modo que es de esperar que la fuerza sea hacia abajo. Note que nombrar las fuerzas como "llave sobre la brida" aclara la dirección de la fuerza.

6-5 ▪ REPASO DEL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN Y DEL MOMENTO ANGULAR

Puede considerarse que el movimiento de un cuerpo rígido es la combinación del movimiento de traslación de su centro de masa y del de rotación en torno a este centro. El movimiento de traslación puede analizarse cuando se aplica la ecuación del momento lineal, ecuación 6-16. Enseguida, se comenta el movimiento de rotación: un movimiento en el curso del cual todos los puntos del cuerpo se mueven en círculos alrededor del eje de rotación. El movimiento de rotación se describe con cantidades angulares, como la distancia angular θ, la velocidad angular ω y la aceleración angular α.

La cantidad de rotación de un punto en un cuerpo se expresa en términos del ángulo θ barrido por una recta de longitud r que conecta ese punto con el eje de rotación y es perpendicular a este eje. El ángulo θ se expresa en radianes (rad), el cual es la longitud de arco correspondiente a θ sobre un círculo de radio unitario. Cuando se observa que la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$, la distancia angular recorrida por cualquier punto en un cuerpo rígido, al describir una rotación completa, es 2π rad. La distancia física recorrida por un punto a lo largo de su trayectoria circular es $l = \theta r$, donde r es la distancia normal del punto al eje de rotación y θ es la distancia angular en rad. Note que 1 rad corresponde a $360/(2\pi) \cong 57.3°$.

La velocidad angular ω es la distancia angular recorrida por unidad de tiempo y la aceleración angular α es la razón de cambio de la velocidad angular. Éstas se expresan como (Fig. 6-27):

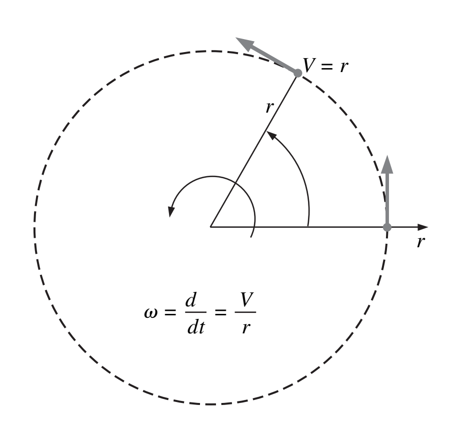


FIGURA 6-27
Relaciones entre la distancia angular θ, la velocidad angular ω y la velocidad lineal V.

$$\vec{F}_{\text{llave sobre la brida}} = -\vec{F}_R = \mathbf{7.20}\vec{i} - \mathbf{11.8}\vec{k} \quad \textbf{lbf} \qquad \textbf{(6-30)}$$

o bien,

$$V = r\omega \qquad \text{y} \qquad a_t = r\alpha \qquad \textbf{(6-31)}$$

donde V es la velocidad lineal y a_t es la aceleración lineal en la dirección tangencial, para un punto ubicado a una distancia r del eje de rotación. Note que ω y α son las mismas para todos los puntos de un cuerpo rígido en rotación, pero V y a_t no lo son (son proporcionales a r).

La segunda Ley de Newton establece que debe haber una fuerza que actúe en la dirección tangencial para causar la aceleración angular. La intensidad del

efecto de rotación, llamado *momento* o *momento de torsión* (*torque*), es proporcional a la magnitud de la fuerza y a su distancia al eje de rotación. La distancia perpendicular del eje de rotación a la línea de acción de la fuerza se llama *brazo de palanca*, y el momento de torsión M, que actúa sobre una masa puntual m a una distancia normal r al eje de rotación se expresa como:

$$M = rF_t = rma_t = mr^2\alpha \qquad \textbf{(6-32)}$$

El momento total de torsión que actúa sobre un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje puede determinarse al integrar los momentos de torsión que actúan sobre las masas diferenciales dm, sobre la masa completa del cuerpo, para dar:

Momento de torsión:
$$M = \int_{\text{masa}} r^2\alpha\, dm = \left[\int_{\text{masa}} r^2\, dm\right]\alpha = I\alpha \qquad \textbf{(6-33)}$$

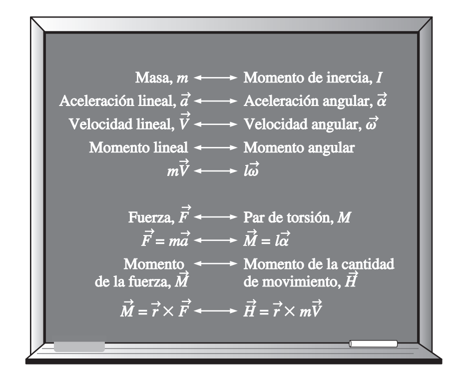


FIGURA 6–28
Analogía entre cantidades lineales y angulares correspondientes.

donde I es el *momento de inercia* del cuerpo alrededor de su eje de rotación, el cual es una medida de la inercia de un cuerpo contra la rotación. La relación $M = Ia$ es la contraparte de la segunda Ley de Newton, con el momento de torsión reemplazando la fuerza, el momento de inercia reemplazando la masa y la aceleración angular reemplazando la aceleración lineal (Fig. 6-28). Note que, a diferencia de la masa, la inercia rotacional de un cuerpo también depende de la distribución de la masa de ese cuerpo respecto al eje de rotación. Por lo tanto, un cuerpo cuya masa está muy apretada alrededor de su eje de rotación tiene una resistencia pequeña contra la aceleración angular, en tanto que un cuerpo cuya masa está concentrada en su periferia tiene una resistencia grande contra esa aceleración angular. Un volante es un buen ejemplo de este último.

El momento lineal de un cuerpo de masa m que tiene una velocidad V es mV, y la dirección de ese momento lineal es idéntica a la dirección de la velocidad. Note que el momento de una fuerza es igual al producto de la fuerza y la distancia normal, el momento de la cantidad de movimiento, conocido como **momento angular**, de una masa puntual m alrededor de un eje se puede expresar como $H = rmV = r^2m\omega$, donde r es la distancia normal del eje de rotación a la línea de acción del vector cantidad de movimiento (Fig. 6-29). Entonces puede determinarse el momento angular total de un cuerpo rígido en rotación por integración, para tener:

Momento angular:
$$H = \int_{\text{masa}} r^2\omega\, dm = \left[\int_{\text{masa}} r^2\, dm\right] = I\omega \qquad \textbf{(6-34)}$$

donde otra vez I es el *momento de inercia* del cuerpo alrededor del eje de rotación. También puede representarse en forma vectorial como:

$$\vec{H} = I\vec{\omega} \qquad \textbf{(6-35)}$$

Note que la velocidad angular $\vec{\omega}$ es la misma en cada uno de los puntos de un cuerpo rígido.

La segunda Ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$ se expresó, en la ecuación 6-2, en términos de la razón de cambio del momento lineal de la ecuación 6-1 como $\vec{F} = d(m\vec{V})/dt$. Del mismo modo, la contraparte de la segunda Ley de Newton para los cuerpos en rotación, $\vec{M} = I\vec{\alpha}$ se expresa en la ecuación 6-2 en términos de la razón de cambio del momento angular como:

Ecuación del momento angular:
$$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{H}}{dt} \qquad \textbf{(6-36)}$$

donde $\vec{M}$ es el momento de torsión neto aplicado sobre el cuerpo alrededor del eje de rotación.

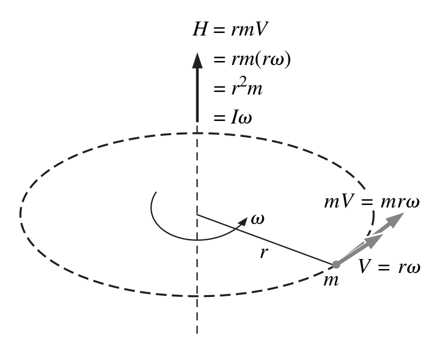


FIGURA 6-29
Momento angular de una masa puntual m que gira a la velocidad angular ω a la distancia r del eje de rotación.

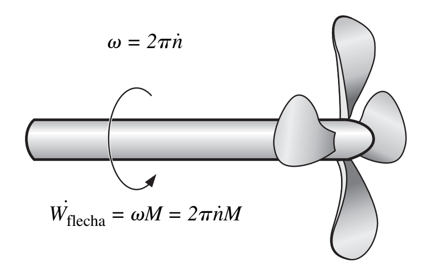


FIGURA 6-30
Relaciones entre la velocidad angular, rpm, y la potencia transmitida a través de una flecha.

Por lo general, la velocidad angular de una maquinaria rotatoria se expresa en rpm (número de revoluciones por minuto) y se denota por $\dot{n}$. Note que la velocidad es la distancia recorrida por unidad de tiempo y que la distancia angular recorrida cuando se realiza cada revolución es 2π, la velocidad angular de la maquinaria rotatoria es $\omega = 2\pi\dot{n}$ rad/min, o sea:

Velocidad angular en función de las rpm: $$\omega = \frac{2\pi\dot{n}}{60} \quad \text{(rad/s)} \qquad \textbf{(6-37)}$$

Considere una fuerza constante F que actúa en la dirección tangencial sobre la superficie exterior de una flecha de radio r que gira a una rpm de $\dot{n}$. Note que el trabajo W es fuerza multiplicada por distancia y que la potencia $\dot{n}$ es el trabajo realizado por unidad de tiempo y, por lo tanto, fuerza multiplicada por velocidad, se tiene $\dot{W}_{\text{flecha}} = FV = Fr\omega = M\omega$. Por lo tanto, la potencia transmitida por una flecha que gira a una rpm de $\dot{n}$ bajo la influencia de un momento aplicado de torsión M, es (Fig. 6-30):

Potencia en la flecha: $$\dot{W}_{\text{flecha}} = \omega M = 2\pi\dot{n}M \quad \text{(W)} \qquad \textbf{(6-38)}$$

La energía cinética de un cuerpo de masa m en el curso del movimiento de traslación es EC $= \frac{1}{2}mV^2$. Cuando se observa que $V = r\omega$, la energía cinética de rotación de un cuerpo de masa m, a una distancia r del eje de rotación, es EC $= \frac{1}{2}mr^2\omega^2$. La energía cinética total de rotación de un cuerpo rígido que está girando puede determinarse por integración de las energías cinéticas de rotación de las masas diferenciales dm, sobre todo el cuerpo, para dar:

Energía cinética de rotación: $$\text{EC}_r = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \textbf{(6-39)}$$

de nuevo, I es el momento de inercia del cuerpo y ω es la velocidad angular.

En el transcurso del movimiento de rotación, la dirección de la velocidad cambia, aun cuando su magnitud permanece constante. La velocidad es una cantidad vectorial y, en consecuencia, un cambio en la dirección constituye un cambio en la velocidad con el tiempo y una aceleración. Ésta se conoce como **aceleración centrípeta**. Su magnitud es:

$$a_r = \frac{V^2}{r} = r\omega^2$$

La aceleración centrípeta está dirigida hacia el eje de rotación (dirección opuesta de la aceleración radial) y, por lo tanto, la aceleración radial es negativa. Si se observa que la aceleración es un múltiplo constante de la fuerza, la aceleración centrípeta es el resultado de una fuerza que actúa sobre el cuerpo hacia el eje de rotación, conocida como **fuerza centrípeta**, cuya magnitud es $F_r = mV^2/r$. Las aceleraciones tangencial y radial son perpendiculares entre sí (puesto que las direcciones radial y tangencial son perpendiculares) y la aceleración lineal total se determina por su suma vectorial $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$. Para un cuerpo que gira a velocidad angular constante, la única aceleración es la centrípeta. La fuerza que causa la aceleración centrípeta no produce momento de torsión, porque su línea de acción se interseca con el eje de rotación.

6-6 ▪ LA ECUACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Se comentó en la sección 6-4 que el moento lineal es útil para determinar la relación entre el momento lineal de los flujos de fluido y las fuerzas resultantes. En muchos problemas de ingeniería interviene el momento del momento lineal de los flujos de fluido, así como los efectos de rotación causados por ellos. Esos

problemas se analizan de mejor manera mediante la *ecuación del momento angular*, también conocido como *ecuación del momento de la cantidad de movimiento*. Una clase importante de dispositivos accionados por fluidos, conocidos como *turbomáquinas*, las cuales incluyen bombas centrífugas, las turbinas y los ventiladores, se analizan con la ecuación del momento angular.

El *momento de una fuerza* $\vec{F}$ en torno a un punto O es el producto vectorial (o cruz) (Fig. 6-31):

Momento de una fuerza: $$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{6-40}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición del punto O hacia cualquier punto sobre la línea de acción de $\vec{F}$. El producto vectorial de dos vectores es un vector cuya línea de acción es normal al plano que contiene a los vectores que se multiplican ($\vec{r}$ y $\vec{F}$ en este caso) y cuya magnitud es:

Magnitud del momento de una fuerza: $$M = Fr \operatorname{sen} \theta \tag{6-41}$$

donde θ es el ángulo entre las líneas de acción de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Por lo tanto, la magnitud del momento alrededor del punto O es igual a la magnitud de la fuerza multiplicada por la distancia normal de la línea de acción de esa fuerza al punto O. El sentido del vector de momentor $\vec{M}$ se determina por la regla de la mano derecha: cuando se enroscan los dedos de la mano derecha en la dirección hacia la que la fuerza tiende a causar la rotación, el pulgar apunta en la dirección del vector momento (Fig. 6-32). Note que una fuerza cuya línea de acción pasa por el punto O produce un momento cero alrededor de este punto.

Cuando se reemplaza el vector $\vec{F}$ de la ecuación 6-40 por el vector de cantidad de movimiento, $m\vec{V}$ da el *momento de la cantidad de movimiento*, también conocido como *momento angular*, alrededor de un punto O como:

Momento de la cantidad de movimiento: $$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V} \tag{6-42}$$

Por lo tanto, $\vec{r} \times \vec{V}$ representa el momento angular por unidad de masa, y el momento angular de una masa de diferencias $dm = \rho\, dV$ es $d\vec{H} = (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV$. Entonces el momento angular de un sistema se determina por integración como:

Momento de la cantidad de movimiento (*sistema*): $$\vec{H}_{\text{sist}} = \int_{\text{sist}} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV \tag{6-43}$$

La razón de cambio del momento de la cantidad de movimiento es:

Razón de cambio del momento de la cantidad de movimiento:

$$\frac{d\vec{H}_{\text{sist}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{sist}} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV \tag{6-44}$$

La ecuación del momento angular para un sistema se expresó en la ecuación 6-2 como:

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{H}_{\text{sist}}}{dt} \tag{6-45}$$

donde $\sum \vec{M} = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$ es el momento neto de torsión que se aplica sobre el sistema, el cual es la suma vectorial de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre ese sistema y $d\vec{H}_{\text{sist}}/dt$ es la razón de cambio del momento angular del mismo. La ecuación 6-45 se enuncia como *la razón de cambio del momento angular de un sistema es igual al momento neto de torsión que actúa sobre ese sistema*. Esta ecuación es válida para una cantidad fija de masa y un marco inercial de referencia; es decir, un marco de referencia que esté fijo o se mueva con velocidad constante en una trayectoria recta.

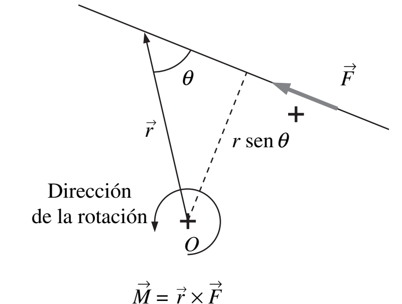


FIGURA 6-31
El momento de una fuerza $\vec{F}$ alrededor de un punto O, es el producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

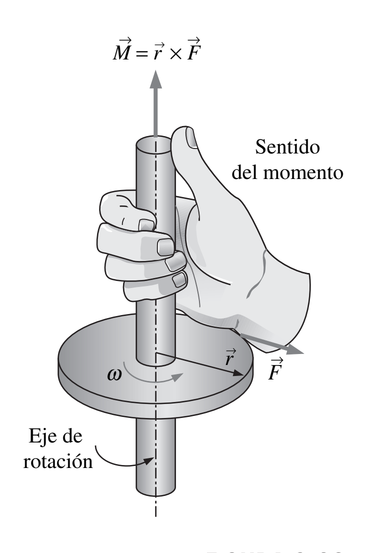


FIGURA 6-32
Determinación de la dirección del momento mediante la regla de la mano derecha.

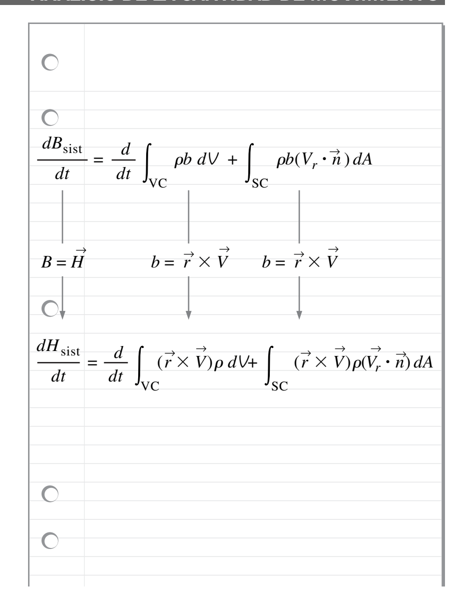


FIGURA 6-33
Se obtiene la ecuación cuando se reemplaza B en el teorema del transporte de Reynolds por el momento angular $\vec{H}$ y b por el momento angular por unidad de masa, $\vec{r} \times \vec{V}$.

Se obtiene la formulación general para el volumen de control de la ecuación del momento angular al hacer $b = \vec{r} \times \vec{V}$ y, de donde, $B = \vec{H}$ en el teorema general del transporte de Reynolds; esto da (Fig. 6-33):

$$\frac{dH_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA \qquad \textbf{(6-46)}$$

Por la ecuación 6-45, la parte izquierda de esta ecuación es igual a $\Sigma \vec{M}$. Cuando se sustituye, se obtiene que la ecuación del momento angular para un volumen general de control (estacionario en reposo o en movimiento, con forma fija o distorsionándose) es:

General:
$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{VC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{V})\ (\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA \qquad \textbf{(6-47)}$$

la cual puede enunciarse como:

$$\left(\begin{array}{c}\text{La suma de todos}\\\text{los momentos}\\\text{externos que actúan}\\\text{sobre un VC}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{La razón de cambio}\\\text{respecto al tiempo del}\\\text{momento angular del}\\\text{contenido del VC}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{El flujo del momento}\\\text{angular hacia fuera de}\\\text{la superficie de control}\\\text{por el flujo de masa}\end{array}\right)$$

Una vez más, $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{SC}$ es la velocidad del fluido con relación a la superficie de control (para usarse en los cálculos del flujo de masa en todos los lugares en donde el fluido cruza la superficie de control) y $\vec{V}$ es la velocidad del fluido según se ve desde un marco fijo de referencia. El producto $\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$ representa el flujo de masa a través de dA, hacia dentro o hacia fuera del volumen de control, lo cual depende del signo.

Para un volumen fijo de control (ningún movimiento o deformación del volumen de control), $\vec{V}_r = \vec{V}$ y la ecuación del momento angular queda:

VC fijo:
$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{VC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA \qquad \textbf{(6-48)}$$

Asimismo, note que las fuerzas que actúan sobre el volumen de control consisten en *fuerzas del cuerpo* que actúan sobre todo el cuerpo de éste, como la gravedad, y las *fuerzas superficiales* que actúan sobre la superficie de control, como las fuerzas de presión y de reacción en los puntos de contacto. El momento neto de torsión consta de los momentos de estas fuerzas así como de los momentos de torsión aplicados sobre el volumen de control.

Casos especiales

En el curso del *flujo estacionario en reposo*, la cantidad del momento angular dentro del volumen de control permanece constante y, en consecuencia, la razón de cambio respecto al tiempo del momento angular del contenido de ese volumen de control es cero; entonces:

Flujo estacionario en reposo:
$$\sum \vec{M} = \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{V})\ (\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA \qquad \textbf{(6-49)}$$

En muchas aplicaciones prácticas, el fluido cruza los límites del volumen de control en cierto número de entradas y de salidas, y es conveniente reemplazar la integral de área por una expresión algebraica escrita en términos de las propiedades promedio sobre las áreas de las secciones transversales, en donde el fluido entra a ese volumen de control o sale de él. En esos casos, el flujo del momento angular puede expresarse como la diferencia entre los momentos angulares de las corrientes entrantes y salientes. Además, en muchos casos, el brazo de palanca del momento $\vec{r}$ es constante a lo largo de la entrada o salida (co-

mo en las turbomáquinas de flujo radial) o es grande en comparación con el diámetro del tubo de entrada o salida (como en los rociadores giratorios para césped). En estos casos, se usa el valor *promedio* de $\vec{r}$ en todo el área de la sección transversal de la entrada o salida. Entonces, una forma aproximada de la ecuación del momento angular en términos de las propiedades promedio en las entradas o salidas queda:

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \sum_{\text{sal}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} \qquad \textbf{(6-50)}$$

Quizá el lector se pregunte por qué no se introduce un factor de corrección en la ecuación 6-50, como se hizo para la conservación de la energía (capítulo 5) y para la conservación del momento lineal (Sección 6-4). La razón es que ese factor de corrección varía de problema a problema, lo cual depende de la configuración geométrica, en virtud del producto cruz entre $\vec{r}$ y $\dot{m}\vec{V}$. Entonces, en vista de que puede calcularse con facilidad un factor de corrección del flujo de la energía cinética y un factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento, para el flujo totalmente desarrollado en tubos, que se pueden aplicar a varios problemas, no se puede proceder de la misma manera para el momento angular. Por fortuna, en muchos problemas de interés práctico en la ingeniería, el error relacionado con el uso de valores promedio del radio y de la velocidad es pequeño, y la aproximación de la ecuación 6-50 es razonable.

Si el flujo es *estacionario en reposo*, la ecuación 6-50 se reduce todavía más para quedar (Fig. 6-34):

Flujo estacionario en reposo:

$$\sum \vec{M} = \sum_{\text{sal}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} \qquad \textbf{(6-51)}$$

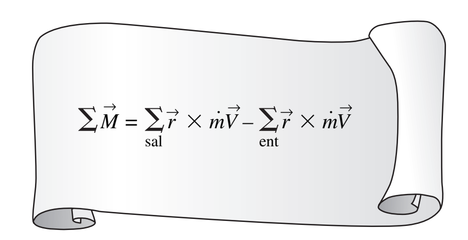


FIGURA 6-34
El momento neto de torsión que actúa sobre un volumen de control en el curso del flujo estacionario en reposo es igual a la diferencia entre los flujos del momento angular, salientes y entrantes.

Ésta expresa que *el momento neto de torsión que actúa sobre el volumen de control en el curso del flujo estacionario en reposo es igual a la diferencia entre los flujos del momento angular, salientes y entrantes*. Esta proposición también se puede expresar para cualquier dirección especificada.

En numerosos problemas, todas las fuerzas significativas y todos los flujos de la cantidad de movimiento se encuentran en el mismo plano y, por lo tanto, todo da lugar a momentos en el mismo plano y en torno al mismo eje. Para estos casos, la ecuación 6-51 puede expresarse en forma escalar como:

$$\sum M = \sum_{\text{sal}} r\dot{m}V - \sum_{\text{ent}} r\dot{m}V \qquad \textbf{(6-52)}$$

donde r representa la distancia normal promedio entre el punto en torno al cual se toman los momentos y la línea de acción de la fuerza o de la velocidad, si se observa la convención del signo para los momentos. Es decir, todos los momentos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj son positivos y todos aquellos en sentido del giro de las manecillas del reloj son negativos.

Flujo sin momentos externos

Cuando no se tienen aplicados momentos externos, la ecuación del momento angular, ecuación 6-50, se reduce a:

Sin momentos externos:

$$0 = \frac{d\vec{H}_{\text{VC}}}{dt} + \sum_{\text{sal}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} \qquad \textbf{(6-53)}$$

Ésta es una expresión del principio de conservación del momento angular, el cual se puede enunciar como *en ausencia de momentos externos, la razón de cambio del momento angular de un volumen de control es igual a la diferencia entre los flujos de momento angular, entrantes y salientes.*

Aro de refuerzo del impulsor
Carcasa
b_2
b_1
r_2
r_1
Ent
Flecha
ω
Aspa del impulsor
Espiral
Sal
Ent
Ojo
Vista lateral
Vista frontal

FIGURA 6-35
Vistas lateral y frontal de una bomba centrífuga típica.

Cuando el momento de inercia I del volumen de control permanece constante, el primer término de la última ecuación se convierte, sencillamente, en el momento de inercia multiplicado por la aceleración angular, $I\vec{\alpha}$. Por lo tanto, en este caso, el volumen de control puede tratarse como un cuerpo sólido con momento neto de torsión de:

$$\vec{M}_{\text{cuerpo}} = I_{\text{cuerpo}}\vec{\alpha} = \sum_{\text{ent}} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V}) - \sum_{\text{sal}} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V}) \tag{6-54}$$

(debido al cambio del momento angular) que actúa sobre él. Este procedimiento puede aplicarse con la finalidad de determinar la aceleración angular de los vehículos y naves espaciales cuando se dispara un cohete en una dirección diferente a la del movimiento.

Dispositivos de flujo radial

Muchos dispositivos de flujo rotatorio, como bombas y ventiladores centrífugos, están relacionados con flujo en la dirección radial, normal al eje de rotación; se conocen como *dispositivos de flujo radial*. Por ejemplo, en una bomba centrífuga, el fluido entra al dispositivo en la dirección radial, por el ojo del impulsor, cambia de dirección hacia fuera a medida que fluye a través de los pasos entre las aspas de éste, se reúne en la espiral y se descarga en la dirección tangencial, como se muestra en la figura 6-35. Los dispositivos de flujo axial se analizan con facilidad cuando se aplica la ecuación del momento lineal; pero los dispositivos de flujo radial presentan importantes cambios en el momento angular del fluido y se analizan de mejor manera con ayuda de la ecuación del momento angular.

Para analizar la bomba centrífuga, se elige como volumen de control la región anular que encierra la sección del impulsor, como se muestra en la figura 6-36. Note que, en general, la velocidad promedio del flujo tiene componentes normal y tangencial, en la entrada y en la salida de la sección del impulsor. Asimismo, cuando la flecha gira a una velocidad angular de ω, las aspas del impulsor tienen una velocidad tangencial de ωr_1 en la entrada y de ωr_2 a la salida. Para el flujo incompresible y estacionario en reposo la ecuación de conservación de la masa se puede escribir como:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V} \qquad \rightarrow \qquad (2\pi r_1 b_1)V_{1,\,n} = (2\pi r_2 b_2)V_{2,\,n} \tag{6-55}$$

donde b_1 y b_2 son los anchos del flujo en la entrada en donde $r = r_1$, y a la salida en donde $r = r_2$, respectivamente (note que el área real circunferencial de la sección transversal es algo menor que $2\pi rb$, ya que el grosor de las aspas no es cero). Entonces las componentes normales promedio, $V_{1,\,n}$ y $V_{2,\,n}$, de la velocidad absoluta se pueden expresar en términos del flujo volumétrico $\dot{V}$ como:

$$V_{1,\,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_1 b_1} \qquad \text{y} \qquad V_{2,\,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_2 b_2} \tag{6-56}$$

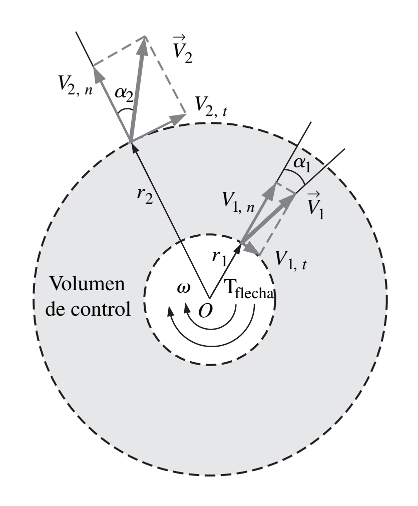


FIGURA 6-36
Volumen anular de control que encierra la sección del impulsor de una bomba centrífuga.

Las componentes normales de la velocidad, $V_{1,\,n}$ y $V_{2,\,n}$, así como la presión que actúa sobre las áreas circunferenciales interior y exterior pasan por el centro de la flecha y no contribuyen con momento de torsión en torno al origen. Entonces, sólo las componentes tangenciales de la velocidad contribuyen con el momento de torsión, y la aplicación de la ecuación del momento angular $\sum M = \sum_{\text{sal}} r\dot{m}V - \sum_{\text{ent}} r\dot{m}V$ al volumen de control da:

$$\text{T}_{\text{flecha}} = \dot{m}(r_2 V_{2,\,t} - r_1 V_{1,\,t}) \tag{6-57}$$

la cual se conoce como **fórmula de Euler de la turbina**. Cuando se conocen los ángulos α_1 y α_2 entre la dirección de las velocidades absolutas del flujo y la dirección radial, queda:

$$\text{T}_{\text{flecha}} = \dot{m}(r_2 V_2 \,\text{sen}\,\alpha_2 - r_1 V_1 \,\text{sen}\,\alpha_1) \tag{6-58}$$

En el caso hipotético en donde la velocidad tangencial del fluido fuera igual a la velocidad angular del aspa, tanto a la entrada como a la salida, se tiene $V_{1,\,t} = \omega r_1$ y $V_{2,\,t} = \omega r_2$, y el momento de torsión queda:

$$\text{T}_{\text{flecha, ideal}} = \dot{m}\omega(r_2^2 - r_1^2) \tag{6-59}$$

donde $\omega = 2\pi\dot{n}$ es la velocidad angular de las aspas. Cuando se conoce el momento de torsión, puede determinarse la potencia en la flecha a partir de $\dot{W}_{\text{flecha}} = \omega \text{T}_{\text{flecha}} = 2\pi\dot{n}\text{T}_{\text{flecha}}$.

EJEMPLO 6-8 Momento de flexión que actúa en la base de un tubo de agua

Se bombea agua subterránea hasta una altura suficiente por un tubo de 10 cm de diámetro que consta de una sección vertical de 2 m de largo y una horizontal de 1 m de largo, como se muestra en la figura 6-37. El agua se descarga al aire atmosférico a una velocidad promedio de 3 m/s y la masa de la sección horizontal del tubo, cuando está llena con agua, es de 12 kg por metro de longitud. El tubo está anclado en el suelo mediante una base de concreto. Determine el momento de flexión que actúa en la base del tubo (punto *A*) y la longitud necesaria de la sección horizontal que haría que el momento en el punto *A* sea cero.

SOLUCIÓN Se bombea agua por una sección de tubería. Deben determinarse el momento que actúa en la base y la longitud necesaria de la sección horizontal para hacer que este momento sea cero.

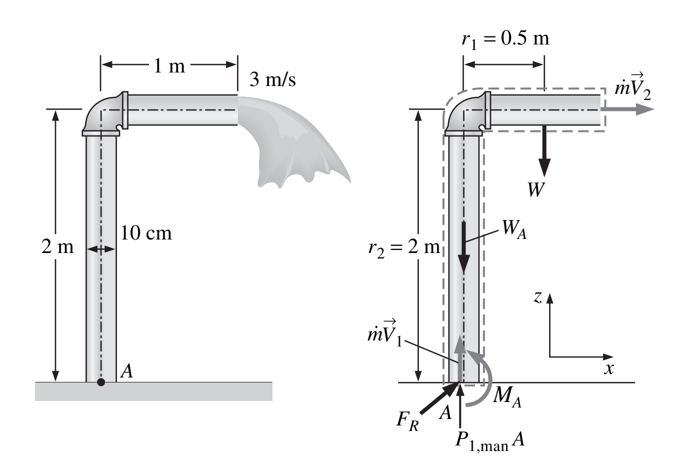


FIGURA 6-37
Esquema para el ejemplo 6-8 y el diagrama de cuerpo libre.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario en reposo. **2** El agua se descarga hacia la atmósfera y, por lo tanto, la presión manométrica a la salida es cero. **3** El diámetro del tubo es pequeño comparado con el brazo de palanca del momento y por esta razón se usan valores promedio del radio y de la velocidad a la salida.
Propiedades Se toma la densidad del agua como 1 000 kg/m^3.
Análisis Se toma el tubo en L completo como el volumen de control y se designan la entrada por 1 y la salida por 2. También se toman las coordenadas x y z como se muestra. El volumen de control y el marco de referencia están fijos.

La ecuación de conservación de la masa para este sistema estacionario en reposo de una entrada y una salida es $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$, $V_1 = V_2 = V$ puesto que A_c es constante. El flujo de masa y el peso de la sección horizontal del tubo son:

$$\dot{m} = A_cV = (1\,000\text{ kg/m}^3)[(0.10\text{ m})^2/4](3\text{ m/s}) = 23.56\text{ kg/s}$$

$$W = mg = (12\text{ kg/m})(1\text{ m})(9.81\text{ m/s}^2)\left(\frac{1\text{ N}}{1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = 118\text{ N}$$

Para determinar el momento que actúa sobre el tubo en el punto A, es necesario tomar el momento de todas las fuerzas, así como de todos los flujos de cantidad de movimiento en torno a ese punto. Éste es un problema de flujo estacionario en reposo y todas las fuerzas así como los flujos de cantidad de movimiento están en el mismo plano. Por lo tanto, en este caso, la ecuación del momento angular puede expresarse como:

$$\sum M = \sum_{\text{sal}} r\dot{m}V - \sum_{\text{ent}} r\dot{m}V$$

donde r es el brazo de palanca promedio, V es la magnitud promedio de la velocidad, todos los momentos en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj son positivos y todos aquellos al giro de las manecillas del reloj son negativos.

En la figura 6-37 se da el diagrama de cuerpo libre del tubo con forma de L. Note que los momentos de todas las fuerzas y de todos los flujos de cantidad de movimiento que pasan por el punto A son cero, la única fuerza que crea un momento en torno a ese punto es el peso W de la sección horizontal del tubo y el único flujo de cantidad de movimiento que crea un momento es el flujo de salida (los dos son negativos puesto que los dos momentos tienen el sentido del movimiento de las manecillas del reloj). Entonces la ecuación del momento angular en torno al punto A queda:

$$M_A - r_1W = -r_2\dot{m}V_2$$

Cuando se despeja M_A y se sustituye da:

$$\begin{aligned} M_A &= r_1W - r_2\dot{m}V_2 \\ &= (0.5\text{ m})(118\text{ N}) - (2\text{ m})(23.56\text{ kg/s})(3\text{ m/s})\left(\frac{1\text{ N}}{1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) \\ &= \mathbf{-\,82.5\ N\cdot m} \end{aligned}$$

El signo negativo indica que la dirección supuesta para M_A es errónea y debe invertirse. Por lo tanto, un momento de 82.5 N · m actúa en el tronco del tubo, en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Es decir, la base de concreto debe aplicar un momento de 82.5 N · m sobre el tronco del tubo, en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, para contrarrestar el momento en exceso causado por la corriente de salida.

El peso del tubo horizontal es $w = W/L = 118$ N por m de longitud. Por lo tanto, el peso para una longitud de L m es Lw, con un brazo del momento de $r_1 = L/2$. Si se hace $M_A = 0$ y se sustituye, se determina que la longitud L del tubo horizontal que hará que se anule el momento en el tronco del tubo es:

$$0 = r_1W - r_2\dot{m}V_2 \quad \rightarrow \quad 0 = (L/2)Lw - r_2\dot{m}V_2$$

o

$$L = \sqrt{\frac{2r_2\dot{m}V_2}{w}} = \sqrt{\frac{2 \times 141.4 \text{ N} \cdot \text{m}}{118 \text{ N/m}}} = \mathbf{2.40 \text{ m}}$$

Discusión Note que el peso del tubo y la cantidad de movimiento del flujo de salida crean momentos que se oponen en el punto A. Este ejemplo señala la importancia de considerar los momentos de las cantidades de movimiento de los flujos de fluido cuando se realiza un análisis dinámico y se evalúan los esfuerzos en los materiales del tubo en las secciones transversales críticas.

EJEMPLO 6-9 Generación de potencia a partir de un sistema de rociador

Se va a convertir un rociador grande para césped que tiene cuatro brazos idénticos en una turbina para generar potencia eléctrica cuando se una un generador a su eje rotatorio, como se muestra en la figura 6-38. El agua entra al rociador desde la base, a lo largo del eje de rotación, a razón de 20 L/s y sale por las boquillas en la dirección tangencial. El rociador gira a razón de 300 rpm en un plano horizontal. El diámetro de cada chorro es de 1 cm y la distancia normal entre el eje de rotación y el centro de cada boquilla es de 0.6 m. Estime la potencia eléctrica producida.

SOLUCIÓN Se usa un rociador de cuatro brazos para generar potencia eléctrica. Debe determinarse la potencia producida para un flujo y una velocidad de rotación especificada.

Hipótesis **1** El flujo es cíclicamente estacionario en reposo (es decir, estacionarioen reposo desde un marco de referencia que gire con el rociador). **2** El agua se descarga hacia la atmósfera y, por lo tanto, la presión manométrica en la salida de la boquilla es cero. **3** Se desprecian las pérdidas en el generador y la resistencia al movimiento del aire de los componentes giratorios. **4** El diámetro de la boquilla es pequeño comparado con el brazo de palanca y por esta razón se usan valores promedio del radio y de la velocidad a la salida.

Propiedades Se toma la densidad del agua como 1 000 kg/m^3 = 1 kg/L.

Análisis Se toma el disco que encierra los brazos del rociador como el volumen de control, el cual es estacionario en reposo.

La ecuación de conservación de la masa para este sistema de flujo estacionario en reposo es $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_{\text{total}}$. Note que las cuatro boquillas son idénticas, se tiene $\dot{m}_{\text{boquilla}} = \dot{m}_{\text{total}}/4$ o $\dot{V}_{\text{boquilla}} = \dot{V}_{\text{total}}/4$ dado que la densidad del agua es constante. La velocidad promedio del chorro de agua a la salida, en relación con la boquilla, es:

$$V_{\text{chorro}} = \frac{\dot{V}_{\text{boquilla}}}{A_{\text{chorro}}} = \frac{5 \text{ L/s}}{[\ \ (0.01 \text{ m})^2/4]}\left(\frac{1 \text{ m}^3}{1\,000 \text{ L}}\right) = 63.66 \text{ m/s}$$

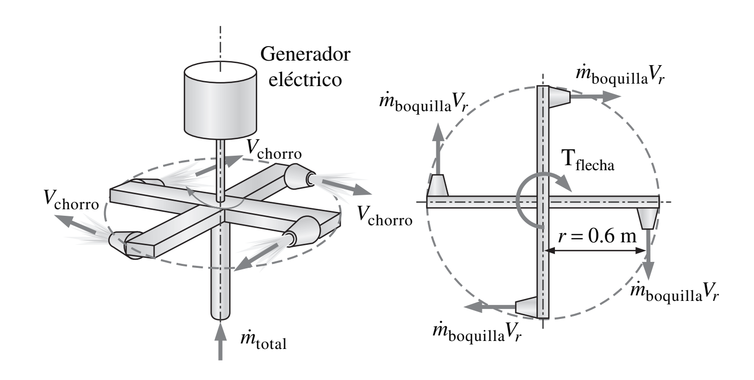


FIGURA 6–38
Esquema para el ejemplo 6-9 y el diagrama de cuerpo libre.

Las velocidades angular y tangencial de las boquillas son:

$$\omega = 2\pi\dot{n} = 2\pi(300 \text{ rev/min})\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 31.42 \text{ rad/s}$$

$$V_{\text{boquilla}} = r\omega = (0.6 \text{ m})(31.42 \text{ rad/s}) = 18.85 \text{ m/s}$$

Es decir, el agua en la boquilla también se desplaza a una velocidad de 18.85 m/s en la dirección opuesta cuando se descarga. Entonces la velocidad promedio del chorro de agua en relación con el volumen de control (o en relación con un lugar fijo sobre la Tierra) queda:

$$V_r = V_{\text{chorro}} - V_{\text{boquilla}} = 63.66 - 18.85 = 44.81 \text{ m/s}$$

Cuando se observa que éste es un problema de flujo cíclicamente estacionario en reposo y que todas las fuerzas y todos los flujos de cantidades de movimiento están en el mismo plano, se puede dar una aproximación de la ecuación del momento angular como $\sum M = \sum_{\text{sal}} r\dot{m}V - \sum_{\text{ent}} r\dot{m}V,$ donde r es el brazo de palanca, todos los momentos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj son positivos y todos aquellos en la dirección del giro de las manecillas son negativos.

En la figura 6-38 se ilustra el diagrama de cuerpo libre del disco que contiene los brazos del rociador. Note que los momentos de todas las fuerzas y de todos los flujos de cantidad de movimiento que pasan por el eje de rotación son cero. Los flujos de cantidad de movimiento de los chorros de agua que salen por las boquillas crean un momento en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj y el efecto del generador sobre el volumen de control también es un momento en ese mismo sentido (por lo tanto, ambos son negativos). Entonces la ecuación del momento angular en torno al eje de rotación queda:

$$-\text{T}_{\text{flecha}} = -4r\dot{m}_{\text{boquilla}}V_r \qquad \text{o} \qquad \text{T}_{\text{flecha}} = r\dot{m}_{\text{total}}V_r$$

Se sustituye y se determina que el momento de torsión transmitido a través de la flecha es:

$$\text{T}_{\text{flecha}} = r\dot{m}_{\text{total}}V_r = (0.6 \text{ m})(20 \text{ kg/s})(44.81 \text{ m/s})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = 537.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

dado que $\dot{m}_{\text{total}} = \rho\dot{V}_{\text{total}} = (1 \text{ kg/L})(20 \text{ L/s}) = 20 \text{ kg/s}$.

Entonces la potencia generada queda:

$$\dot{W} = 2\pi\dot{n}\text{T}_{\text{flecha}} = \omega\text{T}_{\text{flecha}} = (31.42 \text{ rad/s})(537.7 \text{ N} \cdot \text{m})\left(\frac{1 \text{ kW}}{1\,000 \text{ N} \cdot \text{m/s}}\right) = \mathbf{16.9 \text{ kW}}$$

Por lo tanto, esta turbina del tipo de rociador tiene la posibilidad de producir 16.9 kW de potencia.

Discusión Para situar en perspectiva el resultado obtenido, se consideran dos casos límite. En el primero, el rociador está obstruido y la velocidad angular es cero. El momento de torsión desarrollado será máximo en este caso, dado que $V_{\text{boquilla}} = 0$ y, por tanto, $V_r = V_{\text{chorro}} = 63.66$ m/s, lo que da $\text{T}_{\text{flecha, máx}} = 764$ N · m. Pero la potencia generada será cero, ya que la flecha no gira.

En el segundo caso límite, se desconecta la flecha del generador (y el momento de torsión y la generación de potencia son cero) y la flecha se acelera hasta que alcanza una velocidad de equilibrio. Si se hace $\text{T}_{\text{flecha}} = 0$ en la ecuación del momento angular da $V_r = 0$ y donde $V_{\text{chorro}} = V_{\text{boquilla}} = 63.66$ m/s. La magnitud correspondiente de la velocidad angular del rociador es:

$$\dot{n} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{V_{\text{boquilla}}}{2\pi r} = \frac{63.66 \text{ m/s}}{2\pi(0.6 \text{ m})}\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) = 1\,013 \text{ rpm}$$

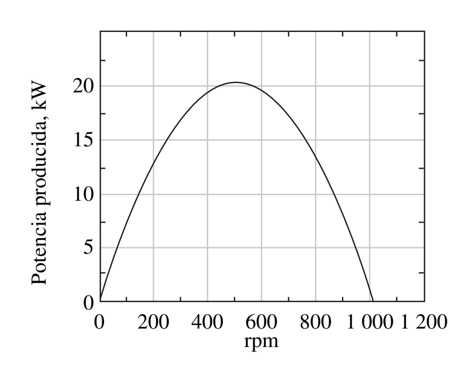


FIGURA 6-39
Variación de la potencia producida con la magnitud de la velocidad angular.

Con estas rpm, la velocidad del chorro será cero en relación con un observador sobre la Tierra (o en relación con el volumen fijo de control con forma de disco seleccionado).

En la figura 6-39 se ilustra la gráfica de la variación de la potencia producida con respecto a la magnitud de la velocidad angular. Note que la potencia producida aumenta cuando aumentan las rpm, y alcanza un máximo (a alrededor de 500 rpm, en este caso) y a continuación decrece. La potencia real producida será menor que ésta, debido a la ineficiencia del generador (capítulo 5).

RESUMEN

En este capítulo se trata principalmente la conservación de la cantidad de movimiento para volúmenes fijos de control. Las fuerzas que actúan sobre el volumen de control constan de *fuerzas del cuerpo*, que actúan en todo el cuerpo del volumen de control (como la fuerza de gravedad, la eléctrica y la magnética) y de *fuerzas superficiales*, que actúan sobre la superficie de control (como la fuerza de presión y las de reacción en los puntos de contacto). La suma de todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control en un instante en particular se representa po $\Sigma \vec{F}$ y se expresa como:

$$\underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{fuerza total}} = \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{gravedad}}}_{\text{fuerza del cuerpo}} + \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{presión}} + \sum \vec{F}_{\text{viscosa}} + \sum \vec{F}_{\text{otra}}}_{\text{fuerzas superficiales}}$$

La segunda Ley de Newton puede enunciarse como *la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es igual a la razón de cambio respecto al tiempo del momento lineal de ese sistema*. Si se hace $b = \vec{V}$ y $B = m\vec{V}$ en el teorema del transporte de Reynolds y se utiliza la segunda Ley de Newton, se obtiene la *ecuación del momento lineal* para un volumen de control como:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho\vec{V}\, dV + \int_{\text{SC}} \rho\vec{V}(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

Ésta se reduce a los casos especiales siguientes:

Flujo estacionario en reposo: $\sum \vec{F} = \int_{\text{CS}} \rho\vec{V}(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$

Flujo no estacionario en reposo (*forma algebraica*):

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} \rho\vec{V}\, dV + \sum_{\text{sal}} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta\dot{m}\vec{V}$$

Flujo estacionario en reposo (*forma algebraica*):

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{sal}} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta\dot{m}\vec{V}$$

No fuerza externa: $0 = \dfrac{d(m\vec{V})_{\text{VC}}}{dt} + \sum_{\text{sal}} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta\dot{m}\vec{V}$

en donde β es el factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento. Un volumen de control cuya masa m permanece constante puede tratarse como un cuerpo sólido, con una fuerza neta o empuje de $\vec{F}_{\text{cuerpo}} = m_{\text{cuerpo}}\vec{a} = \sum_{\text{ent}} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{sal}} \beta\dot{m}\vec{V}$

actuando sobre él.

La segunda Ley de Newton también puede enunciarse como *la razón de cambio del momento angular de un sistema es igual al momento neto de torsión que actúa sobre ese sistema*. Si se hace $b = \vec{r} \times \vec{V}$ y entonces $B = \vec{H}$ en el teorema del transporte de Reynolds, da la *ecuación del momento angular* como:

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV + \int_{\text{SC}} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

Ésta se reduce a los casos especiales siguientes:

Flujo estacionario en reposo: $\sum \vec{M} = \int_{\text{SC}} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$

Flujo no estacionario en reposo (*forma algebraica*):

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{\text{VC}} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV + \sum_{\text{sal}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V}$$

Flujo estacionario en reposo y uniforme:

$$\sum \vec{M} = \sum_{\text{sal}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V}$$

Forma escalar para una dirección:

$$\sum M = \sum_{\text{sal}} r\dot{m}V - \sum_{\text{ent}} r\dot{m}V$$

Ningún momento externo:

$$0 = \frac{d\vec{H}_{\text{VC}}}{dt} + \sum_{\text{sal}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{ent}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V}$$

Un volumen de control cuyo momento de inercia I permanece constante puede tratarse como un cuerpo sólido, con un momento neto de torsión de:

$$\vec{M}_{\text{cuerpo}} = I_{\text{cuerpo}}\vec{\alpha} = \sum_{\text{ent}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{sal}} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V}$$

actuando sobre él. Esta relación puede utilizarse para determinar la aceleración angular de las naves espaciales cuando se dispara un cohete.

Las ecuaciones del momento lineal y del angular tienen importancia fundamental en el análisis de la turbomaquinaria y se usan con amplitud en el capítulo 14.

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. C. T. Crowe, J. A. Roberson, y D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics*, 7a. ed. Nueva York: Wiley, 2001.
2. R. W. Fox and A. T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 5a. ed. Nueva York: Wiley, 1999.
3. P. K. Kundu. *Fluid Mechanics*. San Diego, CA: Academic Press, 1990.
4. B. R. Munson, D. F. Young, y T. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4a. ed. Nueva York: Wiley, 2002.

PROBLEMAS*

Leyes de Newton y conservación de la cantidad de movimiento

6-1C Exprese la primera, la segunda y la tercera Ley de Newton.

6-2C La cantidad de movimiento ¿es un vector? Si es así, ¿en qué dirección apunta?

6-3C Exprese el principio de conservación de la cantidad de movimiento. ¿Qué puede decir acerca de la cantidad de movimiento de un cuerpo si la fuerza neta que actúa sobre él es cero?

6-4C Exprese la segunda Ley de Newton del movimiento para los cuerpos en rotación. ¿Qué puede decir acerca de la velocidad angular y del momento angular de un cuerpo no-rígido en rotación de masa constante si el momento neto de torsión que actúa sobre él es cero?

6-5C Considere dos cuerpos rígidos que tienen la misma masa y magnitud de la velocidad angular. ¿Cree que estos dos cuerpos deben tener el mismo momento angular? Explíquelo.

Ecuación del momento lineal

6-6C Explique la importancia del teorema del transporte de Reynolds en la mecánica de fluidos y describa cómo se obtiene la ecuación del momento lineal a partir de él.

6-7C Describa las fuerzas del cuerpo y las fuerzas superficiales y explique cómo se determina la fuerza neta que actúa sobre un volumen de control. El peso del fluido ¿es una fuerza del cuerpo o una superficial? ¿Qué puede decirse acerca de la presión?

6-8C ¿Cómo surgen las fuerzas superficiales en el análisis de la cantidad de movimiento de un volumen de control? ¿Cómo puede minimizarse el número de fuerzas superficiales expuestas en el desarrollo del análisis?

6-9C ¿Cuál es la importancia del factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento en el análisis de esta última de los sistemas lentos? ¿Para cuál tipo de flujo es importante y debe considerarse en el análisis: flujo laminar, flujo turbulento o flujo a chorro?

* Los problemas designados por una "C" son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono ◎ se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono ▣ son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

6-10C Escriba la ecuación de la cantidad de movimiento para el flujo unidimensional en reposo, para el caso de que no existan fuerzas externas, y explique el significado físico de sus términos.

6-11C En la aplicación de la ecuación de la cantidad de movimiento, explique por qué por lo general se descarta la presión atmosférica y se trabaja sólo con presiones manométricas.

6-12C Dos bomberos están apagando un incendio con mangueras de agua y boquillas idénticas, excepto que uno de ellos sostiene la manguera recta de modo que el agua salga de la boquilla en la misma dirección en la que viene, en tanto que el otro la sostiene apuntando hacia atrás de modo que el agua describe una vuelta en "u" antes de ser descargada. ¿Cuál de los dos bomberos experimentará una mayor fuerza de reacción?

6-13C Un cohete en el espacio (no existe fricción ni resistencia al movimiento) puede expeler gases en relación con el mismo a cierta alta velocidad *V*. ¿Es *V* el límite para la última velocidad del cohete?

6-14C Describa en términos de la cantidad de movimiento y del flujo de aire la razón por la que un helicóptero se sostiene en el aire.



FIGURA P6-14C

6-15C ¿Un helicóptero necesita más potencia, una potencia igual o menos potencia para sostenerse en el aire en la cima de una montaña alta que la necesaria a nivel del mar? Explíquelo.

6-16C En determinado lugar ¿un helicóptero necesitará más energía en verano o en invierno para lograr un rendimiento especificado? Explíquelo.

6-17C Un chorro de agua horizontal que proviene de una boquilla con sección transversal de salida constante choca normalmente contra una placa plana vertical estacionaria. Se necesita cierta fuerza *F* para sostener la placa contra el chorro de agua. Si se duplica la velocidad del agua, ¿también se duplicará la fuerza necesaria de sostén? Explíquelo.

6-18C Un chorro de agua horizontal con velocidad constante que proviene de una boquilla estacionaria choca normalmente contra una placa plana vertical que se sostiene en una vía casi sin fricción. A medida que el chorro de agua choca contra la placa, ésta empieza a moverse debido a la fuerza del agua. ¿La aceleración de la placa se mantendrá constante o cambiará? Explíquelo.

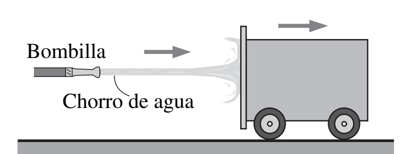


FIGURA P6-18C

6-19C Un chorro de agua horizontal con velocidad constante V, que proviene de una boquilla estacionaria, choca normalmente contra una placa plana vertical que se sostiene en una vía casi sin fricción. Conforme el chorro de agua choca contra la placa, ésta empieza a moverse debido a la fuerza del agua. ¿Cuál es la velocidad más alta que puede alcanzar la placa? Explíquelo.

6-20 Demuestre que la fuerza ejercida por un chorro de líquido sobre una boquilla estacionaria, cuando sale de ésta con una velocidad V, es proporcional a V^2 o, de manera alternativa, a $\dot{m}^2$.

6-21 Un chorro de agua horizontal con velocidad constante V choca normalmente contra una placa plana vertical y se dispersa hacia los lados en el plano vertical. La placa se mueve hacia el chorro de agua incidente con la velocidad $\frac{1}{2}V$. Si se necesita una fuerza F para mantener la placa en reposo, ¿cuánta fuerza se necesita para moverla hacia el chorro de agua?

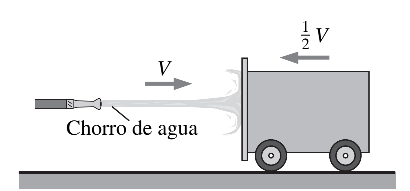


FIGURA P6-21

6-22 Se usa un codo de 90° para dirigir hacia arriba un flujo de agua que viene por un tubo horizontal a razón de 25 kg/s. El diámetro del codo en toda su longitud es de 10 cm. Dicho codo descarga el agua hacia la atmósfera y, por lo tanto, la presión a la salida es la presión atmosférica local. La diferencia de elevación entre los centros de la salida y de la entrada del codo es de 35 cm. Se considera que el peso de este codo y del agua que está en él es despreciable. Determine *a*) la presión manométrica en el centro de la entrada del codo y *b*) la fuerza de anclaje necesaria para sostener a dicho codo en su lugar. Tome el factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento como 1.03.

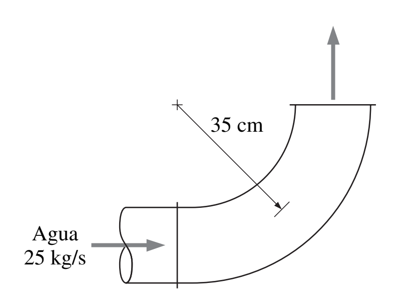


FIGURA P6-22

6-23 Repita el problema 6-22 para el caso en donde se fije otro codo (idéntico) al codo existente de modo que el fluido realice una vuelta en "u". *Respuestas: a*) 6.87 kPa, *b*) 218 N

6-24I Un chorro de agua horizontal choca contra una placa plana vertical a 30 ft/s y se dispersa hacia los lados en el plano vertical. Si se necesita una fuerza de 350 lbf para mantener la placa contra el chorro de agua, determine el flujo volumétrico de esta última.

6-25 Se usa un codo reductor para desviar hacia arriba en un ángulo $\theta = 45°$, respecto de su dirección original, un flujo de agua que viene por un tubo horizontal a razón de 30 kg/s, que acelera al mismo tiempo. El codo descarga el agua hacia la atmósfera. El área de la sección transversal del codo es de 150 cm^2 a la entrada y de 25 cm^2 a la salida. La diferencia de elevación entre los centros de la salida y de la entrada es de 40 cm. La masa del codo y del agua en él es de 50 kg. Determine la fuerza de anclaje necesaria para sostener el codo en su lugar. Tome el factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento como 1.03.

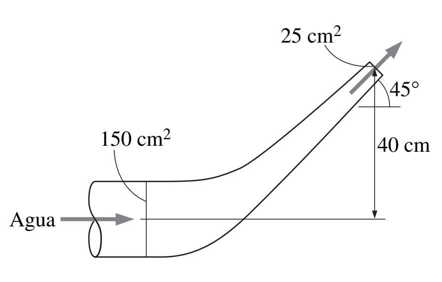


FIGURA P6-25

6-26 Repita el problema 6-25 para el caso en que $\theta = 110°$.

6-27 Se acelera agua por una boquilla hasta 15 m/s y choca contra la superficie posterior vertical de un carretón que se está moviendo horizontalmente a una velocidad constante de 5 m/s en la dirección del flujo. El flujo de masa del agua es de 25 kg/s. Después del choque, el chorro de agua se esparce en todas direcciones en el plano de la superficie posterior. *a*) Determine la fuerza que es necesaria aplicar sobre los frenos del carretón para impedir que se acelere. *b*) Si se usara esta fuerza para generar potencia, en vez de desperdiciarla en los frenos, determine la cantidad máxima de potencia que puede generarse. *Respuestas: a*) 250 N, *b*) 1.25 kW

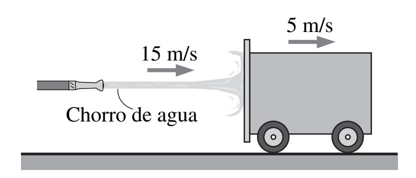


FIGURA P6-27

6-28 Vuelva a considerar el problema 6-27. Si la masa del carretón es de 300 kg y los frenos fallan, determine su aceleración cuando el agua choca contra él por primera vez. Suponga que la masa del agua que moja la superficie posterior es despreciable.

6-29I Un chorro de agua de 100 ft^3/s se está moviendo en la dirección *x* positiva a 20 ft/s. El chorro choca contra un bifurcador en reposo, en tal manera que la mitad del flujo se desvía hacia arriba en 45° y la otra mitad se dirige hacia abajo, y los dos flujos tienen una velocidad final de 20 ft/s. Descarte los efectos de la gravitación, determine las componentes *x* y *z* de la fuerza necesaria para mantener el bifurcador en su lugar contra la fuerza del agua.

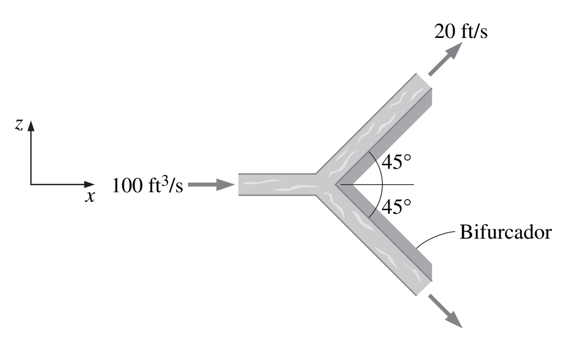


FIGURA P6-29E

6-30I Vuelva a considerar el problema 6-29I. Use el Software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) e investigue el efecto del ángulo del bifurcador sobre la fuerza ejercida en él mismo en la dirección del flujo entrante. Suponga que la mitad del ángulo varía desde 0 hasta 180°, en incrementos de 10°. Elabore una tabla y trace la gráfica de sus resultados y llegue a algunas conclusiones.

6-31 Un chorro de agua horizontal de 5 cm de diámetro con velocidad de 18 m/s choca normalmente contra una placa vertical cuya masa es de 1 000 kg. Esta placa se sostiene en una vía casi sin fricción y está inicialmente en reposo. Cuando el chorro choca contra la placa, ésta empieza a moverse en la dirección del chorro. El agua siempre se dispersa en el plano de la placa que se retrocede. Determine *a*) la aceleración de la placa cuando el chorro choca por primera vez contra ella (tiempo = 0), *b*) el tiempo que pasará para que la placa alcance una velocidad de 9 m/s y *c*) la velocidad de esa placa 20 s después que el chorro choca por primera vez contra ella. Suponga que la velocidad del chorro en relación con la placa se mantiene constante.

6-32 Fluye agua en un tubo horizontal de 30 cm de diámetro a 5 m/s y 300 kPa de presión manométrica y entra a la sección de un codo reductor de 90°, el cual lo conecta a un tubo vertical de 15 cm de diámetro. La entrada del codo está 50 cm arriba de la salida. Desprecie cualesquiera efectos de fricción y gravitacionales y determine la fuerza neta resultante ejercida sobre el reductor por el agua. Tome el factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento como 1.04.

6-33 Grandes turbinas de viento que se consiguen en el mercado tienen diámetros del círculo que describen las puntas de los álabes tan grandes como 100 m y generan más de 3 MW de potencia eléctrica en las condiciones de punto de diseño. Considere una turbina de viento con un diámetro del círculo que describen las puntas de las aspas de 90 m sujeta a vientos en reposo de 25 km/h. Si la eficiencia combinada del turbogenerador de la turbina de viento es de 32 por ciento, determine *a*) la potencia generada por la turbina y *b*) la fuerza horizontal ejercida por el viento sobre el mástil de soporte de la turbina. Tome la densidad del aire como 1.25 kg/m^3 y descarte los efectos de la fricción.

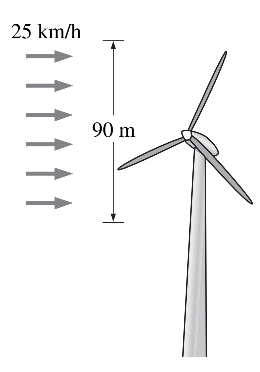


FIGURA P6-33

6-34I Un chorro horizontal de agua de 3 in de diámetro que tiene una velocidad de 140 ft/s choca contra una placa curva, la cual desvía el agua 180° a la misma magnitud de la velocidad. Ignore los efectos de la fricción, y determine la fuerza necesaria para sostener la placa contra el chorro de agua.

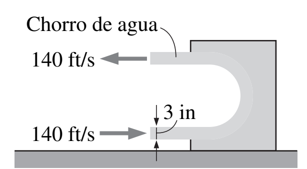


FIGURA P6-34E

6-35I Un chorro horizontal de agua de 3 in de diámetro, con una velocidad de 140 ft/s, choca contra una placa curva, la cual desvía el agua en 135° a partir de su dirección original. ¿Cuánta fuerza se necesita para sostener la placa contra el chorro de agua y cuál es su dirección? Descarte los efectos de la fricción y los gravitacionales.

6-36 Unos bomberos sostienen una boquilla en el extremo de una manguera mientras tratan de extinguir un incendio. Si el diá-

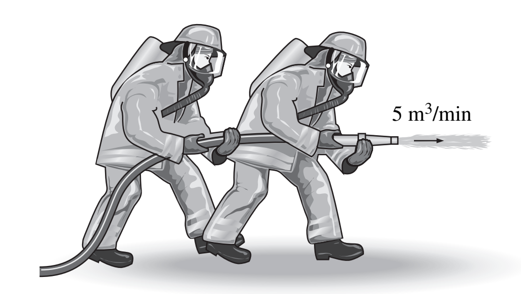


FIGURA P6-36

metro de salida de la boquilla es de 6 cm y el flujo del agua es de 5 m^3/min, determine *a*) la velocidad promedio del agua a la salida y *b*) la fuerza horizontal que necesitan ejercer los bomberos para sostener la boquilla. *Respuestas: a*) 29.5 m/s, *b*) 2 457 N

6-37 Un chorro horizontal de agua de 5 cm de diámetro, con una velocidad de 30 m/s, choca contra una placa plana que se mueve en la misma dirección que la del chorro a una velocidad de 10 m/s. El agua se dispersa en todas direcciones en el plano de la placa. ¿Cuánta fuerza ejerce el chorro de agua sobre la placa?

6-38 Vuelva a considerar el problema 6-37. Use el Software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) e investigue el efecto de la velocidad de la placa sobre la fuerza ejercida sobre la misma. Suponga que la velocidad de la placa varía desde 0 hasta 30 m/s, en incrementos de 3 m/s. Elabore una tabla y trace la gráfica de sus resultados.

6-39I Un ventilador con aspas de 24 in de diámetro mueve 2 000 cfm (pies cúbicos por minuto, *cubic feet per minute*) de aire a 70°F, a nivel del mar. Determine *a*) la fuerza necesaria para sostener el ventilador y *b*) la entrada de potencia mínima necesaria para este último. Elija el volumen de control suficientemente grande para contener el ventilador y que la presión manométrica y la velocidad del aire en el lado de la entrada sean cero. Suponga que el aire se aproxima al ventilador a través de un área grande, con velocidad despreciable, y que el aire sale de ese ventilador con una velocidad uniforme, a la presión atmosférica, a través de un cilindro imaginario cuyo diámetro es el diámetro de las aspas del propio ventilador. *Respuestas: a*) 0.82 lbf, *b*) 5.91 W

6-40 Un helicóptero descargado que tiene una masa de 10 000 kg se sostiene en el aire a nivel del mar mientras se está cargando. En el modo de flotación sin carga, las aspas giran a 400 rpm. Las aspas horizontales que están arriba del helicóptero hacen que una masa de aire de 15 m de diámetro se mueva hacia abajo a una velocidad promedio proporcional a la velocidad de rotación de esas aspas (rpm). Se coloca una carga de 15 000 kg al helicóptero y éste se eleva con lentitud. Determine *a*) el flujo volumétrico del aire arrastrado hacia abajo que el helicóptero genera mientras se encuentra en sustentación sin carga así como la entrada necesaria de potencia y *b*) las rpm de las aspas del propio helicóptero para sostenerse en el aire con la carga de 15 000 kg, así como la entrada necesaria de potencia. Tome la densidad del aire atmosférico como 1.18 kg/m^3. Suponga que el aire se aproxima a las aspas desde arriba a través de un área grande, con velocidad despreciable, y que éstas fuerzan al aire a que se mueva hacia abajo con una velocidad uniforme por un cilindro imaginario cuya base es el área del círculo que cubren.

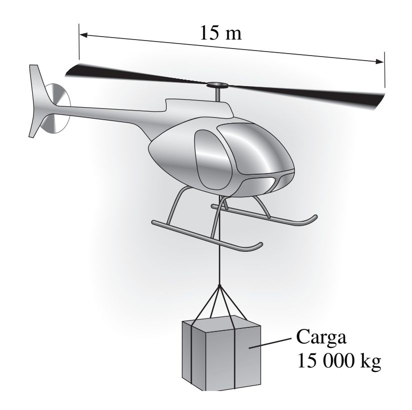


FIGURA P6-40

6-41 Vuelva a considerar el helicóptero del problema 6-40, excepto que está flotando en el aire en la cima de una montaña de 3 000 m de altura, en donde la densidad del aire es de 0.79 kg/m^3. Se observa que las aspas del helicóptero sin carga deben girar a 400 rpm para hacer que éste flote en el aire a nivel del mar, determine la velocidad de rotación de esas aspas para sostenerlo a la mayor altitud. Asimismo, determine el porcentaje de aumento en la entrada necesaria de potencia para mantenerlo en el aire a 3 000 m de altitud, en relación con la que se necesita a nivel del mar. *Respuestas:* 489 rpm, 22 por ciento

6-42 En los sistemas de irrigación, es de uso común una compuerta de desagüe, la cual controla el flujo en un canal, sencillamente, subiendo o bajando una placa vertical. Se ejerce una fuerza sobre la compuerta debida a la diferencia entre las alturas y_1 y y_2 del agua y las velocidades del flujo V_1 y V_2, corriente arriba y corriente abajo de la propia compuerta, respectivamente. Descarte las fuerzas cortantes de la pared en las superficies del canal, y desarrolle relaciones para V_1 y V_2, así como la fuerza que actúa sobre una compuerta de desagüe de ancho w en el curso del flujo en reposo y uniforme.

Respuesta: $F_R = \dot{m}(V_1 - V_2) + \dfrac{w}{2}\rho g\,(y_1^2 - y_2^2)$

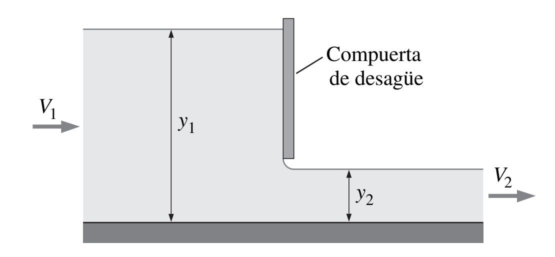


FIGURA P6-42

6-43 Entra agua axialmente a una bomba centrífuga, a la presión atmosférica, a razón de 0.12 m^3/s y a una velocidad de 7 m/s, y sale en la dirección normal a lo largo de la carcasa, como se muestra en la figura P6-43. Determine la fuerza que actúa sobre la flecha (la cual también es la fuerza que actúa sobre el cojinete de ésta) en la dirección axial.

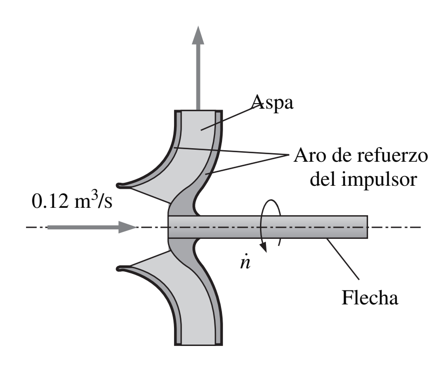


FIGURA P6-43

Ecuación del momento angular

6-44C ¿Cómo se obtiene la ecuación del momento angular a partir de las ecuaciones del transporte de Reynolds?

6-45C Exprese la ecuación del momento angular del flujo no-en reposo en forma vectorial para un volumen de control que tenga un momento de inercia constante $\vec{V}$, sin momentos externos aplicados, un flujo saliente uniforme de velocidad $\dot{m}$ y flujo de masa.

6-46C Exprese la ecuación del momento angular en forma escalar, en torno a un eje especificado de rotación, para un volumen fijo de control y para un flujo en reposo y uniforme.

6-47 Fluye agua por un tubo de 12 cm de diámetro que consta de una sección vertical de 3 m de largo y una horizontal de 2 m de largo, con un codo de 90° a la salida para forzar al agua a que se descargue hacia abajo, como se muestra en la figura P6-47, en dirección vertical. El agua se descarga al aire atmosférico a una velocidad de 4 m/s y la masa de la sección del tubo, cuando está llena con agua, es de 15 kg por metro de longitud. Determine el momento que actúa en la intersección de las secciones vertical y horizontal del tubo (punto *A*). ¿Cuál sería su respuesta si el flujo se descargara hacia arriba, en vez de hacia abajo?

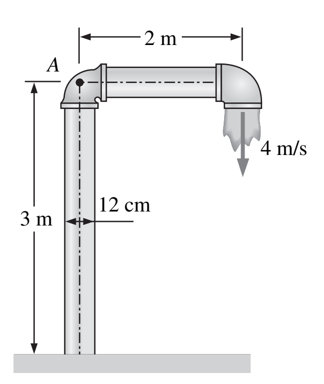


FIGURA P6-47

6-48I Se usa un rociador grande para césped que tiene dos brazos idénticos para generar potencia eléctrica cuando se une un generador a su eje rotatorio. El agua entra al rociador desde la base, a lo largo del eje de rotación, a razón de 8 gal/s y sale por las boquillas en la dirección tangencial. El rociador gira a razón de 250 rpm en un plano horizontal. El diámetro de cada chorro es de 0.5 in y la distancia normal entre el eje de rotación y el centro de cada boquilla es de 2 ft. Determine la potencia eléctrica producida.

6-49I Vuelva a considerar el rociador para césped del problema 6-48I. Si se obstruye el rociador, determine el momento que actúa sobre él.

6-50 Se usa un rociador para césped que tiene tres brazos idénticos para rociar agua a un jardín. El rociador gira en el plano horizontal por el impulso causado por el flujo de la propia agua. El agua entra al rociador a lo largo del eje de rotación, a razón de 40 L/s y sale por las boquillas de 1.2 cm de diámetro en la dirección tangencial. El cojinete aplica un momento de torsión retardador de $T_0 = 50$ N · m debido a la fricción de las velocidades anticipadas de operación. Para una distancia normal de 40 cm entre el eje de rotación y el centro de las boquillas, determine la velocidad angular de la flecha del rociador.

6-51 Las turbinas de rueda Pelton son de uso común en las plantas generadoras de potencia eléctrica. En estas turbinas, un chorro a alta velocidad, a una velocidad de V_j choca contra los cucharones, forzando a que la rueda gire. Los cucharones invierten la dirección del chorro y éste sale de los mismos formando un ángulo β con la dirección del propio chorro, como se muestra en la figura P6-51. Demuestre que la potencia producida por una rueda Pelton de radio *r*, que gira de manera estacionaria a una velocidad angular de ω es $\dot{W}_{\text{flecha}} = \rho\omega r\dot{V}(V_j - \omega r)(1 - \cos\beta)$, en donde ρ es la densidad y $\dot{V}$ es el flujo volumétrico del fluido. Obtenga el valor numérico para $\rho = 1\,000$ kg/m^3, $r = 2$ m, $\dot{V} = 10$ m^3/s, $\dot{n} = 150$ rpm, $\beta = 160°$ y $V_j = 50$ m/s.

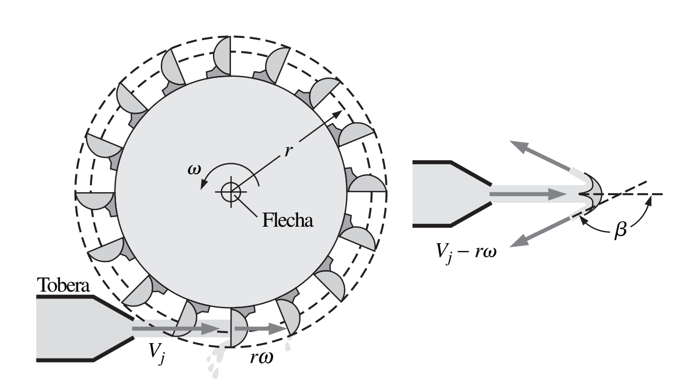


FIGURA P6-51

6-52 Vuelva a considerar el problema 6-51. La turbina tendrá la eficiencia máxima cuando $\beta = 180°$, pero esto no es práctico. Investigue el efecto de β sobre la generación de potencia, hágalo variar desde 0 hasta 180°. ¿Cree el lector que se desperdicia una gran fracción de potencia cuando se usan cucharones con β de 160°?

6-53 El impulsor de un soplador centrífugo tiene un radio de 15 cm y un ancho de aspas de 6.1 cm en la entrada, así como

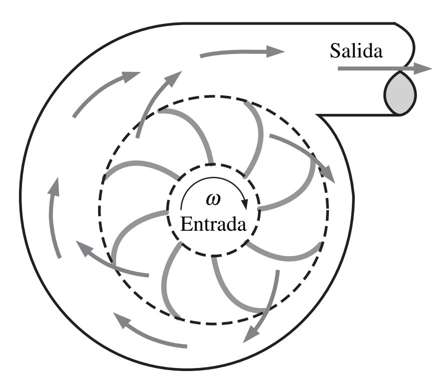


FIGURA P6-53

un radio de 30 cm y ancho de aspas de 3.4 cm a la salida. El soplador entrega aire atmosférico a 20°C y 95 kPa. Descarte cualesquiera pérdidas y suponga que las componentes tangenciales de la velocidad del aire a la entrada y a la salida sean iguales a la velocidad del impulsor en los lugares respectivos y determine el flujo volumétrico del aire cuando la magnitud de la velocidad de rotación en la flecha es de 800 rpm y el consumo de potencia del soplador es de 120 W. Determine también las componentes normales de la velocidad a la entrada y a la salida del impulsor.

6-54 Considere un soplador centrífugo que tiene un radio de 20 cm y un ancho de aspas de 8.2 cm en la entrada del impulsor, así como un radio de 45 cm y ancho de aspas de 5.6 cm a la salida. El soplador entrega aire atmosférico a razón de 0.70 m^3/s con una magnitud de la velocidad de rotación en la flecha de 700 rpm. Se supone que el aire entra al impulsor en la dirección radial y al salir forma un ángulo de 50° respecto de esa dirección, determine el consumo mínimo de potencia del soplador. Tome la densidad del aire como 1.25 kg/m^3.

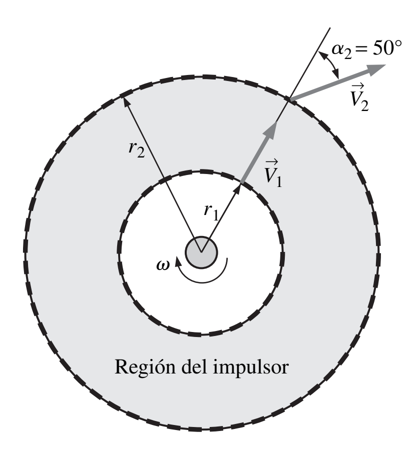


FIGURA P6-54

6-55 Vuelva a considerar el problema 6-54. Para el flujo especificado, investigue el efecto del ángulo de entrada a_2 sobre las necesidades mínimas de entrada de potencia. Suponga que el aire entra al impulsor en la dirección radial ($\alpha_1 = 0$) y que α_2 varía desde 0 hasta 85°, en incrementos de 5°. Trace la gráfica de la variación de la entrada de potencia como función α_2 y explique sus resultados.

6-56I Entra agua en dirección radial al impulsor de una bomba centrífuga a razón de 80 cfm (pies cúbicos por minuto, *cubic feet per minute*) cuando la flecha está girando a 500 rpm. La componente tangencial de la velocidad absoluta del agua a la salida del impulsor que tiene un diámetro exterior de 2 ft es de 180 ft/s. Determine el momento de torsión aplicado al impulsor.

6-57 El impulsor de una bomba centrífuga tiene diámetros interior y exterior de 13 y 30 cm, respectivamente, y un flujo de 0.15 m^3/s con una velocidad de rotación de 1 200 rpm. El ancho de las aspas del impulsor es de 8 cm a la entrada y de 3.5 cm a la salida. Si el agua entra al impulsor en la dirección radial y al salir forma un ángulo de 60° respecto de esa dirección, determine la necesidad mínima de potencia para la bomba.

Problemas de repaso

6-58 Fluye agua hacia la sección en "u" de un tubo, como se muestra en la figura P6-58. En la brida (1), la presión absoluta total es de 200 kPa y al tubo fluyen 30 kg/s. En la brida (2), la presión total es de 150 kPa. En el lugar (3) se descargan 8 kg/s de agua hacia la atmósfera, la cual está a 100 kPa. Determine las fuerzas x y z totales en las dos bridas que conectan el tubo. Explique el significado de la fuerza de gravedad para este problema. Tome el factor de corrección del flujo de la cantidad de movimiento como 1.03.

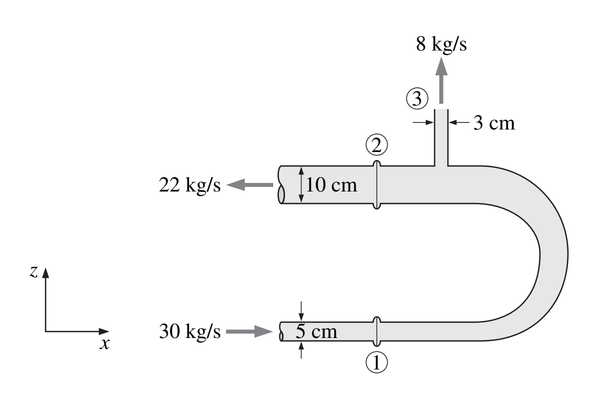


FIGURA P6-58

6-59 En la figura P6-59 se muestra un trípode que sostiene una boquilla, la cual dirige un chorro de agua de 5 cm de diámetro proveniente de una manguera. La masa de la boquilla es de 10 kg, cuando está llena con agua. El trípode puede suministrar una fuerza nominal de soporte de 1 800 N. Un bombero estaba parado 60 cm detrás de la boquilla y resultó golpeado por ésta cuando el trípode falló repentinamente y soltó la boquilla. El lector ha sido contratado para reconstruir el accidente y, después de probar el trípode, ha determinado que, a medida que el flujo de agua aumentó, hizo caer al bombero a 1 800 N. En su informe final, debe dar la velocidad del agua y el flujo coherentes con la falla, así como la velocidad de la boquilla cuando golpeó al bombero. *Respuestas:* 30.2 m/s, 0.0593 m^3/s, 14.7 m/s

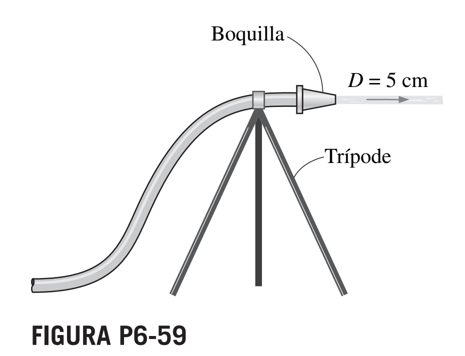


FIGURA P6-59

6-60 Considere un avión con motor de propulsión que está fijo a la sección de cola que emite gases de combustión a razón de 18 kg/s, con una velocidad de $V = 250$ m/s en relación con el

avión mismo Cuando aterriza, en la trayectoria del chorro de escape se coloca un deflector que invierte su dirección y la dirección de fuerza de empuje (el cual sirve como freno para el avión y facilita el aterrizaje en una pista corta), el cual desvía el chorro respecto de la dirección inicial hacia atrás en 160°. Determine *a*) el empuje (fuerza hacia delante) que el motor produce antes de la colocación del deflector y *b*) la fuerza de frenado producida después de que se despliega este deflector.

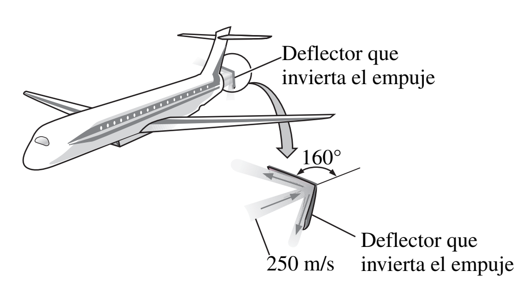


FIGURA P6-60

6-61 Vuelva a considerar el problema 6-60. Use el Software de EES (o cualquier otro programa de este tipo) e investigue el efecto del ángulo del deflector sobre la fuerza de frenado ejercida sobre el avión. Suponga que el ángulo del deflector varía de 0° (ninguna deflexión) hasta 180° (inversión de la dirección del chorro), en incrementos de 10°. Elabore una tabla y trace una gráfica de sus resultados y llegue a conclusiones.

6-62I Una nave espacial que se desplaza por el espacio a una velocidad constante de 1 500 ft/s tiene una masa de 18 000 lbm. Para desacelerarla, se enciende el proceso de combustión en un cohete de combustible sólido incorporado a la nave y los gases de la combustión salen de él a una razón constante de 150 lbm/s, con una velocidad de 5 000 ft/s en la misma dirección que la de la nave, durante un periodo de 5 s. Se supone que la masa de la nave permanece constante. Determine *a*) la desaceleración de dicha nave durante este periodo de 5 s, *b*) el cambio de velocidad de ella en el transcurso de este periodo y *c*) el empuje ejercido sobre la misma.

6-63 Un chorro horizontal de agua de 5 cm de diámetro y una velocidad de 30 m/s choca contra una placa plana vertical en reposo. El agua se dispersa en todas direcciones en el plano de la placa. ¿Cuánta fuerza se necesita para sostener la placa contra el chorro de agua?

6-64 Un chorro horizontal de agua de 5 cm de diámetro y una velocidad de 30 m/s choca contra la punta de un cono horizontal, el cual desvía el agua en 45° respecto a su dirección original. ¿Cuánta fuerza se necesita para sostener el cono contra el chorro de agua?

6-65 Una patinadora que pesa 60 kg está parada sobre el hielo con sus patines (fricción despreciable). Sostiene una manguera flexible (esencialmente sin peso) que dirige un chorro de agua de 2 cm de diámetro en sentido horizontal paralela a sus patines. La velocidad del agua a la salida de la manguera es de 10 m/s. Si inicialmente está en reposo, determine *a*) la velocidad de la patinadora y la distancia que recorre en 5 s y *b*) cuánto tardará en avanzar 5 m y la velocidad en ese momento. *Respuestas: a*) 2.62 m/s, 6.54 m, *b*) 4.4 s, 2.3 m/s

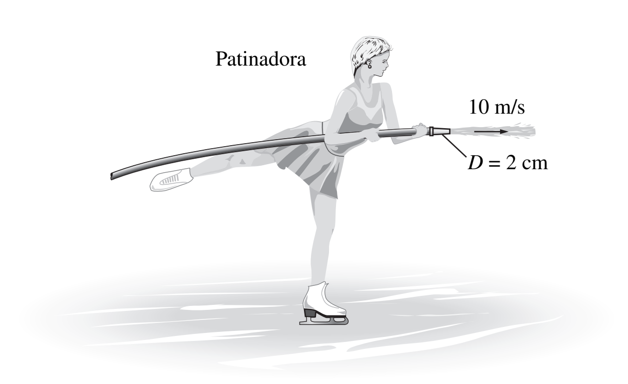


FIGURA P6-65

6-66 Indiana Jones necesita ascender a un edificio de 10 m de alto. Hay una manguera grande llena con agua a presión que cuelga hasta abajo desde la parte superior del edificio. Jones construye una plataforma cuadrada y monta cuatro boquillas de 5 cm de diámetro que apuntan hacia abajo en cada una de las esquinas. Cuando se conectan ramificaciones de la manguera puede producirse un chorro de agua con una velocidad de 15 m/s que sale por cada una de las boquillas. Él, la plataforma y las boquillas tienen una masa combinada de 150 kg. Determine *a*) la velocidad mínima del chorro de agua necesaria para elevar el sistema, *b*) cuánto tarda el sistema para subir los 10 m cuando la velocidad del chorro de agua es de 15 m/s así como la velocidad de la plataforma en ese momento y *c*) cuánto más la cantidad de movimiento hará subir a Jones, si éste corta el agua en el instante en que la plataforma alcanza los 10 m arriba del suelo. ¿Cuánto tiempo tiene para saltar de la plataforma al techo? *Respuestas: a*) 13.7 m/s, *b*) 3.2 s, *c*) 2.1 m, 1.3 s

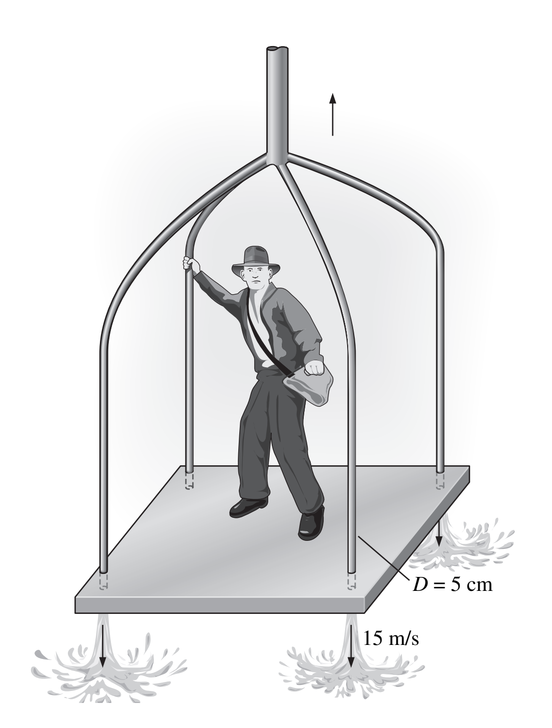


FIGURA P6-66

6-67I Una estudiante de ingeniería considera usar un ventilador para una demostración de levitación. Planea colocar el ventilador encerrado en una caja de modo que el soplo de aire se dirija hacia abajo a través de un área de 3 ft de diámetro correspondiente al círculo descrito por las puntas de las aspas. El sistema pesa 5 lbf y la estudiante lo fijará para que no gire. Con el aumento de la potencia del ventilador, planea incrementar las rpm y la velocidad del aire hasta que el escape suministre la fuerza suficiente hacia arriba para hacer que la caja con el ventilador se sostenga en el aire. Determine *a*) la velocidad de salida del aire para producir 5 lbf, *b*) el flujo volumétrico necesario y *c*) la potencia mecánica mínima que debe suministrarse al flujo de aire. Tome la densidad del aire como 0.078 lbm/ft³.

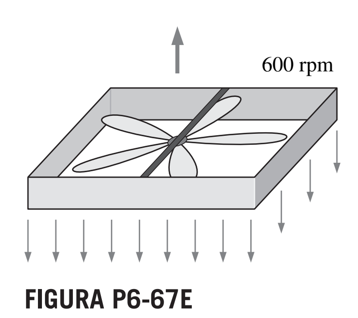


FIGURA P6-67E

6-68 Un soldado salta de un avión y abre su paracaídas cuando su velocidad alcanza la velocidad terminal V_T. El paracaídas lo desacelera hasta que tiene su velocidad de aterrizaje V_F. Después que el paracaídas se abre, la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad (es decir, $F = kV^2$). El soldado, su paracaídas y su equipo tienen una masa total de m. Demuestre que $k = mg/V_F^2$ y desarrolle una relación para la velocidad del soldado después que abre el paracaídas en el instante $t = 0$.

Respuestas : $V = V_F \dfrac{V_T + V_F + (V_T - V_F)e^{-2gt/V_F}}{V_T + V_F - (V_T - V_F)e^{-2gt/V_F}}$



FIGURA P6-68

6-69 Un chorro de agua horizontal con un flujo de $\dot{V}$ y un área de la sección transversal de A impulsa un carretón cubierto de m_c a lo largo de una trayectoria horizontal y casi sin fricción. El agua entra por un agujero en la parte posterior del carretón y toda el agua que entra a éste es retenida, lo que incrementa la masa del sistema. La velocidad relativa entre el chorro de velocidad constante V_j y el carretón de velocidad variable V es $V_j - V$. Si el carretón está inicialmente vacío y en reposo cuando se inicia la acción del chorro, desarrolle una relación (la forma integral es la aceptable) para la velocidad del carretón en función del tiempo.

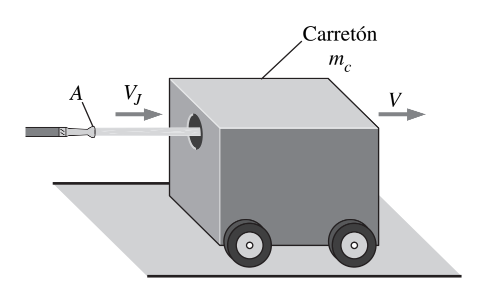


FIGURA P6-69

6-70 Rieles guías casi sin fricción mantienen una placa de masa m_p en una posición horizontal, en tal manera que puede deslizarse con libertad en la dirección vertical. Una boquilla dirige un chorro de agua de área A contra la cara inferior de la placa. El chorro de agua se dispersa en el plano de la placa y aplica una fuerza hacia arriba contra ésta. El flujo del agua $\dot{m}$ (kg/s) puede controlarse. Suponga que las distancias son cortas, de modo que la velocidad del chorro que sube se puede considerar constante con la altura. *a*) Determine el flujo mínimo de masa, $\dot{m}_{\text{mín}}$ necesario sólo para sostener levantada la placa y obtenga una relación para la velocidad de estado en reposo de la placa que se desplaza hacia arriba, parar $\dot{m} > \dot{m}_{\text{mín}}$. *b*) En el instante $t = 0$, la placa está en reposo y, repentinamente, se hace salir el chorro de agua con $\dot{m} > \dot{m}_{\text{mín}}$. Aplique un balance de fuerzas a la placa y obtenga la integral que relaciona la velocidad con el tiempo (no la resuelva).

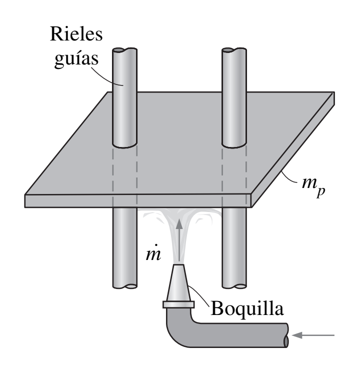


FIGURA P6-70

6-71 Entra agua axialmente a una bomba de flujo mixto a razón de 0.2 m³/s y con una velocidad de 5 m/s, y se descarga a la atmósfera formando un ángulo de 60° respecto de la horizon-

tal, como se muestra en la figura P6-71. Si el área del flujo de descarga es la mitad del área de entrada, determine la fuerza que actúa sobre la flecha en la dirección axial.

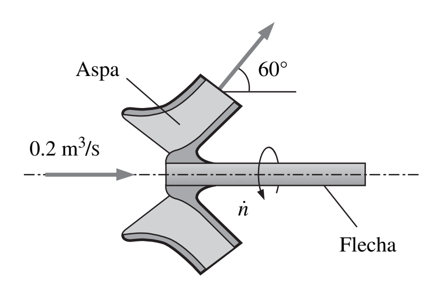


FIGURA P6-71

6-72 Entra agua de manera acelerada por una tobera al impulsor de una turbina a través de su borde exterior de diámetro *D*, con una velocidad de *V* que forma un ángulo α con la dirección radial y con un flujo de masa de $\dot{m}$. El agua sale del impulsor en la dirección radial. Si la magnitud de la velocidad angular en la flecha de la turbina es $\dot{n}$, demuestre que la potencia máxima que se puede generar mediante esta turbina radial es $\dot{W}_{\text{flecha}} = \pi\dot{n}\dot{m}DV \text{ sen } \alpha$.

6-73 Entra agua a un rociador para césped de dos brazos, a lo largo del eje vertical, a razón de 60 L/s, y sale de las boquillas del rociador a chorros de 2 cm de diámetro formando un ángulo de θ respecto de la dirección tangencial, como se muestra en la figura P6-73. La longitud de cada brazo es de 0.45 m. Descarte cualesquiera efectos de la fricción y determine la razón de rotación $\dot{n}$ del rociador en rev/min para *a*) $\theta = 0°$, *b*) $\theta = 30°$ y *c*) $\theta = 60°$.

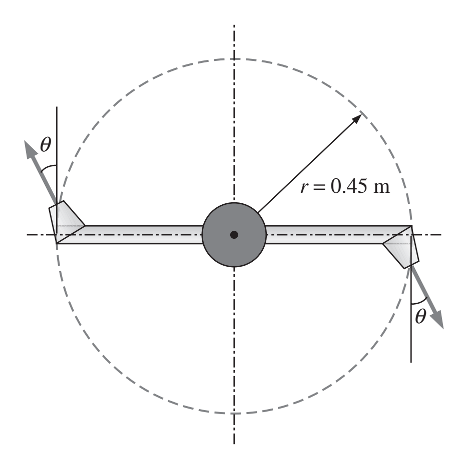


FIGURA P6-73

6-74 Vuelva a considerar el problema 6-73. Para el flujo especificado, investigue el efecto del ángulo de descarga θ, sobre la razón de rotación $\dot{n}$, haciendo variar θ desde 0° hasta 90°, en incrementos de 10°. Trace la gráfica de la razón de rotación en función de θ y explique sus resultados.

6-75 Un tanque estacionario en reposo de agua con un diámetro *D* está montado sobre ruedas y está colocado en una superficie horizontal casi sin fricción. Un agujero liso de diámetro D_0 cercano al fondo del tanque permite que el agua forme un chorro horizontal dirigido hacia atrás, y la fuerza de ese chorro de agua impulsa el sistema hacia delante. El agua que está en el tanque es mucho más pesada que el conjunto formado por el tanque y las ruedas, de modo que sólo es necesario considerar en este problema la masa del agua restante en el tanque. Considere la disminución de la masa del agua con el tiempo y desarrolle relaciones para *a*) la aceleración, *b*) la velocidad y *c*) la distancia recorrida por el sistema, como función del tiempo.

Problema de diseño y ensayo

6-76 Visite una estación de bomberos y obtenga información acerca de los flujos a través de las mangueras y de los diámetros de descarga. Con esta información, calcule la fuerza de impulso a la que se exponen los bomberos.

CAPÍTULO

7

ANÁLISIS DIMENSIONAL Y MODELADO

En este capítulo se estudian primero los conceptos de *dimensiones* y *unidades*. Luego se estudia el principio fundamental de la *homogeneidad dimensional* y se mostrará cómo se aplica a las ecuaciones con la finalidad de *presentarlas sin dimensiones* e identificar *grupos adimensionales*. Se analiza el concepto de *similitud* entre un *modelo* y un *prototipo*. También se describe una poderosa herramienta para ingenieros y científicos llamada *análisis dimensional*, en la que la combinación de variables dimensionales, variables adimensionales y constantes dimensionales en *parámetros sin dimensiones* reduce el número de parámetros independientes necesarios en un problema. Se presenta un método paso a paso para obtener dichos parámetros adimensionales, llamado *método de variables repetitivas*, que se basa exclusivamente en las dimensiones de las variables y constantes. Finalmente, esta técnica se aplica a varios problemas prácticos para ilustrar su utilidad y sus limitaciones.

OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Desarrollar una mejor comprensión de las dimensiones, unidades y homogeneidad dimensional de las ecuaciones.
- Comprender los numerosos beneficios del análisis dimensional.
- Saber usar el método de variables repetitivas para identificar parámetros adimensionales.
- Entender el concepto de similitud dinámica y cómo aplicarla al modelado experimental.

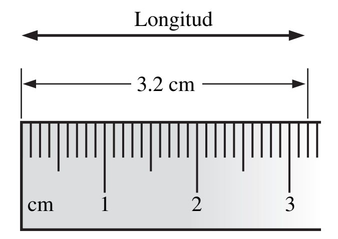


FIGURA 7-1
Una *dimensión* es una medida de una cantidad física sin valores numéricos, mientras que una *unidad* es una manera de asignar un número a la dimensión. Por ejemplo, la longitud es una dimensión, pero el centímetro es una unidad.

7-1 ▪ DIMENSIONES Y UNIDADES

Una **dimensión** es una medida de una cantidad física (sin valores numéricos), mientras que una **unidad** es una manera de asignar un *número* a dicha dimensión. Por ejemplo, la longitud es una dimensión que se mide en unidades como micrones (mm), pie (ft), centímetros (cm), metros (m), kilómetros (km), etcétera (Fig. 7-1). Existen siete **dimensiones primarias** (también llamadas **dimensiones fundamentales** o **básicas**): masa, longitud, tiempo, temperatura, corriente eléctrica, cantidad de luz y cantidad de materia.

> Todas las dimensiones no-primarias se pueden formar por cierta combinación de las siete dimensiones primarias.

Por ejemplo, la fuerza tiene las mismas dimensiones que masa por aceleración (por la segunda Ley de Newton). En consecuencia, en términos de dimensiones primarias:

Dimensiones de fuerza: $$\{\text{Fuerza}\} = \left\{\text{Masa}\,\frac{\text{Longitud}}{\text{Tiempo}^2}\right\} = \{\text{mL/t}^2\} \qquad \textbf{(7-1)}$$

donde los corchetes indican "las dimensiones de" y las abreviaturas se toman de la Tabla 7-1. Debe considerarse que algunos autores prefieren fuer-za en vez de masa como dimensión primaria; en la presente obra no se sigue dicha práctica.

TABLA 7-1

Dimensiones primarias y sus unidades SI e inglesas primarias equivalentes

Dimensión	Símbolo*	Unidad SI	Unidad inglesa
Masa	m	kg (kilogramo)	lbm (libra-masa)
Longitud	L	m (metro)	ft (pie)
Tiempo†	t	s (segundo)	s (segundo)
Temperatura	T	K (kelvin)	R (rankine)
Corriente eléctrica	I	A (ampere)	A (ampere)
Cantidad de luz	C	cd (candela)	cd (candela)
Cantidad de materia	N	mol (mole)	mol (mole)

* Para las variables, los símbolos están en cursiva, pero no así para las dimensiones.

† Note que algunos autores usan el símbolo T para la dimensión tiempo y el símbolo θ para la dimensión temperatura. En este texto no se sigue este sistema para evitar confusión entre tiempo y temperatura.

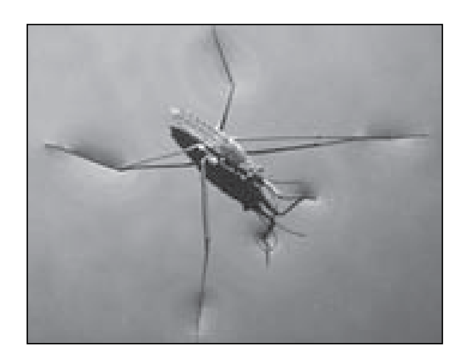


FIGURA 7-2
La chinche de agua puede caminar sobre el agua debido a la tensión superficial.
© Dennis Drenner/Visuals Unlimited.

EJEMPLO 7-1 **Dimensiones primarias de tensión superficial**

Un ingeniero estudia cómo algunos insectos pueden caminar en el agua (Fig. 7-2). Una importante propiedad de los fluidos en este problema es la tensión superficial (σ_s), que tiene dimensiones de fuerza por unidad de longitud. Escriba las dimensiones de la tensión superficial en términos de dimensiones primarias.

SOLUCIÓN Se deben determinar las dimensiones primarias de la tensión superficial.

Análisis A partir de la ecuación 7-1, la fuerza tiene dimensiones de masa por aceleración, o {mL/t²}. En consecuencia:

Dimensiones de tensión superficial: $$\{\sigma_s\} = \left\{\frac{\text{Fuerza}}{\text{Longitud}}\right\} = \left\{\frac{\text{m}\cdot\text{L/t}^2}{\text{L}}\right\} = \mathbf{\{m/t^2\}} \qquad \textbf{(1)}$$

Discusión La utilidad de expresar las dimensiones de una variable o constante en términos de dimensiones primarias se volverá más clara en el análisis del método de repetición de variables en la Sección 7-4.

7-2 ▪ HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL

Todos hemos escuchado el viejo refrán: "No puedes sumar manzanas con naranjas" (Fig. 7-3). En realidad ésta es una expresión simplificada de una ley matemática más global y fundamental para ecuaciones, la **Ley de homogeneidad dimensional**, que se enuncia como:

> Todo término aditivo en una ecuación debe tener las mismas dimensiones.

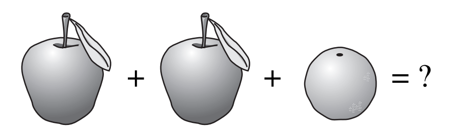


FIGURA 7-3
¡No se puede sumar manzanas con naranjas!

Considere, por ejemplo, el cambio en energía total de un sistema cerrado compresible simple de un estado y/o tiempo (1) a otro (2), como se ilustra en la figura 7-4. El cambio en energía total del sistema (ΔE) está dado por:

Cambio de energía total de un sistema: $$\Delta E = \Delta U + \Delta \mathrm{EC} + \Delta \mathrm{EP} \qquad \textbf{(7-2)}$$

donde E tiene tres componentes: energía interna (U), energía cinética (EC) y energía potencial (EP). Dichos componentes se pueden escribir en términos de la masa del sistema (m); las cantidades mensurables y las propiedades termodinámicas en cada uno de los dos estados, como la velocidad (V), elevación (z) y la energía interna específica (u), y la conocida constante de aceleración gravitacional (g):

$$\Delta U = m(u_2 - u_1) \qquad \Delta \mathrm{EC} = \frac{1}{2} m(V_2^2 - V_1^2) \qquad \Delta \mathrm{EP} = mg(z_2 - z_1) \qquad \textbf{(7-3)}$$

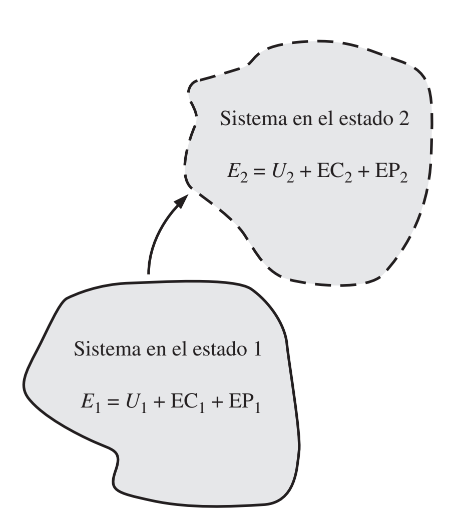


FIGURA 7-4
Energía total de un sistema en el estado 1 y en el estado 2.

Es sencillo verificar que el lado izquierdo de la ecuación 7-2 y los tres términos aditivos en el lado derecho de la ecuación 7-2 tienen las mismas dimensiones: las de energía. Cuando se usan las definiciones de la ecuación 7-3, se escriben las dimensiones primarias de cada término,

$$\{\Delta E\} = \{\text{Energía}\} = \{\text{Fuerza} \cdot \text{Longitud}\} \quad \rightarrow \quad \{\Delta E\} = \{\mathrm{mL^2/t^2}\}$$

$$\{\Delta U\} = \left\{\text{Masa}\,\frac{\text{Energía}}{\text{Masa}}\right\} = \{\text{Energía}\} \quad \rightarrow \quad \{\Delta U\} = \{\mathrm{mL^2/t^2}\}$$

$$\{\Delta \mathrm{EC}\} = \left\{\text{Masa}\,\frac{\text{Longitud}^2}{\text{Tiempo}^2}\right\} \quad \rightarrow \quad \{\Delta \mathrm{EC}\} = \{\mathrm{mL^2/t^2}\}$$

$$\{\Delta \mathrm{EP}\} = \left\{\text{Masa}\,\frac{\text{Longitud}}{\text{Tiempo}^2}\,\text{Longitud}\right\} \quad \rightarrow \quad \{\Delta \mathrm{EP}\} = \{\mathrm{mL^2/t^2}\}$$

Si en alguna etapa de un análisis se encuentra uno mismo en una situación en la que dos términos aditivos en una ecuación tienen *diferentes* dimensiones, esto sería una clara indicación de que se ha cometido un error en alguna etapa anterior de éste (Fig. 7-5). Además de homogeneidad dimensional, los cálculos son válidos sólo cuando las *unidades* también son homogéneas en cada término aditivo. Por ejemplo, las unidades de energía en los términos anteriores pueden ser J, N · m o kg · m^2/s^2, todos los cuales son equivalentes. Sin embargo, suponga que se usaron kJ en lugar de J para uno de los términos. Este término estaría desfasado por un factor de 1 000 en comparación con los otros términos. Es aconsejable escribir *todas* las unidades cuando se realicen cálculos matemáticos con la finalidad de evitar tales errores.



FIGURA 7-5
Una ecuación que no es dimensionalmente homogénea es un signo seguro de un error.

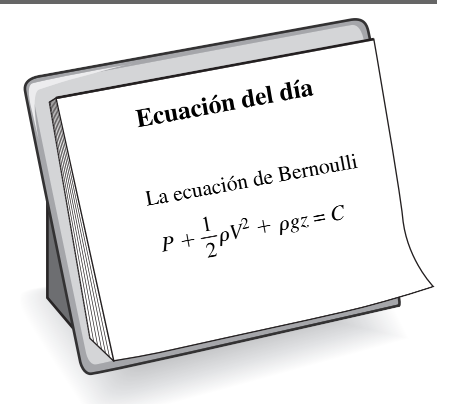


FIGURA 7-6
La ecuación de Bernoulli es un ejemplo adecuado de una ecuación *dimensionalmente homogénea*. Todos los términos aditivos, inclusive la constante, tienen las *mismas* dimensiones, a saber las de presión. En términos de dimensiones primarias, cada término tiene dimensiones $\{m/(t^2L)\}$.

EJEMPLO 7-2 **Homogeneidad dimensional de la ecuación de Bernoulli**

Quizá la ecuación mejor conocida (y más mal interpretada) en la mecánica de fluidos es la ecuación de Bernoulli (Fig. 7-6), que se analizó en el capítulo 5. La forma estándar de la ecuación de Bernoulli para flujo de fluido irrotacional incompresible es:

Ecuación de Bernoulli:
$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = C \tag{1}$$

a) Verifique que cada término aditivo en la ecuación de Bernoulli tiene las mismas dimensiones. *b*) ¿Cuáles son las dimensiones de la constante *C*?

SOLUCIÓN Se quiere verificar que las dimensiones primarias de cada término aditivo en la ecuación 1 sean las mismas, y también determinar las dimensiones de la constante *C*.

Análisis *a*) Cada elemento se escribe en términos de dimensiones primarias,

$$\{P\} = \{\text{Presión}\} = \left\{\frac{\text{Fuerza}}{\text{Área}}\right\} = \left\{\text{Masa}\frac{\text{Longitud}}{\text{Tiempo}^2}\frac{1}{\text{Longitud}^2}\right\} = \left\{\frac{\text{m}}{\text{t}^2\text{L}}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\rho V^2\right\} = \left\{\frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}}\left(\frac{\text{Longitud}}{\text{Tiempo}}\right)^2\right\} = \left\{\frac{\text{Masa}\times\text{Longitud}^2}{\text{Longitud}^3\times\text{Tiempo}^2}\right\} = \left\{\frac{\text{m}}{\text{t}^2\text{L}}\right\}$$

$$\{\rho g z\} = \left\{\frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}}\frac{\text{Longitud}}{\text{Tiempo}^2}\text{Longitud}\right\} = \left\{\frac{\text{Masa}\times\text{Longitud}^2}{\text{Longitud}^3\times\text{Tiempo}^2}\right\} = \left\{\frac{\text{m}}{\text{t}^2\text{L}}\right\}$$

De hecho, **los tres términos aditivos tienen las mismas dimensiones**.

b) A partir de la Ley de homogeneidad dimensional, la constante debe tener las mismas dimensiones que los otros términos aditivos en la ecuación. Por lo tanto:

Dimensiones primarias de la constante de Bernoulli:
$$\{C\} = \left\{\frac{\text{m}}{\text{t}^2\text{L}}\right\}$$

Discusión Si las dimensiones de cualquiera de los términos fuesen diferentes de las otras, ello indicaría que se cometió un error en alguna parte del análisis.

Eliminación de dimensiones de las ecuaciones

La Ley de homogeneidad dimensional garantiza que todo término aditivo en la ecuación tiene las mismas dimensiones. En consecuencia, si cada término en la ecuación se divide entre un conjunto de variables y constantes cuyo producto tenga estas mismas dimensiones, la ecuación queda sin dimensiones (Fig. 7-7). Si, además, los términos **adimensionales** en la ecuación son de orden de magnitud de uno, la ecuación se llama **normalizada**. Por lo tanto, la normalización es más restrictiva que la adimensionalización, aun cuando los dos términos en ocasiones se usen (erróneamente) de manera intercambiable.

Cada término en una ecuación sin dimensiones es adimensional.

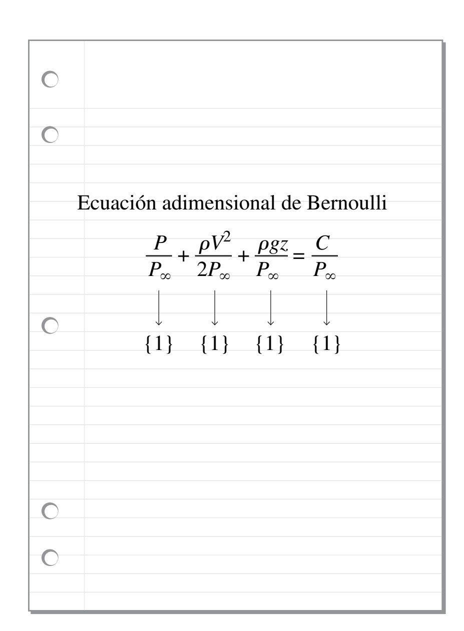


FIGURA 7-7
Una forma *adimensional* de la ecuación de Bernoulli se construye cuando se divide cada término aditivo entre una presión (aquí se usó P_∞). Cada término resultante es *sin dimensiones* (dimensiones de {1}).

En el proceso de adimensionalidad en una ecuación de movimiento, con frecuencia aparecen **parámetros adimensionales**, la mayoría de los cuales reciben su nombre en honor a un científico o ingeniero notable (por ejemplo, el número de Reynolds y el número de Froude). A este proceso algunos autores lo llaman **análisis por inspección**.

Como simple ejemplo, considere la ecuación de movimiento que describe la elevación z de un objeto que cae por la gravedad a través de un vacío (no hay resistencia del aire), como se muestra en la figura 7-8. La ubicación inicial del objeto es z_0 y su velocidad inicial es w_0 en la dirección z. De la física de bachillerato:

Ecuación de movimiento:
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g \tag{7-4}$$

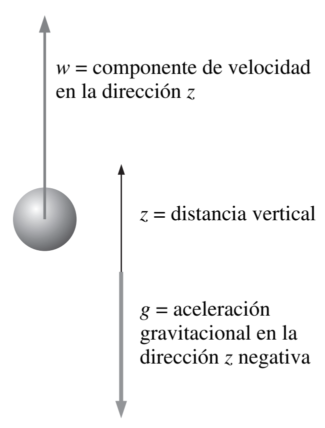


FIGURA 7-8
Objeto que cae en el vacío. La velocidad vertical se dibuja positivamente, de modo que $w < 0$ para un objeto que cae.

Las **variables dimensionales** se definen como cantidades dimensionales que cambian o varían en el problema. Para la simple ecuación diferencial dada en la ecuación 7-4, existen dos variables dimensionales: z (dimensión de longitud) y t (dimensión de tiempo). Las **variables adimensionales** (o **sin dimensión**) se definen como cantidades que cambian o varían en el problema, pero que no tienen dimensiones; un ejemplo es el ángulo de rotación, que se mide en grados o radianes, que son unidades adimensionales. La constante gravitacional g, aunque dimensional, permanece constante y se llama **constante dimensional**. Dos constantes dimensionales adicionales son relevantes para este problema específico, la posición inicial z_0 y la velocidad vertical inicial w_0. Aunque las constantes dimensionales pueden cambiar de problema a problema son fijas para un problema determinado y por lo tanto, se distinguen de las variables dimensionales. El término **parámetros** se usa para el conjunto combinado de variables dimensionales, variables adimensionales y constantes dimensionales en el problema.

La ecuación 7-4 se resuelve fácilmente al integrar dos veces y aplicar las condiciones iniciales. El resultado es una expresión para la elevación z en cualquier tiempo t:

Resultado dimensional:
$$z = z_0 + w_0t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{7-5}$$

La constante $\frac{1}{2}$ y el exponente 2 en la ecuación 7-5 son resultados adimensionales de la integración. A tales constantes se les llama **constantes puras**. Otros ejemplos comunes de constantes puras son π y e.

Para eliminar las dimensiones de la ecuación 7-4 es necesario seleccionar **parámetros de escalamiento** con base en las dimensiones primarias contenidas en la ecuación original. En problemas de flujo de fluidos usualmente existen por lo menos *tres* parámetros de escalamiento, por ejemplo: L, V y $P_0 - P_\infty$ (Fig. 7-9), dado que existen al menos tres dimensiones primarias en el problema general (por ejemplo, masa, longitud y tiempo). En el caso del objeto en caída que se analiza aquí, sólo existen dos dimensiones primarias, longitud y tiempo y por lo tanto, se está limitado a seleccionar sólo *dos* parámetros de escalamiento. Existen algunas opciones en la selección de los parámetros de escalamiento porque se tienen tres constantes dimensionales disponibles: g, z_0 y w_0. Se eligen z_0 y w_0. Se le recomienda repetir el análisis con g y z_0 y/o con g y w_0. Con estos dos parámetros de escalamiento elegidos se eliminan las dimensiones de las variables dimensionales z y t. El primer paso es hacer una lista de las dimensiones primarias de *todas* las variables dimensionales y constantes dimensionales en el problema:

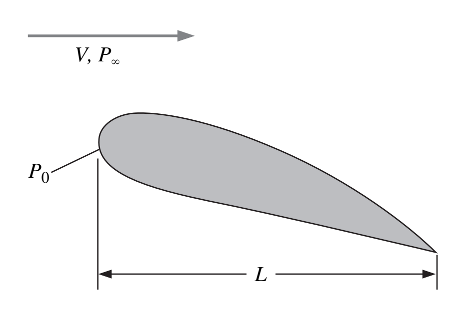


FIGURA 7-9
En un problema típico de flujo de fluido, los parámetros de escalamiento usualmente incluyen una longitud característica L, una velocidad característica V y una diferencia de presión de referencia $P_0 - P_\infty$. En el problema también entran otros parámetros y propiedades del fluido como densidad, viscosidad y aceleración gravitacional.

Dimensiones primarias de todos los parámetros:

$$\{z\} = \{\mathrm{L}\} \qquad \{t\} = \{\mathrm{t}\} \qquad \{z_0\} = \{\mathrm{L}\} \qquad \{w_0\} = \{\mathrm{L/t}\} \qquad \{g\} = \{\mathrm{L/t^2}\}$$

El segundo paso es usar los dos parámetros de escalamiento para eliminar las dimensiones z y t (por inspección) y convertirlas en variables adimensionales z^* y t^*:

Variables adimensionales:
$$z^* = \frac{z}{z_0} \qquad t^* = \frac{w_0t}{z_0} \tag{7-6}$$

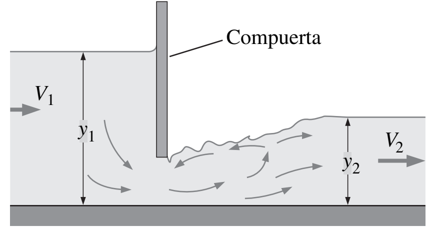


FIGURA 7-10
El *número de Froude* es importante en flujos de superficie libre tales como el flujo en canales abiertos. Aquí se muestra el flujo a través de una compuerta. El número de Froude corriente arriba de la compuerta es $\mathrm{Fr}_1 = V_1/\sqrt{gy_1}$, y es $\mathrm{Fr}_2 = V_2/\sqrt{gy_2}$ corriente abajo de la compuerta.

Cuando se sustituye la ecuación 7-6 en la ecuación 7-4 se produce:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2(z_0z^*)}{d(z_0t^*/w_0)^2} = \frac{w_0^2}{z_0}\frac{d^2z^*}{dt^{*2}} = -g \quad \rightarrow \quad \frac{w_0^2}{gz_0}\frac{d^2z^*}{dt^{*2}} = -1 \tag{7-7}$$

que es la ecuación adimensional deseada. El agrupamiento de las constantes dimensionales de la ecuación 7-7 es el cuadrado de un conocido **parámetro** o **grupo adimensional** llamado **número de Froude**:

Número de Froude:

$$\mathrm{Fr} = \frac{w_0}{\sqrt{gz_0}} \tag{7-8}$$

El número de Froude también aparece como un parámetro adimensional en flujos de superficie libre (capítulo 13) y se puede considerar como la razón de la fuerza inercial a la fuerza gravitacional (Fig. 7-10). El lector debe notar que, en algunos libros de texto antiguos, Fr se define como el *cuadrado* del parámetro que se muestra en la ecuación 7-8. La sustitución de la ecuación 7-8 en la ecuación 7-7 produce:

Ecuación de movimiento adimensional:

$$\frac{d^2z^*}{dt^{*2}} = -\frac{1}{\mathrm{Fr}^2} \tag{7-9}$$

En forma sin dimensión, sólo permanece un parámetro a saber, el número de Froude. La ecuación 7-9 se resuelve fácilmente al integrar dos veces y aplicar las condiciones iniciales. El resultado es una expresión para la elevación sin dimensión z^* en cualquier tiempo sin dimensión t^*:

Resultado adimensional:

$$z^* = 1 + t^* - \frac{1}{2\mathrm{Fr}^2}t^{*2} \tag{7-10}$$

La comparación de las ecuaciones 7-5 y 7-10 revela que son equivalentes. De hecho, para la práctica, sustituya las ecuaciones 7-6 y 7-8 en la ecuación 7-5 para verificar la ecuación 7-10.

Pareciera que se pasó a través de mucha álgebra adicional para generar el mismo resultado final. *¿Entonces cuál es la ventaja de eliminar las dimensiones de la ecuación?* Antes de contestar esta pregunta, note que las ventajas no son tan claras en este simple ejemplo porque hubo posibilidad de integrar analíticamente la ecuación diferencial de movimiento. En problemas más complicados, la ecuación diferencial (o, más generalmente, el *conjunto* acoplado de ecuaciones diferenciales) *no se puede* integrar de modo analítico y los ingenieros deben integrar las ecuaciones numéricamente o diseñar y realizar experimentos físicos para obtener los resultados necesarios, y ambos pueden tomar considerable tiempo y recursos económicos. En tales casos, los parámetros adimensionales que se generan cuando se eliminan las dimensiones de las ecuaciones son extremadamente útiles y pueden ahorrar mucho esfuerzo y gastos a largo plazo.

Existen dos ventajas clave de la eliminación de dimensiones (Fig. 7-11). Primera, *aumenta la comprensión acerca de las relaciones entre los parámetros clave*. Por ejemplo, la ecuación 7-8 revela que, el duplicar w_0 tiene el mismo efecto que disminuir z_0 por un factor de 4. Segunda, *reduce el número de parámetros en el problema*. Por ejemplo, el problema original contiene una variable dependiente z, una variable independiente t, y *tres* constantes dimensionales adicionales: g, w_0 y z_0. El problema adimensional contiene un parámetro dependiente z^*, un parámetro independiente t^*, y sólo *un* parámetro adicional a saber, el número de Froude adimensional Fr. ¡El número de parámetros adicionales se redujo de tres a uno! El ejemplo 7-3 ilustra aún más las ventajas de la eliminación de dimensiones.

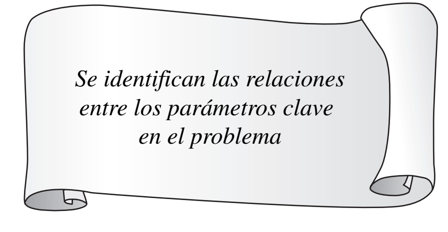


FIGURA 7-11
Las dos ventajas clave de la eliminación de dimensiones de una ecuación.

EJEMPLO 7-3 Ilustración de las ventajas de la eliminación de dimensiones

En la clase de física de bachillerato de su hermano menor se realizan experimentos en una gran tubería vertical cuyo interior se mantiene bajo condiciones de vacío. Los estudiantes son capaces de liberar a distancia una bola de acero a una altura inicial z_0 entre 0 y 15 m (medida desde el fondo de la tubería), y con una velocidad vertical inicial w_0 entre 0 y 10 m/s. Una computadora acoplada a una red de fotosensores a lo largo de la tubería permite a los estudiantes graficar la trayectoria de la bola de acero (altura z graficada como función del tiempo t) para cada prueba. Los estudiantes no están familiarizados con el análisis dimensional o las técnicas de eliminación de dimensiones, y por lo tanto, realizan varios experimentos de "fuerza bruta" para determinar cómo se afecta la trayectoria con las condiciones iniciales z_0 y w_0. Primero mantienen fija w_0 en 4 m/s y realizan experimentos con cinco valores diferentes de z_0: 3, 6, 9, 12 y 15 m. Los resultados experimentales se muestran en la figura 7-12*a*). A continuación, mantienen z_0 fija en 10 m y realizan experimentos con cinco diferentes valores de w_0: 2, 4, 6, 8 y 10 m/s. Dichos resultados se muestran en la figura 7-12*b*). Más tarde ese día, su hermano le muestra los datos y las gráficas de trayectoria y le dice que planean realizar más experimentos con diferentes valores de z_0 y w_0. Usted le explica que con eliminar las dimensiones de los datos el problema se puede reducir a sólo *un* parámetro, y no se necesitan más experimentos. Prepare una gráfica adimensional para probar su punto y coméntelo.

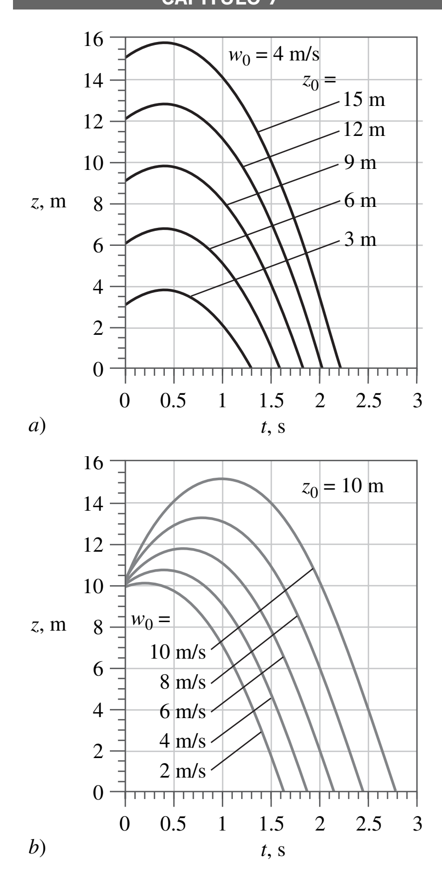


FIGURA 7-12
Trayectorias de una bola de acero que cae en un vacío: *a*) w_0 se fija en 4 m/s y *b*) se z_0 fija en 10 m (Ejemplo 7-3).

SOLUCIÓN Se debe generar una gráfica adimensional a partir de todos los datos de trayectoria disponibles. Específicamente, se debe graficar z^* como función de t^*.

Hipótesis El interior de la tubería está sometido a una presión de vacío lo suficientemente intensa como para que la fuerza aerodinámica de arrastre sobre la bola sea despreciable.

Propiedades La constante gravitacional es 9.81 m/s^2.

Análisis La ecuación 7-4 es válida para este problema, como lo es la eliminación de dimensiones que resultó en la ecuación 7-9. Como se analizó, este problema combina tres de los parámetros dimensionales originales (g, z_0 y w_0) en *un* parámetro adimensional, el número de Froude. Después de convertir a las variables adimensionales de la ecuación 7-6, las 10 trayectorias de la figura 7-12*a)* y *b)* se vuelven a graficar en formato adimensional en la figura 7-13. Es evidente que todas las trayectorias son de la misma familia, con el número de Froude como el único parámetro restante. En estos experimentos Fr^2 varía desde aproximadamente 0.041 hasta cerca de 1.0. Si se realizan más experimentos, deben incluir combinaciones de z_0 y w_0 que produzcan números de Froude fuera de este rango. Serían innecesarios experimentos más numerosos, dado que todas las trayectorias serían de la misma familia que las graficadas en la figura 7-13.

Discusión A números de Froude bajos, las fuerzas gravitacionales son mucho mayores que las fuerzas inerciales y la bola cae al suelo en un tiempo relativamente corto. Por otra parte, a grandes valores de Fr, las fuerzas inerciales dominan inicialmente, y la bola se eleva una distancia significativa antes de caer; le toma mucho más tiempo a la bola golpear el suelo. Los estudiantes, obviamente, no son capaces de ajustar la constante gravitacional, pero si pudieran, el método de fuerza bruta exigiría muchos más experimentos para documentar el efecto de g. Sin embargo, si primero se eliminan las dimensiones, las gráficas adimensionales de trayectoria ya obtenidas y mostradas en la figura 7-13 serían válidas para *cualquier* valor de g; no se necesitarían experimentos ulteriores, a menos que Fr estuviese afuera del rango de valores probados.

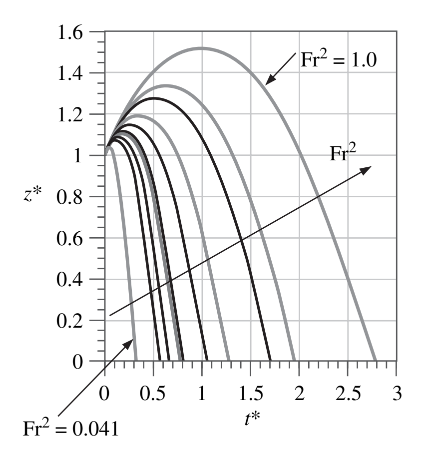


FIGURA 7-13
Trayectorias de una bola de acero que cae en un vacío. Los datos de las figuras 7-12*a)* y *b)* se adimensionalizan y se combinan en una gráfica.

Si el lector todavía no está convencido de que la eliminación de dimensiones de las ecuaciones y los parámetros tiene muchas ventajas, considere esto: con la finalidad de corroborar razonablemente las trayectorias del Ejemplo 7-3 para un

rango de los tres parámetros dimensionales g, z_0 y w_0, el método de fuerza bruta necesitaría varias (por decir, un mínimo de cuatro) gráficas adicionales como la de la figura 7-12*a)* en diversos valores (niveles) de w_0, más varios *conjuntos* adicionales de tales gráficas para un rango de g. ¡Un conjunto completo de datos para tres parámetros con cinco niveles de cada parámetro demandaría $5^3 = 125$ experimentos! La eliminación de dimensiones reduce el número de parámetros de tres a uno: se necesita en total sólo $5^1 = 5$ experimentos para la misma resolución. (Para cinco niveles sólo se necesitan cinco trayectorias como las de la figura 7-13, con valores cuidadosamente elegidos de Fr.)

Otra ventaja de eliminar dimensiones es que la extrapolación a valores que no se han puesto a prueba de uno o más de los parámetros dimensionales es posible. Por ejemplo, los datos del Ejemplo 7-3 se tomaron con sólo un valor de aceleración gravitacional. Suponga que quiere extrapolar dichos datos a un valor diferente de g. El Ejemplo 7-4 muestra cómo se logra esto fácilmente con datos adimensionales.

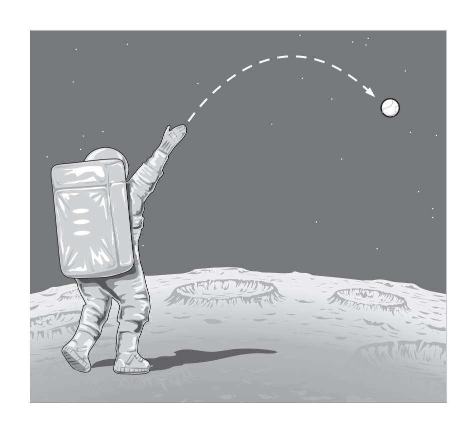


FIGURA 7-14
Lanzamiento de una pelota de béisbol en la Luna (ejemplo 7-4).

EJEMPLO 7-4 Extrapolación de datos adimensionales

La constante gravitacional en la superficie de la Luna es casi un sexto de la de la Tierra. Un astronauta en la Luna lanza una pelota de béisbol con una velocidad inicial de 21.0 m/s en un ángulo de 5° sobre el horizonte y a 2.0 m sobre la superficie lunar (Fig. 7-14). *a*) Utilice los datos adimensionales del Ejemplo 7-3, que se muestran en la figura 7-13 para predecir cuánto tarda en caer al suelo la pelota de béisbol. *b*) Realice un cálculo *exacto* y compare el resultado con el de la parte *a*).

SOLUCIÓN Se usarán los datos experimentales obtenidos en la Tierra para predecir el tiempo necesario para que una pelota de béisbol caiga al suelo en la Luna.

Hipótesis **1** La velocidad horizontal de la pelota de béisbol es irrelevante. **2** La superficie de la Luna es perfectamente plana cerca del astronauta. **3** No actúa fuerza aerodinámica de arrastre sobre la pelota, dado que, en la Luna no existe atmósfera. **4** La gravedad de la Luna es un sexto la de la Tierra.

Propiedades La constante gravitacional de la Luna es $g_{\text{Luna}} \cong 9.81/6 = 1.63$ m/s^2.

Análisis *a*) El número de Froude se calcula con base en el valor de g_{Luna} y la componente vertical de velocidad inicial:

$$w_0 = (21.0 \text{ m/s}) \text{ sen}(5°) = 1.830 \text{ m/s}$$

a partir de lo cual:

$$\text{Fr}^2 = \frac{w_0^2}{g_{\text{Luna}} z_0} = \frac{(1.830 \text{ m/s})^2}{(1.63 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ m})} = 1.03$$

Este valor de Fr^2 es casi el mismo que el valor más grande graficado en la figura 7-13. Por lo tanto, en términos de variables sin dimensiones, la pelota de béisbol golpea el suelo en $t^* \cong 2.75$, como se determinó a partir de la figura 7-13. Cuando se convierte de vuelta a variables dimensionales, mediante la ecuación 7-6:

Tiempo estimado para golpear el suelo: $$t = \frac{t^* z_0}{w_0} = \frac{2.75(2.0 \text{ m})}{1.830 \text{ m/s}} = \mathbf{3.01 \text{ s}}$$

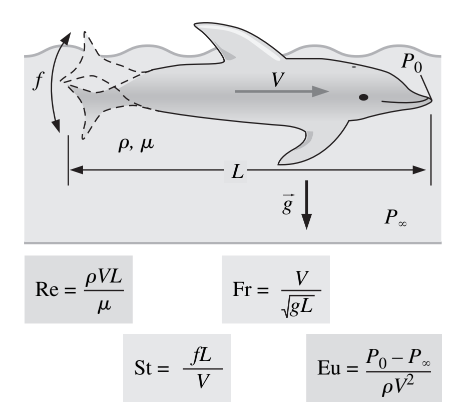
b) Un cálculo exacto se obtiene al hacer z igual a cero en la ecuación 7-5 y resolver para el tiempo t (mediante la fórmula cuadrática):

Tiempo exacto para golpear el suelo:

$$t = \frac{w_0 + \sqrt{w_0^2 + 2z_0 g}}{g}$$

$$= \frac{1.830 \text{ m/s} + \sqrt{(1.830 \text{ m/s})^2 + 2(2.0 \text{ m})(1.63 \text{ m/s}^2)}}{1.63 \text{ m/s}^2} = \mathbf{3.05 \text{ s}}$$

Discusión Si el número de Froude aterrizara entre dos de las trayectorias de la figura 7-13, se hubiera necesitado interpolación. Dado que algunos de los números son precisos a sólo dos cifras significativas, la pequeña diferencia entre los resultados de la parte *a*) y la parte *b*) no debe preocupar. El resultado final es t = 3.0 s a dos cifras significativas.



$$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} \qquad \text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

$$\text{St} = \frac{fL}{V} \qquad \text{Eu} = \frac{P_0 - P_\infty}{\rho V^2}$$

FIGURA 7-15
En un problema general de flujo de fluido no estacionario con superficie libre, los parámetros de escalamiento incluyen una longitud característica L, una velocidad característica V, una frecuencia característica f y una diferencia de presión de referencia $P_0 - P_\infty$. La eliminación de dimensiones de las ecuaciones diferenciales del flujo de fluido produce cuatro parámetros adimensionales: el número de Reynolds, el número de Froude, el número de Strouhal y el número de Euler (ver capítulo 10).

Las ecuaciones diferenciales de movimiento para flujo de fluido se derivan y tratan en el capítulo 9. En el capítulo 10 se encuentra un análisis similar al que se presentó aquí, pero se aplica a las ecuaciones diferenciales para flujo de fluido. Es evidente que el número de Froude también aparece en dicho análisis, como lo hacen otros tres parámetros adimensionales importantes: el número de Reynolds, el número de Euler y el número de Strouhal (Fig. 7-15).

7-3 ▪ ANÁLISIS DIMENSIONAL Y SIMILITUD

Eliminar las dimensiones de una ecuación por medio de análisis por inspección es útil sólo cuando uno sabe con cuál ecuación comenzar. Sin embargo, en muchos casos en la ingeniería de la vida real, las ecuaciones o no se conocen o son demasiado difíciles de resolver; la mayoría de las veces la *experimentación* es el único método de obtener información confiable. En la mayoría de los experimentos, para ahorrar tiempo y dinero, las pruebas se realizan en un **modelo** a escala geométrica, en lugar de en un **prototipo** de tamaño real. En tales casos, se debe tener cuidado de escalar adecuadamente los resultados. Aquí se introduce una poderosa técnica llamada **análisis dimensional**. Aunque de manera usual se piensa en la mecánica de fluidos, el **análisis dimensional** es útil en *todas* las disciplinas, especialmente cuando es necesario diseñar y realizar experimentos. Se alienta al lector a usar esta poderosa herramienta también en otras materias, no sólo en la mecánica de fluidos. Los tres propósitos principales del análisis dimensional son:

- Generar parámetros adimensionales que ayuden en el diseño de experimentos (físicos y/o numéricos) y en el reporte de los resultados experimentales.
- Obtener leyes de escalamiento de modo que se pueda predecir el desempeño del prototipo a partir del desempeño del modelo.
- Predecir (a veces) las tendencias en la relación entre parámetros.

Antes de estudiar la *técnica* del análisis dimensional, primero se explica el *concepto* subyacente de análisis dimensional: el principio de **similitud**. Existen tres condiciones necesarias para similitud completa entre un modelo y un prototipo. La primera condición es la **similitud geométrica**: el modelo debe tener la misma forma que el prototipo, pero se le puede escalar por algún factor de escala constante. La segunda condición es la **similitud cinemática**, lo que significa que la velocidad en cualquier punto en el flujo del modelo debe ser proporcional (por un factor de escala constante) a la velocidad en el punto correspondiente en

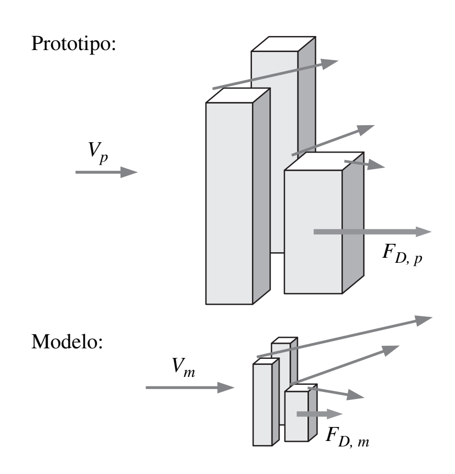


FIGURA 7-16
La *similitud cinemática* se logra cuando, en todas las posiciones, la velocidad en el flujo del modelo es proporcional a la de las correspondientes posiciones en el flujo del prototipo, y apunta en la misma dirección.

el flujo del prototipo (Fig. 7-16). Específicamente, para similitud cinemática la velocidad en puntos correspondientes debe escalar en magnitud y debe apuntar en la misma dirección relativa. La similitud geométrica se puede considerar como equivalencia en *escala de longitud* y la similitud cinemática como equivalencia en *escala de tiempo*. *La similitud geométrica es un requisito para la similitud cinemática*. Tal como el factor de escala geométrica puede ser menor que, igual a, o mayor que uno; del mismo modo puede ser el factor de escala de velocidad. En la figura 7-16, por ejemplo, el factor de escala geométrico es menor que uno (el modelo es más pequeño que el prototipo), pero la escala de velocidad es mayor que uno (las velocidades alrededor del modelo son mayores que las que están alrededor del prototipo). Recuerde del capítulo 4 que las líneas de corriente son fenómenos cinemáticos; por lo tanto, el patrón de líneas de corriente en el flujo del modelo es una copia a escala geométrica de las líneas en el flujo del prototipo cuando se logra la similitud cinemática.

La tercera y más restrictiva condición de similitud es la de **similitud dinámica**. La similitud dinámica se logra cuando todas las *fuerzas* en el flujo del modelo se escalan por un factor constante a fuerzas correspondientes en el flujo del prototipo (equivalencia en *escala de fuerza*). Al igual que con las similitudes geométrica y cinemática, el factor de escala para fuerzas puede ser menor que, igual a, o mayor que uno. En la figura 7-16, por ejemplo, el factor de escala de fuerza es menor que uno dado que la fuerza sobre el edificio modelo es menor que el del prototipo. *La similitud cinemática es una condición necesaria pero insuficiente para similitud dinámica*. Por lo tanto, es posible para un flujo de modelo y un flujo de prototipo lograr tanto similitud geométrica como cinemática, pero no similitud dinámica. Para garantizar similitud completa deben existir las tres condiciones de similitud.

En un campo de flujo general, la similitud completa entre un modelo y un prototipo se logra sólo cuando existen similitudes geométrica, cinemática y dinámica.

Se usa la letra griega mayúscula pi (Π) para denotar un parámetro adimensional. El lector ya está familiarizado con una Π, a saber, el número de Froude, Fr. En un problema general de análisis dimensional, existe una Π que se llama Π **dependiente**, a la que se le da la notación Π_1. El parámetro Π_1 es, en general, una función de otras varias Π, que se llaman Π **independientes**. La relación funcional es:

Relación funcional entre Π:
$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_k) \tag{7-11}$$

donde k es el número total de Π.

Considere un experimento en el que un modelo a escala se pone a prueba para simular un flujo de prototipo. Para garantizar la similitud completa entre el modelo y el prototipo, cada Π independiente del modelo (subíndice m) debe ser idéntico a la correspondiente Π independiente del prototipo (subíndice p); es decir: $\Pi_{2,\,m} = \Pi_{2,\,p}$, $\Pi_{3,\,m} = \Pi_{3,\,p}$, . . . , $\Pi_{k,\,m} = \Pi_{k,\,p}$.

Para garantizar similitud completa, el modelo y el prototipo deben ser geométricamente similares, y todos los grupos Π independientes deben coincidir entre modelo y prototipo.

En estas condiciones, se garantiza que la Π *dependiente* del modelo ($\Pi_{1,m}$) se iguale también con la Π dependiente del prototipo ($\Pi_{1,p}$). Matemáticamente, se escribe un enunciado condicional para lograr similitud,

$$\text{Si} \quad \Pi_{2,\,m} = \Pi_{2,\,p} \quad \text{y} \quad \Pi_{3,\,m} = \Pi_{3,\,p} \ldots \quad \text{y} \quad \Pi_{k,\,m} = \Pi_{k,\,p},$$
$$\text{entonces} \quad \Pi_{1,\,m} = \Pi_{1,\,p} \tag{7-12}$$

Considere, por ejemplo, el diseño de un nuevo auto deportivo, cuya aerodinámica se pondrá a prueba en un túnel de viento. Para ahorrar dinero, lo ideal es probar un modelo pequeño, escalado geométricamente, del auto en lugar de un prototipo a tamaño real (Fig. 7-17). En el caso de la fuerza de arrastre sobre un automóvil, se evidencia que, si el flujo se aproxima como incompresible, sólo existen dos Π en el problema:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \qquad \text{donde} \qquad \Pi_1 = \frac{F_D}{\rho V^2 L^2} \qquad \text{y} \qquad \Pi_2 = \frac{\rho V L}{\mu} \tag{7-13}$$

El procedimiento para generar dichas Π se expone en la Sección 7-4. En la ecuación 7-13, F_D es la magnitud de la fuerza de arrastre sobre el auto, ρ es la densidad del aire, V es la velocidad del auto (o la velocidad del aire en el túnel de viento), L es la longitud del auto y μ es la viscosidad del aire. Π_1 es una forma no estándar del coeficiente de arrastre y Π_2 es el **número de Reynolds**, Re. El lector observará que muchos problemas en mecánica de fluidos involucran un número de Reynolds (Fig. 7-18).

> El número de Reynolds es el parámetro adimensional más útil y conocido en toda la mecánica de fluidos.

En el problema a mano sólo existe una Π independiente, y la ecuación 7-12 garantiza que, si las Π independientes coinciden (los números de Reynolds coinciden: $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$), entonces las Π dependientes también coinciden ($\Pi_{1,m} = \Pi_{1,p}$). Esto permite a los ingenieros medir la fuerza de arrastre sobre el auto modelo y luego usar este valor para predecir la fuerza de arrastre sobre el auto prototipo.

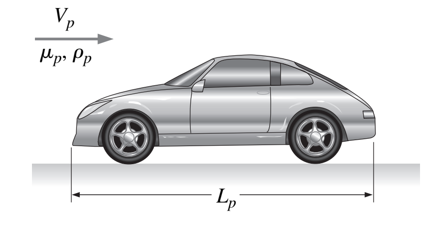


FIGURA 7-17
Similitud geométrica entre un auto prototipo de longitud L_p y un auto modelo de longitud L_m.

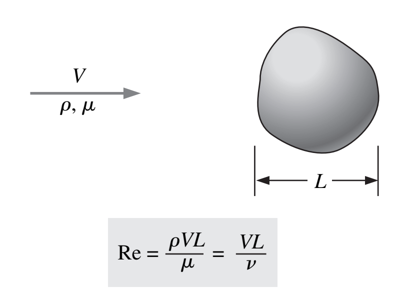


FIGURA 7-18
El *número de Reynolds* Re se forma con la razón de densidad, velocidad característica y longitud característica a viscosidad. De manera alternativa, es la razón de la velocidad y la longitud características a la *viscosidad cinemática*, que se define como $\nu = \mu/\rho$.

EJEMPLO 7-5 Similitud entre autos modelo y prototipo

Se debe predecir la fuerza aerodinámica de arrastre de un auto deportivo nuevo a una velocidad de 50.0 mi/h a una temperatura de aire de 25°C. Los ingenieros automotrices construyen un modelo a un quinto de escala del auto para probarlo en un túnel de viento. Es invierno y el túnel de viento se localiza en un edificio sin calefacción; la temperatura del aire del túnel de viento es de sólo 5°C. Determine qué tan rápido deben correr los ingenieros el aire en el túnel de viento con la finalidad de lograr similitud entre el modelo y el prototipo.

SOLUCIÓN Se utilizará el concepto de similitud para determinar la velocidad del aire en el túnel de viento.

Hipótesis **1** La compresibilidad del aire es despreciable (la validez de esta aproximación se comenta más adelante). **2** Las paredes del túnel de viento están lo suficientemente alejadas de modo que no interfieren con la fuerza aerodinámica de arrastre sobre el auto modelo. **3** El modelo es geométricamente similar al prototipo. **4** El túnel de viento tiene una banda móvil para simular el terreno bajo el auto, como en la figura 7-19. (La banda móvil es necesaria con la finalidad de lograr similitud cinemática en todas las partes del flujo, especialmente bajo el auto.)

Propiedades Para el aire a presión atmosférica y a T = 25°C, ρ = 1.184 kg/m^3 y $\mu = 1.849 \times 10^{-5}$ kg/m · s. De igual manera, a T = 5°C, ρ = 1.269 kg/m^3 y $\mu = 1.754 \times 10^{-5}$ kg/m · s.

Análisis Dado que en este problema sólo existe una Π independiente, la ecuación de similitud (ecuación 7-12) se sostiene si $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$, donde Π_2 está dada por la ecuación 7-13, y se le llama número de Reynolds. Por lo tanto, se escribe:

$$\Pi_{2,m} = \text{Re}_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \Pi_{2,p} = \text{Re}_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

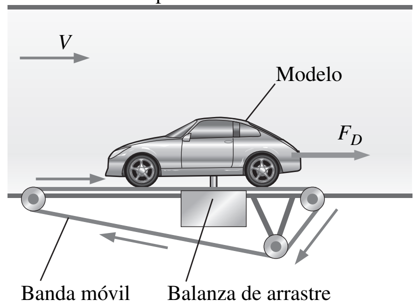


FIGURA 7-19
Una *balanza de arrastre* es un dispositivo que se usa en un túnel de viento para medir la fuerza aerodinámica de arrastre de un cuerpo. Cuando se ponen a prueba modelos automotrices, con frecuencia se añade una *banda móvil* al piso del túnel de viento para simular un terreno móvil (desde el marco de referencia del auto).

que se puede resolver para la velocidad desconocida del aire en el túnel de viento para las pruebas del modelo V_m,

$$V_m = V_p\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{L_p}{L_m}\right)$$

$$= (50.0 \text{ mi/h})\left(\frac{1.754 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}}\right)\left(\frac{1.184 \text{ kg/m}^3}{1.269 \text{ kg/m}^3}\right)(5) = \mathbf{221 \text{ mi/h}}$$

En consecuencia, para garantizar similitud, el aire en el túnel de viento debe fluir a 221 mi/h (a tres cifras significativas). Note que nunca se proporcionó la longitud verdadera de cualquier auto, pero se conoce la razón de L_p a L_m porque el prototipo es cinco veces más grande que el modelo a escala. Cuando los parámetros dimensionales se reordenan como razones adimensionales (como se hizo aquí), el sistema de unidades es irrelevante. Dado que las unidades en cada numerador cancelan a aquéllas en cada denominador, no son necesarias conversiones de unidades.

Discusión Esta velocidad es bastante alta (aproximadamente 100 m/s) y es posible que el túnel de viento no pueda correr a dicha velocidad. Más aún, la aproximación de incompresibilidad de aire puede cuestionarse a esta alta velocidad (esto se trata con más detalle en el Ejemplo 7-8).

Después que se ha logrado similitud completa entre las pruebas del modelo y el flujo del prototipo, se puede usar de nuevo la ecuación 7-12 para predecir el desempeño del prototipo con base en las mediciones del comportamiento del modelo. Esto se ilustra en el Ejemplo 7-6.

EJEMPLO 7-6 Predicción de la fuerza aerodinámica de arrastre sobre el auto prototipo

Este ejemplo es una continuación del Ejemplo 7-5. Suponga que los ingenieros corren el túnel de viento a 221 mi/h para lograr similitud entre el modelo y el prototipo. La fuerza aerodinámica de arrastre sobre el auto modelo se mide con una **balanza de arrastre** (Fig. 7-19). Se registran varias lecturas de fuerza de arrastre y resulta que la fuerza de arrastre promedio sobre el modelo es 21.2 lbf. Prediga la fuerza de arrastre sobre el prototipo (a 50 mi/h y 25°C).

SOLUCIÓN Debido a la similitud, los resultados del modelo se pueden escalar para predecir la fuerza aerodinámica de arrastre sobre el prototipo.

Análisis La ecuación de similitud (ecuación 7-12) muestra que, dado que $\Pi_{2,\,m} = \Pi_{2,\,p}$, $\Pi_{1,\,m} = \Pi_{1,\,p}$, donde Π_1 para este problema está dada por la ecuación 7-13. En consecuencia, se escribe:

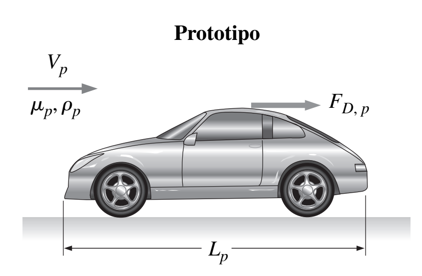
$$\Pi_{1,\,m} = \frac{F_{D,\,m}}{\rho_m V_m^2 L_m^2} = \Pi_{1,\,p} = \frac{F_{D,\,p}}{\rho_p V_p^2 L_p^2}$$

que se puede resolver para la fuerza incógnita de arrastre sobre el auto prototipo, $F_{D,\,p}$,

$$F_{D,\,p} = F_{D,\,m}\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2\left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2$$

$$= (21.2 \text{ lbf})\left(\frac{1.184 \text{ kg/m}^3}{1.269 \text{ kg/m}^3}\right)\left(\frac{50.0 \text{ mi/h}}{221 \text{ mi/h}}\right)^2(5)^2 = \mathbf{25.3 \text{ lbf}}$$

Discusión Cuando se ordenan los parámetros dimensionales como razones adimensionales, las unidades se cancelan de manera adecuada aun cuando sean una mezcla de unidades SI e inglesas. Dado que tanto la velocidad como la longitud están al cuadrado en la ecuación para Π_1, la velocidad más alta en el túnel de viento casi compensa el tamaño más pequeño del modelo, y la fuerza de arrastre sobre el modelo es casi la misma que la que hay sobre el prototipo. De hecho, si la densidad y la viscosidad del aire en el túnel de viento fueran *idénticas* a la del flujo de aire sobre el prototipo, las dos fuerzas de arrastre serían idénticas también (Fig. 7-20).



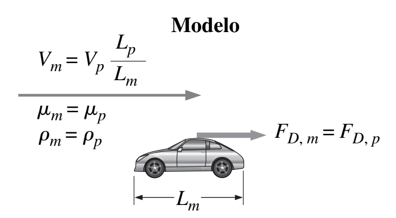


FIGURA 7-20
Para el caso especial en el que el aire del túnel de viento y el flujo de aire sobre el prototipo tengan las mismas propiedades ($\rho_m = \rho_p$, $\mu_m = \mu_p$), y en condiciones de similitud ($V_m = V_pL_p/L_m$), la fuerza de arrastre sobre el prototipo es igual a la que hay sobre el modelo a escala. Si los dos fluidos *no* tienen las mismas propiedades, las dos fuerzas de arrastre *no* necesariamente son las mismas, inclusive en condiciones dinámicamente similares.

El poder de usar análisis dimensional y similitud para complementar el análisis experimental se ilustra todavía más por el hecho de que los valores reales de los parámetros dimensionales (densidad, velocidad, etcétera) son irrelevantes. En tanto las correspondientes Π independientes se hagan iguales una a otra, la similitud se logra, *inclusive si se usan diferentes fluidos*. Esto explica por qué se puede simular el desempeño de los automóviles o aeronaves en un túnel de agua, y el desempeño de los submarinos se puede simular en un túnel de viento (Fig. 7-21). Suponga, por ejemplo, que los ingenieros de los Ejemplos 7-5 y 7-6 usan un túnel de agua en vez de un túnel de viento para probar sus modelos de un quinto de escala. Cuando usan las propiedades del agua a temperatura ambiente (se supone a 20°C), la velocidad necesaria en el túnel de agua para lograr la similitud se calcula fácilmente como:

$$V_m = V_p\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{L_p}{L_m}\right)$$

$$= (50.0 \text{ mi/h})\left(\frac{1.002 \times 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s})}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}}\right)\left(\frac{1.184 \text{ kg/m}^3}{998.0 \text{ kg/m}^3}\right)(5) = 16.1 \text{ mi/h}$$

Como se puede ver, una ventaja del túnel de agua es que la velocidad necesaria es mucho menor que la que se necesaria para un túnel de viento que use el modelo del mismo tamaño.

7-4 ▪ EL MÉTODO DE REPETICIÓN DE VARIABLES Y EL TEOREMA PI DE BUCKINGHAM

El lector ha visto varios ejemplos de la utilidad y poder del análisis dimensional. Ahora está preparado para aprender cómo *generar* los parámetros adimensionales; es decir: las Π. Existen varios métodos para este propósito, pero el método más popular (y más simple) es el **método de repetición de variables**, popularizado por Edgar Buckingham (1867-1940). El método lo publicó por primera vez el científico ruso Dimitri Riabouchinsky (1882-1962) en 1991. Se puede considerar a este como un procedimiento paso a paso o "receta" para obtener parámetros adimensionales. Existen seis pasos, que se mencionan concisamente en la figura 7-22, y con más detalle en la Tabla 7-2. Dichos pasos se explicarán con mayor detalle conforme se trabaje a través de algunos problemas ejemplo.

Como ocurre con la mayoría de los procedimientos nuevos, la mejor forma de aprender es mediante ejemplos y práctica. Como un primer ejemplo simple, considere una bola que cae en un vacío, como se comentó en la Sección 7-2. Imagine que no sabe que la ecuación 7-4 es apropiada para este problema ni que conoce mucha física en relación con los objetos que caen. De hecho, suponga que todo lo que sabe es que la elevación instantánea z de la bola debe ser



FIGURA 7-21
La similitud se puede lograr aun cuando el fluido modelo sea diferente del fluido prototipo. Aquí se observa cómo un modelo de submarino se pone a prueba en un túnel de viento.
Cortesía NASA Langley Research Center.

Paso 1: haga una lista con los parámetros del problema y cuente su número total n.

Paso 2: haga una lista con las dimensiones primarias de cada uno de los n parámetros.

Paso 3: establezca la *reducción* j como el número de dimensiones primarias. Calcule k, el número esperado de π
$k = n - j$

Paso 4: elija *j parámetros repetitivos*.

Paso 5: construya las k y manipule según sea necesario.

Paso 6: escriba la relación funcional final y verifique su álgebra.

FIGURA 7-22
Resumen conciso de los seis pasos del *método de repetición de variables*.

TABLA 7-2

Descripción detallada de los seis pasos del *método de repetición de variables**

Paso 1 Haga una lista de los parámetros (variables dimensionales, variables adimensionales y constantes dimensionales) y cuéntelos. Sea n el número total de parámetros en el problema, inclusive la variable dependiente. Cerciórese de que cualquier parámetro independiente en la lista sea de hecho independiente de los demás; es decir: no se le puede expresar en sus términos. (Por ejemplo, no incluya el radio r y el área $A = \pi r^2$, porque r y A no son independientes.)

Paso 2 Haga una lista con las dimensiones primarias para cada uno de los n parámetros.

Paso 3 Suponga la **reducción** j. Como primera suposición, haga j igual al número de dimensiones primarias representadas en el problema. El número esperado de Π' (k) es igual a n menos j, de acuerdo con el **teorema Pi de Buckingham**,

Teorema Pi de Buckingham: $$k = n - j \quad \textbf{(7-14)}$$

Si en este paso, o durante algún paso subsecuente, el análisis no funciona, verifique que haya incluido suficientes parámetros en el paso 1. De otro modo, regrese y *reduzca j por uno* e intente de nuevo.

Paso 4 Elija los j **parámetros repetitivos** que usará para construir cada P. Dado que los parámetros repetitivos tienen el potencial para aparecer en cada Π, cerciórese de elegirlos *atinadamente* (Tabla 7-3).

Paso 5 Genere las Π una a la vez mediante el agrupamiento de los j parámetros repetitivos con uno de los parámetros restantes, y fuerce el producto a ser adimensional. De esta manera, construya todas las k Π's. Por costumbre, la primera Π, designada Π_1, es la Π *dependiente* (la que está en el lado izquierdo de la lista). Utilice las Π como sea necesario para lograr establecer grupos adimensionales (Tabla 7-5).

Paso 6 Verifique que todas las Π de hecho sean adimensionales. Escriba la relación funcional final en la forma de la ecuación 7-11.

* Éste es un método paso a paso para encontrar los grupos Π adimensionales cuando se realiza un análisis dimensional.

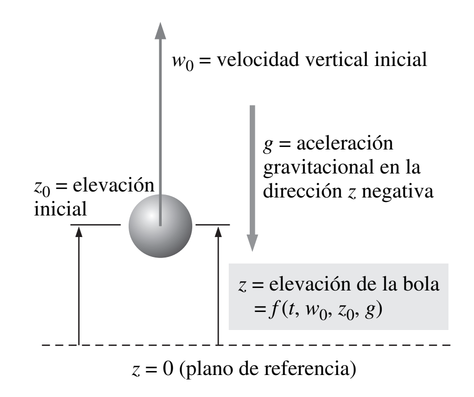


FIGURA 7-23
Configuración para el análisis dimensional de una bola que cae en un vacío. La elevación z es función del tiempo t, de la velocidad vertical inicial w_0, de la elevación inicial z_0 y de la constante gravitacional g.

función del tiempo t, de la velocidad vertical inicial w_0, de la elevación inicial z_0 y de la constante gravitacional g (Fig. 7-23). La belleza del análisis dimensional es que la único otro dato que se necesita conocer son las dimensiones primarias de cada una de dichas cantidades. Conforme se avance a través de cada paso del método de repetición de variables, se explicarán algunas de las sutilezas de la técnica con más detalle utilizando como ejemplo la bola que cae.

Paso 1

En este problema existen cinco parámetros (variables dimensionales, variables adimensionales y constantes dimensionales); $n = 5$. Se mencionan de manera funcional, con la variable dependiente citada como función de las variables independientes y constantes:

Lista de parámetros importantes: $$z = f(t, w_0, z_0, g) \qquad n = 5$$

Paso 2

Aquí se presenta una lista con las dimensiones primarias de cada parámetro. Se recomienda escribir cada dimensión con exponentes porque esto ayuda después con el álgebra.

z	t	w_0	z_0	g
$\{L^1\}$	$\{t^1\}$	$\{L^1t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{L^1t^{-2}\}$

Paso 3

Como primera suposición, j se hace igual a 2, el número de dimensiones primarias representadas en el problema (L y t).

Reducción: $$j = 2$$

Si este valor de j es correcto, el número de Π predicho por el teorema Pi de Buckingham es:

Número esperado de Π: $$k = n - j = 5 - 2 = 3$$

Paso 4

Es necesario elegir dos parámetros repetitivos porque $j = 2$. Dado que con frecuencia ésta es la parte más difícil (o al menos la más misteriosa) del método de repetición de variables, en la Tabla 7-3 se indican algunos lineamientos acerca de cómo elegir los parámetros repetitivos.

Cuando se siguen los lineamientos de la Tabla 7-3 de la página siguiente, la elección más apropiada de dos parámetros repetitivos es w_0 y z_0.

Parámetros repetitivos: $$w_0 \quad \text{y} \quad z_0$$

Paso 5

Ahora se combinan dichos parámetros repetitivos en productos con cada uno de los parámetros restantes, uno a la vez, para crear las Π. La primera Π siempre es la Π *dependiente* y se forma con la variable dependiente z.

Π *dependiente*: $$\Pi_1 = z w_0^{a_1} z_0^{b_1} \tag{7-15}$$

donde a_1 y b_1 son exponentes constantes que es necesario determinar. Las dimensiones primarias del paso 2 se aplican a la ecuación 7-15 y se *fuerza* a la Π a ser adimensional cuando se establece el exponente de cada dimensión primaria en cero:

Dimensiones de Π_1: $$\{\Pi_1\} = \{L^0t^0\} = \{z w_0^{a_1} z_0^{b_1}\} = \{L^1(L^1t^{-1})^{a_1}L^{b_1}\}$$

Dado que las dimensiones primarias son, por definición, independientes unas de otras, se igualan los exponentes de cada dimensión primaria de manera independiente para resolver los exponentes a_1 y b_1 (Fig. 7-24).

Tiempo: $$\{t^0\} = \{t^{-a_1}\} \qquad 0 = -a_1 \qquad a_1 = 0$$

Longitud: $$\{L^0\} = \{L^1L^{a_1}L^{b_1}\} \qquad 0 = 1 + a_1 + b_1 \qquad b_1 = -1 - a_1 \qquad b_1 = -1$$

La equación 7-15 entonces se convierte en

$$\Pi_1 = \frac{z}{z_0} \tag{7-16}$$

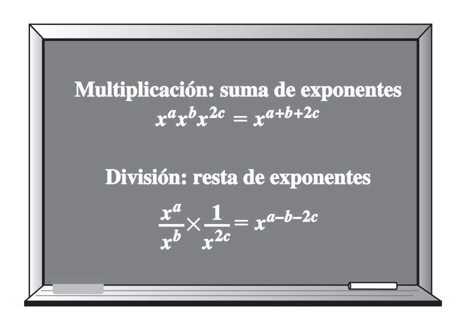


FIGURA 7-24
Reglas matemáticas para suma y resta de exponentes durante la multiplicación y la división, respectivamente.

TABLA 7-3

Lineamientos para elegir pa*rámetros repetitivos* en el paso 4 del método de repetición de variables*

Lineamiento	Comentarios y aplicación a este problema
1. Nunca tome la variable *dependiente*. De otro modo, podría aparecer en todas las Π, lo que es indeseable.	En este problema no se puede elegir z, sino que se debe elegir de entre los restantes cuatro parámetros. Por lo tanto, debe elegir dos de los siguientes parámetros: t, w_0, z_0 y g.
2. Los parámetros repetitivos elegidos no deben ser susceptibles de formar *ellos mismos* un grupo adimensional. De otro modo, sería imposible generar el resto de las Π.	En este problema, cualesquiera de los parámetros independientes sería válido de acuerdo con este lineamiento. Sin embargo, para propósitos ilustrativos, suponga que se tomaron tres en lugar de dos parámetros repetitivos. No podría, por ejemplo, elegir t, w_0 y z_0, porque pueden formar una Π por su cuenta (tw_0/z_0).
3. Los parámetros repetitivos elegidos deben representar *todas* las dimensiones primarias en el problema.	Suponga, por ejemplo, que existieran *tres* dimensiones primarias (m, L y t) y se tuvieran que elegir *dos* parámetros repetitivos. No podría elegir, por decir, una longitud y un tiempo, porque la dimensión primaria masa no estaría representada en las dimensiones de los parámetros repetitivos. Una elección apropiada sería una densidad y un tiempo, que en conjunto representan las tres dimensiones primarias en el problema.
4. Nunca escoja parámetros que ya sean adimensionales. Éstos ya son Π, por su cuenta.	Suponga que un ángulo θ fuese uno de los parámetros independientes. No se podría elegir θ como un parámetro repetitivo pues los ángulos no tienen dimensiones (radián y grado son unidades adimensionales). En tal caso, una de las Π ya se conoce, a saber, θ.
5. Nunca escoja dos parámetros con las *mismas* dimensiones o con dimensiones que difieran sólo por un exponente.	En este problema, dos de los parámetros, z y z_0, tienen las mismas dimensiones (longitud). No se pueden elegir ambos parámetros. (Note que la variable dependiente z ya se ha eliminado por el lineamiento 1.) Suponga que un parámetro tiene dimensiones de longitud y otro p tiene dimensiones de volumen. En el análisis dimensional, el volumen sólo contiene una dimensión primaria (longitud) y *no es dimensionalmente distinto de la longitud*: no se pueden elegir ambos de estos parámetros.
6. Siempre que sea posible, elija constantes dimensionales sobre las variables dimensionales, de modo que sólo *una* Π contenga la variable dimensional.	Si se elige el tiempo t como un parámetro repetitivo en el problema presente, aparecería en las tres Π. Aunque esto no sería *erróneo*, no sería *inteligente* porque se sabe que, finalmente, se quiere cierta altura adimensional como una función de algún tiempo adimensional y otro(s) parámetro(s) adimensional(es). A partir de los cuatro parámetros independientes, esto restringe a w_0, z_0 y g.
7. Escoja parámetros comunes porque ellos aparecen en cada una de las Π.	En problemas de flujo de fluido por lo general se elige una longitud, una velocidad y una masa o densidad (Fig. 7-25). No es aconsejable escoger los parámetros menos comunes como la viscosidad μ o la tensión superficial s_s, porque en general no se querría que μ o σ_s aparecieran en cada una de las Π. En este problema, w_0 y z_0 son elecciones más inteligentes que g.
8. Escoja parámetros simples sobre los parámetros complejos siempre que sea posible.	Es mejor escoger parámetros con sólo una o dos dimensiones básicas (por ejemplo, una longitud, un tiempo, una masa o una velocidad) en lugar de parámetros que estén formados por varias dimensiones básicas (por ejemplo, una energía o una presión).

*Estos lineamientos, aunque no son infalibles, ayudan a escoger parámetros repetitivos que usualmente conducen a establecer grupos Π adimensionales con esfuerzo mínimo.

De manera similar se crea la primera Π independiente (Π_2), por medio de la combinación de los parámetros repetitivos con la variable independiente t.

Primera Π independiente: $$\Pi_2 = tw_0^{a_2}z_0^{b_2}$$

Dimensiones de Π_2: $$\{\Pi_2\} = \{L^0t^0\} = \{tw_0^{a_2}z_0^{b_2}\} = \{t(L^1t^{-1})^{a_2}L^{b_2}\}$$

Cuando se igualan los exponentes:

Tiempo: $\{t^0\} = \{t^1 t^{-a_2}\} \qquad 0 = 1 - a_2 \qquad a_2 = 1$

Longitud: $\{L^0\} = \{L^{a_2} L^{b_2}\} \qquad 0 = a_2 + b_2 \qquad b_2 = -a_2 \qquad b_2 = -1$

Por lo tanto, Π_2 es

$$\Pi_2 = \frac{w_0 t}{z_0} \tag{7-17}$$

Finalmente, se crea la segunda Π independiente (Π_3) cuando se combinan los parámetros repetitivos con g y *fuerza* a Π a ser adimensional (Fig. 7-26).

Segunda Π independiente: $\Pi_3 = g w_0^{a_3} z_0^{b_3}$

Dimensiones de Π_3: $\{\Pi_3\} = \{L^0 t^0\} = \{g w_0^{a_3} z_0^{b_3}\} = \{L^1 t^{-2} (L^1 t^{-1})^{a_3} L^{b_3}\}$

Cuando se igualan exponentes,

Tiempo: $\{t^0\} = \{t^{-2} t^{-a_3}\} \qquad 0 = -2 - a_3 \qquad a_3 = -2$

Longitud: $\{L^0\} = \{L^1 L^{a_3} L^{b_3}\} \qquad 0 = 1 + a_3 + b_3 \qquad b_3 = -1 - a_3 \qquad b_3 = 1$

Por lo tanto, Π_3 es

$$\Pi_3 = \frac{g z_0}{w_0^2} \tag{7-18}$$

Se han encontrado tres Π, pero en este punto es prudente examinarlas para ver si se necesita alguna operación. Inmediatamente se ve que Π_1 y Π_2 son lo mismo que las variables adimensionales z^* y t^* definidas por medio de la ecuación 7-6: para ellas no se necesita manipulación. Sin embargo, se reconoce que la tercera Π se debe elevar a la potencia de $-\frac{1}{2}$ para ser de la misma forma que un parámetro adimensional establecido, es decir, el número de Froude de la ecuación 7-8:

Π_3 *modificada*:
$$\Pi_{3,\ \text{modificada}} = \left(\frac{g z_0}{w_0^2}\right)^{-1/2} = \frac{w_0}{\sqrt{g z_0}} = \text{Fr} \tag{7-19}$$

Con frecuencia es necesaria dicha operación para poner las Π en la forma apropiada establecida. La Π de la ecuación 7-18 no está *equivocada*, y ciertamente no hay ventaja matemática de la ecuación 7-19 sobre la ecuación 7-18. En lugar de ello, es preferible decir que la ecuación 7-19 es más "socialmente aceptada" que la ecuación 7-18, porque es un parámetro adimensional establecido y nombrado que se usa comúnmente en la literatura. En la Tabla 7-4 se mencionan algunos lineamientos para trabajar con grupos Π adimensionales en parámetros adimensionales establecidos.

En la tabla 7-5 se indican algunos de los parámetros adimensionales establecidos, la mayoría reciben su nombre en honor de un científico o ingeniero notable (véase Fig. 7-27 y el Proyector Histórico de la p. 289). Por ningún motivo esta lista es exhaustiva. Siempre que sea posible, debe utilizar sus Π como sea necesario con la finalidad de convertirlas en parámetros adimensionales establecidos.

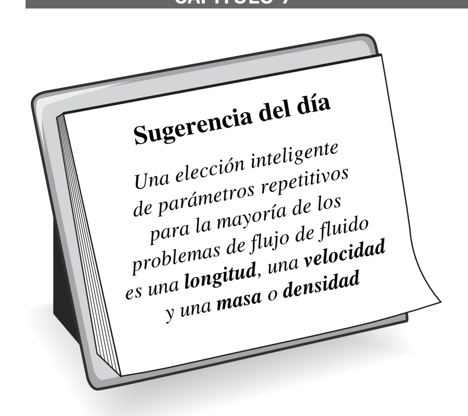


FIGURA 7-25
Es aconsejable elegir parámetros *comunes* como parámetros repetitivos, pues ellos pueden aparecer en cada uno de sus grupos Π adimensionales.

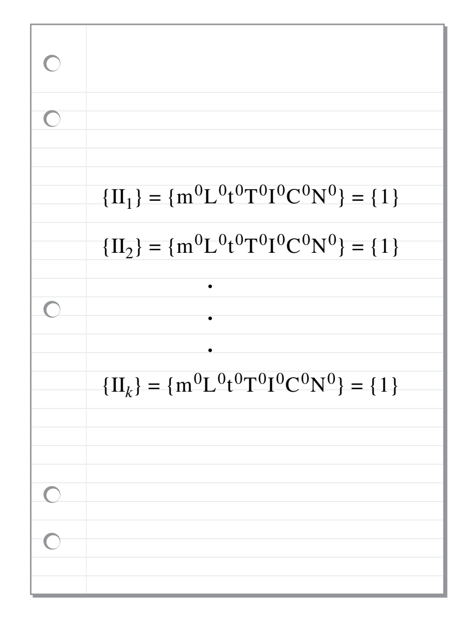


FIGURA 7-26
Está garantizado que los grupos Π que resultan del método de repetición de variables son adimensionales porque se *fuerzan* que sean cero los exponentes globales de las siete dimensiones primarias.

TABLA 7-4

Lineamientos para utilizar las Π que resultan del método de repetición de variables.*

Lineamiento	Comentarios y aplicación a este problema
1. Se puede imponer un exponente constante (adimensional) sobre una Π o realizar una operación funcional sobre una Π.	Se puede elevar Π a cualquier exponente n (con lo que se cambia a Π^n) sin cambiar el estatus adimensional de la Π. Por ejemplo, en este problema se impuso un exponente de $-\frac{1}{2}$ sobre Π_3. De manera similar, se puede realizar la operación funcional sen(Π), exp(Π), etcétera, sin influir la adimensionalidad de la Π.
2. Se puede multiplicar una Π por una constante pura (adimensional).	En ocasiones, por costumbre se incluyen en una Π factores adimensionales de $\frac{1}{2}$, 2, 4, etcétera. Esto se encuentra perfectamente bien porque tales factores no influyen la adimensionalidad de la Π.
3. Se puede formar un producto (o cociente) de cualquier Π con cualquiera otra Π en el problema para sustituir una de las Π.	Π_3 se podría sustituir por $\Pi_3\Pi_1$, Π_3/Π_2, etcétera. A veces tal operación es necesaria para convertir las Π en una Π establecida. En muchos casos, la Π establecida se habría producido si se hubiesen elegido diferentes parámetros repetitivos.
4. Se puede usar cualquiera de los lineamientos 1 a 3 en combinación.	En general, se puede sustituir cualquier Π con alguna nueva Π como $A\Pi_3^B$ sen(Π_1^C), donde A, B y C son constantes puras.
5. Se puede sustituir un parámetro dimensional en la Π con otro(s) parámetro(s) de las mismas dimensiones.	Por ejemplo, la Π puede contener el cuadrado de una longitud o el cubo de una longitud, para lo cual se puede sustituir un área o volumen conocidos, respectivamente, con la finalidad de hacer que la Π concuerde con los usos establecidos.

*Estos lineamientos son útiles en el paso 5 del método de repetición de variables; se mencionan para ayudar a convertir los grupos Π adimensionales en parámetros estándar adimensionales *establecidos*, muchos de los cuales se indican en la Tabla 7-5.



FIGURA 7-27
Los parámetros adimensionales establecidos usualmente reciben su nombre en honor de un científico o ingeniero notable.

Paso 6

Debe comprobar dos veces que las Π de hecho son adimensionales (Fig. 7-28). Esto lo puede verificar por su cuenta para este ejemplo. Finalmente está listo para escribir la relación funcional entre los parámetros adimensionales. Cuando se combinan las ecuaciones 7-16, 7-17 y 7-19 en la forma de la ecuación 7-11,

$$\textit{Relación entre } \Pi\text{:} \qquad \Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3) \quad \rightarrow \quad \frac{z}{z_0} = f\left(\frac{w_0 t}{z_0}, \frac{w_0}{\sqrt{g z_0}}\right)$$

O, en términos de las variables adimensionales z^* y t^* definidas con anterioridad por la ecuación 7-6, y la definición del número de Froude,

$$\textit{Resultado final del análisis dimensional:} \qquad z^* = f(t^*, \mathrm{Fr}) \tag{7-20}$$

Es útil comparar el resultado del análisis dimensional, ecuación 7-20, con el resultado analítico exacto, ecuación 7-10. El método de repetición de variables predice de manera adecuada la relación funcional entre grupos adimensionales. Sin embargo:

> El método de repetición de variables no puede predecir la forma matemática exacta de la ecuación.

Ésta es una limitación fundamental del análisis dimensional y del método de repetición de variables. Sin embargo, para algunos problemas simples, la forma de la ecuación *se puede* predecir inclusive dentro de una constante conocida, como se ilustra en el Ejemplo 7-7.

TABLA 7-5

Algunos de los parámetros adimensionales o Π comunes establecidos que se encuentran en la mecánica de fluidos y la transferencia de calor*

Nombre	Definición	Interpretación como una razón de dos magnitudes
Número de Arquímedes	$\text{Ar} = \dfrac{\rho_s g L^3}{\mu^2}(\rho_s - \rho)$	$\dfrac{\text{Fuerza gravitacional}}{\text{Fuerza viscosa}}$
Razón de dimensiones de cuerpo	$\text{AR} = \dfrac{L}{W}$ o $\dfrac{L}{D}$	$\dfrac{\text{Longitud}}{\text{Ancho}}$ o $\dfrac{\text{Longitud}}{\text{Diámetro}}$
Número de Biot	$\text{Bi} = \dfrac{hL}{k}$	$\dfrac{\text{Resistencia térmica en superficie}}{\text{Resistencia térmica en el interior del cuerpo}}$
Número de Bond	$\text{Bo} = \dfrac{g(\rho_f - \rho_v)L^2}{\sigma_s}$	$\dfrac{\text{Fuerza gravitacional}}{\text{Fuerza de tensión superficial}}$
Número de cavitación	$\text{Ca (en ocasiones } \sigma_c) = \dfrac{P - P_v}{\rho V^2}$ $\left(\text{en ocasiones } \dfrac{2(P - P_v)}{\rho V^2}\right)$	$\dfrac{\text{Presión} - \text{Presión de vapor}}{\text{Presión dinámica}}$
Factor de fricción de Darcy	$f = \dfrac{8\tau_w}{\rho V^2}$	$\dfrac{\text{Fuerza de fricción en la pared}}{\text{Fuerza inercial}}$
Coeficiente de arrastre o de resistencia aerodinámica	$C_D = \dfrac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$	$\dfrac{\text{Fuerza de arrastre o de resistencia aerodinámica}}{\text{Fuerza de presión dinámica}}$
Número de Eckert	$\text{Ec} = \dfrac{V^2}{c_P T}$	$\dfrac{\text{Energía cinética}}{\text{Entalpía}}$
Número de Euler	$\text{Eu} = \dfrac{\Delta P}{\rho V^2}\left(\text{en ocasiones } \dfrac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}\right)$	$\dfrac{\text{Diferencia de presión}}{\text{Presión dinámica}}$
Factor de fricción de Fanning	$C_f = \dfrac{2\tau_w}{\rho V^2}$	$\dfrac{\text{Fuerza de fricción en la pared}}{\text{Fuerza inercial}}$
Número de Fourier	$\text{Fo (en ocasiones } \tau) = \dfrac{\alpha t}{L^2}$	$\dfrac{\text{Tiempo físico}}{\text{Tiempo de difusión térmica}}$
Número de Froude	$\text{Fr} = \dfrac{V}{\sqrt{gL}}\left(\text{en ocasiones } \dfrac{V^2}{gL}\right)$	$\dfrac{\text{Fuerza inercial}}{\text{Fuerza gravitacional}}$
Número de Grashof	$\text{Gr} = \dfrac{g\beta\lvert\Delta T\rvert L^3 \rho^2}{\mu^2}$	$\dfrac{\text{Fuerza de flotación}}{\text{Fuerza viscosa}}$
Número de Jakob	$\text{Ja} = \dfrac{c_p(T - T_{\text{sat}})}{h_{fg}}$	$\dfrac{\text{Energía sensible}}{\text{Energía latente}}$
Número de Knudsen	$\text{Kn} = \dfrac{\lambda}{L}$	$\dfrac{\text{Longitud media de trayectoria libre}}{\text{Longitud característica}}$
Número de Lewis	$\text{Le} = \dfrac{k}{\rho c_p D_{AB}} = \dfrac{\alpha}{D_{AB}}$	$\dfrac{\text{Difusión térmica}}{\text{Difusión de especies}}$
Coeficiente de sustentación	$C_L = \dfrac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$	$\dfrac{\text{Fuerza de sustentación}}{\text{Fuerza de presión dinámica}}$

(*continúa*)

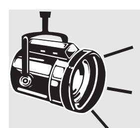


FIGURA 7-28
Siempre es aconsejable una revisión rápida de su álgebra.

TABLA 7-5 (Continuación)

Nombre	Definición	Interpretación como una razón de dos magnitudes
Número de Mach	Ma (en ocasiones M) $= \dfrac{V}{c}$	$\dfrac{\text{Velocidad de flujo}}{\text{Velocidad del sonido}}$
Número de Nusselt	$\text{Nu} = \dfrac{Lh}{k}$	$\dfrac{\text{Transferencia de calor por convección}}{\text{Transferencia de calor por conducción}}$
Número de Peclet	$\text{Pe} = \dfrac{\rho L V c_p}{k} = \dfrac{LV}{\alpha}$	$\dfrac{\text{Transferencia de calor al volumen de cuerpo}}{\text{Transferencia de calor por conducción}}$
Número de potencia	$N_P = \dfrac{\dot{W}}{\rho D^5 \omega^3}$	$\dfrac{\text{Potencia}}{\text{Inercia rotacional}}$
Número de Prandtl	$\text{Pr} = \dfrac{\nu}{\alpha} = \dfrac{\mu c_p}{k}$	$\dfrac{\text{Difusión viscosa}}{\text{Difusión térmica}}$
Coeficiente de presión	$C_p = \dfrac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2}$	$\dfrac{\text{Diferencia de presión estática}}{\text{Presión dinámica}}$
Número de Rayleigh	$\text{Ra} = \dfrac{g\beta \lvert\Delta T\rvert L^3 \rho^2 c_p}{k\mu}$	$\dfrac{\text{Fuerza de flotabilidad}}{\text{Fuerza viscosa}}$
Número de Reynolds	$\text{Re} = \dfrac{\rho V L}{\mu} = \dfrac{VL}{\nu}$	$\dfrac{\text{Fuerza inercial}}{\text{Fuerza viscosa}}$
Número de Richardson	$\text{Ri} = \dfrac{L^5 g\, \Delta\rho}{\rho \dot{V}^2}$	$\dfrac{\text{Fuerza de flotabilidad}}{\text{Fuerza inercial}}$
Número de Schmidt	$\text{Sc} = \dfrac{\mu}{\rho D_{AB}} = \dfrac{\nu}{D_{AB}}$	$\dfrac{\text{Difusión viscosa}}{\text{Difusión de especies}}$
Número de Sherwood	$\text{Sh} = \dfrac{VL}{D_{AB}}$	$\dfrac{\text{Difusión de masa total}}{\text{Difusión de especies}}$
Razón de calores específicos	k (en ocasiones γ) $= \dfrac{c_p}{c_v}$	$\dfrac{\text{Entalpía}}{\text{Energía interna}}$
Número de Stanton	$\text{St} = \dfrac{h}{\rho c_p V}$	$\dfrac{\text{Transferencia de calor}}{\text{Capacidad térmica}}$
Número de Stokes	Stk (en ocasiones St) $= \dfrac{\rho_p D_p^2 V}{18\mu L}$	$\dfrac{\text{Tiempo de relajación de partícula}}{\text{Tiempo de flujo característico}}$
Número de Strouhal	St (en ocasiones S o Sr) $= \dfrac{fL}{V}$	$\dfrac{\text{Tiempo de flujo característico}}{\text{Periodo de oscilación}}$
Número de Weber	$\text{We} = \dfrac{\rho V^2 L}{\sigma_s}$	$\dfrac{\text{Fuerza inercial}}{\text{Fuerza de tensión superficial}}$

* A es un área característica, D es un diámetro característico, f es una frecuencia característica (Hz), L es una longitud característica, t es un tiempo característico, T es una temperatura (absoluta) característica, V es una velocidad característica, W es un ancho característico, $\dot{W}$ es una potencia característica, ω es una velocidad angular característica (rad/s). Otros parámetros y propiedades de fluido en estas ΠP incluyen: c = velocidad del sonido, c_p, c_v = calores específicos, D_p = diámetro de partícula, D_{AB} = coeficiente de difusión de especies, h = coeficiente de transferencia de calor por convección, h_{fg} = calor latente de evaporación, k = conductividad térmica, P = presión, T_{sat} = temperatura de saturación, $\dot{V}$ = flujo volumétrico, α = difusividad térmica, β = coeficiente de expansión térmica, λ = longitud media de trayectoria libre, μ = viscosidad, ν = viscosidad cinemática, ρ = densidad de fluido, ρ_f = densidad de líquido, ρ_p = densidad de partícula, ρ_s = densidad sólida, ρ_v = densidad de vapor, σ_s = tensión superficial y τ_w = esfuerzo de corte a lo largo de una pared.



PROYECTOR HISTÓRICO ■ Personas honradas con parámetros adimensionales

Autor invitado: Glenn Brown, Oklahoma State University

Por costumbre, a los números adimensionales establecidos de uso común se les han dado nombres, para honrar a las personas que han contribuido en el desarrollo de la ciencia y la ingeniería. En muchos casos, el personaje honrado no fue el primero en definir el número, pero usualmente lo empleó, o utilizó un parámetro similar, en su obra. La siguiente lista es sólo de algunas personas, pero no todas. También debe tomarse en cuenta que algunos números pueden tener más de un nombre.

Arquímedes (287-212 a.C.) Matemático griego que definió las fuerzas de flotación.

Biot, Jean-Baptiste (1774-1862) Matemático francés que realizó trabajos pioneros acerca del calor, electricidad y elasticidad. También ayudó a medir el arco del meridiano como parte de la creación del sistema métrico.

Darcy, Henry P. G. (1803-1858) Ingeniero francés que realizó extensos experimentos acerca del flujo en tuberías y las primeras pruebas cuantificables de filtración.

Eckert, Ernst R. G. (1904-2004) Ingeniero germano-americano y estudiante de Schmidt, quien realizó los primeros trabajos en transferencia de calor en capa límite.

Euler, Leonhard (1707-1783) Matemático suizo y asociado de Daniel Bernoulli formuló ecuaciones de movimiento de fluido e introdujo el concepto de maquinaria centrífuga.

Fanning, John T. (1837-1911) Ingeniero estadounidense autor de libros de texto que publicó en 1877 una forma modificada de la ecuación de Weisbach con una tabla de valores de resistencia calculados a partir de los datos de Darcy.

Fourier, Jean B. J. (1768-1830) Matemático francés. Realizó trabajos pioneros en transferencia de calor y varios temas más.

Froude, William (1810-1879) Ingeniero inglés que desarrolló métodos de modelado naval y cálculo de las resistencias de onda y capa límite de prototipo a partir de las resistencias correspondientes de modelo.

Grashof, Franz (1826-1893) Ingeniero alemán y educador conocido como un prolífico autor, editor, corrector y distribuidor de publicaciones.

Jakob, Max (1879-1955) Físico, ingeniero y autor de libros germano-estadounidense realizó trabajos pioneros en transferencia de calor.

Knudsen, Martin (1871-1949) Físico danés que ayudó a desarrollar la teoría cinética de los gases.

Lewis, Warren K. (1882-1975) Ingeniero estadounidense que investigó las reacciones de destilación, extracción y cama fluidificada.

Mach, Ernst (1838-1916) Físico austriaco. Fue el primero en notar que los cuerpos que viajan más rápido que la velocidad del sonido alterarían drásticamente las propiedades del fluido. Sus ideas influyeron notablemente en el pensamiento del siglo XX, tanto en física como en filosofía y en el desarrollo de la teoría de la relatividad de Einstein.

Nusselt, Wilhelm (1882-1957) Ingeniero alemán. Fue el primero en aplicar la teoría de similitud a la transferencia de calor.

Peclet, Jean C. E. (1793-1857) Educador, físico e investigador industrial francés.

Prandtl, Ludwig (1875-1953) Ingeniero alemán y creador de la teoría de capa límite. Se le considera el fundador de la moderna mecánica de fluidos.

Lord Raleigh, John W. Strutt (1842-1919) Científico inglés investigó la similitud dinámica, la cavitación y el colapso de burbuja.

Reynolds, Osborne (1842-1912) Ingeniero inglés que investigó el flujo en tuberías y desarrolló ecuaciones de flujo viscoso con base en velocidades medias.

Richardson, Lewis F. (1881-1953) Matemático, físico y psicólogo inglés. Fue pionero en la aplicación de la mecánica de fluidos en el modelado de la turbulencia atmosférica.

Schmidt, Ernst (1892-1975) Científico y pionero alemán en el campo de la transferencia de calor y masa. Fue el primero en medir la velocidad y el campo de temperatura en una capa límite de convección natural.

Sherwood, Thomas K. (1903-1976) Ingeniero y educador estadounidense. Investigó la transferencia de masa y su interacción con el flujo, las reacciones químicas y las operaciones de procesos industriales.

Stanton, Thomas E. (1865-1931) Ingeniero inglés y estudiante de Reynolds Contribuyó en varias áreas del flujo de fluidos.

Stokes, George G. (1819-1903) Científico irlandés, desarrolló ecuaciones de movimiento viscoso y difusión.

Strouhal, Vincenz (1850-1922) Físico checo que demostró que los periodos de oscilación que se desprenden de un alambre están relacionados con la velocidad del aire que pasa sobre él.

Weber, Moritz (1871-1951) Profesor alemán. Aplicó el análisis de similitud a flujos capilares.

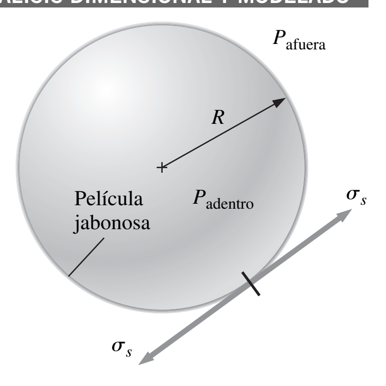


FIGURA 7-29
La presión adentro de una pompa de jabón es mayor que aquella que la rodea debido a la tensión superficial en la película jabonosa.

¿Qué se debe hacer si
$k = n - j = 0$?

Haga lo siguiente:

- **Verifique su lista de parámetros.**
- **Verifique su álgebra.**
- **Si todo lo demás falla, reduzca j por uno.**

FIGURA 7-30
Si el método de repetición de variables indica cero Π, o se ha cometido un error o se necesita reducir j por uno y comenzar de nuevo.

EJEMPLO 7-7 Presión en una pompa de jabón

Algunos niños juegan con pompas de jabón, y el lector tiene curiosidad acerca de la relación entre el radio de la pompa de jabón y la presión adentro de la misma (Fig. 7-29). Razona que la presión adentro de la pompa de jabón debe ser mayor que la presión atmosférica, y que el cascarón de la pompa está bajo tensión, en gran parte como la piel de un globo. Conoce que la propiedad de tensión superficial debe ser importante en este problema. Sin saber algo más de física, decide enfrentar el problema con el uso del análisis dimensional. Establezca una relación entre la diferencia de presión $\Delta P = P_{adentro} - P_{afuera}$, el radio de la pompa de jabón R y la tensión superficial σ_s de la película jabonosa.

SOLUCIÓN La diferencia de presión entre el interior de una pompa de jabón y el aire exterior se analizará mediante el método de repetición de variables.
Hipótesis **1** La pompa de jabón está neutralmente flotante en el aire, y la gravedad no es relevante. **2** En este problema no son importantes otras variables o constantes.
Análisis Se emplea paso a paso el método de repetición de variables.

Paso 1 Existen tres variables y constantes en este problema; $n = 3$. Con las mismas se hace una lista en forma funcional, y la variable dependiente se menciona como una función de las variables y constantes independientes:

Lista de parámetros relevantes: $\Delta P = f(R, \sigma_s) \qquad n = 3$

Paso 2 Se hace una lista con las dimensiones primarias de cada parámetro. Las dimensiones de la tensión superficial se obtienen a partir del Ejemplo 7-1 y las de la presión a partir del Ejemplo 7-2:

$$\begin{array}{ccc} \Delta P & R & \sigma_s \\ \{m^1L^{-1}t^{-2}\} & \{L^1\} & \{m^1t^{-2}\} \end{array}$$

Paso 3 Como primera suposición, j se hace igual a 3, el número de dimensiones primarias representadas en el problema (m, L y t).

Reducción (primera suposición): $j = 3$

Si este valor de j es correcto, el número esperado de Π es $k = n - j = 3 - 3 = 0$. Pero ¿cómo se puede tener cero Π? Obviamente algo no está bien (Fig. 7-30). En momentos como éste es necesario primero regresar y cerciorarse de que no se está despreciando alguna variable o constante importante en el problema. Dado que se está seguro que la diferencia de presión debe depender sólo del radio y la tensión superficial de la pompa de jabón, el valor de j se reduce por uno:

Reducción (segunda suposición): $j = 2$

Si este valor de j es correcto, $k = n - j = 3 - 2 = 1$. Por ende, se espera *una* Π, que físicamente es más realista que cero Π.

Paso 4 Es necesario escoger dos parámetros repetitivos porque $j = 2$. Cuando se siguen los lineamientos de la Tabla 7-3, las únicas opciones son R y σ_s, porque ΔP es la variable dependiente.

Paso 5 Estos parámetros repetitivos se combinan en un producto con la variable dependiente ΔP para crear la Π dependiente:

Π *dependiente*: $$\Pi_1 = \Delta P R^{a_1} \sigma_s^{b_1} \quad (1)$$

Se aplican las dimensiones primarias del paso 2 en la ecuación 1 y se fuerza a la Π a ser adimensional:

Dimensiones de Π_1:

$$\{\Pi_1\} = \{m^0L^0t^0\} = \{\Delta PR^{a_1}\sigma_s^{b_1}\} = \{(m^1L^{-1}t^{-2})L^{a_1}(m^1t^{-2})^{b_1}\}$$

Se igualan los exponentes de cada dimensión primaria para resolver a_1 y b_1:

Tiempo:	$\{t^0\} = \{t^{-2}t^{-2b_1}\}$	$0 = -2 - 2b_1$	$b_1 = -1$
Masa:	$\{m^0\} = \{m^1m^{b_1}\}$	$0 = 1 + b_1$	$b_1 = -1$
Longitud:	$\{L^0\} = \{L^{-1}L^{a_1}\}$	$0 = -1 + a_1$	$a_1 = 1$

Por fortuna, los primeros dos resultados concuerdan uno con otro y, por lo tanto. la ecuación 1 se convierte en:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta PR}{\sigma_s} \quad (2)$$

A partir de la Tabla 7-5, el parámetro adimensional establecido más similar a la ecuación 2 es el **número de Weber**, que se define como presión (ρV^2) por una longitud dividida entre tensión superficial. No hay necesidad de manipular más esta Π.

Paso 6 Se escribe la relación funcional final. En el caso a la mano, sólo existe una Π, que es una función de *nada*. Esto sólo es posible si la Π es constante. Cuando se coloca la ecuación 2 en la forma funcional de la ecuación 7-11:

Relación entre las Π:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta PR}{\sigma_s} = \mathbf{f}(\text{nada}) = \text{constante} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta P = \textbf{constante}\,\frac{\sigma_s}{R}} \quad (3)$$

Discusión Éste es un ejemplo de cómo en ocasiones se pueden predecir *tendencias* con análisis dimensional, inclusive sin saber mucho de la física del problema. Por ejemplo, se conoce a partir del resultado que, si el radio de la pompa de jabón se duplica, la diferencia de presión disminuye por un factor de 2. De manera similar, si el valor de la tensión superficial se duplica, ΔP aumenta por un factor de 2. El análisis dimensional no puede predecir el valor de la constante en la ecuación 3; un análisis ulterior (o *un* experimento) revela que la constante es igual a 4 (capítulo 2),

EJEMPLO 7-8 Sustentación sobre un ala

Unos ingenieros aeronáuticos diseñan un aeroplano y quieren predecir la sustentación que produce su nuevo diseño de ala (Fig. 7-31). La longitud de cuerda L_c del ala es 1.12 m, y su **área de ala** A (área vista desde lo alto cuando el ala está a un ángulo de ataque cero) es 10.7 m^2. El prototipo debe volar a V = 52.0 m/s cerca del suelo, donde T = 25°C. Los ingenieros construyen un modelo del ala a un décimo de escala para probarla en un túnel de viento presurizado. El túnel de viento se puede presurizar a un máximo de 5 atm. ¿A qué velocidad y presión debe correr el túnel de viento con la finalidad de lograr similitud dinámica?

SOLUCIÓN Se deben determinar la velocidad y la presión a las que debe correr el túnel de viento con la finalidad de lograr similitud dinámica.

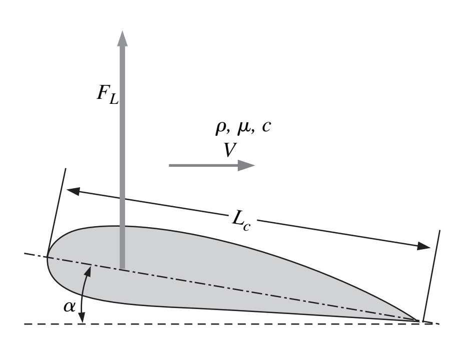


FIGURA 7-31
Sustentación sobre un ala con longitud de cuerda L_c a un ángulo de ataque α en un flujo con velocidad de flujo libre V y densidad ρ, viscosidad μ y velocidad de sonido c. El ángulo de ataque α se mide en relación con la dirección del flujo libre.

Hipótesis **1** El ala prototipo vuela a través del aire a presión atmosférica estándar. **2** El modelo es geométricamente similar al prototipo.
Análisis Primero, se emplea el método de repetición de variables paso a paso, para obtener los parámetros adimensionales. Luego, se empatan las Π dependientes entre prototipo y modelo.

Paso 1 En este problema existen siete parámetros (variables y constantes); $n = 7$. Con ellos se hace una lista en forma funcional, con la variable dependiente que se menciona como función de los parámetros independientes:

Lista de parámetros relevantes: $F_L = f(V, L_c, \rho, \mu, c, \alpha) \qquad n = 7$

donde F_L es la fuerza de sustentación sobre el ala, V es la velocidad del fluido, L_c es la longitud de la cuerda, ρ es la densidad del fluido, μ es la viscosidad del fluido, c es la velocidad del sonido en el fluido y α es el ángulo de ataque del ala.

Paso 2 Se hace una lista de las dimensiones primarias de cada parámetro; el ángulo α es adimensional:

$$\begin{array}{ccccccc} F_L & V & L_c & \rho & \mu & c & \alpha \\ \{m^1L^1t^{-2}\} & \{L^1t^{-1}\} & \{L^1\} & \{m^1L^{-3}\} & \{m^1L^{-1}t^{-1}\} & \{L^1t^{-1}\} & \{1\} \end{array}$$

Paso 3 Como primera suposición, j se hace igual a 3, el número de dimensiones primarias representadas en el problema (m, L y t).

Reducción: $j = 3$

Si este valor de j es correcto, el número esperado de Π es $k = n - j = 7 - 3 = 4$.

Paso 4 Se necesita elegir tres parámetros repetitivos dado que $j = 3$. Cuando se siguen los lineamientos citados en la Tabla 7-3, no se puede escoger la variable dependiente F_L. Tampoco se puede escoger α porque ya es adimensional. No se pueden elegir simultáneamente V y c, porque sus dimensiones son idénticas. No sería deseable que m apareciera en todas las Π. La mejor opción de los parámetros repetitivos es, por lo tanto, V, L_c, y ρ o c, L_c, y ρ. De éstos, los primeros son la mejor elección porque la velocidad del sonido aparece sólo en uno de los parámetros adimensionales establecidos de la Tabla 7-5, mientras que la escala de velocidad es más "común" y aparece en varios de los parámetros (Fig. 7-32).

Parámetros repetitivos: V, L_c y ρ

Paso 5 Se genera la Π dependiente:

$$\Pi_1 = F_L V^{a_1} L_c^{b_1} \rho^{c_1} \quad \rightarrow \quad \{\Pi_1\} = \{(m^1L^1t^{-2})(L^1t^{-1})^{a_1}(L^1)^{b_1}(m^1L^{-3})^{c_1}\}$$

Los exponentes se calculan cuando se fuerza que la Π sea adimensional (no se muestra el álgebra). Se obtiene $\boldsymbol{a_1 = -2}$, $\boldsymbol{b_1 = -2}$, y $\boldsymbol{c_1 = -1}$. Por lo tanto, la Π dependiente es:

$$\Pi_1 = \frac{F_L}{\rho V^2 L_c^2}$$

De la Tabla 7-5, el parámetro adimensional establecido más similar a esta Π_1 es el **coeficiente de sustentación**, que se define en términos de área de ala A en lugar del cuadrado de la longitud de cuerda, y con un factor de $\frac{1}{2}$ en el denominador. En consecuencia, se puede manipular esta Π de acuerdo con los lineamientos mencionados en la Tabla 7-4, del modo siguiente:

Π_1 *modificada*: $$\Pi_{1,\text{ modificada}} = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = \text{coeficiente de sustentación} = C_L$$

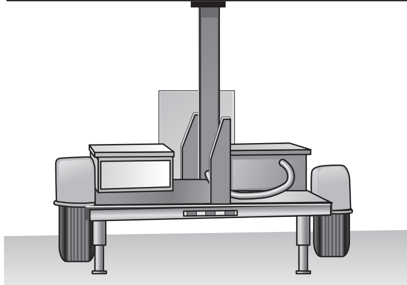


FIGURA 7-32
Con frecuencia, cuando se realiza el método de repetición de variables, la parte más difícil del procedimiento es elegir los parámetros repetitivos. Sin embargo, con la práctica, el lector aprenderá a elegir dichos parámetros con inteligencia.

De manera similar, se genera la primera Π independiente:

$$\Pi_2 = \mu V^{a_2} L_c^{b_2} \rho^{c_2} \quad \rightarrow \quad \{\Pi_2\} = \{(m^1L^{-1}t^{-1})(L^1t^{-1})^{a_2}(L^1)^{b_2}(m^1L^{-3})^{c_2}\}$$

a partir de la cual $a_2 = -1$, $b_2 = -1$, y $c_2 = -1$, y por lo tanto:

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V L_c}$$

Esta Π se reconoce como la inversa del número de Reynolds. De este modo, después de invertir:

Π_2 *modificada*: $$\Pi_{2,\ \text{modificada}} = \frac{\rho V L_c}{\mu} = \text{número de Reynolds} = \text{Re}$$

La tercera Π se forma con la velocidad del sonido, cuyos detalles se dejan para que el lector la genere por su cuenta. El resultado es:

$$\Pi_3 = \frac{V}{c} = \text{número de Mach} = \text{Ma}$$

Finalmente, dado que el ángulo de ataque α ya es adimensional, es un grupo Π adimensional por propia cuenta (Fig. 7-33). Se invita al lector a realizarlo mediante el álgebra; encontrará que todos los exponentes evidencian ser cero, y por lo tanto:

$$\Pi_4 = \alpha = \text{ángulo de ataque}$$

Paso 6 Se escribe la relación funcional final como:

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = f(\text{Re}, \text{Ma}, \alpha) \tag{1}$$

Para lograr similitud dinámica, la ecuación 7-12 exige que los tres parámetros adimensionales independientes en la ecuación 1 empaten entre el modelo y el prototipo. Aunque es trivial empatar el ángulo de ataque, no es tan simple empatar simultáneamente el número de Reynolds y el número de Mach. Por ejemplo, si el túnel de viento corriera a la misma temperatura y presión que las del prototipo, de modo que ρ, μ y c del aire que fluye sobre el modelo fueran los mismos que ρ, μ y c del aire que fluye sobre el prototipo, la similitud con el número de Reynolds se lograría al hacer que la velocidad del aire del túnel de viento fuera 10 veces la del prototipo (pues el modelo está a una escala de un décimo). Pero entonces los números de Mach diferirían por un factor de 10. A 25°C, c es aproximadamente 346 m/s, y el número de Mach del ala de avión prototipo es $\text{Ma}_p = 52.0/346 = 0.150$: subsónico. A la velocidad del túnel de viento necesario, Ma_m sería 1.50: ¡supersónico! Esto es claramente inaceptable, porque la física del flujo cambia notablemente de condiciones subsónicas a supersónicas. En el otro extremo, si se deben empatar los números de Mach, el número de Reynolds del modelo sería 10 veces más pequeño.

¿Qué haría? Una regla empírica común es que, para números de Mach menores de aproximadamente 0.3, como es el afortunado caso aquí, los efectos de compresibilidad prácticamente son despreciables. Por ende, no es necesario igualar exactamente el número de Mach; más bien, en tanto Ma_m se mantenga por abajo de más o menos 0.3, la similitud dinámica aproximada se puede lograr con el empate del número de Reynolds. Ahora el problema se convierte en uno: cómo empatar Re mientras se mantiene un número de Mach bajo. Aquí entra la característica de presurización del túnel de viento. A temperatura constante, la densidad es proporcional a la presión, mientras que la viscosidad dinámica y la velocidad del sonido son funciones muy débiles de la presión. Si la presión del túnel

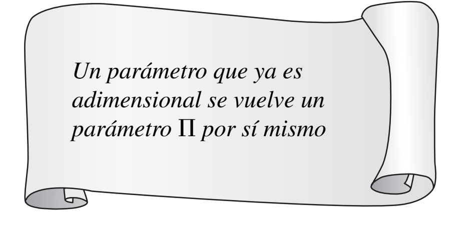


FIGURA 7-33
Un parámetro que es adimensional (como un ángulo) ya es una Π adimensional por sí mismo; esta Π se conoce sin realizar alguna álgebra ulterior.

de viento se pudiera bombear a 10 atm, se podría correr la prueba del modelo a la misma velocidad que la del prototipo y lograr un equiparamiento casi perfecto tanto en Re como en Ma. Sin embargo, a la máxima presión del túnel de viento de 5 atm, la velocidad requerida del túnel de viento sería el doble que la del prototipo, o 104 m/s. El número de Mach del modelo del túnel de viento sería entonces $Ma_m = 104/346 = 0.301$, aproximadamente en el límite de incompresibilidad de acuerdo con la regla empírica. En resumen, el túnel de viento correría a aproximadamente **100 m/s, 5 atm** y **25°C**.

Discusión Este ejemplo ilustra una de las (frustrantes) limitaciones del análisis dimensional; *no siempre es posible empatar simultáneamente todas las* Π *independientes en un modelo de prueba.* Se debe llegar a acuerdos en los que sólo casen las Π más importantes. En muchas situaciones prácticas en la mecánica de fluidos, el número de Reynolds no es crucial para la similitud dinámica, siempre que Re sea lo suficientemente alto. Si el número de Mach del prototipo fuese significativamente más grande que alrededor de 0.3, sería aconsejable igualar precisamente el número de Mach en lugar del número de Reynolds con la finalidad de garantizar resultados razonables. Más aún, si se usara un gas diferente para probar el modelo, también sería necesario empatar la razón de calor específico (k), pues el comportamiento del flujo compresible depende de k (capítulo 12). En la Sección 7-5 se comentan con más detalle los problemas de pruebas de modelos.

Regresemos a los ejemplos 7-5 y 7-6. Recuerde que la velocidad del aire del auto prototipo es de 50.0 mi/h, y que la del túnel de viento es de 224 mi/h. A 25°C, esto corresponde a un número Mach de prototipo de $Ma_p = 0.065$ y a 5°C, el número Mach del túnel de viento es 0.29, en la frontera del límite de incompresibilidad. En retrospectiva, se debió haber incluido la velocidad del sonido en el análisis dimensional, lo que habría generado el número de Mach como una P adicional. Otra manera de empatar el número de Reynolds mientras se conserva bajo el número de Mach es usar un *líquido* como el agua, pues los líquidos son casi incompresibles, inclusive a velocidades bastante altas.

EJEMPLO 7-9 **Fricción de un tubo**

Considere el flujo de un fluido incompresible de densidad ρ y viscosidad μ a través de una larga sección horizontal de tubo redondo de diámetro D. El perfil de velocidad se bosqueja en la figura 7-34; V es la velocidad promedio a través de la sección transversal del tubo, que por conservación de masa permanece constante a lo largo del tubo. Para un tubo muy largo, el flujo finalmente se volverá **totalmente desarrollado**, lo que significa que el perfil de velocidad también permanece uniforme a lo largo del tubo. Debido a las fuerzas de fricción entre el fluido y la pared del tubo, existe un esfuerzo de corte τ_w sobre la superficie interior del tubo, como se ilustra. El esfuerzo de corte también es constante a lo largo del tubo en la región totalmente desarrollada. Se supone cierta rugosidad promedio constante ε a lo largo de la superficie interior del tubo. De hecho, el único parámetro que *no* es constante a lo largo del tubo es la presión, que debe disminuir (linealmente) a lo largo del tubo con la finalidad de "empujar" el fluido a través del tubo para superar la fricción. Desarrolle una relación adimensional entre esfuerzo de corte τ_w y los otros parámetros en el problema.

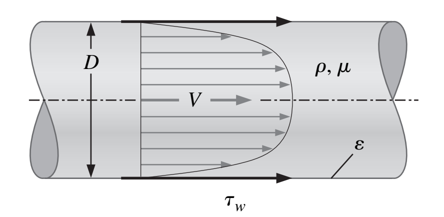


FIGURA 7-34
Fricción en la superficie interior de un tubo. El esfuerzo de corte τ_w sobre las paredes del tubo es una función de la velocidad promedio del fluido V, la rugosidad promedio de la superficie interior del tubo ε, la densidad del fluido ρ, la viscosidad del fluido μ y el diámetro interior del tubo D.

SOLUCIÓN Se debe generar una relación adimensional entre el esfuerzo de corte y otros parámetros.

Hipótesis **1** El flujo está totalmente desarrollado. **2** El fluido es incompresible. **3** En el problema no son significativos otros parámetros.

Análisis Se emplea paso a paso el método de repetición de variables para obtener los parámetros adimensionales.

Paso 1 En este problema existen seis variables y constantes; $n = 6$. Con ellos se elabora una lista en forma funcional, y la variable dependiente se menciona como una función de las variables y constantes independientes:

Lista de parámetros relevantes: $\tau_w = f(V, \varepsilon, \rho, \mu, D) \qquad n = 6$

Paso 2 Se hace una lista con las dimensiones primarias de cada parámetro. Note que el esfuerzo de corte es una fuerza por unidad de área y, por lo tanto, tiene las mismas dimensiones que presión:

τ_w	V	ε	ρ	μ	D
$\{m^1L^{-1}t^{-2}\}$	$\{L^1t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{m^1L^{-3}\}$	$\{m^1L^{-1}t^{-1}\}$	$\{L^1\}$

Paso 3 Como primera suposición, j se hace igual a 3, el número de dimensiones primarias representadas en el problema (m, L y t).

Reducción: $j = 3$

Si este valor de j es correcto, el número esperado de Π's es $k = n - j = 6 - 3 = 3$.

Paso 4 Se eligen tres parámetros repetitivos pues $j = 3$. Cuando se siguen los lineamientos de la Tabla 7-3, no se puede elegir la variable dependiente τ_w. No se pueden elegir simultáneamente ε y D pues sus dimensiones son idénticas y no sería deseable que ni μ ni ε apareciesen en todas las Π. La mejor elección de parámetros repetitivos es por tanto V, D y ρ.

Parámetros repetitivos: V, D y ρ

Paso 5 Se genera la Π dependiente:

$$\Pi_1 = \tau_w V^{a_1} D^{b_1} \rho^{c_1} \quad \rightarrow \quad \{\Pi_1\} = \{(m^1L^{-1}t^{-2})(L^1t^{-1})^{a_1}(L^1)^{b_1}(m^1L^{-3})^{c_1}\}$$

a partir de lo cual $\boldsymbol{a_1 = -2}$, $\boldsymbol{b_1 = 0}$, y $\boldsymbol{c_1 = -1}$, y por lo tanto la Π dependiente es:

$$\Pi_1 = \frac{\tau_w}{\rho V^2}$$

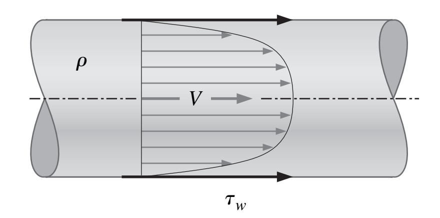
A partir de la Tabla 7-5, el parámetro adimensional establecido más similar a esta Π_1 es el **factor de fricción de Darcy**, que se define con un factor de 8 en el numerador (Fig. 7-35). Por lo tanto, esta Π se puede manipular del modo siguiente de acuerdo con los lineamientos mencionados en la Tabla 7-4:

Π_1 *modificada*: $$\Pi_{1,\,\text{modificada}} = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = \text{factor de fricción de Darcy} = f$$

De manera similar se generan las dos Π independientes, cuyos detalles se dejan al lector:

$$\Pi_2 = \mu V^{a_2} D^{b_2} \rho^{c_2} \quad \rightarrow \quad \Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = \text{número de Reynolds} = \text{Re}$$

$$\Pi_3 = \varepsilon V^{a_3} D^{b_3} \rho^{c_3} \quad \rightarrow \quad \Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \text{rugosidad relativa}$$



Factor de fricción de Darcy: $f = \dfrac{8\tau_w}{\rho V^2}$

Factor de fricción de Fanning: $C_f = \dfrac{2\tau_w}{\rho V^2}$

FIGURA 7-35
Aunque el *factor de fricción de Darcy* para flujos en tubería es más común, debe estar atento a un factor de fricción alternativo menos común, llamado *factor de fricción de Fanning*. La relación entre los dos es $f = 4C_f$.

Paso 6 La relación funcional final se escribe como:

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = f\left(\mathrm{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \qquad (1)$$

Discusión El resultado se aplica a flujo en tubo totalmente desarrollado tanto laminar como turbulento; sin embargo, se evidencia que la segunda Π independiente (rugosidad relativa ε/D) no es tan importante en flujo laminar como en flujo turbulento. Este problema presenta una interesante conexión entre similitud geométrica y análisis dimensional. A saber, es necesario empatar ε/D pues es una Π independiente en el problema. Desde una perspectiva diferente, si se considera la rugosidad como una propiedad geométrica, es necesario empatar ε/D para garantizar *similitud geométrica* entre dos tubos.

Para verificar la validez de la ecuación 1 del Ejemplo 7-9, se usa la **dinámica de fluidos computacional (CFD**, por sus siglas en inglés) para predecir los perfiles de velocidad y los valores de esfuerzos de corte de pared para dos flujos físicamente diferentes pero dinámicamente similares:

- ***Aire*** a 300 K que fluye a una velocidad promedio de 14.5 ft/s a través de un tubo de diámetro interior de 1.00 ft y rugosidad promedio de 0.0010 ft.
- ***Agua*** a 300 K que fluye a una velocidad promedio de 3.09 m/s a través de un tubo de diámetro interior de 0.0300 m y rugosidad promedio de 0.030 mm.

Los dos tubos son geométricamente similares pues ambos son tubos redondos. Tienen la misma rugosidad relativa promedio (ε/D = 0.0010 en ambos casos). Se eligen cuidadosamente los valores de velocidad promedio y diámetro de modo que los dos flujos también sean *dinámicamente* similares. Específicamente, la otra Π independiente (el número de Reynolds) también coincide entre los dos flujos.

$$\mathrm{Re}_{\text{aire}} = \frac{\rho_{\text{aire}} V_{\text{aire}} D_{\text{aire}}}{\mu_{\text{aire}}} = \frac{(1.225\ \text{kg/m}^3)(14.5\ \text{ft/s})(1.00\ \text{ft})}{1.789 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}} \left(\frac{0.3048\ \text{m}}{\text{ft}}\right)^2 = 9.22 \times 10^4$$

donde las propiedades del fluido son las que se construyen en el paquete de CFD, y:

$$\mathrm{Re}_{\text{agua}} = \frac{\rho_{\text{agua}} V_{\text{agua}} D_{\text{agua}}}{\mu_{\text{agua}}} = \frac{(998.2\ \text{kg/m}^3)(3.09\ \text{m/s})(0.0300\ \text{m})}{0.001003\ \text{kg/m} \cdot \text{s}} = 9.22 \times 10^4$$

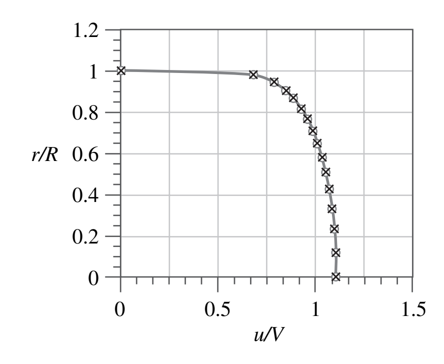


FIGURA 7-36
Perfiles de velocidad axial normalizada para flujo totalmente desarrollado a través de un tubo, según predice la CFD; en la misma gráfica se muestran los perfiles de aire (círculo) y agua (cruces).

En consecuencia, por la ecuación 7-12, se espera que las Π *dependientes* también deban coincidir entre los dos flujos. Se genera una malla computacional para cada uno de los dos flujos y se usa un paquete comercial de CFD para generar el perfil de velocidad, a partir de lo cual se calcula el esfuerzo de corte. Se comparan los perfiles de velocidad turbulenta, promediados en el tiempo, totalmente desarrollados, cerca del extremo lejano de ambos tubos. Aunque los tubos son de diferentes diámetros y los fluidos son diferentes, las formas del perfil de velocidad son bastante similares. De hecho, cuando se grafica la velocidad axial *normalizada* (u/V) como función del radio *normalizado* (r/R), se encuentra que los dos perfiles caen encima uno del otro (Fig. 7-36).

A partir de los resultados CFD para cada flujo también se calculan los esfuerzos de corte de pared, cuya comparación se muestra en la Tabla 7-6. Existen varias razones por las que el esfuerzo de corte de pared en el tubo de agua es de órdenes de magnitud más grandes que los del tubo de aire. A saber, el agua es más de 800 veces más densa que el aire y más de 50 veces viscosa. Más aún, el esfuerzo de corte es proporcional al *gradiente* de velocidad, y el diámetro del tu-

TABLA 7-6

Comparación de esfuerzo de corte de pared y esfuerzo de corte de pared adimensional para flujo totalmente desarrollado a lo largo de un tubo de aire y un tubo de agua, según predice CFD*

Parámetro	Flujo de aire	Flujo de agua
Esfuerzo de corte de pared	$\tau_{w,\,\text{aire}} = 0.0557\ \text{N/m}^2$	$\tau_{w,\,\text{agua}} = 22.2\ \text{N/m}^2$
Esfuerzo de corte de pared adimensional (factor de fricción de Darcy)	$f_{\text{aire}} = \dfrac{8\tau_{w,\,\text{aire}}}{\rho_{\text{aire}} V^2_{\text{aire}}} = 0.0186$	$f_{\text{agua}} = \dfrac{8\tau_{w,\,\text{agua}}}{\rho_{\text{agua}} V^2_{\text{agua}}} = 0.0186$

* Datos obtenidos con FLUENT y el uso del modelo de turbulencia k-ε estándar con funciones de pared.

bo de agua es menor que un décimo el del tubo de aire, que conduce a gradientes de velocidad mayores. Sin embargo, en términos del esfuerzo de corte de pared *adimensional* f, la Tabla 7-6 muestra que los resultados son idénticos debido a la similitud dinámica entre los dos flujos. Note que, aunque los valores se reportan a tres cifras significativas, la confiabilidad de los modelos de turbulencia en CFD es precisa a cuando mucho dos cifras significativas (capítulo 15).

7-5 ▪ PRUEBAS EXPERIMENTALES Y SIMILITUD INCOMPLETA

Una de las aplicaciones más útiles del análisis dimensional está en el diseño de experimentos físicos y/o numéricos, y en el reporte de los resultados de tales experimentos. En esta sección se tratan ambas aplicaciones y se puntualizan situaciones en las que la similitud dinámica completa no es alcanzable.

Configuración de un experimento y correlación de los datos experimentales

Como ejemplo genérico, considere un problema en el que existan cinco parámetros originales (uno de los cuales es el parámetro *dependiente*). Se lleva a cabo un conjunto completo de experimentos (llamado matriz de prueba **factorial completa**) para probar toda posible combinación de varios niveles de cada uno de los cuatro parámetros independientes. Una prueba factorial completa con cinco niveles de cada uno de los cuatro parámetros independientes exigiría $5^4 = 625$ experimentos. Aunque las técnicas de diseño experimental (matrices de prueba **factorial fraccional**; ver Montgomery, 1996) pueden reducir significativamente el tamaño de la matriz de prueba, el número de experimentos necesario todavía sería grande. Sin embargo, si se supone que en el problema se representan tres dimensiones primarias, se puede reducir el número de parámetros de cinco a dos ($k = 5 - 3 = 2$ grupos Π adimensionales), y el número de parámetros *independientes* de cuatro a uno. Por lo tanto, para la misma resolución (cinco niveles de prueba de cada parámetro independiente) se necesitaría entonces realizar un total de sólo $5^1 = 5$ experimentos. El lector no tiene que ser un genio para darse cuenta de que sustituir 625 experimentos por 5 experimentos tiene un costo efectivo y puede ver por qué es prudente realizar un análisis dimensional *antes* de realizar un experimento.

Al continuar con el estudio de este ejemplo genérico (un problema de dos Π), ya que los experimentos estén completos, se grafica el parámetro adimensional dependiente (Π_1) como función del parámetro adimensional independiente (Π_2), como en la figura 7-37. Entonces se determina la función que relaciona las Π

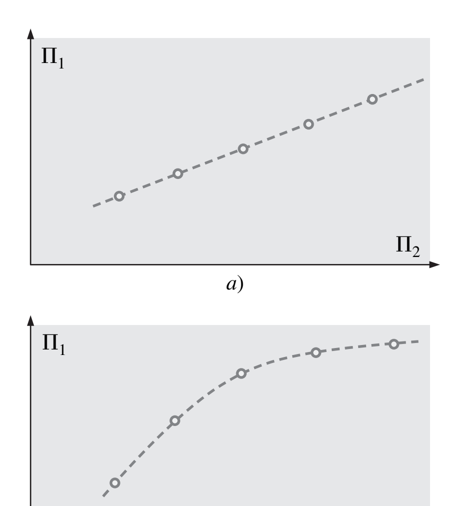


FIGURA 7-37
Para un problema de dos Π, se grafica el parámetro adimensional dependiente (Π_1) como función del parámetro adimensional independiente (Π_2). La gráfica resultante puede ser *a*) lineal o *b*) no lineal. En cualquier caso, están disponibles técnicas de regresión y de ajuste de curvas para determinar la relación entre las Π.

por medio de la realización de un **análisis de regresión** sobre los datos. Si es afortunado, los datos se pueden correlacionar linealmente. Si no, puede intentar regresión lineal sobre coordenadas log-lineal o log-log, ajuste de curva polinomial, etcétera, para establecer una relación aproximada entre las dos Π. Véase Holman (2001) para detalles acerca de estas técnicas de ajuste de curvas.

Si en el problema existen más de dos Π (por ejemplo, un problema de tres Π o un problema de cuatro Π), es necesario establecer una matriz de prueba para determinar la relación entre la Π dependiente y las Π independientes. En muchos casos se descubre que una o más de las Π independientes tiene efecto despreciable sobre la Π dependiente y se puede eliminar de la lista de parámetros adimensionales necesarios.

Como se ha visto (Ejemplo 7-7), el análisis dimensional a veces produce sólo *una* Π. En un problema de una Π se conoce la forma de la relación entre los parámetros originales hasta dentro de cierta constante desconocida. En tal caso, sólo se necesita *un* experimento para determinar dicha constante.

Similitud incompleta

Se han mostrado varios ejemplos en los que los grupos Π adimensionales se obtienen fácilmente con papel y lápiz a través del uso directo del método de repetición de variables. De hecho, el lector después de suficiente práctica, debe ser capaz de obtener las Π con facilidad, a veces en su cabeza o en el "reverso de un sobre". Por desgracia, con frecuencia es una historia muy diferente cuando se van a aplicar los resultados del análisis dimensional a los datos experimentales. El problema es que no siempre es posible empatar *todas* las Π de un modelo con las correspondientes Π del prototipo, inclusive si se tiene cuidado para lograr similitud geométrica. Esta situación se llama **similitud incompleta**. Por fortuna, en algunos casos de similitud incompleta, inclusive se tiene la posibilidad de extrapolar las pruebas del modelo para obtener razonables predicciones a escala completa.

Pruebas en el túnel de viento

La similitud incompleta se ilustra con el problema de medir la fuerza aerodinámica de arrastre de un modelo de camión en un túnel de viento (Fig. 7-38). Suponga que se compra un modelo a un dieciseisavo de escala de un tractocamión (18 llantas). El modelo es geométricamente similar al prototipo, inclusive en los detalles como espejos laterales, salpicaderas, etcétera. El modelo de camión mide 0.991 m de largo, que corresponde a una longitud de prototipo de tamaño real de 15.9 m. El modelo de camión se probará en un túnel de viento que tiene una velocidad máxima de 70 m/s. La sección de prueba del túnel de viento tiene 1.0 m de alto y 1.2 m de ancho, lo suficientemente grande como para acomodar el modelo sin necesidad de preocuparse por la interferencia de las paredes de túnel o de efectos de bloqueo. El aire en el túnel de viento está a la misma temperatura y presión que el aire que fluye alrededor del prototipo. Se quiere simular flujo a V_p = 60 mi/h (26.8 m/s) sobre el camión prototipo a tamaño real.

La primera actividad que se realiza es igualar los números de Reynolds:

$$\text{Re}_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \text{Re}_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

que se puede resolver para la velocidad de túnel de viento necesaria para las pruebas de modelo V_m,

$$V_m = V_p\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{L_p}{L_m}\right) = (26.8 \text{ m/s})(1)(1)\left(\frac{16}{1}\right) = 429 \text{ m/s}$$

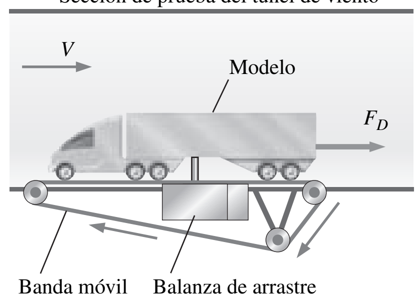


FIGURA 7-38
Medición de la fuerza aerodinámica de arrastre sobre un modelo de camión en un túnel de viento equipado con una *balanza de arrastre* y una *banda móvil* a nivel del suelo.

Por ende, cuando se iguala el número de Reynolds entre modelo y prototipo, el túnel de viento debe correr a 429 m/s (a tres cifras significativas). Obviamente, aquí se tiene un problema, porque esta velocidad es más de seis veces mayor que la máxima velocidad del túnel de viento alcanzable. Más aún, incluso si se *pudiera* correr el túnel de viento a dicha velocidad, el flujo sería *supersónico*, dado que la velocidad del sonido en el aire a temperatura ambiente es cercana a 346 m/s. Mientras que el número de Mach del camión prototipo que se desplaza a través del aire es de 26.8/335 = 0.080, la del aire del túnel de viento que corre sobre el modelo sería 429/335 = 1.28 (si el aire en el túnel de viento pudiera fluir así de rápido).

Por supuesto es imposible empatar el número de Reynolds del modelo con el del prototipo usando este modelo y el túnel de viento. ¿Qué se puede hacer? Existen varias opciones:

- Si se tuviera un túnel de viento más grande, se podrían hacer pruebas con un modelo más grande. Los fabricantes de automóviles usualmente prueban con modelos de autos a una escala de tres octavos y con modelos de tractocamiones y autobuses a un octavo de escala en túneles de viento muy grandes. Algunos túneles de viento son incluso lo suficientemente grandes como para probar automóviles a tamaño real (Fig. 7-39). Sin embargo, como podrá imaginar el lector, mientras más grandes sean el túnel de viento y el modelo, más costosas serán las pruebas. También se debe tener cuidado en que el modelo no sea demasiado grande para el túnel de viento. Una regla empírica útil es que el **bloqueo** (la razón del área frontal del modelo al área transversal de la sección de prueba) debe ser menor que 7.5 por ciento. De otro modo, las paredes del túnel de viento afectarán contrariamente las similitudes tanto geométrica como cinemática..
- Se podría usar un fluido diferente para las pruebas del modelo. Por ejemplo, los túneles de agua pueden lograr números de Reynolds más altos que los que pueden lograr túneles de viento del mismo tamaño, pero son mucho más costosos de construir y operar.
- Se podría presurizar el túnel de viento y/o ajustar la temperatura del aire para aumentar la capacidad del máximo número de Reynolds. Aunque estas técnicas pueden ayudar, el aumento en el número de Reynolds es limitado.
- Si todo esto falla, se podría correr el túnel de viento a diversas velocidades cercanas a la velocidad máxima, y luego extrapolar los resultados al número de Reynolds a tamaño real.



FIGURA 7-39
El túnel de viento de tamaño real de Langley (LFST, por sus siglas en inglés) es lo suficientemente grande como para probar vehículos de tamaño real.
Cortesía NASA Langley Research Center.

Por fortuna, se hace evidente que, para muchas pruebas en el túnel de viento, la última opción es bastante viable. Aunque el coeficiente de arrastre C_D es una fuerte función del número de Reynolds a valores bajos de Re, los C_D con frecuencia se estabilizan para Re mayores de cierto valor. En otras palabras, para flujo sobre numerosos objetos, en especial objetos “exagerados” como tractocamiones, edificios, etcétera, el flujo es **independiente del número de Reynolds** sobre algún valor umbral de Re (Fig. 7-40), usualmente cuando la capa límite y la estela son ambas totalmente turbulentas.

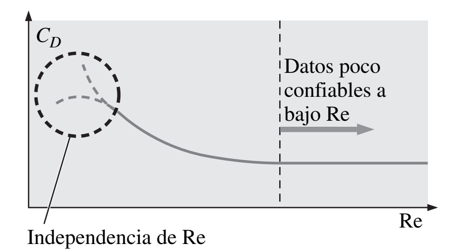


FIGURA 7-40
Para numerosos objetos, el coeficiente de arrastre se estabiliza a números de Reynolds mayores de un cierto valor umbral. A esta situación afortunada se le llama *independencia del número de Reynolds*. Esto permite extrapolar los resultados a números de Reynolds de prototipo que están por afuera del rango de los números de Reynolds de la instalación experimental.

EJEMPLO 7-10 **Mediciones en túnel de viento de un modelo de tractocamión**

Un modelo de tractocamión (18 ruedas) a un dieciseisavo de escala se prueba en un túnel de viento, como se ilustra en la figura 7-38. El modelo mide 0.991 m de largo, 0.257 m de alto y 0.159 m de ancho. Durante las pruebas, la veloci-

TABLA 7-7

Datos del túnel de viento: fuerza de arrastre sobre un modelo de tractocamión como función de la velocidad del túnel de viento

V, m/s	F_D, N
20	12.4
25	19.0
30	22.1
35	29.0
40	34.3
45	39.9
50	47.2
55	55.5
60	66.0
65	77.6
70	89.9

dad de la banda móvil del suelo se ajusta de modo que siempre empata con la velocidad del aire que corre a través de la sección de prueba. La fuerza aerodinámica de arrastre F_D se mide como función de la velocidad del túnel de viento; los resultados experimentales se presentan en la Tabla 7-7. Grafique el coeficiente de arrastre C_D como función del número de Reynolds Re, donde el área que se usa para el cálculo de C_D es el área frontal del modelo (es el área que ve cuando mira al modelo desde corriente arriba) y la longitud característica que se usa para calcular Re es el ancho del tractocamión W. ¿Se ha logrado similitud dinámica? ¿Se ha logrado independencia del número de Reynolds en la prueba del túnel de viento? Estime la fuerza a de arrastre sobre el tractocamión prototipo que viaja sobre la autopista a 26.8 m/s. Suponga que tanto el aire del túnel de viento como el aire que fluye sobre el prototipo están a 25°C y a presión atmosférica estándar.

SOLUCIÓN Se debe calcular y graficar C_D como función de Re para un conjunto dado de mediciones del túnel de viento y determinar si se han logrado similitud dinámica y/o independencia del número de Reynolds. Finalmente, se debe estimar la fuerza aerodinámica de arrastre que actúa sobre el tractocamión prototipo.

Hipótesis **1** El tractocamión modelo es geométricamente similar al tractocamión prototipo. **2** La fuerza de arrastre sobre los soportes que sostienen al tractocamión modelo es despreciable.

Propiedades Para aire a presión atmosférica y a $T = 25°C$, $\rho = 1.184$ kg/m^3 y $\mu = 1.849 \times 10^{-5}$ kg/m · s.

Análisis Se calculan C_D y Re para el último renglón de datos en la Tabla 7-7 (a la mayor velocidad del túnel de viento).

$$C_{D,m} = \frac{F_{D,m}}{\frac{1}{2}\rho_m V_m^2 A_m} = \frac{89.9 \text{ N}}{\frac{1}{2}(1.184 \text{ kg/m}^3)(70 \text{ m/s})^2(0.159 \text{ m})(0.257 \text{ m})}\left(\frac{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}{1 \text{ N}}\right)$$
$$= 0.758$$

y

$$\text{Re}_m = \frac{\rho_m V_m W_m}{\mu_m} = \frac{(1.184 \text{ kg/m}^3)(70 \text{ m/s})(0.159 \text{ m})}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}} = 7.13 \times 10^5 \quad (1)$$

Estos cálculos se repiten para todos los puntos de datos en la Tabla 7-7 y C_D se grafica contra Re en la figura 7-41.

¿Se ha logrado similitud dinámica? Bueno, se tiene similitud *geométrica* entre modelo y prototipo, pero el número de Reynolds del tractocamión prototipo es:

$$\text{Re}_p = \frac{\rho_p V_p W_p}{\mu_p} = \frac{(1.184 \text{ kg/m}^3)(26.8 \text{ m/s})[16(0.159 \text{ m})]}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}} = 4.37 \times 10^6 \quad (2)$$

donde el ancho del prototipo se especifica como 16 veces el del modelo. La comparación de las ecuaciones 1 y 2 revela que el número de Reynolds es más de seis veces mayor que el del modelo. Dado que no se pueden empatar las P independientes en el problema, **no se ha logrado similitud dinámica**.

¿Se ha logrado independencia del número de Reynolds? A partir de la figura 7-41 se ve que, **de hecho, se ha logrado independencia del número de Reynolds**: a Re mayor que aproximadamente 5×10^5, C_D se estabiliza a un valor de aproximadamente 0.76 (a dos cifras significativas).

Dado que se logró independencia del número de Reynolds, se puede extrapolar el resultado al prototipo de tamaño real, ya que se supone que C_D permanece constante conforme Re aumenta al del prototipo de tamaño real.

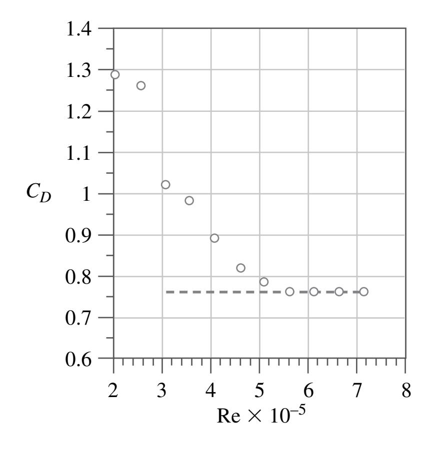


FIGURA 7-41
Coeficiente de arrastre como función del número de Reynolds. Los valores se calculan a partir de los datos de prueba del túnel de viento sobre un modelo de tractocamión (Tabla 7-7).

Fuerza de arrastre predicha sobre el prototipo:

$$F_{D,p} = \tfrac{1}{2}\rho_p V_p^2 A_p C_{D,p}$$

$$= \tfrac{1}{2}(1.184\ \text{kg/m}^3)(26.8\ \text{m/s})^2[16^2(0.159\ \text{m})(0.257\ \text{m})](0.76)\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{3\ 400\ N}$$

Discusión El resultado final se proporciona a dos cifras significativas. Más de eso no se puede justificar. Como siempre, se debe tener cuidado cuando se realice una extrapolación porque no se tiene garantía de que los resultados extrapolados son correctos.

Flujos con superficies libres

Para el caso de pruebas de flujos de modelos con superficies libres (botes y barcos, inundaciones, flujos de río, acueductos, desagües de presas hidroeléctricas, interacción de ondas con malecones, erosión de suelo, etcétera), surgen complicaciones que evitan la similitud completa entre modelo y prototipo. Por ejemplo, si se construye un modelo de río para estudiar inundaciones, con frecuencia el modelo es varios cientos de veces más pequeño que el prototipo debido al limitado espacio del laboratorio. Si las dimensiones verticales del modelo se escalaran proporcionalmente, la profundidad del río modelo sería tan pequeña que los efectos de tensión superficial (y el número de Weber) se volvería importante, e incluso dominaría al flujo del modelo, aun cuando los efectos de tensión superficial sean despreciables en el flujo prototipo. Además, aunque el flujo en el río verdadero puede ser turbulento, el flujo en el modelo del río puede ser laminar, especialmente si la pendiente del banco es geométricamente similar a la del prototipo. Para evitar estos problemas, los investigadores usan con frecuencia **modelos distorsionados**, donde la escala vertical del modelo (por ejemplo, profundidad del río) se exagera en comparación con la escala horizontal del modelo (por ejemplo, ancho del río). Además, la pendiente del banco del río modelo por lo general se hace proporcionalmente más pronunciada que la del prototipo. Estas modificaciones resultan en similitud incompleta debido a la falta de similitud geométrica. Las pruebas de modelo son útiles en estas circunstancias, pero se necesitan otros trucos (como hacer rugosas las superficies del modelo deliberadamente) y correcciones y correlaciones empíricas para escalar adecuadamente los datos del modelo.

En muchos problemas prácticos que incluyen superficies libres, tanto el número de Reynolds como el número de Froude aparecen como relevantes grupos Π independientes en el análisis dimensional (Fig. 7-42). Es difícil (en ocasiones imposible) equiparar simultáneamente ambos parámetros adimensionales. Para un flujo de superficie libre con escala de longitud L, la escala de velocidad V y la viscosidad cinemática ν, el número de Reynolds coincide entre modelo y prototipo cuando:

$$\text{Re}_p = \frac{V_p L_p}{\nu_p} = \text{Re}_m = \frac{V_m L_m}{\nu_m} \tag{7-21}$$

El número de Froude coincide entre modelo y prototipo cuando:

$$\text{Fr}_p = \frac{V_p}{\sqrt{gL_p}} = \text{Fr}_m = \frac{V_m}{\sqrt{gL_m}} \tag{7-22}$$

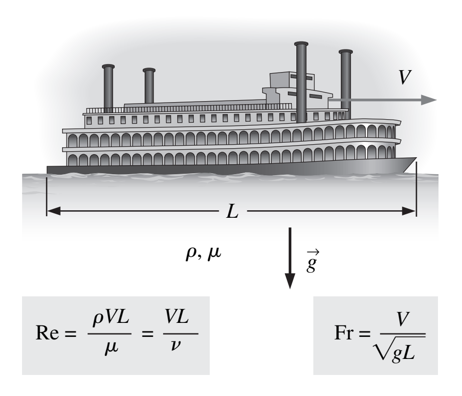


FIGURA 7-42
En numerosos flujos que incluyen un líquido con una superficie libre, tanto el número de Reynolds como el de Froude son relevantes parámetros adimensionales. Dado que no siempre es posible igualar Re y Fr entre modelo y prototipo, en ocasiones se fuerza a establecer la similitud incompleta.

Para igualar Re y Fr, se resuelven simultáneamente las ecuaciones 7-21 y 7-22 para el factor de escala de longitud requerido L_m/L_p:

$$\frac{L_m}{L_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p}\frac{V_p}{V_m} = \left(\frac{V_m}{V_p}\right)^2 \tag{7-23}$$

Cuando se elimina la razón V_m/V_p de la ecuación 7-23, se ve que:

Razón necesaria de viscosidades cinemáticas para igualar tanto Re como Fr:

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{3/2} \tag{7-24}$$

Por lo tanto, para garantizar similitud completa (si se supone que es alcanzable la similitud geométrica sin los efectos indeseados de tensión superficial comentados anteriormente), se necesitaría usar un líquido cuya viscosidad cinemática satisficiera la ecuación 7-24. Aunque a veces es posible encontrar un líquido apropiado para usar con el modelo, en la mayoría de los casos es o impráctico o imposible, como lo ilustra el Ejemplo 7-11.

EJEMPLO 7-11 **Modelo de esclusa y río**

A finales de la década de 1990, un grupo de ingenieros militares de Estados Unidos diseñó un experimento para modelar el flujo de la corriente abajo del río Tennessee de la esclusa y el dique de Kentucky (Fig. 7-43). Debido a restricciones espaciales de laboratorio, construyeron un modelo a escala con un factor de longitud de escala de $L_m/L_p = 1/100$. Sugiera un líquido que sería apropiado para el experimento.

SOLUCIÓN Se debe sugerir un líquido para usarlo en un experimento que incluya un modelo a un centésimo de escala de una esclusa, un dique y un río.
Hipótesis **1** El modelo es geométricamente similar al prototipo. **2** El modelo de río es lo suficientemente profundo para que los efectos de tensión superficial no sean significativos.
Propiedades Para agua a presión atmosférica y T = 20°C, la viscosidad cinemática del prototipo es: $\nu_p = 1.002 \times 10^{-6}$ m²/s.
Análisis A partir de la ecuación 7-24:

Viscosidad cinemática necesaria del líquido modelo:

$$\nu_m = \nu_p\left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{3/2} = (1.002 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s})\left(\frac{1}{100}\right)^{3/2} = \mathbf{1.00 \times 10^{-9}\ m^2/s} \tag{1}$$

Por lo tanto, es necesario encontrar un líquido con viscosidad de 1.00×10^{-9} m^2/s. Un vistazo rápido a través de los apéndices no muestra tal líquido. El agua caliente tiene una viscosidad cinemática más baja que el agua fría, pero sólo en un factor aproximado de 3. El mercurio líquido tiene una viscosidad cinemática muy pequeña, pero es del orden de 10^{-7} m^2/s, todavía dos órdenes de magnitud muy grande para satisfacer la ecuación 1. Incluso si el mercurio líquido funcionara, todavía sería muy costoso y demasiado peligroso para usarlo en la prueba. ¿Qué hacer? La línea de partida es que *no se pueden igualar el número de Froude y el número de Reynolds en esta prueba de modelo*. En otras palabras: en este caso es imposible lograr similitud completa entre modelo y prototipo. En vez de ello, se hace el mejor esfuerzo posible en las condiciones de similitud incompleta. Por conveniencia, en estas pruebas se usa por lo general agua.



FIGURA 7-43
Modelo a escala 1:100 que se construyó para investigar las condiciones de navegación en la aproximación de esclusa inferior para una distancia de 2 millas corriente abajo del dique. El modelo incluye una versión a escala del desagüe, la casa de bombas y la esclusa existente. Además de la navegación, el modelo se usó para evaluar problemas ambientales asociados con la nueva esclusa y las reubicaciones necesarias del puente del ferrocarril y la autopista. La vista aquí es corriente arriba, hacia la esclusa y el dique. A esta escala, 52.8 ft en el modelo representan 1 mi en el prototipo. La camioneta en el fondo proporciona una idea de la escala del modelo.

Fotografía cortesía de U.S. Army Corps of Engineers, Nashville..

Discusión Es evidente que para este tipo de experimento la coincidencia del número de Froude es más crucial que la coincidencia del número de Reynolds. Como se comentó con anterioridad para las pruebas en el túnel de viento, la independencia del número de Reynolds se logra con valores suficientemente altos de Re. Inclusive si uno no es capaz de lograr independencia del número de Reynolds, con frecuencia es posible extrapolar los bajos números de Reynolds de los datos del modelo para predecir el comportamiento del número de Reynolds a tamaño real (Fig. 7-44). Sólo después de mucha experiencia de laboratorio con problemas similares se logra un alto nivel de confianza en el uso de este tipo de extrapolación.

Para terminar esta sección acerca de experimentos y similitud incompleta, se menciona la importancia de la similitud en la producción de películas en Hollywood donde explotan o se queman modelos de botes, trenes, aviones, edificios, monstruos, etcétera. Los productores de películas deben poner atención a la similitud dinámica con la finalidad de hacer que los fuegos y explosiones a pequeña escala parezcan tan reales como sea posible. Tal vez recuerde algunas películas de bajo presupuesto donde los efectos especiales no son convincentes. En la mayoría de los casos esto se debe a la falta de similitud dinámica entre el modelo pequeño y el prototipo a tamaño real. Si el número de Froude y/o el número de Reynolds del modelo difieren demasiado de los del prototipo, los efectos especiales no se verán bien, inclusive hasta para el ojo no entrenado. La siguiente ocasión que vea una película, ¡esté atento a la similitud incompleta!

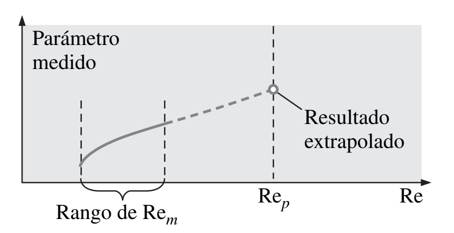
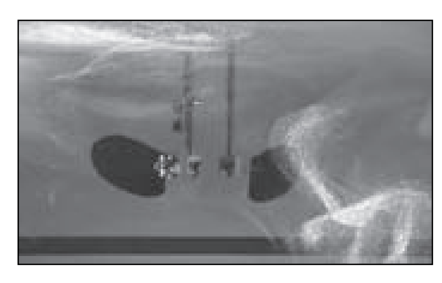


FIGURA 7-44
En muchos experimentos que incluyen superficies libres, no es posible igualar los números de Froude y de Reynolds. Sin embargo, con frecuencia se pueden *extrapolar* bajos Re de datos de prueba de modelo para predecir Re altos del comportamiento prototipo.

PROYECTOR DE APLICACIONES ■ ¿Cómo vuela una mosca?



a)



b)

FIGURA 7-45
a) La mosca de la fruta, *Drosophila melanogaster*, bate sus pequeñas alas de ida y vuelta 200 veces por segundo, lo que crea una imagen borrosa del plano de golpe. *b*) El modelo dinámicamente a escala, *robomosca*, bate sus alas una vez cada 5 s en 2 toneladas de aceite mineral. Los sensores en la base de las alas registran las fuerzas aerodinámicas, mientras que, para visualizar el flujo, se usa finas burbujas. El tamaño y la velocidad del robot, así como las propiedades del aceite, se eligieron cuidadosamente para igualar el número de Reynolds de una mosca real.

Autor invitado: Michael Dickinson,
California Institute of Technology

Una interesante aplicación del análisis dimensional se encuentra en el estudio de cómo vuelan los insectos. El pequeño tamaño y el movimiento rápido de las alas de un insecto, como el de las diminutas moscas de la fruta, hacen difícil medir las fuerzas o visualizar directamente el movimiento del aire que crean sus alas. Sin embargo, con el uso de principios de análisis dimensional, es posible estudiar la aerodinámica del insecto en un modelo de lento movimiento y una escala mayor: un robot mecánico. Las fuerzas que crea una mosca que flota y el batir de aletas de un robot son dinámicamente similares si el número de Reynolds es el mismo para cada caso. Para un ala que bate, Re se calcula como $2\Phi R L_c \omega/\nu$, donde Φ es la amplitud angular del golpe del ala, R es la longitud del ala, L_c es el ancho promedio del ala (longitud de cuerda), ω es la frecuencia angular del golpe y ν es la viscosidad cinemática del fluido circundante. Una mosca de la fruta bate 200 veces por segundo sus alas de 2.5 mm de largo y 0.7 mm de ancho a lo largo de un golpe de 2.8 rad en aire con una viscosidad cinemática de 1.5×10^{-5} m^2/s. El número de Reynolds resultante es casi 130. Cuando se elige aceite mineral con una viscosidad cinemática de 1.15×10^{-4} m^2/s, es posible igualar este número de Reynolds en una mosca robótica que sea 100 veces más grande, ¡que bata sus alas casi 1 000 veces más lentamente! Si la mosca no está estacionaria, sino más bien en movimiento a través del aire, es necesario equiparar otro parámetro adimensional para asegurar similitud dinámica, la frecuencia reducida, $\sigma = 2\Phi R\omega/V$, que mide la razón de la velocidad de batimiento de la punta del ala ($2\Phi R\omega$) con la velocidad hacia delante del cuerpo (V). Para simular vuelo hacia delante, un conjunto de motores remolcan a *robomosca* a través de su tanque de aceite a una velocidad a escala apropiada.

Los robots dinámicamente escalados han ayudado a mostrar que los insectos usan varios mecanismos diferentes para producir fuerzas mientras vuelan. Durante cada golpe de ida y vuelta, las alas del insecto viajan a grandes ángulos de ataque, lo que genera un prominente vórtice de frente de entrada. La baja presión de este gran vórtice jala las alas hacia arriba. Los insectos pueden aumentar aún más la fuerza del vórtice de frente de entrada cuando rotan sus alas al final de cada golpe. Después de que el ala cambia de dirección, también pueden generar fuerzas cuando corre rápidamente a través de la estela del golpe anterior.

La figura 7-45*a*) muestra una mosca real que bate sus alas, y la figura 7-45*b*) muestra a *robomosca* en su batimiento de alas. Debido a la mayor escala de longitud y menor escala de tiempo del modelo, es posible medir y visualizar el flujo. Los experimentos con insectos modelos a escala correspondiente a la similitud dinámica continúan enseñando a los investigadores cómo los insectos manipulan el movimiento de sus alas para dirigir y manobriar.

Referencias

Dickinson, M. H., Lehmann, F.-O. y Sane, S., “Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight,” *Science*, 284, p. 1954, 1999.

Dickinson, M. H., “Solving the mystery of insect flight,” *Scientific American*, 284, Núm. 6, pp. 35-41, Junio de 2001.

Fry, S. N., Sayaman, R. y Dickinson, M. H., “The aerodynamics of free-flight maneuvers in *Drosophila*,” *Science*, 300, pp. 495-498, 2003.

RESUMEN

Existe una diferencia entre *dimensiones* y *unidades*; una *dimensión* es una medida de una cantidad física (sin valores numéricos), mientras que una *unidad* es una forma de asignar un número a dicha dimensión. Hay siete *dimensiones primarias*, no sólo en la mecánica de fluidos, sino en todos los campos de la ciencia y la ingeniería. Son: masa, longitud, tiempo, temperatura, corriente eléctrica, cantidad de luz y cantidad de materia. *Todas las otras dimensiones se pueden formar por la combinación de estas siete dimensiones primarias*.

Todas las ecuaciones matemáticas deben ser *dimensionalmente homogéneas*; este principio fundamental se puede aplicar a las ecuaciones con la finalidad de eliminar las dimensiones y para identificar *grupos adimensionales*, también llamados *parámetros adimensionales*. Una poderosa herramienta para reducir el número de parámetros independientes necesarios en un problema se llama *análisis dimensional*. El *método de repetición de variables* es un procedimiento paso a paso para encontrar los parámetros adimensionales, o P, con base simplemente en las dimensiones de las variables y las constantes en el problema. Aquí se resumen los seis pasos del método de repetición de variables:

Paso 1 Haga una lista con los n parámetros (variables y constantes) en el problema.

Paso 2 Haga una lista con las dimensiones primarias de cada parámetro.

Paso 3 Suponga una *reducción* j, usualmente igual al número de dimensiones primarias en el problema. Si el análisis no funciona, reduzca j en uno e intente de nuevo. El número esperado de Π (k) es igual a n menos j.

Paso 4 Elija con inteligencia j *parámetros repetitivos* para construir las Π.

Paso 5 Genera las k Π una a la vez por medio del agrupamiento de los j parámetros repetitivos con cada una de las restantes variables o constantes, y fuerce el producto a que sea adimensional y manipule las Π como sea necesario para lograr parámetros adimensionales establecidos.

Paso 6 Verifique su trabajo y escriba la relación funcional final.

Cuando todos los grupos adimensionales se igualen entre un modelo y un prototipo, se logra la *similitud dinámica*, y está en posibilidad de predecir directamente el desempeño del prototipo con base en los experimentos modelo. Sin embargo, no siempre es posible igualar *todos* los grupos Π cuando se intenta lograr similitud entre un modelo y un prototipo. En tales casos, se corren las pruebas del modelo en condiciones de *similitud incompleta*, cuando se igualan los grupos Π más importantes lo mejor que se pueda y luego se extrapolan los resultados de la prueba modelo a condiciones de prototipo..

En el resto del libro se usarán los conceptos presentados en este capítulo. Por ejemplo, el análisis dimensional se aplica a flujos en tubería totalmente desarrollados en el capítulo 8 (factores de fricción, coeficientes de pérdida, etcétera). En el capítulo 10 se normalizan las ecuaciones diferenciales del flujo de fluido derivadas en el capítulo 9, lo que produce varios parámetros adimensionales. Los coeficientes de arrastre y sustentación se usan de manera extensa en el capítulo 11 y los parámetros adimensionales también se tratan en los capítulos acerca del flujo compresible y del flujo de canal abierto (capítulos 12 y 13). En el capítulo 14 se aprenderá que la similitud dinámica con frecuencia es la base del diseño y la prueba de bombas y turbinas. Para finalizar, los parámetros adimensionales también se usan en dinámica de fluidos computacional (capítulo 15).

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. D. C. Montgomery. *Design and Analysis of Experiments*, 4a. ed. Nueva York: Wiley, 1996.
2. J. P. Holman. *Experimental Methods for Engineers*, 7a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2001.

PROBLEMAS*

Dimensiones y unidades, dimensiones primarias

7-1C ¿Cuál es la diferencia entre una *dimensión* y una *unidad*? Proporcione tres ejemplos de cada una.

7-2C Cuando se realiza un análisis dimensional, uno de los primeros pasos es hacer una lista de las dimensiones primarias de cada parámetro relevante. Es útil tener una tabla de parámetros y sus dimensiones primarias. Los autores comenzaron la tabla por usted (Tabla P7-2C), y en ella se incluyeron algunos de los parámetros básicos que se encuentran comúnmente en la mecánica de fluidos. Conforme trabaje los problemas de tarea de este capítulo, agréguelos a esta tabla. Debe ser capaz de construir una tabla con docenas de parámetros.

* Los problemas designados por una "C" son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

TABLA P7-2C

Nombre del parámetro	Símbolo del parámetro	Dimensiones primarias
Aceleración	a	L^1t^{-2}
Ángulo	θ, ϕ, etcétera.	1 (ninguna)
Densidad	ρ	m^1L^{-3}
Fuerza	F	$m^1L^1t^{-2}$
Frecuencia	f	t^{-1}
Presión	P	$m^1L^{-1}t^{-2}$
Tensión superficial	σ_s	m^1t^{-2}
Velocidad	V	L^1t^{-1}
Viscosidad	μ	$m^1L^{-1}t^{-1}$
Flujo volumétrico	$\dot{V}$	L^3t^{-1}

7-3C Haga una lista de las siete *dimensiones primarias*. ¿Qué tienen de significativo las siete?

7-4 Escriba las dimensiones primarias de la *constante universal del gas ideal* R_u. (Sugerencia: use la *Ley del gas ideal*, $PV = nR_uT$ donde P es presión, V es volumen, T es temperatura absoluta y n representa el número de moles del gas.)
Respuesta: $\{m^1L^2t^{-2}T^{-1}N^{-1}\}$

7-5 En una tabla periódica de los elementos, la masa molar (M), también llamada *peso atómico*, con frecuencia se menciona como si se le considerara una cantidad adimensional (Fig. P7-5). En realidad, el peso atómico es la masa de 1 mol del elemento. Por ejemplo, el peso atómico del nitrógeno, $M_{\text{nitrógeno}}$ = 14.0067. Esto se interpreta como 14.0067 g/mol de nitrógeno elemental, o en el sistema inglés, 14.0067 lbm/lbmol de nitrógeno elemental. ¿Cuáles son las dimensiones primarias del peso atómico?

6 C 12.011	7 N 14.0067	8 O 15.9994
14 Si 28.086	15 P 30.9738	16 S 32.060

FIGURA P7-5

7-6 Algunos autores prefieren usar la *fuerza* como dimensión primaria en lugar de la masa. Entonces, en un problema típico de mecánica de fluidos, las cuatro dimensiones primarias representadas m, L, t y T se sustituyen con F, L, t y T. La dimensión primaria de la fuerza en este sistema es {fuerza} = {F}. Use los resultados del problema 7-4 y reescriba las dimensiones primarias de la constante universal de los gases en este sistema alternativo de dimensiones primarias.

7-7 La *constante específica de gas ideal* R_{gas} para un gas particular se define como la razón de la constante universal de los gases y la masa molar (también llamada *peso molecular*) del gas, $R_{gas} = R_u/M$. Entonces, para un gas particular, la Ley del gas ideal se puede escribir del modo siguiente:

$$PV = mR_{gas}T \qquad \text{o} \qquad P = \rho R_{gas}T$$

donde P es presión, V es volumen, m es masa, T es temperatura absoluta y ρ es la densidad del gas particular. ¿Cuáles son las dimensiones primarias de R_{gas}? Para el aire, R_{aire} = 287.0 J/kg · K en unidades SI estándar. Verifique que dichas unidades concuerden con su resultado.

7-8 El *momento de fuerza* ($\vec{M}$) se forma con el producto cruz de un brazo de palanca ($\vec{r}$) y una fuerza aplicada ($\vec{F}$), como se bosqueja en la figura P7-8. ¿Cuáles son las dimensiones primarias del momento de fuerza? Haga una lista de sus unidades en unidades SI primarias y en unidades inglesas primarias.

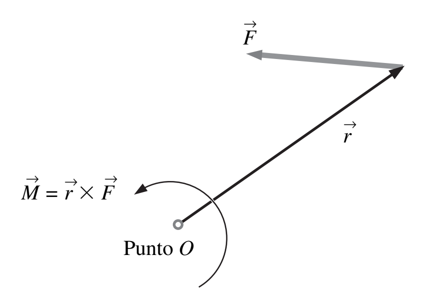


FIGURA P7-8

7-9 Escriba las dimensiones primarias de cada una de las siguientes variables del campo de la termodinámica y muestre todo el procedimiento: *a*) energía E; *b*) energía específica $e = E/m$; *c*) potenciar $\dot{W}$. *Respuestas: a*) $\{m^1L^2t^{-2}\}$; *b*) $\{L^2t^{-2}\}$; *c*) $\{m^1L^2t^{-3}\}$

7-10 ¿Cuáles son las dimensiones primarias del voltaje eléctrico (E)? (Sugerencia: use el hecho de que la potencia eléctrica es igual a voltaje por corriente.)

7-11 Quizá usted esté familiarizado con la *Ley de Ohm* para circuitos eléctricos (Fig. P7-11), donde ΔE es la diferencia de voltaje o *potencial* a través del resistor, I es la corriente eléctrica que pasa a través del resistor y R es la resistencia eléctrica. ¿Cuáles son las dimensiones primarias de resistencia eléctrica? *Respuesta:* $\{m^1L^2t^{-3}I^{-2}\}$

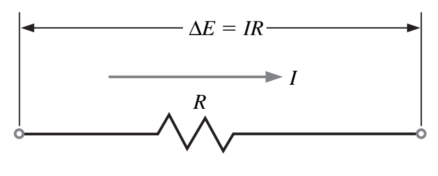


FIGURA P7-11

7-12 Escriba las dimensiones primarias de cada una de las siguientes variables, y muestre todo el procedimiento: *a*) aceleración a; *b*) velocidad angular ω; *c*) aceleración angular α.

7-13 La *cantidad de movimiento angular*, también llamado *momento de cantidad de movimiento* o simplemente *momento angular* ($\vec{H}$), se forma con el producto cruz de un brazo de pa-

lanca ($\vec{r}$) y la cantidad de movimiento lineal, también llamado momento lineal, ($m\vec{V}$) de una partícula de fluido, como se muestra en la figura P7-13. ¿Cuáles son las dimensiones primarias de la cantidad de movimiento angular? Haga una lista con las unidades de la cantidad de movimiento angular en unidades SI primarias y en unidades inglesas primarias. *Respuestas:* $\{m^1L^2t^{-1}\}$, kg · m²/s, lbm · m²/s, lbm · ft²/s

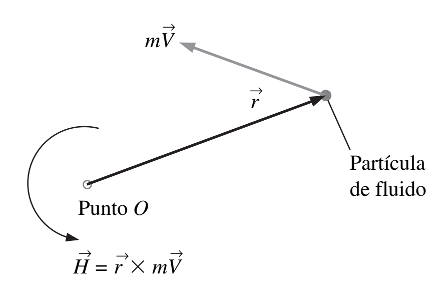


FIGURA P7-13

7-14 Escriba las dimensiones primarias de cada una de las siguientes variables y muestre todo el procedimiento: *a*) calor específico a presión constante c_p, *b*) peso específico ρg, *c*) entalpía específica h.

7-15 La **conductividad térmica** k es una medida de la capacidad de un material para conducir calor (Fig. P7-15). Para transferencia de calor por conducción en la dirección x a través de una superficie normal a la dirección x, la **Ley de Fourier de conducción de calor** se expresa como:

$$\dot{Q}_{\text{conducción}} = -kA\frac{dT}{dx}$$

donde $\dot{Q}_{\text{conducción}}$ es la razón de transferencia de calor. Determine las dimensiones primarias de la conductividad térmica (k). Busque un valor de k en los apéndices y verifique que sus unidades SI son consistentes con su resultado. En particular, escriba las unidades SI primarias de k.

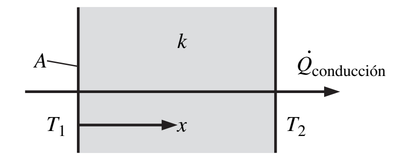


FIGURA P7-15

7-16 Escriba las dimensiones primarias de cada una de las siguientes variables a partir del estudio de la transferencia de calor por convección (Fig. P7-16) y muestre todo el procedimiento: *a*) razón de generación de calor $\dot{g}$ (sugerencia: razón de cambio de energía térmica por unidad de volumen), *b*) flujo de calor $\dot{q}$ (sugerencia: razón de transferencia de calor por unidad de área): *c*) coeficiente de transferencia de calor h (sugerencia: flujo de calor por unidad de diferencia de temperatura):

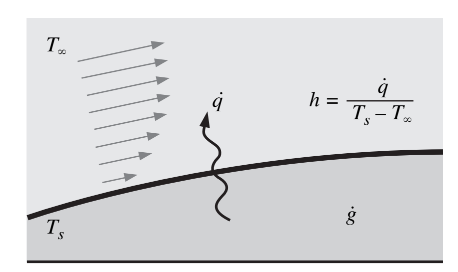


FIGURA P7-16

7-17 Busque en los apéndices de su libro de termodinámica y encuentre tres propiedades o constantes no mencionadas en los problemas del 7-1 al 7-16. Haga una lista con el nombre de cada propiedad o constante y sus unidades SI. Luego escriba las dimensiones primarias de cada propiedad o constante.

7-18I Busque en los apéndices de este libro y/o en su libro de termodinámica y encuentre tres propiedades o constantes no mencionadas en los problemas del 7-1 al 7-17. Haga una lista con el nombre de cada propiedad o constante y sus unidades SI. Luego escriba las dimensiones primarias de cada propiedad o constante.

Homogeneidad dimensional

7-19C Explique la *Ley de homogeneidad dimensional* con sus propias palabras.

7-20 En el capítulo 4 se definió la *aceleración material*, que es la aceleración que sigue una partícula de fluido (Fig. P7-20),

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

a) ¿Cuáles son las dimensiones primarias del operador gradiente $\vec{\nabla}$? *b*) Verifique que cada término aditivo en la ecuación tenga las mismas dimensiones. *Respuestas: a*) $\{L^{-1}\}$; *b*) $\{L^1t^{-2}\}$

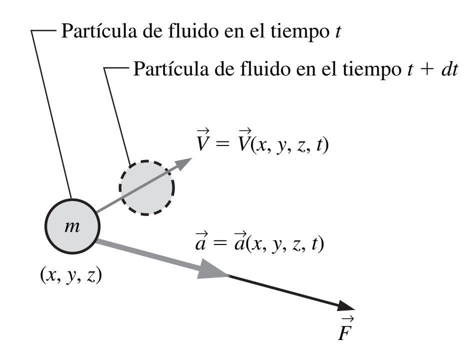


FIGURA P7-20

7-21 La segunda Ley de Newton es el cimiento de la ecuación diferencial de la conservación de la cantidad de movimiento lineal (que se discutirá en el capítulo 9). En términos de la aceleración material que sigue una partícula de fluido (Fig. P7-20), se escribe la segunda Ley de Newton del modo siguiente:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}\right]$$

O, cuando divida ambos lados entre la masa m de la partícula de fluido:

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

Escriba las dimensiones primarias de cada término aditivo en la ecuación y verifique que la ecuación es dimensionalmente homogénea. Muestre todo el procedimiento.

7-22 En el capítulo 4 se definió la *razón de deformación volumétrica* como la razón de aumento de volumen de un elemento de fluido por unidad de volumen (Fig. P7-22). En coordenadas cartesianas, la razón de deformación volumétrica se escribe como:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Escriba las dimensiones primarias de cada término aditivo y verifique que la ecuación es dimensionalmente homogénea. Muestre todo el procedimiento.

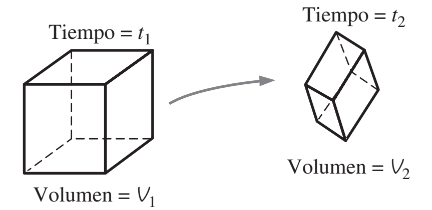


FIGURA P7-22

7-23 En el capítulo 9 se analizará la ecuación diferencial para la conservación de la masa, la *ecuación de continuidad*. En coordenadas cilíndricas, y para flujo estacionario:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Escriba las dimensiones primarias de cada término aditivo en la ecuación y verifique que la ecuación es dimensionalmente homogénea. Muestre todo el procedimiento.

7-24 En una tubería entra agua fría y se calienta por medio de una fuente externa de calor (Fig. P7-24). Las temperaturas del agua de entrada y salida son $T_{entrada}$ y T_{salida}, respectivamente. La razón total de transferencia de calor $\dot{Q}$ de los alrededores hacia el agua en la tubería es:

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p(T_{salida} - T_{entrada})$$

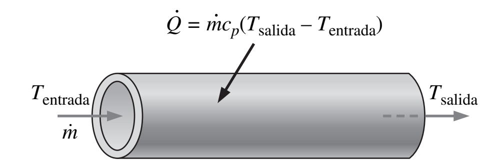


FIGURA P7-24

donde $\dot{m}$ es el flujo másico del agua a través de la tubería y c_p es el calor específico del agua. Escriba las dimensiones primarias de cada término aditivo en la ecuación y verifique que la ecuación es dimensionalmente homogénea. Muestre todo el procedimiento.

7-25 El *Teorema de transporte de Reynolds* (RTT, por sus siglas en inglés) se analizó en el capítulo 4. Para el caso general de un volumen de control en movimiento y/o deformante, el RTT se escribe del modo siguiente:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho b \, dV + \int_{SC} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} \, dA$$

donde $\vec{V}_r$ es la *velocidad relativa*, es decir, la velocidad del fluido relativa a la superficie de control. Escriba las dimensiones primarias de cada término aditivo en la ecuación y verifique que la ecuación es dimensionalmente homogénea. Muestre todo el procedimiento. (Sugerencia: dado que B puede ser cualquier propiedad del flujo —escalar, vector o inclusive tensor— puede tener una diversidad de dimensiones. De este modo, haga que las dimensiones de B sólo sean aquéllas de B misma, $\{B\}$. Además, b se define como B por unidad de masa.)

7-26 Una importante aplicación de la mecánica de fluidos es el estudio de ventilación de habitaciones. En particular, suponga que existe una **fuente** S (masa por unidad de tiempo) de contaminación de aire en una habitación de volumen $\dot{V}$ (Fig. P7-26). Los ejemplos incluyen monóxido de carbono proveniente del humo de cigarrillos o un calentador de queroseno sin escape, gases como el amoniaco provenientes de productos de limpieza doméstica y vapores producidos por **compuestos orgánicos volátiles** (VOC, por sus siglas en inglés) provenientes de un contenedor abierto. Sea c la representación de la **concentración de masa** (masa de contaminante por unidad de volumen de aire), $\dot{V}$ es el flujo volumétrico de aire fresco que entra a la habitación. Si el aire de la habitación está bien mezclado, de modo que la concentración de masa c es uniforme a través de toda la habitación, pero varía con el tiempo, la ecuación diferencial para la concentración de masa en la habitación como función del tiempo es:

$$V\frac{dc}{dt} = S - \dot{V}c - cA_s k_w$$

donde k_w es un **coeficiente de absorción** y A_s es el área superficial de las paredes, pisos, muebles, etcétera, que absorben parte del contaminante. Escriba las dimensiones primarias de los primeros tres términos aditivos en la ecuación y verifique que dichos términos son dimensionalmente homogéneos. Luego determine las dimensiones de k_w. Muestre todo el procedimiento.

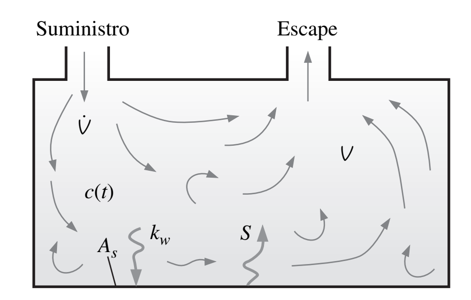


FIGURA P7-26

Eliminación de dimensiones de las ecuaciones

7-27C ¿Cuál es la principal razón para *eliminar las dimensiones* de una ecuación?

7-28 Considere la ventilación de una habitación donde el aire está bien mezclado como en la figura P7-26. La ecuación diferencial para la concentración másica de un contaminante en la habitación como función del tiempo está dada en el problema 7-26 y por costumbre se repite aquí:

$$\mathcal{V}\frac{dc}{dt} = S - \dot{\mathcal{V}}c - cA_s k_w$$

Existen tres parámetros característicos en tal situación: L, una longitud característica de la habitación (suponga $L = \mathcal{V}^{1/3}$); $\dot{\mathcal{V}}$, el flujo volumétrico de aire fresco en la habitación, y $c_{\text{límite}}$, la máxima concentración que no es dañina. *a*) Con el uso de estos tres parámetros característicos defina las formas adimensionales de todas las variables en la ecuación. (Sugerencia: por ejemplo, defina $c^* = c/c_{\text{límite}}$.) *b*) Reescriba la ecuación en forma adimensional e identifique cualquier grupo adimensional establecido (nombrado) que pueda aparecer.

7-29 Recuerde del capítulo 4 que la razón de deformación volumétrica es cero para un flujo incompresible estacionario. En coordenadas cartesianas esto se expresa como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Suponga que la velocidad y la longitud características para un campo de flujo dado son V y L, respectivamente (Fig. P7-29). Defina las siguientes variables adimensionales:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad z^* = \frac{z}{L},$$

$$u^* = \frac{u}{V}, \quad v^* = \frac{v}{V}, \quad \text{y} \quad w^* = \frac{w}{V}$$

Elimine las dimensiones de la ecuación e identifique cualquier parámetro adimensional establecido (nombrado) que pueda aparecer. Analice el resultado.

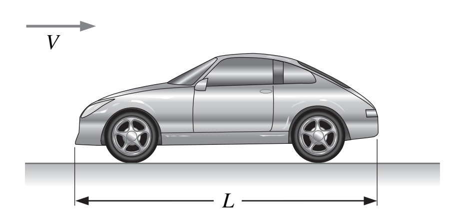


FIGURA P7-29

7-30 En un campo de flujo compresible oscilatorio, la razón de deformación volumétrica *no* es cero, sino que varía con el tiempo siguiendo una partícula de fluido. En coordenadas cartesianas, esto se expresa como:

$$\frac{1}{\mathcal{V}}\frac{D\mathcal{V}}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Suponga que la velocidad y la longitud características para un campo de flujo dado son V y L, respectivamente. También suponga que f es una frecuencia característica de la oscilación (Fig. P7-30). Defina las siguientes variables adimensionales:

$$t^* = ft, \quad \mathcal{V}^* = \frac{\mathcal{V}}{L^3}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L},$$

$$z^* = \frac{z}{L}, \quad u^* = \frac{u}{V}, \quad v^* = \frac{v}{V}, \quad \text{y} \quad w^* = \frac{w}{V}$$

Elimine las dimensiones de la ecuación e identifique cualquier parámetro adimensional establecido (nombrado) que pueda aparecer.

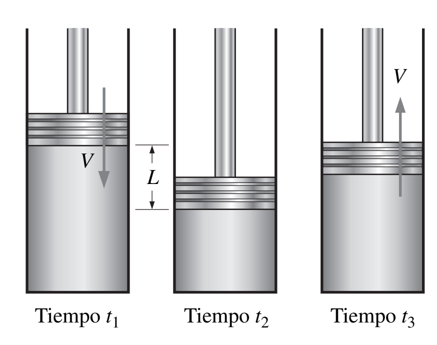


FIGURA P7-30

7-31 En el capítulo 9 se definirá la **función de corriente** ψ para flujo incompresible bidimensional en el plano xy,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

donde u y v son los componentes de velocidad en las direcciones x y y, respectivamente. *a*) ¿Cuáles son las dimensiones primarias de ψ? *b*) Suponga que cierto flujo bidimensional tiene una longitud característica L y un tiempo característico t. Defina las formas adimensionales de las variables x, y, u, v y ψ. *c*) Reescriba las ecuaciones en forma adimensional e identifique cualquier parámetro adimensional establecido (nombrado) que pueda aparecer.

7-32 En un campo de flujo incompresible oscilatorio, la fuerza por unidad de masa que actúa sobre una partícula de fluido se obtiene a partir de la segunda Ley de Newton en forma intensiva (vea problema 7-21),

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

Suponga que la velocidad y la longitud características para un campo de flujo dado son V_∞ y L, respectivamente. También suponga que ω es una frecuencia angular característica (rad/s) de la oscilación (Fig. P7-32). Defina las siguientes variables adimensionales:

$$t^* = \omega t, \quad \vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L}, \quad \vec{\nabla}^* = L\vec{\nabla}, \quad \text{y} \quad \vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{V_\infty}$$

Puesto que no existe una fuerza característica dada por unidad de masa que actúe sobre una partícula de fluido, se asigna una, pero note que $\{\vec{F}/m\} = \{L/t^2\}$. A saber, se hace:

$$(\vec{F}/m)^* = \frac{1}{\omega^2 L}\vec{F}/m$$

Elimine las dimensiones de la ecuación de movimiento e identifique cualquier parámetro adimensional establecido (nombrado) que pueda aparecer.

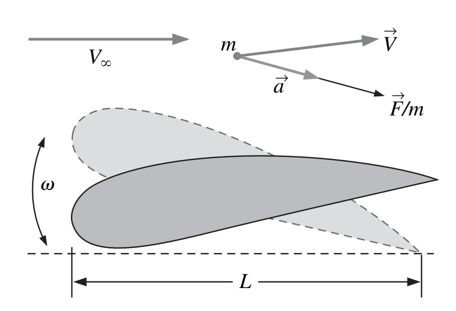


FIGURA P7-32

7-33 Para medir la distribución de presión en el flujo del aire sobre un modelo de avión se emplea un túnel de viento (Fig. P7-33). La velocidad del aire en el túnel de viento es lo suficientemente baja como para que los efectos compresibles sean despreciables. Como se comentó en el capítulo 5, la aproximación de la ecuación de Bernoulli es válida en tal situación en todas las partes de flujo, excepto muy cerca de la superficie de avión o las superficies de las paredes del túnel de viento y en la región de estela detrás del modelo. Lejos del modelo, el aire fluye a velocidad V_∞ y presión P_∞, y la densidad del aire ρ es casi constante. Por lo general, los efectos gravitacionales son despreciables en flujos de aire, así que la ecuación de Bernoulli se escribe como:

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$$

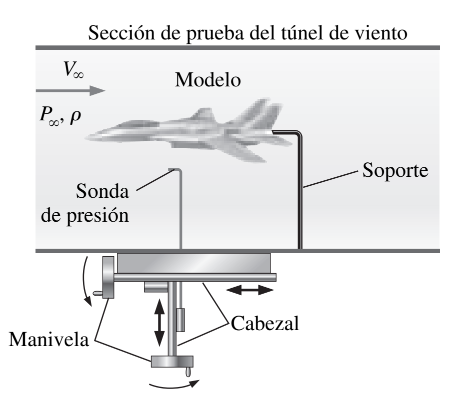


FIGURA P7-33

Elimine las dimensiones de la ecuación y genere una expresión para el **coeficiente de presión** C_p en cualquier punto en el flujo donde la ecuación de Bernoulli sea válida. C_p se define como:

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$$

Respuesta : $C_p = 1 - V/V_\infty^2$

Análisis dimensional y similitud

7-34C Haga una lista con los tres principales propósitos del análisis dimensional.

7-35C Haga una lista y describa las tres condiciones necesarias para la similitud completa entre un modelo y un prototipo.

7-36 Un equipo de estudiantes diseña un submarino accionado por humanos para una competencia de diseño. La longitud global del submarino prototipo es 2.24 m y sus estudiantes diseñadores esperan que pueda viajar totalmente sumergido a través del agua a 0.560 m/s. El agua es dulce (un lago) a T = 15°C. El equipo de diseño construye un modelo a un octavo de escala para probarlo en el túnel de viento de su universidad (Fig. P7-36). Un escudo rodea el puntal de la balanza de arrastre de modo que la fuerza de arrastre del puntal mismo no influya la fuerza de arrastre de modelo medida. El aire en el túnel de viento está a 25°C y a una presión atmosférica estándar. ¿A qué velocidad de aire necesitan correr el túnel de viento con la finalidad de lograr similitud? *Respuesta:* 61.4 m/s

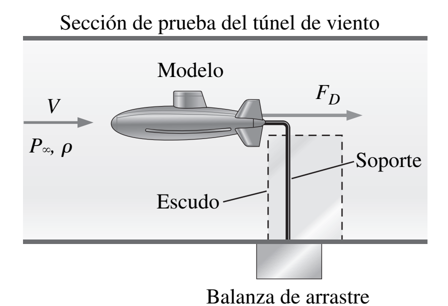


FIGURA P7-36

7-37 Repita el problema 7-36 con las mismas condiciones excepto que la única instalación disponible para los estudiantes es un túnel de viento mucho más pequeño. Su modelo de submarino es un modelo a un veinticuatroavo de escala en lugar de un modelo a un octavo. ¿A qué velocidad de aire necesitan correr el túnel de viento con la finalidad de lograr similitud? ¿Nota algo perturbador o sospechoso en su resultado? Coméntelo.

7-38I Un paracaídas ligero se diseña para uso militar (Fig. P7-38I). Su diámetro D es de 24 ft y el peso total W de la carga que cae, paracaídas y equipo es de 230 lbf. La diseñada *velocidad terminal* V_t del paracaídas a este peso es de 20 ft/s. En un túnel de viento se prueba un modelo del paracaídas a un doceavo de escala. La temperatura y presión del túnel de viento son las mismas que las del prototipo, a saber, 60°F y presión atmos-

férica estándar. *a*) Calcule el coeficiente de arrastre del prototipo. (Sugerencia: a velocidad terminal, el peso se equilibra con la fuerza de arrastre.) *b*) ¿A qué velocidad se debe correr el túnel de viento con la finalidad de lograr similitud dinámica? *c*) Estime la fuerza de arrastre del paracaídas modelo en el túnel de viento (en lbf).

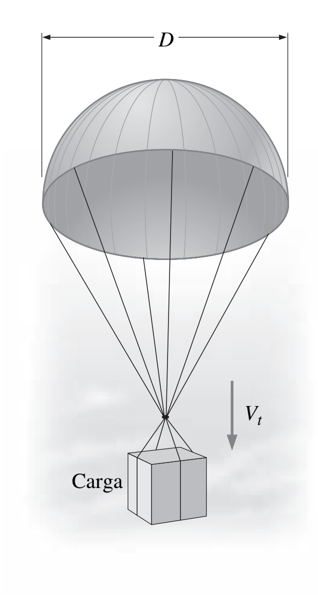


FIGURA P7-38I

7-39 Algunos túneles de viento están *presurizados*. Explique por qué una instalación de investigación pasaría por todos los problemas y gastos adicionales para presurizar un túnel de viento. Si la presión del aire en el túnel aumenta por un factor de 1.5, y todo lo demás permanece igual (misma velocidad de viento, mismo modelo, etcétera), ¿en qué factor aumentará el número de Reynolds?

7-40 Ésta es una continuación del problema 7-36. Los estudiantes miden la fuerza de arrastre en su modelo de submarino en el túnel de viento (Fig. P7-36). Tienen cuidado de correr el túnel de viento en condiciones que garantizan similitud con el submarino prototipo. Su fuerza de arrastre medida es de 2.3 N. Estime la fuerza de arrastre sobre el submarino prototipo en las condiciones dadas en el problema 7-36. *Respuesta:* 10.3 N

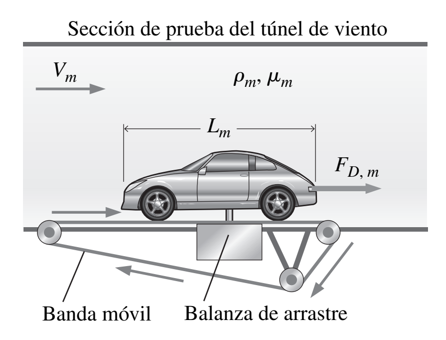


FIGURA P7-41I

7-41I Se debe predecir la fuerza de arrastre de un nuevo auto deportivo a una velocidad de 60.0 mi/h a una temperatura del aire de 25°C. Los ingenieros automotrices construyeron un modelo a un cuarto de escala del auto (Fig. P7-41I) para probarlo en un túnel de viento. La temperatura del aire del túnel de viento también es de 25°C. La fuerza de arrastre se mide con una balanza de arrastre, y se usa la banda móvil para simular el suelo en movimiento (desde el marco de referencia del automóvil). Determine a qué velocidad deben correr los ingenieros el túnel de viento para lograr similitud entre el modelo y el prototipo.

7-42I Éste es un seguimiento al problema 7-41I. La fuerza de arrastre sobre el modelo en el túnel de viento (Fig. P7-41I) se mide en 36.5 lbf cuando el túnel de viento se opera a la velocidad que garantiza similitud con el auto prototipo. Estime la fuerza de arrastre (en lbf) sobre el auto prototipo en las condiciones dadas en el problema 7-41I.

7-43 Considere la situación común en la que un investigador intenta igualar el número de Reynolds de un gran vehículo prototipo con el de un pequeño modelo a escala en un túnel de viento. ¿Es mejor que el aire en el túnel de viento sea frío o caliente? ¿Por qué? Soporte sus argumentos cuando compare el aire del túnel de viento a 10 y a 50°C, con todo lo demás igual.

7-44 Algunos estudiantes quieren visualizar el flujo sobre una pelota de béisbol que gira. Su laboratorio de fluidos tiene un bonito túnel de agua en el que pueden inyectar líneas de corrientes con tintes multicolores, de modo que deciden probar una pelota de béisbol que gira en el túnel de agua (Fig. P7-44). La similitud exige que igualen tanto el número de Reynolds como el número de Strouhal entre su modelo de prueba y la pelota verdadera que se desplaza por el aire a 80 mi/h y gira a 300 rpm. Tanto el aire como el agua están a 20°C. ¿A qué velocidad deben correr el agua en el túnel de agua y a qué rpm deben girar su pelota de béisbol? *Respuestas:* 5.30 mi/h, 20.0 rpm

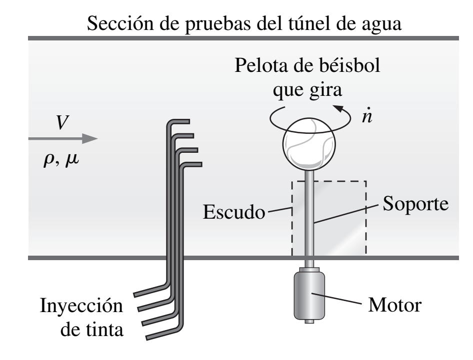


FIGURA P7-44

Parámetros adimensionales y el método de repetición de variables

7-45 Use dimensiones primarias para verificar que el número de Arquímedes (Tabla 7-5) de hecho es adimensional.

7-46 Use dimensiones primarias para verificar que el número de Grashof (Tabla 7-5) de hecho es adimensional.

7-47 Use dimensiones primarias para verificar que el número de Rayleigh (Tabla 7-5) de hecho es adimensional. ¿Qué otro parámetro adimensional establecido se forma con la razón de Ra y Gr? *Respuesta:* el número de Prandtl

7-48 Considere un líquido en un contenedor cilíndrico en el que tanto el contenedor como el líquido rotan como un cuerpo rígido (rotación de cuerpo sólido). La diferencia de elevación h entre el centro de la superficie del líquido y el borde de la superficie del líquido es función de la velocidad angular ω, la densidad del fluido ρ, la aceleración gravitacional g y el radio R (Fig. P7-48). Use el método de repetición de variables para encontrar una relación adimensional entre los parámetros. Muestre todo el procedimiento. *Respuesta:* $h/R = f(\text{Fr})$

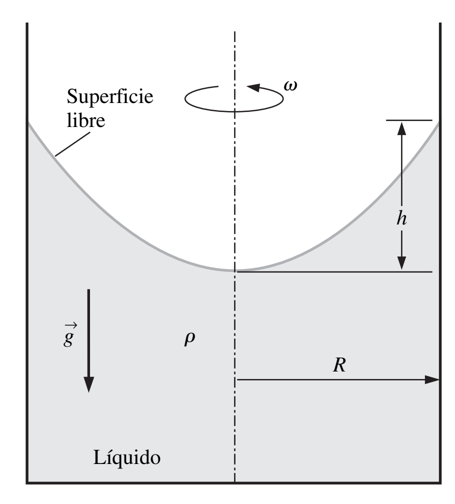


FIGURA P7-48

7-49 Considere el caso en el que el contenedor y el líquido del problema 7-48 inicialmente están en reposo. En $t = 0$ el contenedor comienza a rotar. El líquido tarda en comenzar a rotar como un cuerpo rígido y se espera que la viscosidad del líquido sea un parámetro relevante adicional en el problema no-estacionario. Repita el problema 7-48 pero, con dos parámetros independientes adicionales incluidos, es decir, la viscosidad del fluido μ y el tiempo t. (Interesa en el desarrollo de la altura h como función del tiempo y los otros parámetros.)

7-50 Cuando un flujo uniforme fluye sobre un cilindro circular (Fig. P7-50) se forma una *huella del vórtice de Kármán* que es un patrón regular de vórtices derramados por el cuerpo. Use el método de repetición de variables para generar una relación adimensional para la frecuencia de derrame del vórtice de Kármán f_k como función de la velocidad de la corriente libre V, la densidad del fluido ρ, la viscosidad del fluido μ y el diámetro del cilindro D. Muestre todo el procedimiento.
Respuesta: $\text{St} = f(\text{Re})$

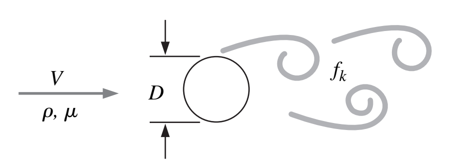


FIGURA P7-50

7-51 Repita el problema 7-50, pero con un parámetro independiente adicional incluido, es decir, la velocidad del sonido c en el fluido. Use el método de repetición de variables para generar una relación adimensional para la frecuencia de derrame del vórtice Kármán f_k como función de la velocidad del flujo libre V, la densidad del fluido ρ, la viscosidad del fluido μ, el diámetro del cilindro D y la velocidad del sonido c. Muestre todo el procedimiento.

7-52 Se usa un agitador para mezclar químicos en un gran tanque (Fig. P7-52). La potencia de flecha $\dot{W}$ que se suministra a las aspas del agitador es función del diámetro del agitador D, la densidad del líquido ρ, la viscosidad del líquido μ y la velocidad angular ω de las aspas que giran. Use el método de repetición de variables para generar una relación adimensional entre dichos parámetros. Cerciórese de identificar sus grupos Π, modifíquelos como sea necesario, y muestre todo el procedimiento. *Respuesta:* $N_p = f(\text{Re})$

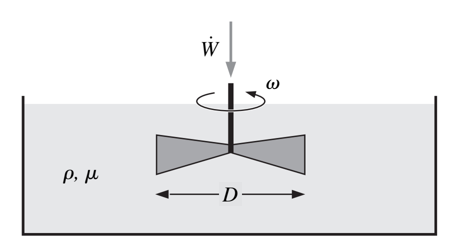


FIGURA P7-52

7-53 Repita el problema 7-52, pero no suponga que el tanque es grande. En vez de ello, que sean el diámetro del tanque D_{tanque} y la profundidad promedio del líquido D_{tanque} los parámetros relevantes adicionales.

7-54 Una capa límite es una delgada región (usualmente a lo largo de una pared) en la que las fuerzas viscosas son significativas y dentro de la cual el flujo es rotacional. Considere una capa límite que crece a lo largo de una delgada placa plana (Fig. P7-54). El flujo es estacionario. El grosor de la capa límite δ a cualquier distancia corriente abajo x es función de x, de la velocidad de flujo libre V_∞ y de las propiedades del fluido ρ (densidad) y μ (viscosidad). Use el método de repetición de variables para generar una relación adimensional para δ como función de los otros parámetros. Muestre todo el procedimiento.

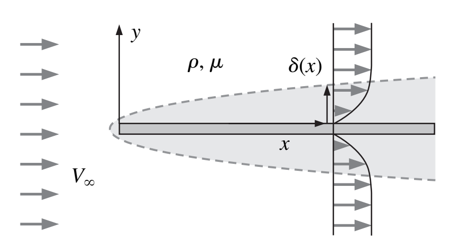


FIGURA P7-54

7-55 Miguel trabaja en un problema que tiene una longitud característica L, una velocidad característica V, una diferencia de densidad característica $\Delta\rho$, una densidad característica (promedio) ρ y, desde luego, la constante gravitacional g, que siempre está disponible. Él quiere definir un número de Richardson,

pero no tiene un flujo volumétrico característico. Ayude a Miguel a definir un flujo volumétrico característico con base en los parámetros disponibles y luego defina un número de Richardson apropiado en términos de los parámetros dados.

7-56 Considere **flujo de Couette** totalmente desarrollado: el flujo entre dos placas paralelas infinitas separadas por la distancia h, con la placa superior en movimiento y la placa inferior en reposo, como se ilustra en la figura P7-56. El flujo es estacionario, incompresible y bidimensional en el plano xy. Use el método de repetición de variables para generar una relación adimensional para el componente x de la velocidad del fluido u como función de la viscosidad del fluido μ, la velocidad de la placa superior V, la distancia h, la densidad del fluido ρ y la distancia y. Muestre todo el procedimiento. *Respuesta:* $u/V = f(\text{Re}, y/h)$

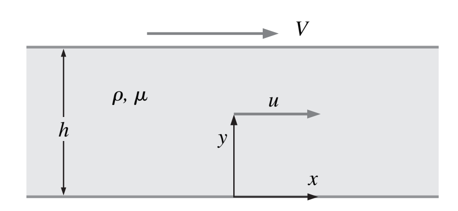


FIGURA P7-56

7-57 Considere flujo de Couette *en desarrollo*: el mismo flujo que el del problema 7-56 excepto que el flujo no es estacionario, sino que se desarrolla con el tiempo. En otras palabras, el tiempo t es un parámetro adicional en el problema. Genere una relación adimensional entre todas las variables.

7-58 Se sabe que la velocidad del sonido c en un gas ideal es una función de la razón de calores específicos k, temperatura absoluta T y constante de gas ideal específica R_{gas} (Fig. P7-58). Use análisis dimensional para encontrar la relación funcional entre dichos parámetros y muestre todo el procedimiento.

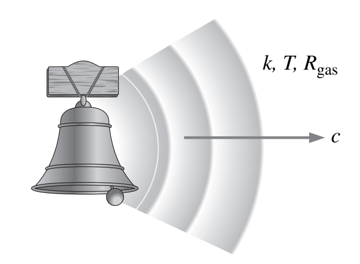


FIGURA P7-58

7-59 Repita el problema 7-58, excepto que la velocidad del sonido c en un gas ideal sea función de la temperatura absoluta T, la constante universal de gas ideal R_u, la masa molar (peso molecular) M del gas y la razón de calores específicos k. Use análisis dimensional para encontrar la relación funcional entre dichos parámetros y muestre todo el procedimiento.

7-60 Repita el problema 7-58, excepto que la velocidad del sonido c en un gas ideal sea una función sólo de la temperatura absoluta T y la constante específica de gas ideal R_{gas}. Use análisis dimensional para encontrar la relación funcional entre dichos parámetros y muestre todo el procedimiento. *Respuesta:* $c/\sqrt{R_{\text{gas}}T}$ = constante

7-61 Repita el problema 7-58, excepto que la velocidad del sonido c en un gas ideal sea una función sólo de la presión P y la densidad del gas ρ. Use análisis dimensional para encontrar la relación funcional entre dichos parámetros y muestre todo el procedimiento. Verifique que sus resultados sean consistentes con la ecuación para velocidad del sonido en un gas ideal, $c = \sqrt{kR_{\text{gas}}T}$.

7-62 Cuando pequeñas partículas de aerosol o microorganismos se mueven a través del aire o el agua, el número de Reynolds es muy pequeño (Re $\ll$ 1). A tales flujos se les llama **flujos reptantes** o **flujos progresivos** o **flujos de Stokes**. La fuerza de arrastre sobre un objeto en un flujo de Stokes es función sólo de su velocidad V, cierta longitud característica L del objeto y la viscosidad del fluido μ (Fig. P7-62). Use análisis dimensional para generar una relación para la fuerza de arrastre F_D como función de las variables independientes.

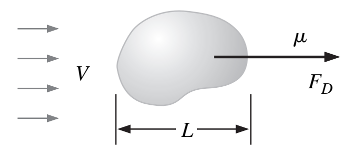


FIGURA P7-62

7-63 Una pequeña partícula de aerosol, con densidad ρ_p y diámetro característico D_p, cae en un aire de densidad ρ y viscosidad μ (Fig. P7-63). Si la partícula es lo suficientemente pequeña, es válida la aproximación de flujo de Stokes, también llamado flujo progresivo o reptante, y la velocidad terminal de la partícula V sólo depende de D_p, μ, la constante gravitacional g y la diferencia de densidad $(\rho_p - \rho)$. Use análisis dimensional para generar una relación para V como función de las variables independientes. Nombre cualquier parámetro adimensional establecido que aparezca en su análisis.

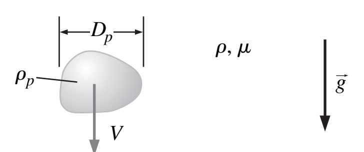


FIGURA P7-63

7-64 Combine los resultados de los problemas 7-62 y 7-63 para generar una ecuación para la velocidad terminal V de una partícula de aerosol que cae en el aire (Fig. P7-63). Verifique que su resultado sea consistente con la relación funcional obtenida en el problema 7-63. Por consistencia, use la notación del problema 7-63. (Sugerencia: para una partícula que cae a velocidad terminal constante, el peso neto de la partícula debe igualar su fuerza de arrastre. Su resultado final debe ser una ecuación para V que sea válida inclusive dentro de cierta constante desconocida.)

7-65 Necesitará los resultados del problema 7-64 para resolver este problema. Una pequeña partícula de aerosol cae a velocidad terminal V. El número de Reynolds es lo suficientemente pequeño como para que sea válida la aproximación del flujo de Stokes, también llamado flujo progresivo o reptante. Si el tamaño de la partícula se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor subirá la velocidad terminal? Si la diferencia de densidad $(\rho_p - \rho)$ se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor subirá la velocidad terminal?

7-66 Un fluido incompresible de densidad r y viscosidad m fluye a una velocidad promedio V a través de un largo tramo horizontal de tubería redonda de longitud L, diámetro interior D y rugosidad de superficie interior ε (Fig. P7-66). La tubería es lo suficientemente larga como para que el flujo esté totalmente desarrollado, lo que significa que el perfil de velocidad no cambia a lo largo de la tubería. La presión disminuye (linealmente) a lo largo de la tubería con la finalidad de "empujar" el fluido a través de la tubería para superar la fricción. Con el método de repetición de variables, desarrolle una relación adimensional entre caída de presión $\Delta P = P_1 - P_2$ y los otros parámetros en el problema. Asegúrese de modificar sus grupos Π según sea necesario para lograr parámetros adimensionales establecidos y nómbrelos. (Sugerencia: por consistencia, elija D en lugar de L o ε como uno de sus parámetros repetitivos.)
Respuesta: Eu $= f$ (Re, ε/D, L/D)

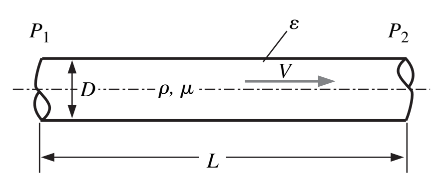


FIGURA P7-66

7-67 Considere flujo *laminar* a través de un largo tramo de tubería, como en la figura P7-66. Para flujo laminar se evidencia que la rugosidad de superficie interior de tubería no es un parámetro relevante a menos que ε sea muy grande. El flujo volumétrico $\dot{V}$ a través de la tubería es de hecho una función del diámetro interior de la tubería D, la viscosidad del fluido μ y el gradiente de presión axial dP/dx. Si el diámetro de la tubería se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor aumentará el flujo volumétrico? Use análisis dimensional.

7-68 La razón de transferencia de calor al agua que fluye en una tubería se analizó en el problema 7-24. Enfrente el mismo problema, pero ahora con análisis dimensional. Agua fría entra a una tubería, donde se calienta por medio de una fuente de calor externa (Fig. P7-68). Las temperaturas del agua de entrada y de salida son T_{entrada} y T_{salida}, respectivamente. Se sabe que la razón total de transferencia de calor $\dot{Q}$ de los alrededores al agua en la tubería es función del flujo másico $\dot{m}$, del calor específico c_p del agua y de la diferencia de temperatura entre el agua que entra y la que sale. Use análisis dimensional para encontrar la relación funcional entre dichos parámetros y compare con la ecuación analítica dada en el problema 7-24. Muestre todo el procedimiento. (Nota: finja que desconoce la ecuación analítica.)

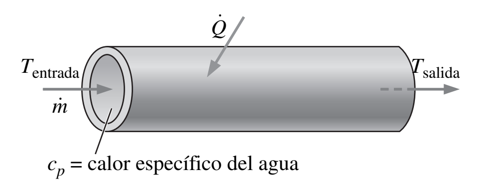


FIGURA P7-68

Pruebas experimentales y similitud incompleta

7-69C Defina *bloqueo de túnel de viento*. ¿Cuál es la regla empírica acerca del máximo bloqueo aceptable para una prueba de túnel de viento? Explique por qué existirían errores de medición si el bloqueo fuera significativamente mayor que este valor.

7-70C ¿Cuál es la regla empírica acerca del número límite de Mach con la finalidad de que la aproximación de flujo incompresible sea razonable? Explique por qué los resultados del túnel de viento serían incorrectos si esta regla empírica se violara.

7-71C Aunque usualmente se piensa en un modelo más pequeño que el prototipo, describa al menos tres situaciones en donde es mejor que el modelo sea *más grande* que el prototipo.

7-72C Explique el propósito de una banda móvil de suelo en las pruebas de túnel de viento de flujo sobre modelos de automóviles. ¿Puede pensar en una alternativa si no está disponible una banda móvil de suelo?

7-73 Use análisis dimensional para mostrar que, en un problema que incluye ondas acuáticas a las bajas profundidades (Fig. P7-73), tanto el número de Froude como el número de Reynolds son parámetros adimensionales relevantes. La velocidad de onda c de las ondas sobre la superficie de un líquido es función de la profundidad h, la aceleración gravitacional g, la densidad del fluido ρ y la viscosidad del fluido μ. Manipule sus Π para obtener los parámetros de la manera siguiente:

$$\text{Fr} = \frac{c}{\sqrt{gh}} = f(\text{Re}) \qquad \text{donde Re} = \frac{\rho c h}{\mu}$$

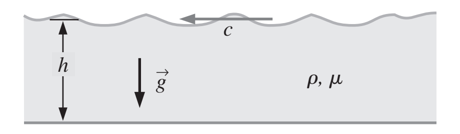


FIGURA P7-73

7-74 Agua a 20°C fluye a través de una larga tubería recta. La caída de presión se mide a lo largo de una sección de la tubería de longitud $L = 1.3$ m como función de la velocidad promedio V a través de la tubería (Tabla P7-74). El diámetro interior de la tubería es $D = 10.4$ cm. *a*) Elimine las dimensiones de los datos y grafique el número de Euler como función del número de Reynolds. ¿El experimento se realizó a velocidades suficientemente altas como para lograr independencia del número de Reynolds? *b*) Extrapole los datos experimentales para predecir la caída de presión a una velocidad promedio de 80 m/s.
Respuesta: 1 940 000 N/m²

TABLA P7-74

V, m/s	ΔP, N/m^2
0.5	77.0
1	306
2	1 218
4	4 865
6	10 920
8	19 440
10	30 340
15	68 330
20	121 400
25	189 800
30	273 200
35	372 100
40	485 300
45	614 900
50	758 700

7-75 En el ejemplo de modelo de tractocamión que se analizó en la Sección 7-5, la sección de prueba del túnel de viento medía 2.6 m de largo, 1.0 m de alto y 1.2 m de ancho. El modelo de tractocamión a un dieciseisavo de escala mide 0.991 m de largo, 0.257 m de alto y 0.159 m de ancho. ¿Cuál es el bloqueo del túnel de viento de este modelo de tractocamión? ¿Está dentro de los límites aceptables de acuerdo con la regla empírica estándar?

7-76C Considere de nuevo el ejemplo de modelo de tractocamión discutido en la Sección 7-5, excepto que la velocidad máxima del túnel de viento es de sólo 50 m/s. Los datos de fuerza de arrastre se toman para velocidades de túnel de viento entre $V = 20$ y 50 m/s; suponga los mismos datos para estas velocidades que las que se indican en la Tabla 7-7. Con base en dichos datos *solamente*, ¿pueden los investigadores tener confianza de que han alcanzado independencia del número de Reynolds?

7-77I Un pequeño túnel de viento en el laboratorio estudiantil de fluidos de una universidad tiene una sección de prueba que mide 20×20 in de sección transversal y 4.0 ft de largo. Su velocidad máxima es de 160 ft/s. Algunos estudiantes quieren construir un modelo de trailer de 18 ruedas para investigar cómo el redondeado de la parte trasera del trailer afecta la fuerza de arrastre. Un trailer de tamaño real (prototipo) mide 52 ft de largo, 8.33 ft de ancho y 12 ft de alto. Tanto el aire en el túnel de viento como el aire que fluye sobre el prototipo están a 80°F y presión atmosférica. *a*) ¿Cuál es el modelo de mayor dimensión que pueden construir para estar dentro de los lineamientos de la regla empírica para el bloqueo? ¿Cuáles son las dimensiones del modelo de trailer en pulgadas? *b*) ¿Cuál es el máximo número de Reynolds del modelo de trailer que pueden alcanzar los estudiantes? *c*) ¿Los estudiantes son capaces de lograr independencia del número de Reynolds? Explíquelo.

7-78 Un modelo a un dieciseisavo de escala de un nuevo auto deportivo se prueba en un túnel de viento. El auto prototipo mide 4.37 m de largo, 1.30 m de alto y 1.69 m de ancho. Durante las pruebas, la velocidad de la banda móvil de suelo se ajusta de modo que siempre iguala la velocidad del aire que se mueve a través de la sección de prueba. La fuerza de arrastre F_D se mide como función de la velocidad del aire en túnel de viento; los resultados experimentales se presentan en la Tabla P7-78. Grafique el coeficiente de arrastre C_D como función del número de Reynolds Re, donde el área que se usa para calcular C_D es el área frontal del auto modelo (suponga A = ancho $\times$ altura) y la longitud característica empleada para el cálculo de Re es el ancho de auto W. ¿Se logra similitud dinámica? ¿Se logra independencia del número de Reynolds en la prueba del túnel de viento? Estime la fuerza de arrastre sobre el auto prototipo que viaja sobre la autopista a 29 m/s (65 mi/h). Suponga que tanto el aire del túnel de viento como el aire que fluye sobre el auto prototipo están a 25°C y presión atmosférica estándar. *Respuestas:* no, sí, 350 N

TABLA P7-78

V, m/s	F_D, N
10	0.29
15	0.64
20	0.96
25	1.41
30	1.55
35	2.10
40	2.65
45	3.28
50	4.07
55	4.91

Problemas de repaso

7-79C Para cada enunciado, elija si el enunciado es verdadero o falso y discuta su respuesta brevemente.

a) La similitud cinemática es una condición necesaria y suficiente para la similitud dinámica.
b) La similitud geométrica es una condición necesaria para la similitud dinámica.
c) La similitud geométrica es una condición necesaria para la similitud cinemática.
d) La similitud dinámica es una condición necesaria para la similitud cinemática.

7-80C Piense acerca de y describa un flujo prototipo y un correspondiente flujo modelo que tengan similitud geométrica, pero no similitud cinemática, aun cuando los números de Reynolds se igualen. Explíquelo.

7-81C Existen numerosos parámetros adimensionales establecidos además de los mencionados en la Tabla 7-5. Realice una investigación bibliográfica o una búsqueda en Internet para encontrar por lo menos tres parámetros adimensionales nombrados establecidos que *no* estén en la lista de la Tabla 7-5. Para cada uno, proporcione su definición y su interpretación como una razón de dos magnitudes en concordancia con el formato de la Tabla 7-5. Si su ecuación contiene algunas variables que no son identificadas en la Tabla 7-5, asegúrese de identificar dichas variables.

7-82 Escriba las dimensiones primarias de cada una de las siguientes variables del campo de la mecánica de sólido, y muestre todo el procedimiento: *a*) momento de inercia I; *b*) módulo de elasticidad E, también llamado módulo de Young; *c*) defor-

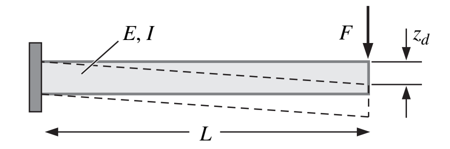


FIGURA P7-83

mación ε; *d*) esfuerzo σ, y *e*) finalmente, demuestre que la relación entre esfuerzo y deformación (Ley de Hooke) es una ecuación dimensionalmente homogénea.

7-83 La fuerza F se aplica a la punta de una viga voladiza de longitud L y momento de inercia I (Fig. P7-83). El módulo de elasticidad del material de la viga es E. Cuando la fuerza se aplica, la desviación de la punta de la viga es z_d. Use análisis dimensional para generar una relación para z_d como función de las variables independientes. Mencione cualquier parámetro adimensional establecido (nombrado) que aparezca en su análisis.

7-84 En la atmósfera ocurre una explosión cuando un misil antiaéreo alcanza su objetivo (Fig. P7-84). Una **onda de choque** (también llamada **onda expansiva**) se dispersa radialmente desde la explosión. La diferencia de presión a través de la onda expansiva ΔP y su distancia radial r desde el centro son funciones del tiempo t, la velocidad de sonido c y la cantidad de energía E liberada por la explosión. *a*) Genere relaciones adimensionales entre ΔP y los otros parámetros y entre r y los otros parámetros. *b*) Para una explosión dada, si el tiempo t desde la explosión se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor disminuirá ΔP?

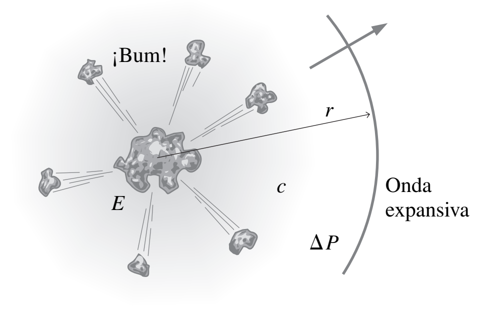


FIGURA P7-84

7-85 El número de Arquímedes que se indica en la Tabla 7-5 es apropiado para *partículas* flotantes en un fluido. Realice una investigación bibliográfica o una búsqueda en Internet y encuentre una definición alternativa del número de Arquímedes apropiada para *fluidos* flotantes (por ejemplo, chorros flotantes y plumas flotantes, instalaciones de calefacción y acondicionamiento de aire). Proporcione su definición y su interpretación como una razón de dos magnitudes en concordancia con el formato de la Tabla 7-5. Si su ecuación contiene algunas variables que no son identificadas en la Tabla 7-5, cerciórese de identificar dichas variables. Finalmente, busque en los parámetros adimensionales establecidos de la Tabla 7-5 y encuentre uno que sea similar a esta forma alterna del número de Arquímedes.

7-86 Considere **flujo de Poiseuille** bidimensional, laminar, estacionario y totalmente desarrollado: flujo entre dos placas paralelas infinitas separadas una distancia h, con ambas placas en reposo y un gradiente de presión forzado dP/dx que dirige el flujo como se ilustra en la figura P7-86. (dP/dx es constante y negativo.) El flujo es estacionario, incompresible y bidimensional en el plano xy. El flujo también está *totalmente desarrollado*, lo que significa que el perfil de velocidad no cambia con la distancia x corriente abajo. Debido a la naturaleza totalmente desarrollada del flujo, no existen efectos inerciales y la densidad no entra al problema. Se hace evidente que u, el componente de velocidad en la dirección x, es función de la distancia h, el gradiente de presión dP/dx, la viscosidad del fluido μ y la coordenada vertical y. Realice un análisis dimensional (muestre todo el procedimiento) y genere una relación adimensional entre las variables dadas.

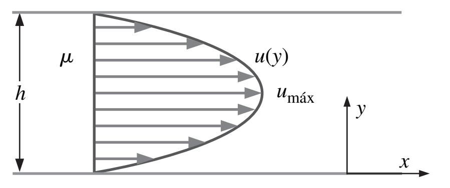


FIGURA P7-86

7-87 Considere el flujo de Poiseuille bidimensional, laminar, estacionario y totalmente desarrollado del problema 7-86. La velocidad máxima $u_{máx}$ ocurre en el centro del canal. *a*) Genere una relación adimensional para $u_{máx}$ como función de la distancia entre placas h, el gradiente de presión dP/dx y la viscosidad del fluido μ. *b*) Si la distancia de separación de placas h se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor cambiará $u_{máx}$? *c*) Si el gradiente de presión dP/dx se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor cambiará $u_{máx}$? *d*) ¿Cuántos experimentos se requieren para describir la relación completa entre $u_{máx}$ y los otros parámetros en el problema?

7-88 La caída de presión $\Delta P = P_1 - P_2$ a través de una larga sección de tubería redonda se puede escribir en términos del esfuerzo de corte τ_w a lo largo de la pared. En la figura P7-88 se muestra el esfuerzo de corte que ejerce la pared sobre el fluido. La región sombreada es un volumen de control compuesto del fluido en la tubería entre las ubicaciones axiales 1 y 2. Existen dos parámetros adimensionales relacionados con la caída de presión: el número de Euler Eu y el factor de fricción de Darcy f. *a*) Con el volumen de control que se muestra en la figura P7-88, genere una relación para f en términos de Eu (y cualesquiera otras propiedades o parámetros en el problema, según se necesite). *b*) Con los datos experimentales y

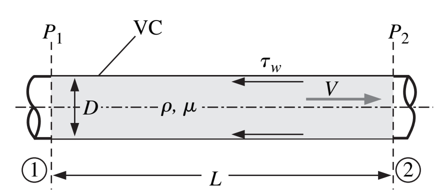


FIGURA P7-88

las condiciones del problema 7-74 (Tabla P7-74), grafique el factor de fricción de Darcy como función de Re. ¿Exhibe f independencia del número de Reynolds a grandes valores de Re? Si es así, ¿cuál es el valor de f a Re más alto? *Respuestas:* *a*) $f = \; f = 2\frac{D}{L}\text{Eu}$; *b*) sí, 0.0487

7-89 Con frecuencia es deseable trabajar con un parámetro adimensional establecido, pero las escalas características disponibles no se igualan con las utilizadas para definir el parámetro. En tales casos, se *crean* las escalas características necesarias con base en razonamiento dimensional (usualmente por medio de inspección). Suponga, por ejemplo, que se tiene la velocidad característica V, el área característica A, la densidad de fluido ρ y la viscosidad de fluido μ, y se quiere definir un número de Reynolds. Se crea una longitud característica $L = \sqrt{A}$ y se define:

$$\text{Re} = \frac{\rho V \sqrt{A}}{\mu}$$

En forma similar se define el parámetro adimensional establecido (nombrado) deseado para cada caso: *a*) Defina un número de Froude, dado $\dot{V}' =$ flujo volumétrico por unidad de profundidad, la longitud característica L y la constante gravitacional g. *b*) Define un número de Reynolds, dado $\dot{V}' =$ flujo volumétrico por unidad de profundidad y la viscosidad cinemática ν. *c*) Defina un número de Richardson, dado $\dot{V}' =$ flujo volumétrico por unidad de profundidad, la longitud característica L, la diferencia de densidad característica $\Delta\rho$, la densidad característica ρ y la constante gravitacional g.

7-90 Un líquido de densidad ρ y viscosidad μ fluye por gravedad a través de un agujero de diámetro d en el fondo de un tanque de diámetro D (Fig. P7-90). Al principio del experimento, la superficie del líquido está a la altura h sobre el fondo del tanque, como se muestra. El líquido sale del tanque como un chorro con velocidad promedio V directo hacia abajo, como también se muestra. Con análisis dimensional genere una relación adimensional para V como función de los otros parámetros en el problema. Identifique cualquier parámetro adimensional establecido (nombrado) que aparezca en su resultado. (Sugerencia: en este problema existen tres longitudes. Por coherencia, elija h como su longitud característica.)

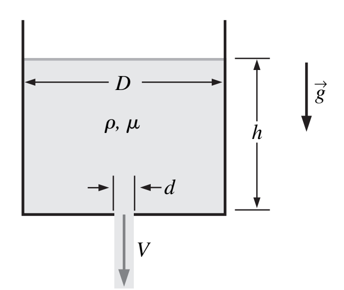


FIGURA P7-90

7-91 Repita el problema 7-90, pero con un parámetro dependiente diferente, a saber, el tiempo necesario para vaciar el tanque $t_{\text{vacío}}$. Genere una relación adimensional para $t_{\text{vacío}}$ como función de los siguientes parámetros independientes: diámetro del agujero d, diámetro del tanque D, densidad ρ, viscosidad μ, altura inicial de la superficie del líquido h y aceleración gravitacional g.

7-92 Un sistema de entrega de líquido se diseña de tal modo que etilenglicol fluye por un agujero en el fondo de un gran tanque, como en la figura P7-90. Los diseñadores necesitan predecir cuánto tardará en drenarse por completo el etilenglicol. Dado que sería muy costoso correr pruebas con un prototipo de tamaño real con el uso de etilenglicol, deciden construir un modelo a un cuarto de escala para las pruebas experimentales y planean usar *agua* como su líquido de prueba. El modelo es geométricamente similar al prototipo (Fig. P7-92). *a*) La temperatura del etilenglicol en el tanque prototipo es de 60°C, a la que $\nu = 4.75 \times 10^{-6}$ m²/s. ¿A qué temperatura debe estar el agua en el experimento modelo con la finalidad de garantizar similitud entre el modelo y el prototipo? *b*) El experimento se corre con agua a la temperatura apropiada, según se calculó en la parte *a*). Toma 4.53 min drenar el tanque modelo. Prediga cuánto tardará drenar el etilenglicol del tanque prototipo. *Respuestas:* *a*) 45.8°C, *b*) 9.06 min

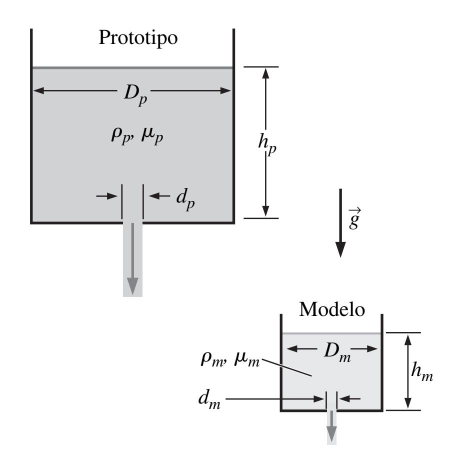


FIGURA P7-92

7-93 De un agujero en el fondo de un tanque fluye líquido como se muestra en la figura P7-90. Considere el caso en el que el agujero es muy pequeño en comparación con el tanque ($d \ll D$). Los experimentos revelan que la velocidad de chorro promedio V es casi independiente de d, D, ρ o μ. De hecho, para un amplio rango de estos parámetros, se hace evidente que V sólo depende de la altura de la superficie del líquido h y de la aceleración gravitacional g. Si la altura de la superficie del líquido se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor aumentará la velocidad de chorro promedio?
Respuesta: $\sqrt{2}$

7-94 Una partícula de aerosol de tamaño característico D_p se mueve en un flujo de aire de longitud característica L y velocidad característica V. El tiempo característico necesario para que la partícula se ajuste a un súbito cambio en la velocidad del aire se llama **tiempo de relajación de partícula** τ_p,

$$\tau_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu}$$

Verifique que las dimensiones primarias de τ_p son tiempo. Luego cree una forma adimensional de τ_p con base en cierta velocidad característica V y cierta longitud característica L del flujo de aire (Fig. P7-94). ¿Qué parámetro adimensional establecido (nombrado) se crea?

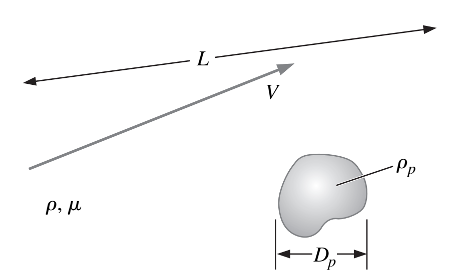


FIGURA P7-94

7-95 Compare las dimensiones primarias de cada una de las siguientes propiedades en el sistema de dimensiones primarias *basado en la masa* (m, L, t, T, I, C, N), con aquellas en el sistema de dimensiones primarias *basadas en fuerza* (F, L, t, T, I, C, N): *a*) presión o esfuerzo, *b*) momento o torque, *c*) trabajo o energía. Con base en sus resultados, explique cuándo y por qué algunos autores prefieren usar fuerza como dimensión primaria en lugar de masa.

7-96 En el Ejemplo 7-7 se usó el sistema de dimensiones primarias basado en masa, para establecer una relación para la diferencia de presión $\Delta P = P_{\text{interior}} - P_{\text{exterior}}$ entre el interior y el exterior de una pompa de jabón como función del radio de la pompa de jabón R y la tensión superficial σ_s de la película jabonosa (Fig. P7-96). Repita el análisis dimensional con el método de repetición de variables, pero ahora utilice el sistema de dimensiones *basado en fuerza*. Muestre todo el procedimiento. ¿Obtiene el mismo resultado?

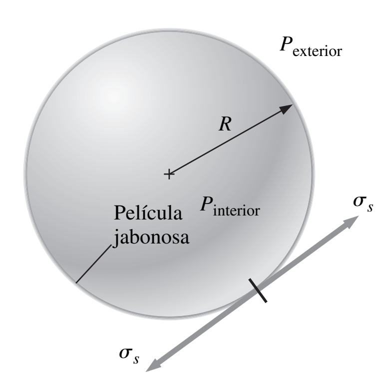


FIGURA P7-96

7-97 Muchos de los parámetros adimensionales establecidos mencionados en la Tabla 7-5 se pueden formar con el producto o razón de otros dos parámetros adimensionales establecidos. Para cada par de parámetros adimensionales citados, encuentre un *tercer* parámetro adimensional establecido que se forme con la manipulación de los dos parámetros dados: *a*) número de Reynolds y número de Prandtl, *b*) número de Schmidt y número de Prandtl, *c*) número de Reynolds y número de Schmidt.

7-98 El número de Stanton se menciona en la Tabla 7-5 como un parámetro adimensional establecido (nombrado). Sin embargo, un análisis cuidadoso revela que en realidad se puede formar por una combinación del número de Reynolds, el número de Nusselt y el número de Prandtl. Encuentre la relación entre estos cuatro grupos adimensionales y muestre todo el procedimiento. ¿También puede formar el número de Stanton con alguna combinación de sólo otros *dos* parámetros adimensionales establecidos?

7-99 Considere una variación del problema del flujo de Couette totalmente desarrollado del problema 7-56: flujo entre dos placas paralelas infinitas separadas una distancia h, con la placa superior en movimiento a velocidad V_{superior} y la placa inferior en movimiento con velocidad V_{inferior}, como se ilustra en la figura P7-99. El flujo es estacionario, incompresible y bidimensional en el plano xy. Genere una relación adimensional para el componente x de velocidad del fluido u como función de la viscosidad del fluido m, la velocidad de las placas V_{superior} y V_{inferior}, la distancia h, la densidad del fluido ρ y la distancia y. (Sugerencia: piense cuidadosamente acerca de la lista de parámetros antes de trabajar con el álgebra.)

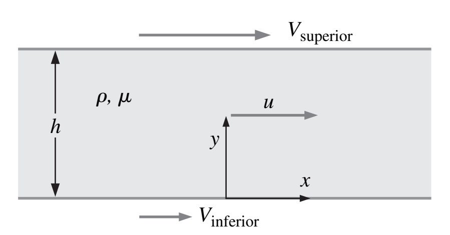


FIGURA P7-99

7-100 ¿Cuáles son las dimensiones primarias de la carga eléctrica q, cuyas unidades son **coulombs** (C)? (Sugerencia: busque la definición fundamental de corriente eléctrica.)

7-101 ¿Cuáles son las dimensiones primarias de la capacitancia eléctrica C, cuyas unidades son **farads**? (Sugerencia: busque la definición fundamental de capacitancia eléctrica.)

7-102 En numerosos circuitos electrónicos en los que se involucra algún tipo de tiempo característico, como los filtros y circuitos retardadores (Fig. P7-102: *filtro pasa bajos*), con frecuencia ve un resistor (R) y un capacitor (C) en serie. De hecho, el producto de R y C se llama *constante de tiempo eléctrico*, RC. ¿Cuáles son las dimensiones primarias de RC? Muestre todo su procedimiento. Sólo con razonamiento dimensional, ex-

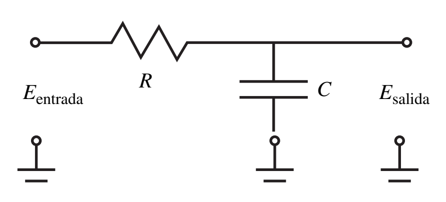


FIGURA P7-102

plique por qué en los circuitos temporizadores con frecuencia se encuentran juntos un resistor y un capacitor.

7-103 A partir de la electrónica fundamental, la corriente que fluye a través de un capacitor en cualquier instante de tiempo es igual a la capacitancia por la razón de cambio del voltaje a través del capacitor,

$$I = C\frac{dE}{dt}$$

Escriba las dimensiones primarias de ambos lados de esta ecuación y verifique que la ecuación es dimensionalmente homogénea. Muestre todo el procedimiento.

7-104 Un dispositivo común, que se usa en varias aplicaciones para limpiar aire lleno de polvo es el **ciclón de flujo inverso** (Fig. P7-104). El aire polvoso (flujo volumétrico e $\dot{V}$ y densidad ρ) entra tangencialmente a través de una abertura en el lado del ciclón y da vueltas en el tanque. Las partículas de polvo se arrojan hacia fuera y caen al fondo, mientras que el aire limpio se extrae hacia la parte superior. Los ciclones de flujo inverso que se estudian son todos geométricamente similares; por lo tanto, el diámetro D representa la única escala de longitud necesaria para especificar por completo la geometría total del ciclón. Los ingenieros se preocupan por la caída de presión dP a través del ciclón. *a*) Genere una relación adimensional entre la caída de presión a través del ciclón y los parámetros dados. Muestre todo el procedimiento. *b*) Si el tamaño del ciclón se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor cambiará la caída de presión? *c*) Si el flujo volumétrico se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor cambiará la caída de presión? *Respuestas: a*) $D^4\delta P/\rho\dot{V}^2$ = constante; *b*) 1/16; *c*) 4

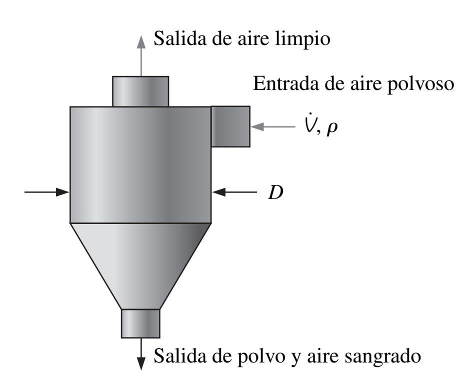


FIGURA P7-104

7-105 Un **precipitador electrostático** (ESP, por sus siglas en inglés) es un dispositivo que se usa en varias aplicaciones para limpiar aire lleno de partículas. Primero, el aire sucio pasa a través de la *etapa de carga* del precipitador, donde a las partículas de polvo se les da una carga positiva q_p (coulombs) por medio de alambres ionizadores cargados (Fig. P7-105). Luego el aire polvoso ingresa a la *etapa de colector* del dispositivo, donde fluye entre dos placas cargadas de manera opuesta. La *intensidad del campo eléctrico* aplicado entre las placas es E_f (diferencia de voltaje por distancia unitaria). En la figura P7-105 se muestra una partícula de polvo cargada de diámetro D_p. Ésta es atraída hacia la placa cargada negativamente y se desplaza hacia dicha placa a una velocidad llamada **velocidad de deriva** w. Si las placas son lo suficientemente largas, la partícula de polvo choca con la placa cargada negativamente y se adhiere a ella. Del dispositivo sale aire limpio. Se hace evidente que, para partículas muy pequeñas, la velocidad de deriva sólo depende de q_p, E_f, D_p y de la viscosidad del aire μ. *a*) Genere una relación adimensional entre la velocidad de deriva a través de la etapa de colector del precipitador y los parámetros dados. Muestre todo el procedimiento. *b*) Si la intensidad del campo eléctrico se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor cambiará la velocidad de deriva? *c*) Para un precipitador dado, si el diámetro de la partícula se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor cambiará la velocidad de deriva?

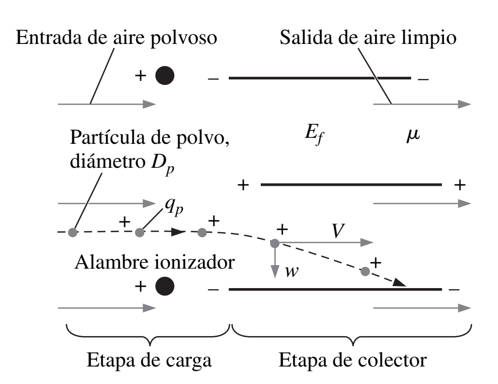


FIGURA P7-105

7-106 Cuando un tubo capilar de diámetro pequeño D se inserta en un contenedor de líquido, el líquido sube hasta una altura h en el interior del tubo (Fig. P7-106); h es una función de la densidad del líquido ρ, el diámetro del tubo D, la constante gravitacional g, el ángulo de contacto ϕ y la tensión superficial σ_s del líquido. *a*) Genere una relación adimensional para h como función de los parámetros dados. *b*) Compare su resultado con la ecuación analítica exacta para h que se dio en el capítulo 2. ¿Los resultados de su análisis dimensional son consistentes con la ecuación exacta? Explíquelo.

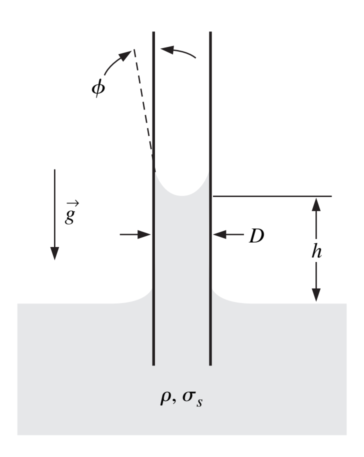


FIGURA P7-106

7-107 Repita la parte *a*) del problema 7-106, excepto que, en lugar de la altura h, encuentre una relación funcional para la escala de tiempo $t_{\text{elevación}}$ necesaria para que el líquido ascienda hasta su altura final en el tubo capilar. (Sugerencia: compruebe la lista de parámetros independientes en el problema 7-106. ¿Existen algunos parámetros relevantes adicionales?)

7-108 La **intensidad sonora** I se define como la potencia acústica por unidad de área que emana de una fuente sonora. Se sabe que I es función del nivel de presión sonoro P (dimensiones de presión) y de las propiedades del fluido ρ (densidad) y velocidad del sonido c. *a*) Use el método de repetición de variables, en dimensiones primarias basadas en masa, para generar una relación adimensional para I como función de los otros parámetros. Muestre todo el procedimiento. ¿Qué ocurre si elige tres variables repetitivas? Discútalo. *b*) Repita la parte *a*), pero use el sistema de dimensiones primarias basado en fuerza. Explíquelo.

7-109 Repita el problema 7-108, pero con la distancia r desde la fuente de sonido como un parámetro independiente adicional.

CAPÍTULO

8

FLUJO EN TUBERÍAS

En la práctica es común encontrar el flujo de fluidos en tuberías circulares y no circulares. El agua caliente y la fría que se usan en los hogares se bombea a través de tuberías. El agua en una ciudad se distribuye mediante extensas redes de tuberías. El petróleo y el gas natural se transportan a cientos de kilómetros por largas y grandes tuberías. La sangre recorre todo el cuerpo a través de arterias y de venas. El agua de enfriamiento en un motor se transporta mediante mangueras hacia la tubería del radiador, donde éste se enfría conforme el agua fluye. La energía térmica en un sistema de calefacción central se transfiere hacia el agua que circula en el calentador, y luego se transporta hacia las posiciones deseadas por tuberías.

El flujo de fluidos se clasifica como *externo* e *interno*, ya que depende si el fluido se fuerza a fluir sobre una superficie o dentro de un conducto. Los flujos interno y externo tienen características diferentes. En este capítulo se considera el *flujo interno* donde el conducto está totalmente lleno con el fluido y el flujo se impulsa principalmente mediante de diferencia de presión. Este hecho no se debe confundir con el *flujo de canal abierto*, donde el conducto está parcialmente lleno con el fluido y por tanto el flujo está parcialmente acotado por superficies sólidas, como en una zanja de irrigación, y el flujo se impulsa sólo con la gravedad.

El capítulo empieza con una descripción física general del flujo interno y la *capa límite de velocidad*. Continúa con un comentario adimensional del *número de Reynolds* y su significado físico. Luego se comentan las características del flujo adentro de tuberías y se introducen las correlaciones de *caída de presión* relacionadas con él, tanto para flujo laminar como para turbulento. Después se presentan las pérdidas menores y se determina la caída de presión y las necesidades de potencia de bombeo para sistemas de tuberías en el mundo real. Finalmente se presenta un panorama de los dispositivos para la medición de flujo.

OBJETIVOS

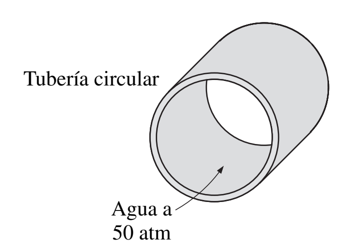
Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Entender mejor los flujos laminar y turbulento en tuberías y el análisis del flujo totalmente desarrollado.
- Calcular las pérdidas mayor y menor asociadas con el flujo en redes de tuberías y determinar la potencia de bombeo necesaria.
- Comprender las diferentes técnicas de medición de velocidad, y la razón de flujo y aprender sus ventajas y desventajas.

8-1 ▪ INTRODUCCIÓN

El flujo de un líquido o de un gas a través de *tuberías* o *ductos* se usa comúnmente en sistemas de calefacción y enfriamiento y en redes de distribución de fluido. El fluido en estas aplicaciones usualmente se fuerza a fluir mediante un ventilador o bomba a través de una sección del flujo. Se pone particular atención a la *fricción*, que se relaciona directamente con la *caída de presión* y las *pérdidas de carga* durante el flujo a través de tuberías y ductos. Entonces, la caída de presión se usa para determinar la potencia necesaria de bombeo. Un sistema de tuberías típico incluye tuberías de diferentes diámetros, unidas entre sí mediante varias uniones o codos para dirigir el fluido, válvulas para controlar la razón de flujo y bombas para presurizar el fluido.

Los términos *tubo*, *ducto* y *conducto* se usan de manera intercambiable para tramos de flujo. En general, los tramos de flujo de sección transversal circular se conocen como flujo en *tubos* (en especial cuando el fluido es un líquido), y los tramos de flujo de sección transversal no circular se conocen como *ductos* (especialmente cuando el fluido es un gas). En este texto se usarán frases más descriptivas (como *tubería circular* o *ducto rectangular*) siempre que sea necesario para evitar cualquier confusión.



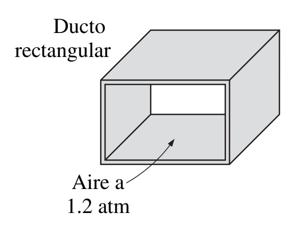


FIGURA 8-1
Las tuberías circulares pueden resistir notables diferencias de presión entre el interior y el exterior sin experimentar alguna distorsión considerable, pero las no-circulares no pueden hacerlo.

Quizá el lector ha notado que la mayoría de los fluidos, en especial los líquidos, se transportan en *tuberías circulares*. Esto es así porque las tuberías con una sección transversal circular pueden resistir grandes diferencias de presión entre el interior y el exterior sin distorsión considerable. Las *tuberías no-circulares,* por lo general se usan en aplicaciones como los sistemas de calefacción y enfriamiento de edificios, donde la diferencia de presión es relativamente pequeña, los costos de fabricación e instalación son bajos, y el espacio disponible para reparar ductos está limitado (Fig. 8-1).

Aunque la teoría de flujo de fluidos se entienda de manera adecuada, las soluciones teóricas se obtienen sólo para pocos casos simples, como el flujo laminar totalmente desarrollado en un tubo circular. Por lo tanto, la teoría se debe apoyar en resultados experimentales y relaciones empíricas para la mayoría de los problemas de flujo de fluidos, más que en soluciones analíticas. Dado que los resultados experimentales se obtienen en condiciones de laboratorio cuidadosamente controladas y que dos sistemas no son exactamente iguales, no se debe ser ingenuo para ver los resultados obtenidos como “exactos”. Un error de 10 por ciento (o más) en los factores de fricción que se han calculado con el uso de las relaciones en este capítulo es la “norma” más que la “excepción”.

La velocidad del fluido en una tubería cambia de *cero* en la superficie debido a la condición de no-deslizamiento hasta un máximo en el centro de la tubería. En el flujo de fluidos, es conveniente trabajar con una velocidad *promedio* V_{prom}, que permanece constante en flujo incompresible cuando el área de la sección transversal de la tubería es constante (Fig. 8-2). La velocidad promedio en aplicaciones de calentamiento y enfriamiento puede cambiar un poco, debido a transformaciones en la densidad que crea la temperatura. Pero, en la práctica, se evalúan las propiedades del fluido a cierta temperatura promedio y se les trata como una constante. La conveniencia de trabajar con propiedades constantes usualmente justifica la ligera pérdida en exactitud.

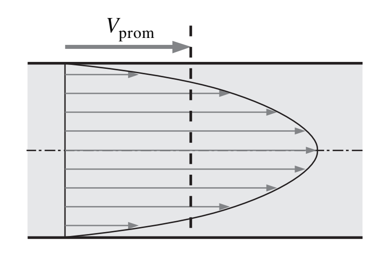


FIGURA 8-2
La velocidad promedio V_{prom} se define como la rapidez de avance de fluido promedio a través de una sección transversal. Para flujo laminar totalmente desarrollado en tubería, V_{prom} es la mitad de la velocidad máxima.

Además, la fricción entre las partículas del fluido en una tubería ocasiona una ligera elevación en la temperatura del fluido, como resultado de la transformación de la energía mecánica en energía térmica sensible. Pero, este aumento de temperatura debido a *calentamiento por fricción,* por lo general, es muy bajo para garantizar cualquier consideración en los cálculos y por lo tanto se le pasa por alto. Por ejemplo, en ausencia de cualquier transferencia de calor, no se puede detectar una diferencia apreciable entre las temperaturas interior y exterior del agua que fluye en una tubería. La consecuencia primordial de la fricción en el

flujo de fluidos es la caída de presión, y por tanto cualquier cambio importante en la temperatura del fluido se debe a transferencia de calor.

El valor de la velocidad promedio V_{prom} en cierta sección transversal de flujo se determina a partir del requisito de que se satisfaga el principio de *conservación de masa* (Fig. 8-2). Esto es:

$$\dot{m} = \rho V_{prom} A_c = \int_{A_c} \rho u(r)\, dA_c \qquad \textbf{(8-1)}$$

donde $\dot{m}$ es la razón de flujo de masa, ρ es la densidad, A_c es el área de sección transversal y $u(r)$ es el perfil de velocidad. Entonces, la velocidad promedio para flujo incompresible en una tubería circular de radio R se puede expresar como:

$$V_{prom} = \frac{\int_{A_c} \rho u(r)\, dA_c}{\rho A_c} = \frac{\int_0^R \rho u(r) 2\pi r\, dr}{\rho \pi R^2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r\, dr \qquad \textbf{(8-2)}$$

En consecuencia, cuando se conoce la razón de flujo o el perfil de velocidad, la velocidad promedio se puede determinar fácilmente.

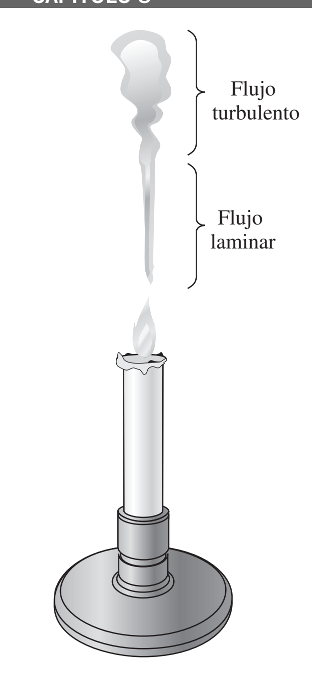


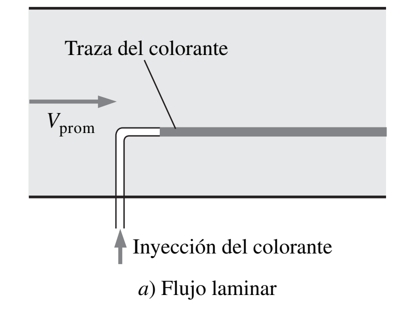
FIGURA 8-3
Regímenes de flujo laminar y turbulento del humo de una vela.

8-2 ▪ FLUJOS LAMINAR Y TURBULENTO

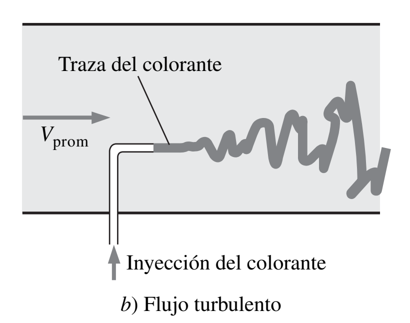
Si alguna vez el lector ha estado rodeado de fumadores, quizá habrá observado que el humo de los cigarrillos se eleva en una pluma suave durante los primeros centímetros y luego comienza a fluctuar aleatoriamente en todas direcciones conforme continúa elevándose. Otras plumas se comportan de manera similar (Fig. 8-3). De igual modo, una inspección cuidadosa del flujo en una tubería revela que el flujo de fluidos es de líneas de corriente aproximadamente paralelas a bajas velocidades, pero se vuelve caótico conforme la velocidad aumenta sobre un valor crítico, como se muestra en la figura 8-4. Se dice que el régimen de flujo en el primer caso es **laminar**, y se caracteriza por *líneas de corriente suaves* y *movimiento sumamente ordenado*; mientras que en el segundo caso es **turbulento**, y se caracteriza por *fluctuaciones de velocidad* y *movimiento también desordenado*. La **transición** de flujo laminar a turbulento no ocurre repentinamente; más bien, sucede sobre cierta región en la que el flujo fluctúa entre flujos laminar y turbulento antes de volverse totalmente turbulento. La mayoría de los flujos que se encuentran en la práctica son turbulentos. El flujo laminar se encuentra cuando los fluidos muy viscosos, como los aceites, fluyen en pequeñas tuberías o pasajes estrechos.

Es posible verificar la existencia de dichos regímenes de flujo laminar, transicional y turbulento cuando se inyectan algunas líneas de colorante en el flujo en una tubería de vidrio, como hizo el ingeniero británico Osborne Reynolds (1842-1912) hace más de un siglo. Él observó que las líneas de colorante formaban una *línea recta y suave* a bajas velocidades cuando el flujo era laminar (es posible verlas un poco borrosas debido a la difusión molecular), tenían *estallidos de fluctuaciones* en el régimen transicional y *zigzagueaban rápida y aleatoriamente* cuando el flujo se volvía totalmente turbulento. Dichos zigzagueos y la dispersión del colorante son indicadores de las fluctuaciones en el flujo principal y la rápida mezcla de las partículas de fluido de capas adyacentes.

La *intensa mezcla* del fluido en el flujo turbulento como resultado de las rápidas fluctuaciones mejora la transferencia de cantidad de movimiento entre las partículas del fluido, lo que aumenta la fuerza de fricción sobre la superficie y por tanto la potencia de bombeo necesaria. El factor de fricción alcanza un máximo cuando el flujo se vuelve totalmente turbulento.



a) Flujo laminar



b) Flujo turbulento

FIGURA 8-4
Comportamiento de un fluido coloreado que se inyectó en un flujo donde se observan los flujos laminar y turbulento en una tubería.

Número de Reynolds

La transición de flujo laminar a turbulento depende de la *geometría*, la *rugosidad de la superficie*, la *velocidad del flujo*, la *temperatura de la superficie* y el *tipo de fluido*, entre otros factores. Después de experimentos exhaustivos en los años de 1880, Osborne Reynolds descubrió que el régimen de flujo depende principalmente de la razón de *fuerzas inerciales* a *fuerzas viscosas* en el fluido. Esta razón se llama **número de Reynolds** y se expresa para flujo interno en una tubería circular como (Fig. 8-5)

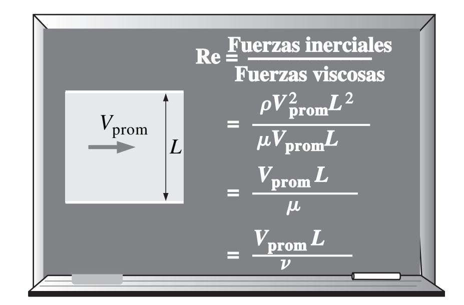


FIGURA 8-5
El número de Reynolds se puede considerar como la razón de fuerzas inerciales a fuerzas viscosas que actúan sobre un elemento de fluido.

$$\text{Re} = \frac{\text{Fuerzas inerciales}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{V_{\text{prom}}D}{\nu} = \frac{\rho V_{\text{prom}}D}{\mu} \qquad \textbf{(8-3)}$$

donde V_{prom} = velocidad de flujo promedio (m/s), D = longitud característica de la geometría (diámetro en este caso, en m), y $\nu = \mu/\rho$ =viscosidad cinemática del fluido (m^2/s). Note que el número de Reynolds es una cantidad *adimensional* (capítulo 7). Además, la viscosidad cinemática tiene la unidad m^2/s y se puede ver como *difusividad viscosa* o *difusividad de cantidad de movimiento*.

A números grandes de Reynolds, las fuerzas inerciales, que son proporcionales a la densidad del fluido y al cuadrado de la velocidad del fluido, son grandes en relación con las fuerzas viscosas y por lo tanto las fuerzas viscosas no pueden evitar las aleatorias y rápidas fluctuaciones del fluido. Sin embargo, a números de Reynolds *pequeños* o *moderados*, las fuerzas viscosas son lo suficientemente grandes como para suprimir dichas fluctuaciones y mantener al fluido "en línea". Por lo tanto el flujo es *turbulento* en el primer caso y *laminar* en el segundo.

El número de Reynolds en donde el flujo se vuelve turbulento se llama **número de Reynolds crítico**, Re_{cr}. El valor del número de Reynolds crítico es diferente para geometrías y condiciones de flujo distintas. Para flujo interno en una tubería circular, el valor generalmente aceptado del número de Reynolds crítico es $\text{Re}_{\text{cr}} = 2\,300$.

Para flujo a través de tuberías no-circulares, el número de Reynolds se basa en el **diámetro hidráulico** D_h, que se define como (Fig. 8-6).

Diámetro hidráulico:
$$D_h = \frac{4A_c}{p} \qquad \textbf{(8-4)}$$

donde A_c es el área de sección transversal de la tubería y p es su perímetro húmedo. El diámetro hidráulico se define de modo que se reduce a diámetro común D para tuberías circulares:

Tuberías circulares:
$$D_h = \frac{4A_c}{p} = \frac{4(\pi D^2/4)}{\pi D} = D$$

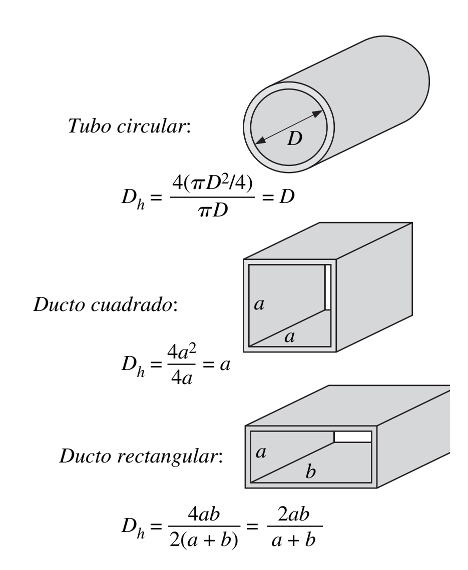


FIGURA 8-6
El diámetro hidráulico $D_h = 4A_c/p$ se define de tal modo que se reduce a diámetro común para tubos circulares.

Es deseable tener valores precisos de números de Reynolds para flujos laminar, transicional y turbulento, pero éste no es el caso en la práctica. Es evidente que la transición de flujo laminar a turbulento también depende del grado de perturbación del flujo por la *rugosidad de la superficie*, las *vibraciones de la tubería* y las *fluctuaciones en el flujo*. En la mayoría de las condiciones prácticas, el flujo en una tubería circular es laminar para $\text{Re} \lesssim 2\,300$, turbulento para $\text{Re} \gtrsim 4\,000$, y transicional entre ellos. Es decir

$$\text{Re} \lesssim 2\,300 \quad \text{flujo laminar}$$
$$2\,300 \lesssim \text{Re} \lesssim 4\,000 \quad \text{flujo transicional}$$
$$\text{Re} \gtrsim 4\,000 \quad \text{flujo turbulento}$$

En el flujo transicional, el flujo cambia entre laminar y turbulento de manera aleatoria (Fig. 8-7). Se debe tener en mente que el flujo laminar se puede mantener en números de Reynolds mucho más altos en tuberías muy lisas cuando se evitan las perturbaciones de flujo y las vibraciones de tubería. En estos experimentos cuidadosamente controlados, el flujo laminar se ha mantenido en números de Reynolds de hasta 100 000.

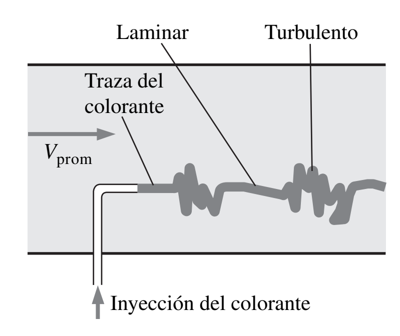


FIGURA 8-7
En la región de flujo transicional de 2 300 $\leq$ Re $\leq$ 4 000, el flujo cambia aleatoriamente entre laminar y turbulento.

8-3 ▪ LA REGIÓN DE ENTRADA

Considere un fluido que entra en una tubería circular a una velocidad uniforme. Debido a la condición de no-deslizamiento, las partículas del fluido en la capa en contacto con la superficie de la tubería se detienen por completo. Esta capa también provoca que las partículas del fluido en las capas adyacentes frenen gradualmente como resultado de la fricción. Para configurarse esta reducción de velocidad, la velocidad del fluido en la sección media de la tubería tiene que aumentar para mantener constante la razón de flujo de masa a través de la tubería. Como resultado, a lo largo de la tubería se crea un gradiente de velocidad.

La región del flujo en la que se sienten los efectos de los esfuerzos cortantes viscosos provocados por la viscosidad del fluido se llama **capa límite de velocidad** o sólo **capa límite**. La hipotética superficie de la capa límite divide el flujo en una tubería en dos regiones: la **región de la capa límite**, en la que los efectos viscosos y los cambios de velocidad son consderables; y la **región de flujo (central) irrotacional**, en la que los efectos de fricción son despreciables y la velocidad permanece esencialmente constante en la dirección radial.

El grosor de esta capa límite aumenta en la dirección del flujo hasta que la capa límite alcanza el centro de la tubería y por lo tanto llena toda la tubería, como se muestra en la figura 8-8. La región desde la entrada a la tubería hasta el punto en el que la capa límite emerge en la línea central se llama **región de entrada hidrodinámica**, y la longitud de esta región se llama **longitud de entrada hidrodinámica** L_h. El flujo en la región de entrada se llama *flujo en desarrollo hidrodinámico* porque ésta es la región donde se crea el perfil de velocidad. La zona más allá de la región de entrada en la que el perfil de velocidad está totalmente desarrollado y permanece invariable se llama **región hidrodinámicamente desarrollada totalmente**. Se dice que el flujo está **totalmente desarrollado**, o **totalmente desarrollado térmicamente**, cuando el perfil de temperatura normalizada permanece invariable también. El flujo hidrodinámicamente desarrollado equivale al flujo totalmente desarrollado cuando el fluido en la tubería no se calienta o enfría, porque en este caso la temperatura del fluido permanece esencialmente constante a todo lo largo. El perfil de velocidad en la

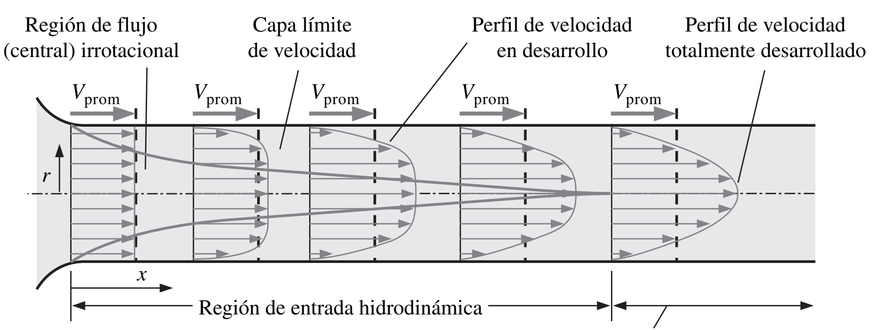


FIGURA 8-8
El desarrollo de la capa límite de velocidad en una tubería (el perfil de velocidad que se desarrolla es parabólico en el flujo laminar, como se muestra, pero un poco más plano o más lleno en el flujo turbulento).

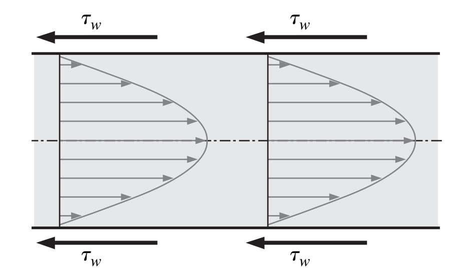


FIGURA 8-9
En la región de flujo totalmente desarrollado de una tubería, el perfil de velocidad no cambia corriente abajo y, por tanto, el esfuerzo de corte de pared también permanece constante.

región totalmente desarrollada es *parabólico* en el flujo laminar y un poco *más plano* (o *más lleno*) en el flujo turbulento debido al movimiento de vórtices y a una mezcla más vigorosa en la dirección radial. El perfil de velocidad promediado en el tiempo permanece invariable cuando el flujo está totalmente desarrollado y por lo tanto:

Hidrodinámicamente desarrollado totalmente:
$$\frac{\partial u(r, x)}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad u = u(r) \tag{8-5}$$

El esfuerzo de corte en la pared de la tubería τ_w se relaciona con la pendiente del perfil de velocidad en la superficie. Cuando se observa que el perfil de velocidad permanece invariable en la región hidrodinámicamente desarrollada por completo, el esfuerzo de corte de pared también permanece constante en dicha región (Fig. 8-9).

Considere flujo de fluidos en la región de entrada hidrodinámica de una tubería. El esfuerzo de corte de pared es *el más alto* a la entrada de la tubería donde el grosor de la capa límite es más pequeño, y disminuye gradualmente hasta el valor correspondiente al flujo totalmente desarrollado, como se muestra en la figura 8-10. Por lo tanto, la caída de presión es *más alta* en las regiones de entrada de una tubería, y el efecto de la región de entrada siempre es *aumentar* el factor de fricción promedio para toda la tubería. Este aumento puede ser importante para tuberías cortas, pero es despreciable para las largas.

Longitudes de entrada

La longitud de entrada hidrodinámica usualmente se toma como la distancia desde la entrada de la tubería hasta donde el esfuerzo de corte de pared (y por tanto el factor de fricción) alcanza dentro de aproximadamente 2 por ciento el valor correspondiente al flujo totalmente desarrollado. En *flujo laminar*, la longitud de entrada hidrodinámica está dada aproximadamente como (vea Kays y Crawford, 1993; y Shah y Bhatti, 1987):

$$L_{h,\,\text{laminar}} \cong 0.05\text{Re}D \tag{8-6}$$

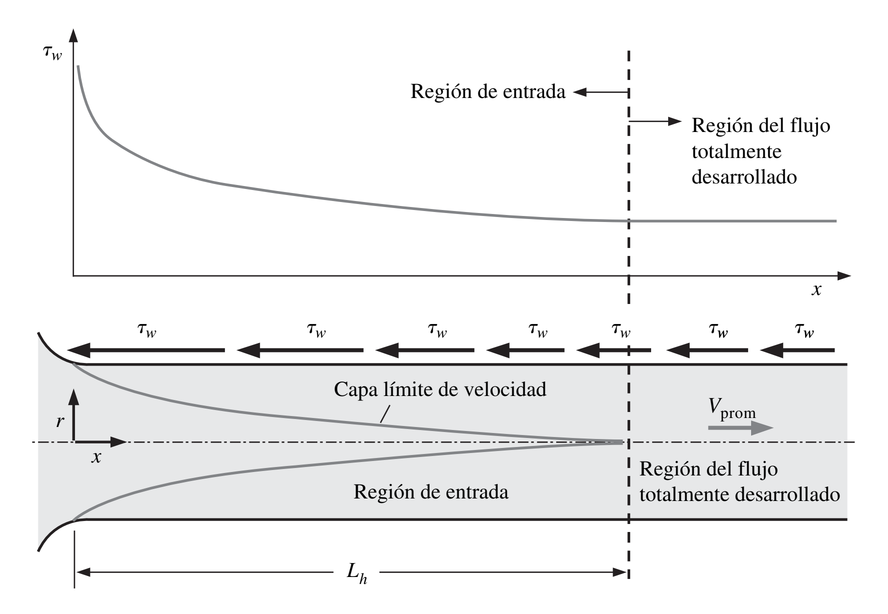


FIGURA 8-10
Variación del esfuerzo de corte de pared en la dirección del flujo para un flujo en una tubería desde la región de entrada hasta la región del flujo totalmente desarrollado.

Para Re = 20, la longitud de entrada hidrodinámica es casi del tamaño del diámetro, pero aumenta linealmente con la velocidad. En el caso límite laminar de Re = 2 300, la longitud de entrada hidrodinámica es 115*D*.

En *flujo turbulento*, la intensa mezcla durante las fluctuaciones aleatorias usualmente ensombrece los efectos de la difusión molecular. La longitud de entrada hidrodinámica para flujo turbulento se puede aproximar como (véase Bhatti y Shah, 1987; y Zhi-qing, 1982)

$$L_{h,\text{ turbulento}} = 1.359D\text{Re}_D^{1/4} \quad \textbf{(8-7)}$$

La longitud de entrada es mucho más corta en el flujo turbulento, como se esperaba, y su dependencia del número de Reynolds es débil. En numerosos flujos de tubería de interés práctico en ingeniería, los efectos de entrada se vuelven insignificantes más allá de una longitud de tubería de 10 diámetros, y la longitud de entrada hidrodinámica se aproxima como:

$$L_{h,\text{ turbulento}} \approx 10D \quad \textbf{(8-8)}$$

En la literatura están disponibles correlaciones precisas para calcular las pérdidas de carga por fricción en regiones de entrada. Sin embargo, la longitud de las tuberías que se usan en la práctica, usualmente es varias veces la longitud de la región de entrada, y por tanto el flujo a través de las tuberías con frecuencia se supone como totalmente desarrollado para toda la longitud de la tubería. Este procedimiento simplista da resultados *razonables* para tuberías largas, pero a veces resultados malos para las cortas, porque subestima los esfuerzos de corte de pared y por lo tanto el factor de fricción.

8-4 ▪ FLUJO LAMINAR EN TUBERÍAS

En la Sección 8-2 se mencionó que el flujo en tuberías es laminar para RE ≤ 2 300 y que el flujo está totalmente desarrollado si la tubería es suficientemente larga (en relación con la longitud de entrada) de modo que los efectos de entrada son despreciables. En esta sección se considera el flujo laminar estacionario de un fluido incompresible con propiedades constantes en la región totalmente desarrollada de una tubería circular recta. Se obtiene la ecuación de cantidad de movimiento cuando se aplica un equilibrio de cantidad de movimiento a un elemento diferencial de volumen, y cuando se resuelve se obtiene el perfil de velocidad. Luego se utiliza para lograr una relación para el factor de fricción. Un aspecto importante del análisis aquí es que es uno de los pocos disponibles para flujo viscoso.

En flujo laminar totalmente desarrollado, cada partícula de fluido se desplaza a una velocidad axial constante a lo largo de una línea de corriente y el perfil de velocidad $u(r)$ permanece invariable en la dirección del flujo. No hay movimiento en la dirección radial y por tanto el componente de velocidad en la dirección normal al flujo es cero en todas partes. No hay aceleración porque el flujo es estacionario y totalmente desarrollado.

Considere ahora un elemento diferencial de volumen con forma de anillo de radio r, grosor dr y longitud dx orientado coaxialmente con la tubería, como se muestra en la figura 8-11. El elemento de volumen incluye sólo efectos de presión y viscosos y por lo tanto la presión y las fuerzas de corte se equilibran entre sí. La fuerza de presión que actúa sobre una superficie plana sumergida es el producto de la presión en el centroide de la superficie y el área de la superficie. Un equilibrio de fuerzas sobre el elemento de volumen en la dirección del flujo produce:

$$(2\pi r\, dr\, P)_x - (2\pi r\, dr\, P)_{x+dx} + (2\pi r\, dx\, \tau)_r - (2\pi r\, dx\, \tau)_{r+dr} = 0 \quad \textbf{(8-9)}$$

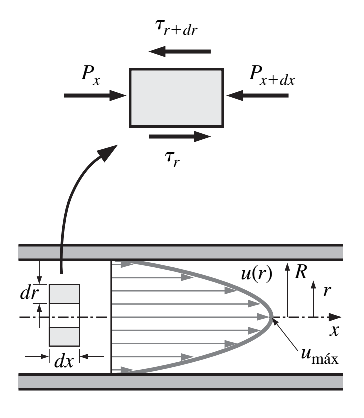
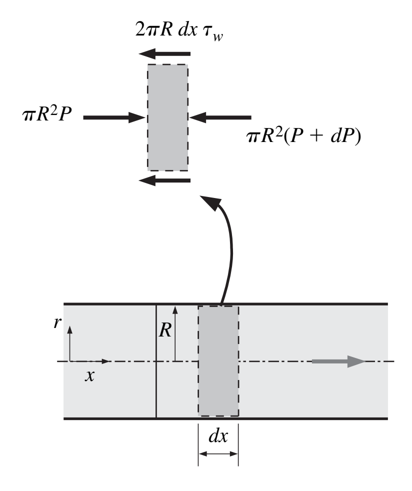


FIGURA 8-11
Diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencial de fluido con forma de anillo de radio r, grosor dr y longitud dx orientado coaxialmente con una tubería horizontal en flujo laminar totalmente desarrollado.



Equilibrio de fuerza:

$\pi R^2 P - \pi R^2(P + dP) - 2\pi R\,dx\,\tau_w = 0$

Simplificado:

$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R}$

FIGURA 8-12
Diagrama de cuerpo libre de un elemento de fluido en forma de disco con radio R y longitud dx en flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería horizontal.

que indica que, en flujo totalmente desarrollado en una tubería horizontal, las fuerzas viscosas y de presión se equilibran mutuamente. Cuando se divide entre $2\pi dr dx$ y se reordena

$$r\frac{P_{x+dx} - P_x}{dx} + \frac{(r\tau)_{r+dr} - (r\tau)_r}{dr} = 0 \qquad \textbf{(8-10)}$$

Cuando se toma el límite conforme $dr,\, dx \rightarrow 0$ se obtiene:

$$r\frac{dP}{dx} + \frac{d(r\tau)}{dr} = 0 \qquad \textbf{(8-11)}$$

Cuando se sustituye $\tau = -\mu(du/dr)$ y se toma $\mu =$ constante se produce la ecuación deseada:

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{dP}{dx} \qquad \textbf{(8-12)}$$

La cantidad du/dr es negativa en flujo de tubería, y el signo negativo se incluye para obtener valores positivos para τ. (O $du/dr = -du/dy$ porque $y = R - r$.) El lado izquierdo de la ecuación 8-12 es función de r y el lado derecho es función de x. La igualdad se debe sostener para cualquier valor de r y x, y una igualdad de la forma $f(r) = g(x)$ sólo se puede satisfacer si tanto $f(r)$ como $g(x)$ son iguales a la misma constante. Por lo tanto, se concluye que $dP/dx =$ constante. Esto se puede verificar cuando se escribe un equilibrio de fuerzas sobre un elemento de volumen de radio R y grosor dx (una rebanada de la tubería), lo que produce (Fig. 8-12)

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} \qquad \textbf{(8-13)}$$

Aquí τ_w es constante porque la viscosidad y el perfil de velocidad son constantes en la región totalmente desarrollada. Por lo tanto, $dP/dx =$ constante.

La ecuación 8-12 puede resolverse por lineamiento o integración hasta por dos veces para dar

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right) + C_1 \ln r + C_2 \qquad \textbf{(8-14)}$$

El perfil de velocidad $u(r)$ se obtiene cuando se aplican las condiciones de frontera $\partial u/\partial r = 0$ en $r = 0$ (debido a la simetría en torno a la línea central) y $u = 0$ en $r = R$ (la condición de no-deslizamiento en la superficie de la tubería). Se obtiene:

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \textbf{(8-15)}$$

En consecuencia, el perfil de velocidad en flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería es *parabólico* con un máximo en la línea central y mínimo (cero) en la pared de la tubería. Además, la velocidad axial u es positiva para cualquier r, y por lo tanto el gradiente de presión axial dP/dx debe ser negativo (es decir: la presión debe disminuir en la dirección del flujo debido a efectos viscosos).

La velocidad promedio se determina a partir de su definición cuando se sustituye la ecuación 8-15 en la ecuación 8-2 y se realiza la integración. Ello produce:

$$V_{\text{prom}} = \frac{2}{R^2}\int_0^R u(r)r\,dr = \frac{-2}{R^2}\int_0^R \frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)r\,dr = -\frac{R^2}{8}\left(\frac{dP}{dx}\right) \qquad \textbf{(8-16)}$$

Cuando se combinan las últimas dos ecuaciones, el perfil de velocidad se reescribe como:

$$u(r) = 2V_{\text{prom}}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \textbf{(8-17)}$$

Ésta es una forma conveniente para el perfil de velocidad porque V_{prom} se puede determinar fácilmente a partir de la información de la razón de flujo.

La velocidad máxima ocurre en la línea central y se determina a partir de la ecuación 8-17 cuando se sustituye $r = 0$,

$$u_{máx} = 2V_{prom} \tag{8-18}$$

En consecuencia, *la velocidad promedio en flujo laminar totalmente desarrollado en tubería es la mitad de la velocidad máxima*.

Caída de presión y pérdida de carga

Un interés considerable en el análisis de flujo de tubería es el que causa la *caída de presión* ΔP, porque está directamente relacionada con la potencia necesaria para que el ventilador o bomba mantengan el flujo. Note que $dP/dx =$ constante y cuando se integra de $x = x_1$, donde la presión es P_1, hasta $x = x_1 + L$, donde la presión es P_2, produce:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L} \tag{8-19}$$

Cuando se sustituye la ecuación 8-19 en la expresión de V_{prom} de la ecuación 8-16, la caída de presión se puede expresar como:

Flujo laminar:
$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\mu L V_{prom}}{R^2} = \frac{32\mu L V_{prom}}{D^2} \tag{8-20}$$

El símbolo Δ se utiliza comúnmente para indicar la diferencia entre los valores final e inicial, como $\Delta y = y_2 - y_1$. Pero en flujo de fluidos, ΔP se usa para designar caída de presión, y por lo tanto es $P_1 \; \Delta \; P_2$. Una caída de presión ocasionada por efectos viscosos representa una pérdida de presión irreversible llamada **pérdida de presión** ΔP_L para destacar que es una *pérdida* (tal como la pérdida de carga h_L, que es proporcional a ella).

Note a partir de la ecuación 8-20 que la caída de presión es proporcional a la viscosidad μ del fluido, y ΔP sería cero si no hubiera fricción. Por lo tanto, la caída de presión de P_1 a P_2, en este caso, se debe por completo a efectos viscosos, y la ecuación 8-20 representa la pérdida de presión ΔP_L cuando un fluido de viscosidad μ fluye a través de una tubería de diámetro uniforme D y longitud L a velocidad promedio V_{prom}.

En la práctica, es conveniente expresar la pérdida de presión para todos los tipos de flujos internos totalmente desarrollados (flujos laminar o turbulento, tuberías circulares o no-circulares, superficies lisas o rugosas, tuberías horizontales o inclinadas) como (Fig. 8-13):

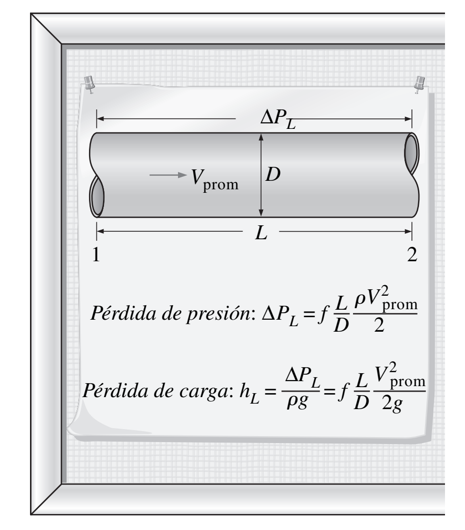


FIGURA 8-13
La relación para la pérdida de presión (y pérdida de carga) es una de las relaciones más generales en la mecánica de fluidos y válida para flujos laminar o turbulento, tuberías circulares o no-circulares y tuberías con superficies lisas o rugosas.

Pérdida de presión:
$$\Delta P_L = f\frac{L}{D}\frac{\rho V_{prom}^2}{2} \tag{8-21}$$

dondee $\rho V_{prom}^2/2$es la *presión dinámica* y f es el **factor de fricción de Darcy**,

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V_{prom}^2} \tag{8-22}$$

También se llama **factor de fricción de Darcy-Weisbach**, en honor al francés Henry Darcy (1803-1858) y al alemán Julius Weisbach (1806-1871), ingenieros que proporcionaron las mayores aportaciones en su desarrollo. No se debe confundir con el *coeficiente de fricción* C_f [también llamado *factor de fricción de*

Fanning, en honor al ingeniero estadounidense John Fanning (1837-1911)], que se define como $C_f = 2\tau_w/(\rho V_{prom}^2) = f/4$.

Cuando se igualan las ecuaciones 8-20 y 8-21 y se resuelven para f produce el factor de fricción para flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería circular:

Tubería circular, laminar: $$f = \frac{64\mu}{\rho D V_{prom}} = \frac{64}{\text{Re}} \tag{8-23}$$

Esta ecuación muestra que *en el flujo laminar, el factor de fricción sólo es función del número de Reynolds y es independiente de la rugosidad de la superficie de la tubería*.

En el análisis de los sistemas de tuberías, las pérdidas de presión comúnmente se expresan en términos de la *altura de la columna de fluido equivalente*, llamada **pérdida de carga** h_L. Note a partir de la estática de fluidos que $\Delta P = \rho g h$ y, por tanto, una diferencia de presión de ΔP corresponde a una altura de fluido de $h = \Delta P/\rho g$, la *pérdida de carga de tubería* se obtiene cuando se divide ΔP_L entre ρg para obtener:

Pérdida de carga: $$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f\frac{L}{D}\frac{V_{prom}^2}{2g} \tag{8-24}$$

La pérdida de carga h_L representa *la altura adicional que el fluido necesita para elevarse por medio de una bomba con la finalidad de superar las pérdidas por fricción en la tubería*. La pérdida de carga se produce por la viscosidad y se relaciona directamente con el esfuerzo de corte de la pared del tubo. Las ecuaciones 8-21 y 8-24 son válidas para flujo laminar y para flujo turbulento en tuberías circulares y no-circulares, pero la ecuación 8-23 sólo es válida para flujo laminar totalmente desarrollado en tuberías circulares.

Cuando ya se conoce la pérdida de presión (o la pérdida de carga), la potencia de bombeo necesaria *para superar la pérdida de carga* se determina a partir de:

$$\dot{W}_{\text{bomba}, L} = \dot{V}\Delta P_L = \dot{V}\rho g h_L = \dot{m} g h_L \tag{8-25}$$

donde $\dot{V}$ es el flujo volumétrico y $\dot{m}$ es la razón de flujo de masa.

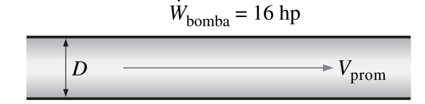
La velocidad promedio del flujo laminar en una tubería horizontal es, a partir de la ecuación 8-20:

Tubería horizontal: $$V_{prom} = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L} = \frac{(P_1 - P_2)D^2}{32\mu L} = \frac{\Delta P\, D^2}{32\mu L} \tag{8-26}$$

Entonces, el flujo volumétrico de flujo laminar en una tubería horizontal de diámetro D y longitud L se convierte en:

$$\dot{V} = V_{prom}A_c = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L}\pi R^2 = \frac{(P_1 - P_2)\pi D^4}{128\mu L} = \frac{\Delta P\, \pi D^4}{128\mu L} \tag{8-27}$$

Esta ecuación se conoce como **Ley de Poiseuille**; este flujo se llama *flujo Hagen-Poiseuille* en honor a los trabajos en la materia de G. Hagen (1797-1884) y J. Poiseuille (1799-1869). Note de la ecuación 8-27 que *para un flujo volumétrico especificado, la caída de presión y, por tanto, la potencia de bombeo necesaria, es proporcional a la longitud de la tubería y a la viscosidad del fluido, pero es inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio (o diámetro) de la tubería*. En consecuencia, la potencia de bombeo necesaria para un sistema de tuberías se puede reducir por un factor de 16 cuando se duplica el diámetro de la tubería (Fig. 8-14). Desde luego, los beneficios de la reducción en los costos de energía se deben sopesar contra el aumento en el precio de construcción debido al uso de una tubería con diámetro mayor.



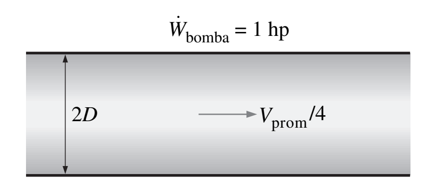


FIGURA 8-14
La potencia de bombeo necesaria para un sistema de tuberías de flujo laminar se puede reducir en un factor de 16 cuando se duplica el diámetro de la tubería.

La caída de presión ΔP es igual a la pérdida de presión ΔP_L en el caso de una tubería horizontal, pero éste no es el caso para tuberías inclinadas o tuberías con áreas transversales variables. Esto se puede demostrar con la ecuación de ener-

gía para flujo unidimensional incompresible estacionario en términos de cargas como (véase capítulo 5):

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba}, u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina}, e} + h_L \quad \textbf{(8-28)}$$

donde $h_{\text{bomba},u}$ es la carga de bomba útil entregada al fluido, $h_{\text{turbina},e}$ es la carga de turbina extraída del fluido, h_L es la pérdida de carga irreversible entre las secciones 1 y 2, V_1 y V_2 son las velocidades promedio en las secciones 1 y 2, respectivamente, y α_1 y α_2 son los *factores de corrección de energía cinética* en las secciones 1 y 2 (se puede demostrar que $\alpha = 2$ para flujo laminar totalmente desarrollado y alrededor de 1.05 para flujo turbulento totalmente desarrollado). La ecuación 8-28 se puede reordenar como:

$$P_1 - P_2 = \rho(\alpha_2 V_2^2 - \alpha_1 V_1^2)/2 + \rho g[(z_2 - z_1) + h_{\text{turbina}, e} - h_{\text{bomba}, u} + h_L] \quad \textbf{(8-29)}$$

En consecuencia, la caída de presión $\Delta P = P_1 - P_2$ y la pérdida de presión $\Delta P_L = \rho g h_L$ para un tramo de flujo dado son equivalentes si: 1) el tramo de flujo es horizontal de modo que no existen efectos hidrostáticos o de gravedad ($z_1 = z_2$); 2) el tramo de flujo no incluye algún dispositivo que produzca o consuma trabajo como una bomba o turbina, porque ellos cambian la presión del fluido ($h_{\text{bomba},u} = h_{\text{turbina},e} = 0$); 3) el área de sección transversal del tramo de flujo es constante y, por lo tanto, la velocidad de flujo promedio es constante ($V_1 = V_2$), y 4) los perfiles de velocidad en las secciones 1 y 2 tienen la misma forma ($\alpha_1 = \alpha_2$).

Tuberías inclinadas

Las relaciones para tuberías inclinadas se pueden obtener de manera similar a partir de un equilibrio de fuerzas en la dirección del flujo. La única fuerza adicional en este caso es el componente del peso del fluido en la dirección del flujo, cuya magnitud es:

$$W_x = W \operatorname{sen} \theta = \rho g V_{\text{elemento}} \operatorname{sen} \theta = \rho g(2\pi r\, dr\, dx) \operatorname{sen} \theta \quad \textbf{(8-30)}$$

donde θ es el ángulo entre la horizontal y la dirección del flujo (Fig. 8-15). El equilibrio de fuerzas en la ecuación 8-9 ahora se convierte en:

$$(2\pi r\, dr\, P)_x - (2\pi r\, dr\, P)_{x+dx} + (2\pi r\, dx\, \tau)_r - (2\pi r\, dx\, \tau)_{r+dr} - \rho g(2\pi r\, dr\, dx) \operatorname{sen} \theta = 0 \quad \textbf{(8-31)}$$

que resulta en la ecuación diferencial:

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{dP}{dx} + \rho g \operatorname{sen} \theta \quad \textbf{(8-32)}$$

Cuando se sigue el mismo procedimiento de solución, se puede demostrar que el perfil de velocidad es:

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{dP}{dx} + \rho g \operatorname{sen} \theta\right)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \textbf{(8-33)}$$

También se puede demostrar que las relaciones de *velocidad promedio* y de *flujo volumétrico* para flujo laminar por tuberías inclinadas son, respectivamente:

$$V_{\text{prom}} = \frac{(\Delta P - \rho g L \operatorname{sen} \theta) D^2}{32\mu L} \quad \text{y} \quad \dot{V} = \frac{(\Delta P - \rho g L \operatorname{sen} \theta)\pi D^4}{128\mu L} \quad \textbf{(8-34)}$$

que son idénticas a las relaciones correspondientes para tuberías horizontales, excepto que ΔP se sustituye con $\Delta P - \rho g L \operatorname{sen} \theta$. Por lo tanto, los resultados ya obtenidos para tuberías horizontales, también se pueden usar para tuberías inclinadas, dado que ΔP se sustituye por $\Delta P - \rho g L \operatorname{sen} \theta$ (Fig. 8-16). Note que $\theta > 0$ y por lo tanto sen $\theta > 0$ para flujo colina arriba, y $\theta < 0$ y por lo tanto sen $\theta < 0$ para flujo colina abajo.

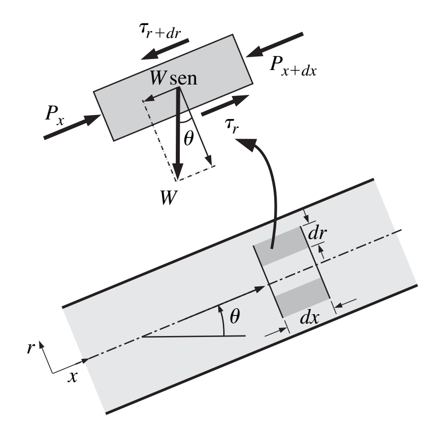


FIGURA 8-15
Diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencial de fluido con forma de anillo de radio r, grosor dr y longitud dx, orientado coaxialmente con una tubería inclinada en flujo laminar totalmente desarrollado.

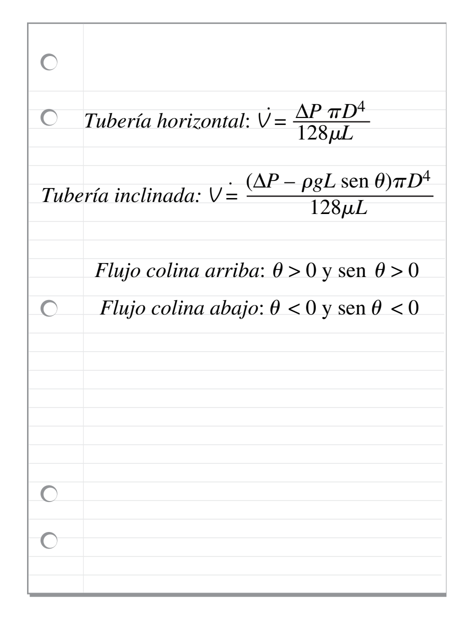


FIGURA 8-16
Las relaciones desarrolladas para flujo laminar totalmente desarrollado a través de tuberías horizontales, también se pueden usar para tuberías inclinadas para sustituir ΔP con $\Delta P - \rho g L \operatorname{sen} \theta$.

En tuberías inclinadas, el efecto que se combina de la diferencia de presión y de la gravedad dirigen el flujo. La gravedad ayuda al flujo colina abajo, pero se opone al flujo colina arriba. Por lo tanto, se necesitan aplicar diferencias de presión mayores para mantener una razón de flujo específica en el flujo colina arriba, aunque esto se vuelve importante sólo para líquidos, porque la densidad de los gases generalmente es baja. En el caso especial de *ausencia de flujo* ($\dot{V} = 0$), se tiene $\Delta P = \rho g L$ sen θ, que es lo que se obtendría a partir de la estática de fluidos (capítulo 3).

Flujo laminar en tuberías no-circulares

En la Tabla 8-1 se proporcionan relaciones del factor de fricción f para *flujo laminar totalmente desarrollado* en tuberías de varias secciones transversales. El número de Reynolds para flujo en estas tuberías se basa en el diámetro hidráulico $D_h = 4A_c/p$, donde A_c es el área de sección transversal de la tubería y p es su perímetro húmedo.

TABLA 8-1

Factor de fricción para *flujo laminar* totalmente desarrollado en tuberías de varias secciones transversales ($D_h = 4A_c/p$ y $\text{Re} = V_{\text{prom}}\, D_h/\nu$)

Geometría del tubo	a/b o θ°	Factor de fricción f
Círculo	—	64.00/Re
Rectángulo	a/b	
	1	56.92/Re
	2	62.20/Re
	3	68.36/Re
	4	72.92/Re
	6	78.80/Re
	8	82.32/Re
	∞	96.00/Re
Elipse	a/b	
	1	64.00/Re
	2	67.28/Re
	4	72.96/Re
	8	76.60/Re
	16	78.16/Re
Triángulo isósceles	θ	
	10°	50.80/Re
	30°	52.28/Re
	60°	53.32/Re
	90°	52.60/Re
	120°	50.96/Re

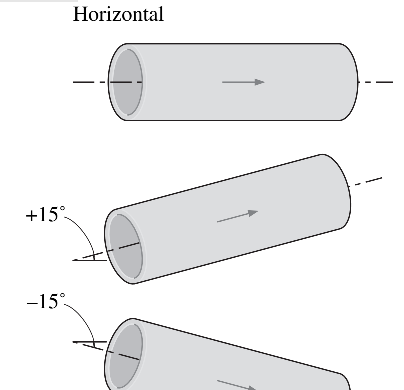


FIGURA 8-17
Esquema para el ejemplo 8-1.

EJEMPLO 8-1 Razones de flujo en tuberías horizontales e inclinadas

Petróleo a 20°C (ρ = 888 kg/m^3 y μ = 0.800 kg/m · s) fluye de manera estacionaria a través de una tubería de 5 cm de diámetro y 40 m de largo (Fig. 8-17). La presión a la entrada y la salida de la tubería se mide en 745 y 97 kPa, respectivamente. Determine la razón de flujo de petróleo a través de la tubería si se supone que la tubería está *a*) horizontal, *b*) inclinada 15° hacia arriba, *c*) incli-nada 15° hacia abajo. También verifique que el flujo a través de la tubería es laminar.

SOLUCIÓN Están dadas las lecturas de presión a la entrada y la salida de una tubería. Se deben determinar las razones de flujo para tres diferentes orientaciones y demostrar que el flujo es laminar.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Los efectos de entrada son despreciables y por lo mismo el flujo está totalmente desarrollado. **3** La tubería no incluye accesorios como codos, válvulas ni uniones. **4** El tramo de tubería no incluye dispositivos como bombas o turbinas.

Propiedades La densidad y la viscosidad dinámica del petróleo están dadas como ρ = 888 kg/m^3 y μ = 0.800 kg/m · s, respectivamente.

Análisis La caída de presión en la tubería y el área de sección transversal de la tubería son:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = 745 - 97 = 648 \text{ kPa}$$

$$A_c = \pi D^2/4 = \pi(0.05 \text{ m})^2/4 = 0.001963 \text{ m}^2$$

a) La razón de flujo para los tres casos se puede determinar a partir de la ecuación 8-34:

$$\dot{V} = \frac{(\Delta P - \rho g L \text{ sen } \theta)\pi D^4}{128\mu L}$$

donde θ es el ángulo que forma la tubería con la horizontal. Para el caso horizontal, θ = 0 y por lo tanto sen θ = 0. En consecuencia:

$$\dot{V}_{\text{horiz}} = \frac{\Delta P \quad D^4}{128 \quad L} = \frac{(648 \text{ kPa}) \quad (0.05 \text{ m})^4}{128(0.800 \text{ kg/m} \cdot \text{s})(40 \text{ m})}\left(\frac{1\,000 \text{ N/m}^2}{1 \text{ kPa}}\right)\left(\frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ N}}\right)$$

$$= \mathbf{0.00311 \text{ m}^3/\text{s}}$$

b) Para flujo colina arriba con una inclinación de 15°, se tiene θ = +15° y

$$\dot{V}_{\text{colina arriba}} = \frac{(\Delta P - \rho g L \text{ sen } \theta)\pi D^4}{128\mu L}$$

$$= \frac{[648\,000 \text{ Pa} - (888 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(40 \text{ m}) \text{sen } 15°]\pi(0.05 \text{ m})^4}{128(0.800 \text{ kg/m} \cdot \text{s})(40 \text{ m})}\left(\frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ Pa} \cdot \text{m}^2}\right)$$

$$= \mathbf{0.00267 \text{ m}^3/\text{s}}$$

c) Para flujo colina abajo con una inclinación de 15°, se tiene θ = –15° y

$$\dot{V}_{\text{colina abajo}} = \frac{(\Delta P - \rho g L \text{ sen } \theta)\pi D^4}{128\mu L}$$

$$= \frac{[648\,000 \text{ Pa} - (888 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(40 \text{ m}) \text{sen}(-15°)]\pi(0.05 \text{ m})^4}{128(0.800 \text{ kg/m} \cdot \text{s})(40 \text{ m})}\left(\frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ Pa} \cdot \text{m}^2}\right)$$

$$= \mathbf{0.00354 \text{ m}^3/\text{s}}$$

La razón de flujo es la más alta para el caso de flujo colina abajo, como se esperaba. La velocidad de fluido promedio y el número de Reynolds en este caso son:

$$V_{\text{prom}} = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{0.00354 \text{ m}^3/\text{s}}{0.001963 \text{ m}^2} = 1.80 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho V_{\text{prom}} D}{\mu} = \frac{(888 \text{ kg/m}^3)(1.80 \text{ m/s})(0.05 \text{ m})}{0.800 \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 100$$

que es mucho menor que 2 300. Por lo tanto, el flujo es *laminar* para los tres casos y el análisis es válido.

Discusión Note que al flujo lo conduce el efecto combinado de diferencia de presión y gravedad. Como se puede ver a partir de las razones de flujo calculadas, la gravedad se opone al flujo colina arriba, pero intensifica el flujo colina abajo. La gravedad no afecta la razón de flujo en el caso horizontal. El flujo colina abajo puede ocurrir inclusive en ausencia de una diferencia de presión aplicada. Para el caso de $P_1 = P_2 = 97$ kPa (es decir, no hay diferencia de presión aplicada), la presión a través de toda la tubería permanecería constante a 97 Pa y el fluido correría a través de la tubería a una razón de 0.00043 m^3/s bajo la influencia de la gravedad. La razón de flujo aumenta conforme el ángulo de inclinación de una tubería horizontal aumente en la dirección negativa y alcanzará su valor máximo cuando esté vertical.

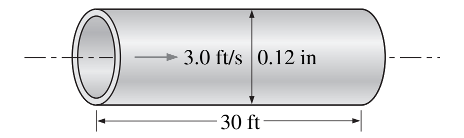


FIGURA 8-18
Esquema para el ejemplo 8-2.

EJEMPLO 8-2 Caída de presión y pérdida de carga en una tubería

Se tiene agua a 40°F ($\rho = 62.42$ lbm/ft^3 y $\mu = 1.038 \times 10^{-3}$ lbm/ft · s) que fluye de manera estacionaria a través de una tubería horizontal de 0.12 in (= 0.010 ft) de diámetro y 30 ft de largo con una velocidad promedio de 3.0 ft/s (Fig. 8-18). Determine *a*) la pérdida de carga, *b*) la caída de presión y *c*) la necesidad de potencia de bombeo para superar esta caída de presión.

SOLUCIÓN Está dada la velocidad de flujo promedio en una tubería. Se deben determinar la pérdida de carga, la caída de presión y la potencia de bombeo.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Los efectos de entrada son despreciables y por lo mismo el flujo está totalmente desarrollado. **3** La tubería no incluye accesorios como codos, válvulas ni uniones.

Propiedades La densidad y la viscosidad dinámica del agua están dadas como $\rho = 62.42$ lbm/ft^3 y $\mu = 1.038 \times 10^{-3}$ lbm/ft · s, respectivamente.

Análisis *a*) Primero es necesario determinar el régimen de flujo. El número de Reynolds es:

$$\text{Re} = \frac{\rho V_{\text{prom}} D}{\mu} = \frac{(62.42 \text{ lbm/ft}^3)(3 \text{ ft/s})(0.01 \text{ ft})}{1.038 \times 10^{-3} \text{ lbm/ft} \cdot \text{s}} = 1\,803$$

que es menor que 2 300. Por lo tanto, el flujo es laminar. Entonces el factor de fricción y la pérdida de carga se convierten en:

$$f = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64}{1\,803} = 0.0355$$

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V_{\text{prom}}^2}{2g} = 0.0355 \frac{30 \text{ ft}}{0.01 \text{ ft}} \frac{(3 \text{ ft/s})^2}{2(32.2 \text{ ft/s}^2)} = \mathbf{14.9 \text{ ft}}$$

b) Note que la tubería es horizontal y que su diámetro es constante, por lo que la caída de presión en la tubería se debe por completo a las pérdidas por fricción y es equivalente a la pérdida de presión:

$$\Delta P = \Delta P_L = f\frac{L}{D}\frac{V_{\text{prom}}^2}{2} = 0.0355\,\frac{30\text{ ft}}{0.01\text{ ft}}\frac{(62.42\text{ lbm/ft}^3)(3\text{ ft/s})^2}{2}\left(\frac{1\text{ lbf}}{32.2\text{ lbm}\cdot\text{ft/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{929\ lbf/ft^2 = 6.45\ psi}$$

c) El flujo volumétrico y la necesidad de potencia de bombeo son:

$$\dot{V} = V_{\text{prom}}A_c = V_{\text{prom}}(\pi D^2/4) = (3\text{ ft/s})[\ \ (0.01\text{ ft})^2/4] = 0.000236\text{ ft}^3/\text{s}$$

$$\dot{W}_{\text{bomba}} = \dot{V}\,\Delta P = (0.000236\text{ ft}^3/\text{s})(929\text{ lbf/ft}^2)\left(\frac{1\text{ W}}{0.737\text{ lbf}\cdot\text{ft/s}}\right) = \mathbf{0.30\ W}$$

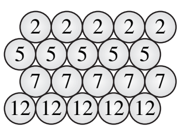
En consecuencia, se necesita suministrar potencia en cantidad de 0.30 W para superar las pérdidas por fricción en el flujo debido a viscosidad.

Discusión La elevación de presión que proporciona una bomba con frecuencia se menciona por el fabricante de bombas en unidades de carga (capítulo 14). Por lo tanto, la bomba en este flujo necesita proporcionar 14.9 ft de carga de agua para superar la pérdida de carga irreversible.

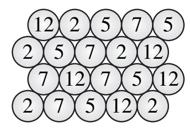
8-5 ▪ FLUJO TURBULENTO EN TUBERÍAS

La mayoría de los flujos que se encuentran en la práctica de ingeniería son turbulentos, por esta razón es importante entender cómo afecta la turbulencia el esfuerzo de corte de pared. Sin embargo, el flujo turbulento es un mecanismo complejo dominado por fluctuaciones, y pese a las innumerables investigaciones realizadas en esta área, la teoría del flujo turbulento aún no se conoce totalmente. En consecuencia, se debe apoyar en experimentos y en correlaciones empíricas o semiempíricas ideadas para diferentes situaciones.

El flujo turbulento se caracteriza por fluctuaciones aleatorias y rápidas de regiones giratorias de fluido, llamadas **remolinos**, a través del flujo. Dichas fluctuaciones proporcionan un mecanismo adicional para transferir movimiento y energía. En flujo laminar, las partículas fluyen en orden a lo largo de trayectorias, y la cantidad de movimiento y la energía se transfieren a través de líneas de corriente mediante difusión molecular. En el flujo turbulento, los remolinos giratorios transportan masa, cantidad de movimiento y energía a otras regiones del flujo con mayor rapidez que la difusión molecular, y aumentan enormemente la masa, la cantidad de movimiento y la transferencia de calor. Como resultado, el flujo turbulento está relacionado con valores mucho más altos de coeficientes de fricción, transferencia de calor y transferencia de masa (Fig. 8-19).



a) Antes de la turbulencia



b) Después de la turbulencia

FIGURA 8-19
La intensa mezcla en el flujo turbulento lleva las partículas de fluido a diferentes cantidades de movimiento al contacto cercano y, por lo tanto, mejora la transferencia de la cantidad de movimiento.

Aun cuando el flujo promedio sea estacionario, el movimiento en remolino en flujo turbulento provoca fluctuaciones importantes en los valores de velocidad, temperatura, presión e incluso densidad (en flujo compresible). La figura 8-20 muestra la variación de la componente de velocidad instantánea u con el tiempo en una posición especificada, cómo se puede medir con una sonda de anemómetro de hilo caliente u otro dispositivo sensible. Se observa que los valores instantáneos de la velocidad fluctúan en torno a un valor promedio, lo que sugiere que la velocidad se puede expresar como la suma de un *valor promedio* $\overline{u}$ y un *componente fluctuante* u':

$$u = \overline{u} + u' \tag{8-35}$$

Éste también es el caso para otras propiedades como el componente de velocidad v en la dirección y y por lo tanto $v = \overline{v} + v'$, $P = \overline{P} + P'$ y $T = \overline{T} + T'$. El valor promedio de una propiedad en alguna posición se determina cuando se promedia sobre un intervalo que sea suficientemente largo, de modo que el valor promediado en tiempo se estabilice en una constante. En consecuencia, la fluctuación promediada en tiempo es cero; por ejemplo, $\overline{u'} = 0$. La magnitud de $\overline{u}$

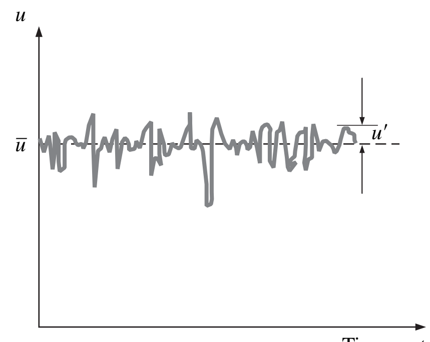
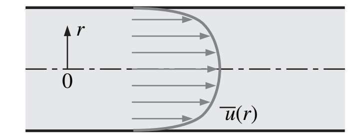


FIGURA 8-20
Fluctuaciones del componente de velocidad u con el tiempo en una posición especificada en flujo turbulento.

usualmente es apenas un pequeño porcentaje de $\overline{u}$, pero las altas frecuencias de remolinos (en el orden de mil por segundo) los hace muy efectivos para transportar cantidad de movimiento, energía térmica y masa. En flujo turbulento *estacionario* promediado en el tiempo, los valores promedio de las propiedades (indicadas por una barra superior) son independientes del tiempo. Las fluctuaciones caóticas de las partículas de fluido tienen un papel dominante en la caída de presión, y estos movimientos aleatorios se deben considerar en los análisis junto con la velocidad promedio.

Quizá el primer pensamiento que viene a la mente es determinar el esfuerzo de corte de manera análoga al flujo laminar, a partir de $\tau = -\mu \, d\overline{u}dr$, donde $\overline{u}(r)$ es el perfil de velocidad promedio para flujo turbulento. Pero los estudios experimentales muestran que éste no es el caso, y que el esfuerzo de corte es mayor debido a las fluctuaciones turbulentas. Por lo tanto, es conveniente pensar en el esfuerzo de corte turbulento consistente de dos partes: el *componente laminar*, que explica la fricción entre capas en la dirección del flujo (que se expresa como $\tau_{\text{lam}} = -\mu \, d\overline{u}dr$) y el *componente turbulento*, que explica la fricción entre las partículas de fluido fluctuantes y el cuerpo de fluido (que se denota como τ_{turb} y se relaciona con los componentes de fluctuación de velocidad). Entonces, el *esfuerzo de corte total* en flujo turbulento se puede expresar como:

$$\tau_{\text{total}} = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{turb}} \tag{8-36}$$



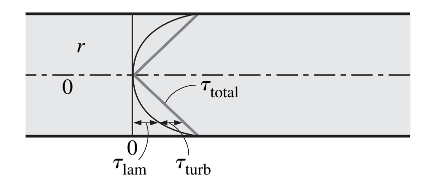


FIGURA 8-21
Perfil de velocidad y variación del esfuerzo de corte con distancia radial para flujo turbulento en una tubería.

En la figura 8-21 se proporcionan el perfil de velocidad promedio típico y las magnitudes relativas de los componentes laminar y turbulento del esfuerzo de corte para flujo turbulento en una tubería. Note que, aunque el perfil de velocidad es aproximadamente parabólico en el flujo laminar, se vuelve más plano o "más lleno" en el flujo turbulento, con una caída brusca cerca de la pared de la tubería. Lo de "más lleno" aumenta con el número de Reynolds, y el perfil de velocidad se vuelve más uniforme y permite la aproximación de perfil de velocidad uniforme comúnmente utilizado para flujo turbulento totalmente desarrollado en tubería. Sin embargo, el lector debe tener en la mente que la velocidad del flujo en la pared de una tubería en reposo siempre es cero (condición de no-deslizamiento).

Esfuerzo de corte turbulento

Considere flujo turbulento en una tubería horizontal, y el movimiento ascendente en remolino de las partículas de fluido en una capa de velocidad inferior hacia una capa adyacente de velocidad mayor, a través de un área diferencial dA como resultado de la fluctuación de velocidad v', como se muestra en la figura 8-22. La razón de flujo másico de las partículas de fluido que se elevan a través de dA es $\rho v' dA$, y su efecto neto sobre la capa sobre dA es una reducción en su velocidad promedio debido a transferencia de cantidad de movimiento a las partículas de fluido con velocidades promedio más bajas. Esta transferencia de cantidad de movimiento provoca que la velocidad horizontal de las partículas de fluido aumente en u', y por tanto su cantidad de movimiento en la dirección horizontal aumenta a una razón de $(\rho v' dA)u'$, que debe ser igual a la disminución en la cantidad de movimiento de la capa de fluido superior. Cuando se nota que la fuerza en una dirección dada es igual a la razón de cambio de cantidad de movimiento en dicha dirección, la fuerza horizontal que actúa sobre un elemento de fluido sobre dA debida al paso de partículas de fluido a través de dA es $\delta F = (\rho v' dA)(-u') = -\rho u'v' dA$. En consecuencia, la fuerza de corte por unidad de área debida al movimiento en remolino de las partículas de fluido $\delta F/dA = -\rho u'v'$ puede verse como el esfuerzo de corte turbulento instantáneo. Entonces el **esfuerzo de corte turbulento** se puede expresar como:

$$\tau_{\text{turb}} = -\rho \overline{u'v'} \tag{8-37}$$

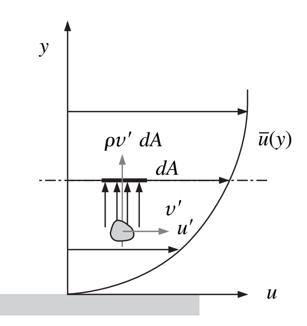


FIGURA 8-22
Partícula de fluido que se mueve hacia arriba a través de un área diferencial dA como resultado de la fluctuación de velocidad v'.

donde $\overline{u'v'}$ es el producto de las fluctuaciones de los componentes de velocidad u' y v' promediados en el tiempo. Note que $\overline{u'v'} \neq 0$ aun cuando $\overline{u'} = 0$ y

$\overline{v'} = 0$ (y por tanto $\overline{u'}\,\overline{v'} = 0$), y los resultados experimentales muestran que $\overline{u'v'}$ usualmente es una cantidad negativa. A los términos como $-\rho\overline{u'v'}$ o $-\rho\overline{u'^2}$ se les llama **esfuerzos de Reynolds** o **esfuerzos turbulentos**.

Se han desarrollado muchas formulaciones semiempíricas que modelan los esfuerzos de Reynolds en términos de los gradientes de velocidad promedio para que el sistema de las ecuaciones de movimiento sea completo desde el punto de vista matemático. Estos modelos se llaman **modelos de turbulencia** y se describen más detalladamente en el capítulo 15.

El movimiento en remolino aleatorio de grupos de partículas recuerda el movimiento aleatorio de las moléculas en un gas: son semejantes al choque mutuo después de recorrer cierta distancia y el intercambio de cantidad de movimiento en el proceso. Por lo tanto, el transporte de cantidad de movimiento por los remolinos en un flujo turbulento es análogo a la difusión de cantidad de movimiento molecular. En muchos de los modelos turbulentos más simples, el esfuerzo de corte turbulento se expresa de manera análoga, como lo sugirió en 1877, el matemático francés Joseph Boussinesq (1842-1929), como:

$$\tau_{\text{turb}} = -\rho\overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \qquad \textbf{(8-38)}$$

donde μ_t es la **viscosidad de remolino** o **viscosidad turbulenta**, que explica el transporte de cantidad de movimiento mediante remolinos turbulentos. Entonces el esfuerzo de corte total se puede expresar como:

$$\tau_{\text{total}} = (\mu + \mu_t)\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \rho(\nu + \nu_t)\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \qquad \textbf{(8-39)}$$

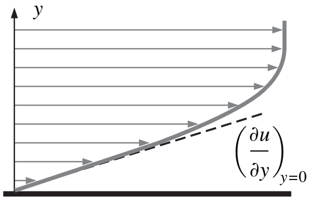
donde $\nu_t = \mu_t/\rho$ es la **viscosidad cinemática de remolino** o **viscosidad cinemática turbulenta** (también llamada *difusividad de remolino de la cantidad de movimiento*). El concepto de viscosidad de remolino es muy interesante, pero tiene uso práctico a menos que se pueda determinar su valor. En otras palabras, la viscosidad de remolino se debe modelar como función de las variables de flujo promedio; a esto se le llama *cierre de viscosidad de remolino*. Por ejemplo, a principios del siglo XX, el ingeniero alemán L. Prandtl introdujo el concepto de **longitud de mezcla** l_m, que se relaciona con el tamaño promedio de los remolinos que son los principales causantes de la mezcla, y expresó el esfuerzo de corte turbulento como:

$$\tau_{\text{turb}} = \mu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)^2 \qquad \textbf{(8-40)}$$

Pero este concepto también es de uso limitado pues l_m no es una constante para un flujo dado (en la cercanía de la pared, por ejemplo, l_m es aproximadamente proporcional a la distancia desde la pared) y su determinación no es sencilla. El cierre matemático final se obtiene sólo cuando l_m se escribe como función de las variables del flujo promedio, la distancia desde la pared, etcétera.

El movimiento en remolino, y por tanto las difusividades de remolino, son mucho más grandes que sus contrapartes moleculares en la región central de una capa límite turbulenta. El movimiento en remolino pierde su intensidad cerca de la pared y disminuye en la pared debido a la condición de no-deslizamiento (u' y v' son idénticamente cero en una pared en reposo). Por lo tanto, el perfil de velocidad varía muy lentamente en la región central de una capa límite turbulenta, pero muy escarpado en la delgada capa adyacente a la pared, lo que resulta en considerables gradientes de velocidad en la superficie de la pared. De modo que no debe sorprender que el esfuerzo de corte de pared sea mucho mayor en el flujo turbulento que en el flujo laminar (Fig. 8-23).

Note que la difusividad molecular de la cantidad de movimiento ν (así como μ) es una propiedad del fluido y su valor se menciona en manuales de fluidos. Sin embargo, la difusividad de remolino ν_t (así como μ_t) *no* es una propiedad



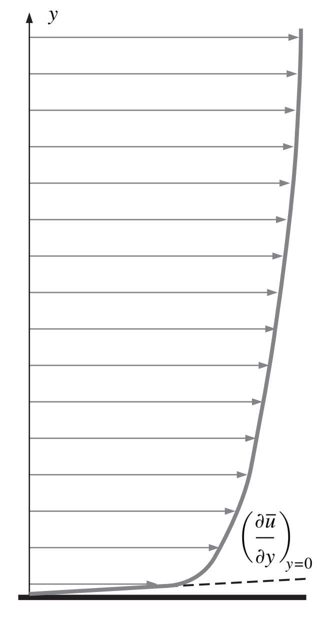
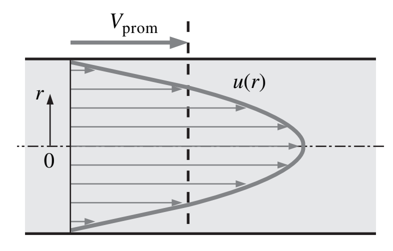
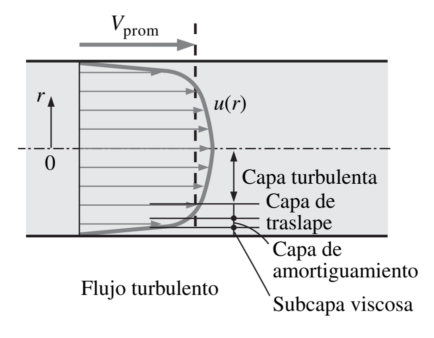


FIGURA 8-23
Los gradientes de velocidad en la pared, y por tanto el esfuerzo de corte de pared, son mayores para flujo turbulento que para flujo laminar, aun cuando la capa límite turbulenta sea más gruesa que la laminar para el mismo valor de velocidad de flujo libre.



Flujo laminar



Flujo turbulento

FIGURA 8-24
El perfil de velocidad en flujo en tubería totalmente desarrollado es parabólico en el flujo laminar, pero es mucho más plano en el flujo turbulento.

del fluido y su valor depende de las condiciones del flujo. La difusividad de remolino ν_t disminuye hacia la pared, y se vuelve cero en la pared. Su valor varía desde cero en la pared hasta varios miles de veces el valor de la difusividad molecular en la región central.

Perfil de velocidad turbulento

A diferencia del flujo laminar, las expresiones para el perfil de velocidad en un flujo turbulento se basan en el análisis y en las mediciones, por lo tanto son de naturaleza casi empírica, y tienen constantes que se determinan a partir de datos experimentales. Considere flujo turbulento totalmente desarrollado en una tubería, y sea u la velocidad promediada en el tiempo en la dirección axial (y elimine la barra superior de $\bar{u}$ por simplicidad).

En la figura 8-24 se indican perfiles de velocidad típicos para flujos laminar y turbulento totalmente desarrollados. Note que el perfil de velocidad es parabólico en el flujo laminar, pero es mucho más plano en el flujo turbulento, con una caída violenta cerca de la pared de la tubería. El flujo turbulento a lo largo de una pared se puede considerar con cuatro regiones, que se caracterizan por la distancia desde la pared. La delgada capa junto a la pared donde los efectos viscosos son dominantes es la subcapa **viscosa** (o **laminar** o **lineal** o **de pared**). El perfil de velocidad en esta capa es casi *lineal*, y el flujo es de líneas de corriente aproximadamente paralelas como en el flujo laminar. Junto a la subcapa viscosa está la **capa de amortiguamiento**, en la que los efectos turbulentos se vuelven significativos, pero el flujo todavía es dominado por los efectos viscosos. Sobre la capa de amortiguamiento está la **capa de traslape** (o **transición**), también llamada **subcapa inercial**, en la que los efectos turbulentos son mucho más significativos, pero todavía sin dominar. Sobre esta capa se encuentra la **capa exterior** (o **turbulenta**) en la parte restante del flujo en la que los efectos turbulentos dominan sobre los efectos de difusión molecular (viscosos).

Las características del flujo son bastante distintas en diferentes regiones, y por lo tanto es difícil llegar a una relación analítica para el perfil de velocidad para todo el flujo, como se hizo para el flujo laminar. La mejor solución en el caso turbulento puede ser identificar las variables clave y las formas funcionales con el uso de análisis dimensional, y luego usar datos experimentales para determinar los valores numéricos de cualquier constante.

El espesor de la subcapa viscosa es muy pequeño (usualmente mucho menor que 1 por ciento del diámetro de la tubería), pero esta delgada capa junto a la pared tiene un papel dominante en las características del flujo debido al considerable gradiente de velocidad que implica. La pared amortigua cualquier movimiento en remolino y, por tanto, el flujo en esta capa es esencialmente laminar y el esfuerzo de corte consiste de esfuerzo de corte laminar que es proporcional a la viscosidad del fluido. Si se consideran los cambios de velocidad desde cero hasta casi el valor de la región central a través de una capa que a veces no es más gruesa que un pelo (casi como una función escalonada), se esperaría que el perfil de velocidad en esta capa sea casi lineal, y los experimentos confirman esto. Entonces el gradiente de velocidad en la subcapa viscosa permanece casi constante en $du/dy = u/y$, y el esfuerzo de corte de pared se puede expresar como:

$$\tau_w = \mu \frac{u}{y} = \rho\nu \frac{u}{y} \qquad \text{o} \qquad \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\nu u}{y} \tag{8-41}$$

donde y es la distancia desde la pared (note que $y = R - r$ para una tubería circular). La cantidad τ_w/ρ con frecuencia se encuentra en el análisis de perfiles de velocidad turbulentos. La raíz cuadrada de τ_w/ρ tiene dimensiones de velocidad, por ello es conveniente visualizarla como una velocidad ficticia llamada **velocidad de fricción** que es expresa como $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$. Cuando se sustituye la ecuación 8-41, el perfil de velocidad en la subcapa viscosa se puede expresar en forma adimensional como:

Subcapa viscosa: $$\frac{u}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu} \quad \textbf{(8-42)}$$

Esta ecuación se conoce como **Ley de la pared** y se correlaciona satisfactoriamente con los datos experimentales para superficies lisas para $0 \leq yu_*/\nu \leq 5$. Por lo tanto, el espesor de la subcapa viscosa es aproximadamente:

Espesor de la subcapa viscosa: $$y = \delta_{\text{subcapa}} = \frac{5\nu}{u_*} = \frac{25\nu}{u_\delta} \quad \textbf{(8-43)}$$

donde u_δ es la velocidad del flujo en el borde de la subcapa viscosa, que está estrechamente relacionada con la velocidad promedio en una tubería. Así, se llega a la conclusion que *el espesor de la subcapa viscosa es proporcional a la viscosidad cinemática e inversamente proporcional a la velocidad de flujo promedio*. En otras palabras, la subcapa viscosa se disminuye y se vuelve más fina conforme la velocidad (por tanto el número de Reynolds) aumenta. En consecuencia, el perfil de velocidad se vuelve más plano y por lo mismo la distribución de velocidad, más uniforme a números de Reynolds muy elevados.

La cantidad ν/u_* tiene dimensiones de longitud y se llama **longitud viscosa**; se usa para eliminar la dimensión de distancia y desde la superficie. En análisis de capa límite es conveniente trabajar con distancia y velocidad adimensionalizadas, que se definen como:

Variables adimensionalizadas: $$y^+ = \frac{yu_*}{\nu} \quad \text{y} \quad u^+ = \frac{u}{u_*} \quad \textbf{(8-44)}$$

Entonces la Ley de la pared (Ec. 8-42) se vuelve simplemente:

Ley de la pared normalizada: $$u^+ = y^+ \quad \textbf{(8-45)}$$

Note que la velocidad de fricción u_* se usa para eliminar las dimensiones tanto de y como de u, y y^+ recuerda la expresión del número de Reynolds.

En la capa de traslape, los datos experimentales para la velocidad se forman en línea recta cuando se grafican contra el logaritmo de la distancia desde la pared. El análisis dimensional indica, y los experimentos confirman, que la velocidad en la capa de traslape es proporcional al logaritmo de la distancia, y el perfil de velocidad se puede expresar como:

Ley logarítmica: $$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_*}{\nu} + B \quad \textbf{(8-46)}$$

donde κ y B son constantes cuyos valores determinados experimentalmente son aproximadamente 0.40 y 5.0, respectivamente. La ecuación 8-46 se conoce como **Ley logarítmica**. Cuando se sustituyen los valores de las constantes, el perfil de velocidad se determina como:

Capa de traslape: $$\frac{u}{u_*} = 2.5 \ln \frac{yu_*}{\nu} + 5.0 \quad \text{o} \quad u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.0 \quad \textbf{(8-47)}$$

Es evidente que la Ley logarítmica en la ecuación 8-47 representa satisfactoriamente los datos experimentales para toda la región del fluido excepto para las regiones muy cercanas a la pared y próximas del centro de la tubería, como se muestra en la figura 8-25, y por tanto se considera como un *perfil de velocidad universal* para flujo turbulento en tuberías o sobre superficies. Note en la figura que el perfil de velocidad de la Ley logarítmica es bastante preciso para $y^+ > 30$, pero ningún perfil de velocidad es preciso en la capa de amortiguamiento; es decir, la región $5 < y^+ < 30$. Además, en la figura, la subcapa viscosa parece mayor de lo que es, porque se usó una escala logarítmica para la distancia desde la pared.

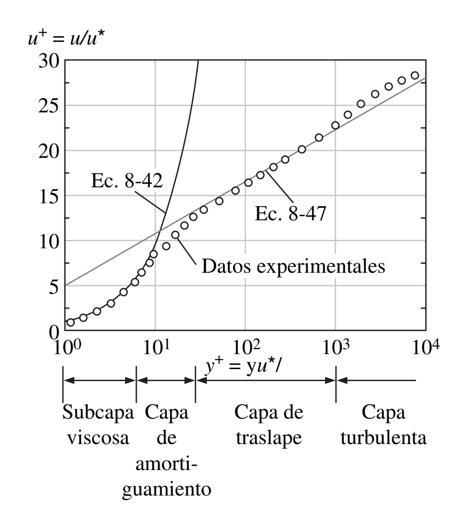
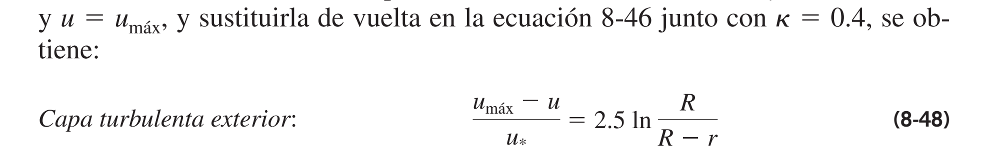


FIGURA 8-25
Comparación de los perfiles de velocidad de la Ley de la pared y de la Ley logarítmica con datos experimentales para flujo turbulento totalmente desarrollado en una tubería.

Se puede obtener una buena aproximación para la capa turbulenta exterior del flujo en tubería cuando se evalúa la constante B en la ecuación 8-46, a partir del requisito de que la velocidad máxima en una tubería ocurre en la línea central, donde $r = 0$. Al resolver para B la ecuación 8-46, al hacer $y = R - r = R$ y $u = u_{máx}$, y sustituirla de vuelta en la ecuación 8-46 junto con $\kappa = 0.4$, se obtiene:



Capa turbulenta exterior: $$\frac{u_{máx} - u}{u_*} = 2.5 \ln \frac{R}{R - r} \qquad \textbf{(8-48)}$$

La desviación de la velocidad del valor de la línea central $u_{máx} - u$ se llama **defecto de velocidad**, y la ecuación 8-48 se llama **Ley de defecto de velocidad**. Esta relación muestra que el perfil de velocidad normalizado en la región central del flujo turbulento en una tubería depende de la distancia desde la línea central y es independiente de la viscosidad del fluido. Esto no es sorprendente porque el movimiento en remolino domina en esta región, y el efecto de la viscosidad del fluido es despreciable.

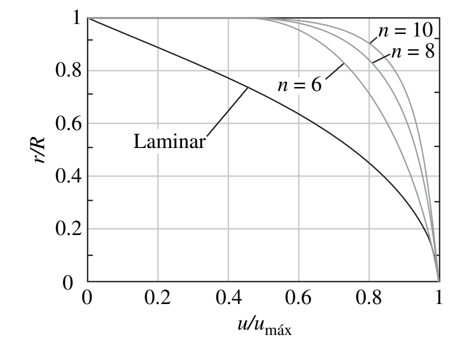


FIGURA 8-26
Perfiles de velocidad de ley de potencia para flujo turbulento totalmente desarrollado en una tubería para diferentes exponentes y su comparación con el perfil de velocidad laminar.

En un flujo turbulento en tubería existen otros perfiles de velocidad empíricos. Entre ellos, el más simple y mejor conocido es el **perfil de velocidad de ley de potencia** que se expresa como:

Perfil de velocidad de ley de potencia: $$\frac{u}{u_{máx}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} \quad \text{o} \quad \frac{u}{u_{máx}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \qquad \textbf{(8-49)}$$

donde el exponente n es una constante cuyo valor depende del número de Reynolds. El valor de n se incrementa con los números de Reynolds que van en aumento. El valor $n = 7$ generalmente aproxima muchos flujos en la práctica, lo que da lugar al término del *perfil de velocidad de ley de potencia de un séptimo*.

En la figura 8-26 se muestran varios perfiles de velocidad de ley de potencia para $n = 6$, 8 y 10 junto con el perfil de velocidad para flujo laminar totalmente desarrollado como comparación. Note que el perfil de velocidad turbulento es más "lleno" que el laminar, y se vuelve más plano conforme n aumenta (y por tanto el número de Reynolds). Note también que el perfil de ley de potencia no se puede usar para calcular esfuerzo de corte de pared, porque ahí proporciona un gradiente de velocidad infinito, y fracasa para dar pendiente cero en la línea central. Pero, estas regiones de discrepancia constituyen una pequeña porción de flujo, y el perfil de ley de potencia, excepto estas regiones, proporciona resultados muy precisos para flujo turbulento en una tubería.

No obstante, el pequeño espesor de la subcapa viscosa (usualmente mucho menor que 1 por ciento del diámetro de la tubería), las características del flujo en esta capa son muy importantes, porque establecen el régimen para el flujo en el resto de la tubería. Cualquier irregularidad o aspereza (rugosidad) sobre la superficie perturba esta capa y afecta el flujo. Por lo tanto, a diferencia del flujo laminar, la fricción en el flujo turbulento es una función fuerte de la rugosidad de la superficie.

Se debe recordar que rugosidad es un concepto relativo y tiene significado cuando su altura ε es comparable con el espesor de la subcapa laminar (que es una función del número de Reynolds). Todos los materiales parecen "rugosos" vistos con un microscopio con amplificación suficiente. En la mecánica de fluidos una superficie se caracteriza como rugosa cuando los picos de rugosidad se proyectan de la subcapa laminar. Se dice que una superficie es lisa cuando la subcapa sumerge los elementos rugosos. Las superficies de vidrio y plástico, generalmente se consideran como hidrodinámicamente lisos.

El diagrama de Moody

El factor de fricción de flujo en tubería turbulento totalmente desarrollado depende del número de Reynolds y la **rugosidad relativa** ε/D, que es la razón de la al-

tura media de rugosidad de la tubería al diámetro de la tubería. La forma funcional de esta situación no se puede obtener a partir de un análisis teórico, y todos los resultados disponibles se obtienen a partir de experimentos cuidadosos que usan superficies que se hacen rugosas de manera artificial (usualmente cuando se pegan granos de arena de tamaño conocido sobre las superficies interiores de las tuberías). La mayoría de estos experimentos los realizó en 1933 J. Nikuradse, estudiante de Prandtl, a los que siguieron trabajos de otros. El factor de fricción se calculó a partir de las mediciones de la razón de flujo y la caída de presión.

Los resultados experimentales se presentan en formas tabular, gráfica y funcional obtenidos de datos experimentales de ajuste de curvas. En 1939, Cyril F. Colebrook (1910-1997) combinó los datos disponibles para flujo en transición y turbulento en tuberías lisas y rugosas en la siguiente relación implícita conocida como **ecuación de Colebrook**:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad \text{(flujo turbulento)} \tag{8-50}$$

Note que el logaritmo en la ecuación 8-50 es en base 10 y no es un logaritmo natural. En 1942, el ingeniero estadounidense Hunter Rouse (1906-1996) verificó la ecuación de Colebrook y produjo una expresión gráfica de f como función de Re y el producto $\text{Re}\sqrt{f}$. También presentó la relación de flujo laminar y una tabla de rugosidades de tuberías comerciales. Dos años después, Lewis F. Moody (1880-1953) redibujó el diagrama de Rouse en la forma como se usa comúnmente en la actualidad. El ahora famoso **diagrama de Moody** se proporciona en el Apéndice como figura A-12. Representa el factor de fricción de Darcy para flujo en tubería como función del número de Reynolds y ε/D sobre un amplio rango. Quizá es uno de los diagramas de uso más generalizado aceptados y utilizados en ingeniería. Aunque se concibió para tuberías circulares, también se puede usar para tuberías no-circulares cuando se sustituye el diámetro por el diámetro hidráulico.

Las tuberías disponibles comercialmente difieren de las usadas en los experimentos, en donde la rugosidad de las tuberías en el mercado no es uniforme y es difícil de ofrecer una descripción precisa de la misma. En la Tabla 8-2 se indican valores de rugosidad equivalentes para algunas tuberías comerciales, así como en el diagrama de Moody. Pero, se debe recordar que dichos valores son para tuberías nuevas, y que la rugosidad relativa de las tuberías puede aumentar con el uso, como resultado de la corrosión, la acumulación de sarro y la precipitación. Como resultado, el factor de fricción puede aumentar por un factor de 5 a 10. Las condiciones de operación reales se deben considerar en el diseño de sistemas de tuberías. Además, el diagrama de Moody y su equivalencia, ecuación de Colebrook, presentan varias incertidumbres (tamaño de rugosidad, error experimental, ajuste de curva de los datos, etcétera) y, por tanto, los resultados obtenidos no se deben tratar como "exactos". Usualmente se consideran precisos a $\pm$15 por ciento sobre todo el rango de la figura.

La ecuación de Colebrook está implícita en f, y por lo mismo determinar el factor de fricción implica varias iteraciones a menos que se use un paquete que permita resolver las ecuaciones como el paquete computacional EES. En 1983, S. E. Haaland proporcionó una relación explícita aproximada para f como:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong -1.8\log\left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7}\right)^{1.11}\right] \tag{8-51}$$

Los resultados obtenidos a partir de esta relación se encuentran dentro de 2 por ciento de los obtenidos a partir de la ecuación de Colebrook. Si se desean resultados más precisos, se puede aplicar la ecuación 8-51, como una adecuada *primera aproximación* en el método numérico de Newton de resolución de la ecuación no-lineal cuando se use una calculadora programable o una hoja de cálculo para encontrar f de la ecuación 8-50.

TABLA 8-2

Valores de rugosidad equivalentes para tuberías comerciales nuevas*

Material	Rugosidad ε, ft	Rugosidad ε, mm
Vidrio, plástico	0 (liso)	
Concreto	0.003-0.03	0.9-9
Duela de madera	0.0016	0.5
Hule, alisado	0.000033	0.01
Tubería de cobre o latón	0.000005	0.0015
Hierro fundido	0.00085	0.26
Hierro galvanizado	0.0005	0.15
Hierro forjado	0.00015	0.046
Acero inoxidable	0.000007	0.002
Acero comercial	0.00015	0.045

* La incertidumbre en estos valores puede ser hasta $\pm$60 por ciento..

Rugosidad relativa, ε/D	Factor de fricción, f
0.0*	0.0119
0.00001	0.0119
0.0001	0.0134
0.0005	0.0172
0.001	0.0199
0.005	0.0305
0.01	0.0380
0.05	0.0716

* Superficie lisa. Todos los valores son para Re = 10^6 y se calculan a partir de la ecuación de Colebrook.

FIGURA 8-27
Para una tubería lisa el factor de fricción es mínimo, pero aumenta con la rugosidad.

A partir del diagrama de Moody se pueden realizar las siguientes observaciones:

- Para flujo laminar, el factor de fricción disminuye con números de Reynolds crecientes, y es independiente de la rugosidad de la superficie.
- El factor de fricción es mínimo para una tubería lisa (pero no es cero debido a la condición de no-deslizamiento) y aumenta con la rugosidad (Fig. 8-27). En este caso ($\varepsilon = 0$), la ecuación de Colebrook se reduce a la **ecuación de Prandtl**, que se expresa como $1/\sqrt{f} = 2.0 \log(\text{Re}\sqrt{f}) - 0.8$.
- La región de transición del régimen laminar al turbulento (2 300 < Re < 4 000) se indica mediante el área sombreada en el diagrama de Moody (Figs. 8-28 y A-12). El flujo en esta región puede ser laminar o turbulento, depende de las perturbaciones del flujo, o puede alternar entre laminar y turbulento, y por tanto el factor de fricción también puede alternar entre los valores para flujo laminar y turbulento. Los datos en este rango son los menos confiables. A pequeñas rugosidades relativas, el factor de fricción aumenta en la región de transición y se aproxima al valor para tuberías lisas.
- A números de Reynolds muy grandes (a la derecha de la línea punteada en el diagrama) las curvas del factor de fricción que corresponden a curvas de rugosidad relativa especificada son casi horizontales, y los factores de fricción son independientes del número de Reynolds (Fig. 8-28). El flujo en esta región se llama *flujo turbulento totalmente rugoso* o sólo *flujo totalmente rugoso* debido a que el espesor de la subcapa viscosa disminuye con números de Reynolds crecientes, y se vuelve tan delgada que es despreciablemente pequeña comparada con la altura de rugosidad de la superficie. En este caso, los efectos viscosos se producen en el flujo principal esencialmente por los elementos de rugosidad sobresalientes, y la aportación de la subcapa laminar es despreciable. La ecuación de Colebrook en la zona *totalmente áspera* (Re $\rightarrow \infty$) se reduce a la **ecuación de von Kármán** expresada como $1/\sqrt{f} = -2.0 \log[(\varepsilon/D)/3.7]$, que es explícita en f. Algunos autores llaman a esta zona de *flujo totalamente turbulento*, pero esto es confuso porque el flujo a la izquierda de la línea punteada en la figura 8-28 también es totalmente turbulento.

En los cálculos se debe estar seguro de que se utiliza el diámetro interno real de la tubería, ya que puede ser diferente del diámetro nominal. Por ejemplo, el diámetro interno de una tubería de acero cuyo diámetro nominal es 1 in es de 1.049 in (Tabla 8-3).

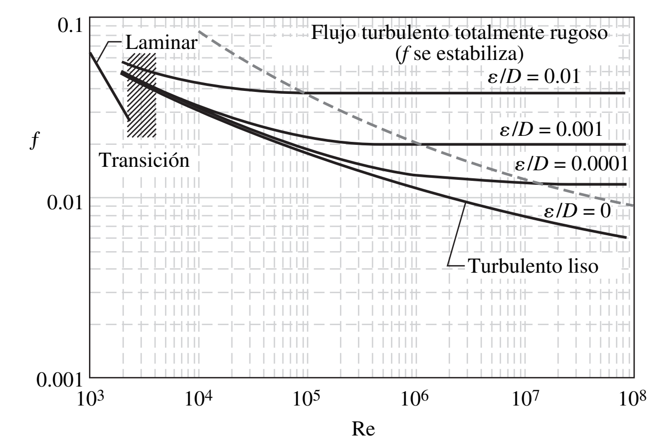


FIGURA 8-28
A números de Reynolds muy grandes, las curvas del factor de fricción en el diagrama de Moody son casi horizontales, y por lo tanto los factores de fricción son independientes del número de Reynolds.

Tipos de problemas de flujo de fluidos

En el diseño y análisis de sistemas de tubería que implican utilizar el diagrama de Moody (o la ecuación de Colebrook), usualmente surgen tres tipos de problemas (se supone que, en todos los casos, se especifican el fluido y la rugosidad de la tubería) (Fig. 8-29):

1. Determinación de la **caída de presión** (o pérdida de carga): cuando la longitud y el diámetro de la tubería se proporcionan para una razón de flujo (o velocidad) específica.
2. Determinación de la **razón de flujo**: cuando la longitud y el diámetro de la tubería se proporcionan para una caída de presión (o pérdida de carga) específica.
3. Determinación del **diámetro de la tubería**: cuando la longitud de la tubería y la razón de flujo se proporcionan para una caída de presión (o pérdida de carga) específica.

Los problemas del *primer tipo* son directos y se pueden resolver por medio del diagrama de Moody. Los problemas del *segundo tipo* y del *tercer tipo* usualmente se presentan en el diseño de ingeniería (en la selección del diámetro de la tubería, por ejemplo, que minimice la suma de los costos de construcción y bombeo), pero el uso del diagrama de Moody con estos problemas implica un método iterativo a menos que se use un paquete de solución de las ecuaciones.

En los problemas del *segundo tipo* el diámetro está dado, pero se desconoce la razón de flujo. Una buena suposición para el factor de fricción en tal caso se obtiene a partir de la región de flujo totalmente turbulento para la rugosidad dada. Esto es cierto para números de Reynolds grandes, que con frecuencia es el caso en la práctica. Después que se obtiene la razón de flujo, el factor de fricción se puede corregir con el diagrama de Moody o la ecuación de Colebrook, y el proceso se repite hasta que la solución converge (por lo general, sólo se necesitan pocas iteraciones para convergencia a tres o cuatro dígitos de precisión).

En los problemas del *tercer tipo*, el diámetro no se conoce y por lo tanto no se pueden calcular el número de Reynolds y la rugosidad relativa. En consecuencia, los cálculos se comienzan con la suposición de un diámetro de tubería. Entonces se compara la caída de presión calculada para el diámetro supuesto con la caída de presión especificada, y los cálculos se repiten con otro diámetro de tubería en forma iterativa hasta la convergencia.

Para evitar tediosas iteraciones en la pérdida de carga, razón de flujo y cálculos de diámetro, en 1976 Swamee y Jain propusieron las siguientes relaciones explícitas, que son precisas hasta 2 por ciento del diagrama de Moody:

$$h_L = 1.07 \frac{\dot{V}^2 L}{gD^5}\left\{\ln\left[\frac{\varepsilon}{3.7D} + 4.62\left(\frac{\nu D}{\dot{V}}\right)^{0.9}\right]\right\}^{-2} \qquad \begin{array}{c}10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}\\ 3\,000 < \text{Re} < 3 \times 10^8\end{array} \qquad \textbf{(8-52)}$$

$$\dot{V} = -0.965\left(\frac{gD^5 h_L}{L}\right)^{0.5} \ln\left[\frac{\varepsilon}{3.7D} + \left(\frac{3.17\nu^2 L}{gD^3 h_L}\right)^{0.5}\right] \qquad \text{Re} > 2\,000 \qquad \textbf{(8-53)}$$

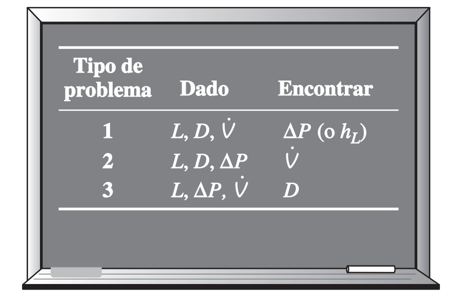
$$D = 0.66\left[\varepsilon^{1.25}\left(\frac{L\dot{V}^2}{gh_L}\right)^{4.75} + \nu\dot{V}^{9.4}\left(\frac{L}{gh_L}\right)^{5.2}\right]^{0.04} \qquad \begin{array}{c}10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}\\ 5\,000 < \text{Re} < 3 \times 10^8\end{array} \qquad \textbf{(8-54)}$$

Note que todas las cantidades son dimensionales y las unidades se simplifican a la unidad deseada (por ejemplo, a m o ft en la última relación), cuando se usan unidades uniformes. Si nota que el diagrama de Moody es precisa hasta 15 por ciento de los datos experimentales, no debe dudar en usar estas relaciones aproximadas en el diseño de sistemas de tuberías.

TABLA 8-3

Tamaños estándar para tubos de acero de cédula 40

Tamaño nominal, in	Diámetro interior real, in
$\frac{1}{8}$	0.269
$\frac{1}{4}$	0.364
$\frac{3}{8}$	0.493
$\frac{1}{2}$	0.622
$\frac{3}{4}$	0.824
1	1.049
$1\frac{1}{2}$	1.610
2	2.067
$2\frac{1}{2}$	2.469
3	3.068
5	5.047
10	10.02



Tipo de problema	Dado	Encontrar
1	$L, D, \dot{V}$	ΔP (o h_L)
2	$L, D, \Delta P$	$\dot{V}$
3	$L, \Delta P, \dot{V}$	D

FIGURA 8-29
Los tres tipos de problemas que se presentan en el cálculo de flujos en tuberías.

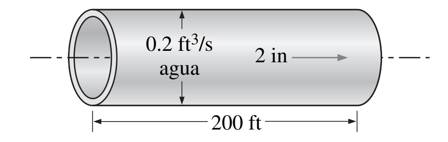


FIGURA 8-30
Esquema para el ejemplo 8-3.

EJEMPLO 8-3 Determinación de la pérdida de carga en una tubería de agua

Se tiene agua a 60°F (ρ = 62.36 lbm/ft^3 y μ = 7.536 × 10^{-4} lbm/ft · s) que fluye de manera estacionaria en una tubería horizontal de 2 in de diámetro hecha de acero inoxidable, a una razón de 0.2 ft^3/s (Fig. 8-30). Determine la caída de presión, la pérdida de carga y la potencia de bombeo necesaria para mantener el flujo en un tramo de tubería de 200 ft de largo.

SOLUCIÓN Está dada la razón de flujo a través de una tubería de agua. Se deben encontrar la caída de presión, la pérdida de carga y potencia de bombeo necesaria.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Los efectos de entrada son despreciables y por tanto el flujo está totalmente desarrollado. **3** La tubería no incluye accesorios como codos, válvulas ni uniones. **4** El tramo de tubería en consideración no incluye dispositivos como bombas o turbinas.
Propiedades La densidad y la viscosidad dinámica del agua son ρ = 62.36 lbm/ft^3 y μ = 7.536 × 10^{-4} lbm/ft · s, respectivamente.
Análisis Esto se reconoce como un problema del primer tipo, porque se conocen la razón de flujo, la longitud de la tubería y el diámetro de la tubería. Primero se calcula la velocidad promedio y el número de Reynolds para determinar el régimen de flujo:

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{0.2 \text{ ft}^3/\text{s}}{\pi(2/12 \text{ ft})^2/4} = 9.17 \text{ ft/s}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(62.36 \text{ lbm/ft}^3)(9.17 \text{ ft/s})(2/12 \text{ ft})}{7.536 \times 10^{-4} \text{ lbm/ft} \cdot \text{s}} = 126\,400$$

que es mayor que 4 000. Por lo tanto, el flujo es turbulento. La rugosidad relativa de la tubería se calcula con la Tabla 8-2:

$$\varepsilon/D = \frac{0.000007 \text{ ft}}{2/12 \text{ ft}} = 0.000042$$

El factor de fricción correspondiente a esta rugosidad relativa y número de Reynolds se pueden determinar a partir del diagrama de Moody. Para evitar cualquier error de lectura, f se determina a partir de la ecuación de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{0.000042}{3.7} + \frac{2.51}{126\,400\sqrt{f}}\right)$$

Con un paquete de resolución de ecuaciones o un esquema iterativo, se determina que el factor de fricción es f = 0.0174. Entonces la caída de presión (que es equivalente a la pérdida de presión en este caso), la pérdida de carga y la potencia necesaria se vuelven:

$$\Delta P = \Delta P_L = f\frac{L}{D}\frac{\rho V^2}{2} = 0.0174 \frac{200 \text{ ft}}{2/12 \text{ ft}} \frac{(62.36 \text{ lbm/ft}^3)(9.17 \text{ ft/s})^2}{2}\left(\frac{1 \text{ lbf}}{32.2 \text{ lbm} \cdot \text{ft/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{1\,700\ lbf/ft^2} = \mathbf{11.8\ psi}$$

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.0174 \frac{200 \text{ ft}}{2/12 \text{ ft}} \frac{(9.17 \text{ ft/s})^2}{2(32.2 \text{ ft/s}^2)} = \mathbf{27.3\ ft}$$

$$\dot{W}_{\text{bomba}} = \dot{V}\,\Delta P = (0.2 \text{ ft}^3/\text{s})(1\,700 \text{ lbf/ft}^2)\left(\frac{1 \text{ W}}{0.737 \text{ lbf} \cdot \text{ft/s}}\right) = \mathbf{461\ W}$$

Por lo tanto, se necesita suministrar una potencia de 461 W para superar las pérdidas por fricción en la tubería.
Discusión Es práctica común escribir las respuestas finales a tres cifras significativas, aun cuando se sepa que los resultados son precisos a cuando mucho dos cifras significativas debido a las imprecisiones inherentes en la ecuación de Cole-

brook, como se ya se indicó. El factor de fricción también se podría determinar fácilmente a partir de la relación explícita de Haaland (ecuación 8-51). Daría $f = 0.0172$, que está suficientemente cerca de 0.0174. Además, en este caso el factor de fricción correspondiente a $\varepsilon = 0$ es 0.0171, lo que indica que se puede suponer con error despreciable que las tuberías de acero inoxidable son lisas.

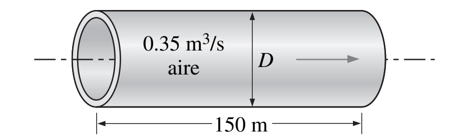


FIGURA 8-31
Esquema para el ejemplo 8-4.

EJEMPLO 8-4 Determinación del diámetro de un ducto de aire

Se debe transportar aire caliente a 1 atm y 35°C en un ducto circular de 150 m de largo a una razón de 0.35 m^3/s (Fig. 8-31). Si la pérdida de carga en la tubería no debe superar 20 m, determine el diámetro mínimo del ducto.

SOLUCIÓN Se proporcionan la razón de flujo y la pérdida de carga en un ducto de aire. Se debe determinar el diámetro del ducto.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Los efectos de entrada son despreciables, y por lo tanto el flujo está totalmente desarrollado. **3** El ducto no incluye accesorios como codos, válvulas ni uniones. **4** El aire es un gas ideal. **5** El ducto es liso porque es de plástico. **6** El flujo es turbulento (se debe verificar).
Propiedades La densidad, viscosidad dinámica y viscosidad cinemática del aire a 35°C son $\rho = 1.145$ kg/m^3, $\mu = 1.895 \times 10^{-5}$ kg/m · s, y $\nu = 1.655 \times 10^{-5}$ m^2/s.
Análisis Éste es un problema del tercer tipo, porque implica determinar el diámetro para razón de flujo y pérdida de carga especificadas. Este problema se puede resolver de tres maneras diferentes: 1) un método iterativo cuando se supone un diámetro de tubería, se calcula la pérdida de carga, se compara el resultado con la pérdida de carga especificada y se repiten los cálculos hasta que la pérdida de carga calculada sea equivalente al valor especificado; 2) se escriben todas las ecuaciones relevantes (se deja el diámetro como incógnita) y se resuelven simultáneamente con el uso de un paquete de resolución de ecuaciones; y 3) con la aplicación de la tercera fórmula de Swamee-Jain. A continuación se demostrará el uso de los dos últimos procedimientos.

Las relaciones de velocidad promedio, número de Reynolds, factor de fricción y pérdida de carga se pueden expresar como (D está en m, V en m/s y Re y f son adimensionales):

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{0.35 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi D^2/4}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{VD}{1.655 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) = -2.0 \log\left(\frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$$

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \quad \rightarrow \quad 20 = f\frac{150 \text{ m}}{D}\frac{V^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)}$$

La rugosidad es casi cero para una tubería plástica (Tabla 8-2). Por lo tanto, éste es un conjunto de cuatro ecuaciones en cuatro incógnitas, y resolverlas con un paquete de resolución de ecuaciones como el EES produce:

$$D = \mathbf{0.267 \text{ m}}, \quad f = 0.0180, \quad V = 6.24 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad \text{Re} = 100\,800$$

En consecuencia, el diámetro del ducto debe ser más de 26.7 cm si la pérdida de carga no debe superar 20 m. Note que Re $> 4\,000$ y por lo tanto se verifica la suposición de flujo turbulento.

El diámetro también se puede determinar directamente a partir de la tercera fórmula de Swamee-Jain como:

$$D = 0.66\left[\varepsilon^{1.25}\left(\frac{L\dot{V}^2}{gh_L}\right)^{4.75} + \nu\dot{V}^{9.4}\left(\frac{L}{gh_L}\right)^{5.2}\right]^{0.04}$$

$$= 0.66\left[0 + (1.655 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s})(0.35\ \text{m}^3/\text{s})^{9.4}\left(\frac{150\ \text{m}}{(9.81\ \text{m/s}^2)(20\ \text{m})}\right)^{5.2}\right]^{0.04}$$

$$= \mathbf{0.271\ m}$$

Discusión Note que la diferencia entre los dos resultados es menor que 2 por ciento. Por lo tanto, se puede usar con confianza la simple relación de Swamee-Jain. Para finalizar, el primer método (iterativo) implica una suposición inicial para D. Si se usa el resultado de Swamee-Jain como la suposición inicial, el diámetro en pocas iteraciones converge a $D = 0.267$ m.

EJEMPLO 8-5 Determinación de la razón de flujo de aire en un ducto

Reconsidere el ejemplo 8-4. Ahora se duplica la longitud del ducto mientras que su diámetro se mantiene constante. Si la pérdida de carga total debe permanecer constante, determine la caída en la razón de flujo a través del ducto.

SOLUCIÓN Están dados el diámetro y la pérdida de carga en un ducto de aire. Se debe determinar la caída en la razón de flujo.

Análisis Éste es un problema del segundo tipo porque implica determinarción de la razón de flujo para un diámetro de tubería y pérdida de carga especificados. La solución implica un método iterativo porque se desconoce la razón de flujo (y por lo tanto la velocidad del flujo).

Las expresiones de velocidad promedio, número de Reynolds, factor de fricción y pérdida de carga se pueden expresar como (D está en m, V está en m/s y Re y f son adimensionales):

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} \quad \rightarrow \quad V = \frac{\dot{V}}{\pi(0.267\ \text{m})^2/4}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} \quad \rightarrow \quad \text{Re} = \frac{V(0.267\ \text{m})}{1.655 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\log\left(\frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$$

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \quad \rightarrow \quad 20 = f\frac{300\ \text{m}}{0.267\ \text{m}}\frac{V^2}{2(9.81\ \text{m/s}^2)}$$

Éste es un conjunto de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas y cuando se resuelven con un paquete de resolución de ecuaciones como el EES produce:

$$\dot{V} = 0.24\ \text{m}^3/\text{s}, \quad f = 0.0195, \quad V = 4.23\ \text{m/s} \quad \text{y} \quad \text{Re} = 68\,300$$

Entonces la caída en la razón de flujo se vuelve:

$$\dot{V}_{\text{caída}} = \dot{V}_{\text{ant}} - \dot{V}_{\text{act}} = 0.35 - 0.24 = \mathbf{0.11\ m^3/s} \quad \text{(una caída del 31 por ciento)}$$

En consecuencia, para una pérdida de carga especificada (o carga disponible o potencia de ventilador), la razón de flujo cae aproximadamente 31 por ciento, de 0.35 a 0.24 m^3/s cuando la longitud del ducto se duplica.

Solución alternativa Si no se dispone de una computadora (como en una situación de examen), otra opción es configurar un *esquema de iteración manual*. Los autores han encontrado que la mejor convergencia se realiza, usualmente, cuando primero se supone el factor de fricción f y luego se resuelve para la velocidad V. La ecuación para V como función de f es:

Velocidad promedio a través de la tubería: $$V = \sqrt{\frac{2gh_L}{fL/D}}$$

Ahora que se calculó V se puede calcular el número de Reynolds, del que se obtiene un factor de fricción *corregido* a partir del diagrama de Moody o de la ecuación de Colebrook. Los cálculos se repiten con el valor de f corregido hasta la convergencia. Como ejemplo, suponga $f = 0.04$:

Iteración	f (suposición)	V, m/s	Re	Corregido f
1	0.04	2.955	4.724×10^4	0.0212
2	0.0212	4.059	6.489×10^4	0.01973
3	0.01973	4.207	6.727×10^4	0.01957
4	0.01957	4.224	6.754×10^4	0.01956
5	0.01956	4.225	6.756×10^4	0.01956

Note que la iteración convergió a tres dígitos en sólo tres iteraciones, y a cuatro dígitos en sólo cuatro iteraciones. Los resultados finales son idénticos a los obtenidos con EES, aunque no se requiere una computadora.

Discusión La nueva razón de flujo también se puede obtener directamente a partir de la segunda fórmula de Swamee-Jain:

$$\dot{V} = -0.965\left(\frac{gD^5h_L}{L}\right)^{0.5} \ln\left[\frac{\varepsilon}{3.7D} + \left(\frac{3.17\nu^2L}{gD^3h_L}\right)^{0.5}\right]$$

$$= -0.965\left(\frac{(9.81 \text{ m/s}^2)(0.267 \text{ m})^5(20 \text{ m})}{300 \text{ m}}\right)^{0.5}$$

$$\times \ln\left[0 + \left(\frac{3.17(1.655 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{/s})^2(300 \text{ m})}{(9.81 \text{ m/s}^2)(0.267 \text{ m})^3(20 \text{ m})}\right)^{0.5}\right]$$

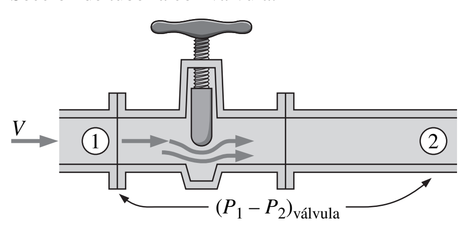
$$= 0.24 \text{ m}^3\text{/s}$$

Note que el resultado de la relación de Swamee-Jain es el mismo (a dos cifras significativas) que el obtenido con la ecuación de Colebrook con el EES o con la técnica de iteración manual. Por lo tanto, se puede usar con confianza la simple relación de Swamee-Jain.

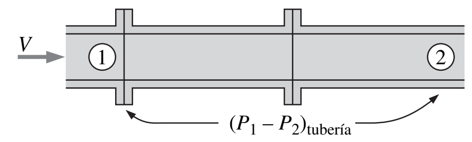
8-6 ▪ PÉRDIDAS MENORES

El fluido en un sistema de tubería típico pasa a través de varias uniones, válvulas, flexiones, codos, ramificaciones en forma de letra T (conexiones en T), entradas, salidas, ensanchamientos y contracciones además de los tubos. Dichos componentes (accesorios) interrumpen el suave flujo del fluido y provocan pérdidas adicionales debido al fenómeno de separación y mezcla del flujo que producen. En un sistema típico, con tubos largos, estas pérdidas son menores en comparación con la pérdida de carga por fricción en los tubos (las **pérdidas mayores**) y se llaman **pérdidas menores**. Aunque por lo general esto es cierto, en algunos casos las pérdidas menores pueden ser más grandes que las pérdidas mayores. Éste es el caso, por ejemplo, en los sistemas con varias vueltas y válvulas en una distancia corta. Las pérdidas de carga que resultan de una válvula totalmente abierta, por ejemplo, pueden ser despreciables. Pero una válvula ce-

Sección de tubería con válvula:



Sección de tubería sin válvula:



$\Delta P_L = (P_1 - P_2)_{\text{válvula}} - (P_1 - P_2)_{\text{tubería}}$

FIGURA 8-32
Para un tramo de una tubería de diámetro constante con un accesorio de pérdida menor (como la válvula de compuerta que se muestra), el coeficiente de pérdida se determina cuando se mide la pérdida de presión adicional que el accesorio provoca y se divide por la presión dinámica en la tubería.

rrada parcialmente puede provocar la pérdida de carga más grande en el sistema, como pone en evidencia la caída en la razón de flujo. El flujo a través de válvulas y uniones es muy complejo, y por lo general no es lógico un análisis teórico. En consecuencia, usualmente los fabricantes de los accesorios determinan las pérdidas menores de manera experimental.

Las pérdidas menores se expresan en términos del **coeficiente de pérdida** K_L (también llamado **coeficiente de resistencia**), que se define como (Fig. 8-32)

Coeficiente de pérdida:
$$K_L = \frac{h_L}{V^2/(2g)} \tag{8-55}$$

donde h_L es la pérdida de carga irreversible *adicional* en el sistema de tuberías provocado por la inserción del accesorio, y se define como $h_L = \Delta P_L/\rho g$. Por ejemplo, imagine reemplazar la válvula en la figura 8-32 con un tramo de tubería de diámetro constante de la posición 1 a la posición 2. ΔP_L se define como la caída de presión de 1 a 2 para el caso *con* la válvula, $(P_1 - P_2)_{\text{válvula}}$, *menos* la caída de presión que ocurriría en la imaginaria sección recta de tubería de 1 a 2 *sin* la válvula, $(P_1 - P_2)_{\text{tubería}}$ a la misma razón de flujo. Mientras que la mayoría de las pérdidas de carga irreversibles ocurren localmente cerca de la válvula, parte de ellas ocurre corriente abajo de la válvula, debido a los remolinos turbulentos inducidos que se producen en la válvula y continúan corriente abajo. Dichos remolinos "desperdician" energía mecánica porque, a final de cuentas, se disipan en calor mientras que el flujo en la parte corriente abajo de la tubería finalmente regresa a condiciones del flujo totalmente desarrollado. Cuando se miden pérdidas menores en algunos accesorios, como los *codos*, por ejemplo, la posición 2 debe estar considerablemente lejos corriente abajo (decenas de diámetros de tubería) con la finalidad de tomar en cuenta las pérdidas irreversibles adicionales debidas a estos remolinos en decaimiento.

Cuando *cambia* el diámetro de la tubería corriente abajo del componente, determinar la pérdida menor es inclusive más complicado. Sin embargo, en todos los casos, se basa en la pérdida irreversible *adicional* de energía mecánica que de otro modo no existiría si el accesorio no estuviese ahí. Por simplicidad, puede pensar que la pérdida menor ocurre *localmente* a través del accesorio, pero considere que el accesorio influye al flujo durante varios diámetros de tubería corriente abajo. Por cierto, ésta es la razón por la que la mayoría de los fabricantes de flujómetros recomiendan instalar sus productos por lo menos de 10 a 20 diámetros de tubería corriente abajo de cualquier codo o válvula. Esto permite que los remolinos turbulentos generados por el codo o la válvula desaparezcan considerablemente y el perfil de velocidad se vuelva totalmente desarrollado antes de entrar al flujómetro (la mayoría de los flujómetros se calibran con un perfil de velocidad totalmente desarrollado en la entrada del flujómetro, y así produzca la mejor precisión cuando éstas condiciones también existan en la aplicación real).

Cuando el diámetro de entrada sea igual al diámetro de salida, el coeficiente de pérdida de un accesorio también se puede determinar cuando se mide la pérdida de presión a través del accesorio y se divide entre la presión dinámica, $K_L = \Delta P_L/(\frac{1}{2}\rho V^2)$. Cuando está disponible el coeficiente de pérdida para un accesorio, la pérdida de carga para este accesorio se determina a partir de:

Pérdida menor:
$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} \tag{8-56}$$

En general, el coeficiente de pérdida depende de la geometría del accesorio y del número de Reynolds, tal como del factor de fricción. Sin embargo, usualmente se supone que es independiente del número de Reynolds. Ésta es una solución razonable porque, en la práctica, la mayoría de los flujos tienen números de Reynolds grandes y los coeficientes de pérdida (que incluyen el factor de

fricción) tienden a ser independientes del número de Reynolds a números de Reynolds grandes.

Las pérdidas menores también se expresan en términos de la **longitud equivalente** L_{equiv}, que se define como (Fig. 8-33)

Longitud equivalente: $$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} = f\frac{L_{\text{equiv}}}{D}\frac{V^2}{2g} \quad \rightarrow \quad L_{\text{equiv}} = \frac{D}{f}K_L \qquad \textbf{(8-57)}$$

donde f es el factor de fricción y D es el diámetro de la tubería que contiene el accesorio. La pérdida de carga que provoca el accesorio equivale a la pérdida de carga causada por un tramo de la tubería cuya longitud es L_{equiv}. Por lo tanto, la aportación de un accesorio a la pérdida de carga se puede explicar simplemente con añadir L_{equiv} a la longitud de tubería total.

En la práctica se usan ambos procedimientos, pero el uso del coeficiente de pérdida es más común. Por lo tanto, en este libro también se usará este procedimiento. Cuando ya estén disponibles todos los coeficientes de pérdida, la pérdida de carga total en un sistema de tubería se determina de:

Pérdida de carga total (general): $$h_{L,\text{ total}} = h_{L,\text{ mayor}} + h_{L,\text{ menor}}$$

$$= \sum_i f_i \frac{L_i}{D_i}\frac{V_i^2}{2g} + \sum_j K_{L,j}\frac{V_j^2}{2g} \qquad \textbf{(8-58)}$$

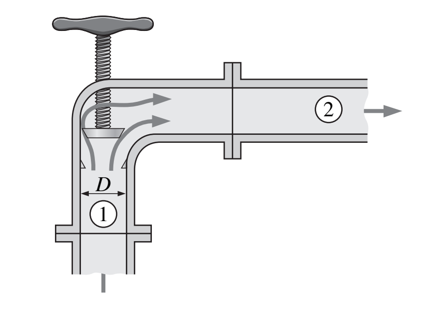
donde i representa cada tramo de tubería con diámetro constante y j representa cada accesorio que provoca una pérdida menor. Si todo el sistema de tubería por analizar tiene un diámetro constante, la ecuación 8-58 se reduce a:

Pérdida de carga total (D = constante): $$h_{L,\text{ total}} = \left(f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g} \qquad \textbf{(8-59)}$$

donde V es la velocidad de flujo promedio a través de todo el sistema (note que V = constante pues D = constante).

En la Tabla 8-4 se proporcionan coeficientes de pérdida representativos K_L para entradas, salidas, codos, cambios de área repentinos y graduales, y válvulas. En estos valores existe una incertidumbre considerable porque, en general, los coeficientes de pérdida varían con el diámetro de la tubería, la rugosidad de la superficie, el número de Reynolds y los detalles del diseño. Por ejemplo, los coeficientes de pérdida de dos válvulas aparentemente idénticas de dos fabricantes distintos, pueden diferir por un factor de 2 o más. Por lo tanto, en el diseño final del sistema de tubería se deben consultar los datos del fabricante particular en vez de apoyarse en los valores representativos de los manuales.

La pérdida de carga en la entrada de una tubería es una importante función de la geometría. Casi es despreciable para entradas redondeadas (K_L = 0.03 para r/D > 0.2), pero aumenta a casi 0.50 para entradas con bordes agudos (Fig. 8-34). Es decir, una entrada con borde agudo provoca que se pierda la mitad de la carga de velocidad conforme el fluido ingresa a la tubería. Esto ocurre porque el fluido no puede dar vueltas de 90° con facilidad, en especial a altas velocidades. Como resultado, el flujo se separa en las esquinas, y el flujo se constriñe en la región de **vena contracta** que se forma en la sección media de la tubería (Fig. 8-35). En consecuencia, una entrada de borde agudo actúa como una constricción de flujo. La velocidad aumenta en la región de vena contracta (y la presión disminuye) debido a la reducida área de flujo efectiva y luego disminuye conforme el flujo llena toda la sección transversal de la tubería. Si la presión aumentara en concordancia con la ecuación de Bernoulli, habría pérdida de presión despreciable (la carga de velocidad simplemente se convertiría en carga de presión). Sin embargo, este proceso de desaceleración está lejos del ideal y la disipación viscosa provocada por la intensa mezcla y los remolinos turbulentos convierten



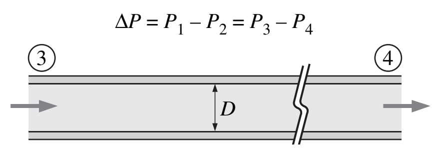
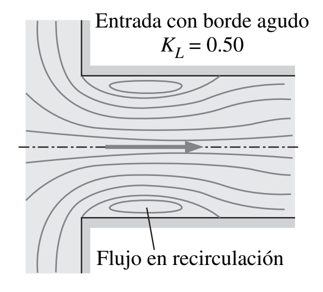


FIGURA 8-33
La pérdida de carga provocada por un accesorio (como la válvula de ángulo que se muestra) equivale a la pérdida de carga provocada por una sección de la tubería cuya longitud es la longitud equivalente.



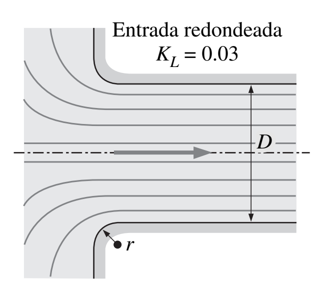


FIGURA 8-34
La pérdida de carga en la entrada de una tubería es aproximadamente despreciable para entradas redondeadas (K_L = 0.03 para r/D > 0.2) pero aumenta a casi 0.50 para entradas con bordes agudos.

TABLA 8-4

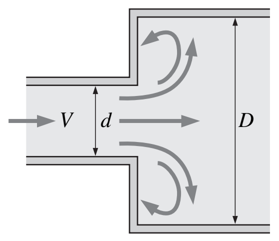
Coeficientes de pérdida K_L de varios accesorios de tubería para flujo turbulento (para usar en la relación $h_L = K_L V^2/(2g)$, donde V es la velocidad promedio en la tubería que contiene el accesorio)*

Entrada de la tubería *Reentrante:* $K_L = 0.80$ ($t \ll D$ e $l \approx 0.1D$)	*De borde agudo:* $K_L = 0.50$	*Redondeada* ($r/D > 0.2$): $K_L = 0.03$ *Ligeramente redondeada* ($r/D = 0.1$): $K_L = 0.12$ (*véase figura* 8-36)
Salida de la tubería *Reentrante:* $K_L = \alpha$	*De borde agudo:* $K_L = \alpha$	*Redondeada:* $K_L = \alpha$

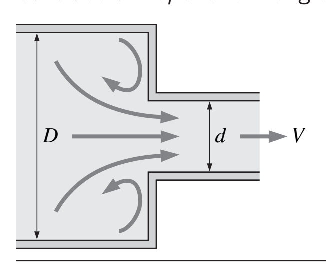
Nota: el factor de corrección de energía cinética es $\alpha = 2$ para flujo laminar totalmente desarrollado, y $\alpha \approx 1$ para flujo turbulento totalmente desarrollado.

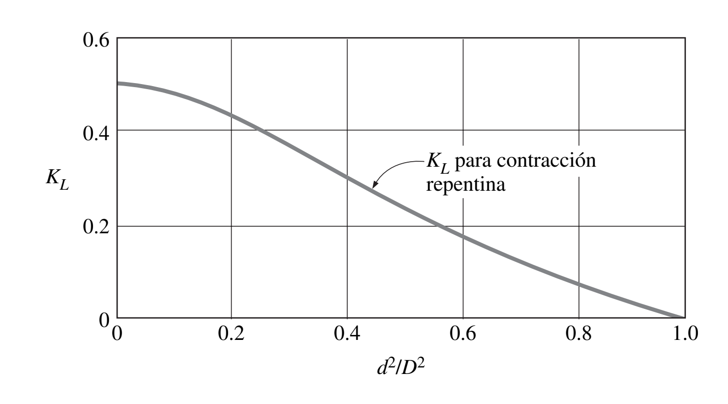
Expansión y contracción repentina (con base en la velocidad en la tubería de diámetro más pequeño)

Expansión repentina: $K_L = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$



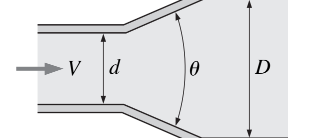
Contracción repentina: ver gráfica.





Expansión y contracción gradual (con base en la velocidad en la tubería de diámetro más pequeño)

Expansión:
$K_L = 0.02$ para $\theta = 30°$
$K_L = 0.04$ para $\theta = 45°$
$K_L = 0.07$ para $\theta = 60°$



Contracción (para $\theta = 20°$):
$K_L = 0.30$ para $d/D = 0.2$
$K_L = 0.25$ para $d/D = 0.4$
$K_L = 0.15$ para $d/D = 0.6$
$K_L = 0.10$ para $d/D = 0.8$

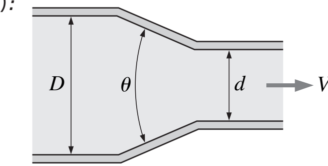




TABLA 8-4 (CONCLUSIÓN)

Codos y ramificaciones

Codo suave de 90°: Embridado: $K_L = 0.3$ Roscado: $K_L = 0.9$	*Codo esquinado de 90°* (sin álabes directores): $K_L = 1.1$	*Codo esquinado de 90°* (con álabes directores): $K_L = 0.2$	*Codo roscado de 45°:* $K_L = 0.4$
Codo de retorno de 180°: Embridado: $K_L = 0.2$ Roscado: $K_L = 1.5$	*Conexión en T* (flujo deriv.): Embridado: $K_L = 1.0$ Roscado: $K_L = 2.0$	*Conexión en T* (flujo en línea): Embridado: $K_L = 0.2$ Roscado: $K_L = 0.9$	*Unión roscada:* $K_L = 0.08$

Válvulas

Válvula de globo, totalmente abierta: $K_L = 10$	Válvula de compuerta, totalmente abierta: $K_L = 0.2$
Válvula de ángulo, totalmente abierta: $K_L = 5$	$\frac{1}{4}$ cerrada: $K_L = 0.3$
Válvula de bola, totalmente abierta: $K_L = 0.05$	$\frac{1}{2}$ cerrada: $K_L = 2.1$
Válvula de charnela: $K_L = 2$	$\frac{3}{4}$ cerrada: $K_L = 17$

* Ésos son valores representativos para coeficientes de pérdida. Los valores reales dependen principalmente del diseño y la fabricación de los accesorios y pueden diferir considerablemente de los valores dados (en especial para las válvulas). En el diseño final se deben usar los datos reales del fabricante.

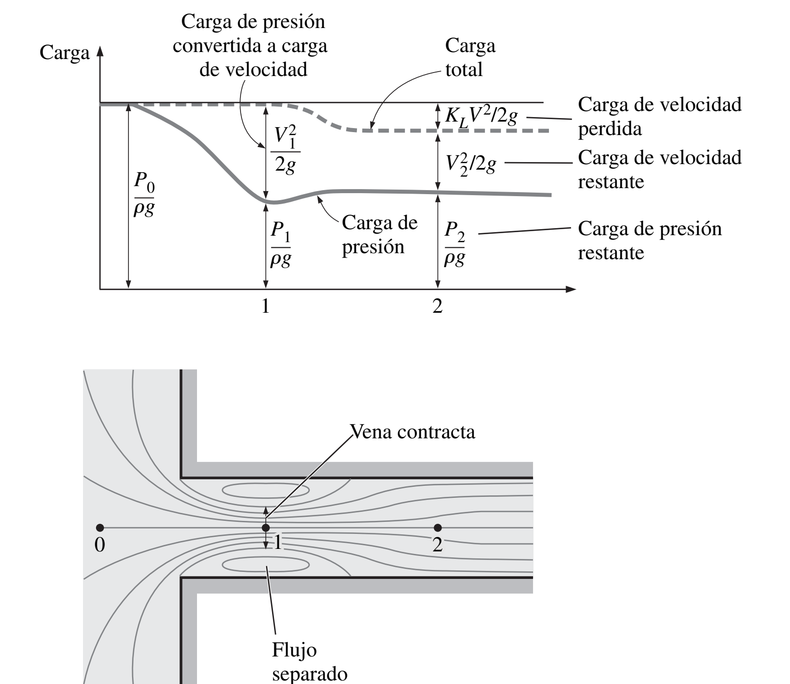


FIGURA 8-35
Representación gráfica de la contracción del flujo y de la pérdida de carga relacionada con una entrada de tubería de borde agudo.

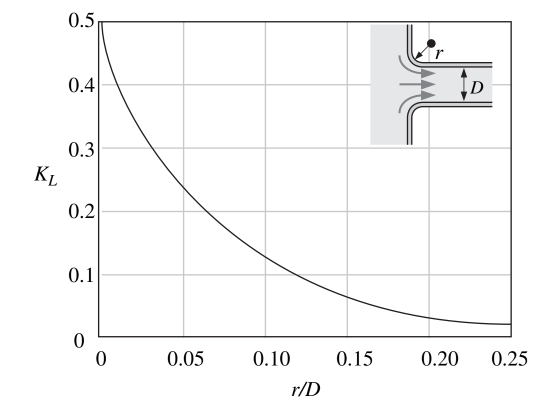


FIGURA 8-36
Efecto del redondeo de una entrada de tubería sobre el coeficiente de pérdida.
Tomado de ASHRAE Handbook of Fundamentals.

parte de la energía cinética en calentamiento por fricción, como se puede observar por un ligero aumento en la temperatura del fluido. El resultado final es una caída en la velocidad sin mucha recuperación de presión, y la pérdida de entrada es una medida de esta caída de presión irreversible.

Inclusive, el ligero redondeo de los bordes puede resultar en una reducción significativa de K_L, como se muestra en la figura 8-36. El coeficiente de pérdida aumenta de manera pronunciada (hasta casi $K_L = 0.8$) cuando la tubería se proyecta hacia el depósito porque parte del fluido cerca del borde se fuerza en este caso a efectuar una vuelta de 180°.

El coeficiente de pérdida para una salida de tubería sumergida con frecuencia se menciona en los manuales como $K_L = 1$. Sin embargo, con más precisión, K_L es igual al factor de corrección de energía cinética α en la salida de la tubería. Aunque de hecho α está cerca de 1 para flujo *turbulento* totalmente desarrollado en tubería, es igual a 2 para flujo *laminar* totalmente desarrollado en tubería. Entonces, para evitar posibles errores cuando se analiza flujo laminar en tubería, es mejor siempre establecer $K_L = \alpha$ en una salida de tubería sumergida. En cualquiera de estas salidas, ya sea laminar o turbulento, el fluido que sale de la tubería pierde *toda* su energía cinética conforme se mezcla con el fluido del depósito y finalmente llega al reposo a través de la acción irreversible de la viscosidad. Esto es cierto sin importar la forma de la salida (Tabla 8-4 y Fig. 8-37). Por lo tanto, es innecesario redondear las salidas de tubería.

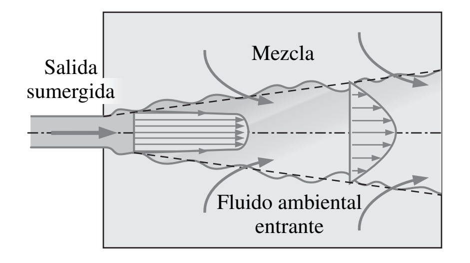


FIGURA 8-37
Toda la energía cinética del flujo se “pierde” (se convierte en energía térmica) por medio de fricción conforme el chorro desacelera y se mezcla con el fluido ambiental corriente abajo de una salida sumergida.

Con frecuencia los sistemas de tubería incluyen secciones de ensanchamiento o contracción *repentinas* o *graduales* para ajustar los cambios en las razones de flujo o propiedades como la densidad y la velocidad. Las pérdidas usualmente son mucho más grandes en el caso de los ensanchamientos y contracciones *repentinos* (o ensanchamientos de gran ángulo) debido a la separación del flujo. Cuando se combinan las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía, el coeficiente de pérdida para el caso de un **ensanchamiento repentino** se aproxima con:

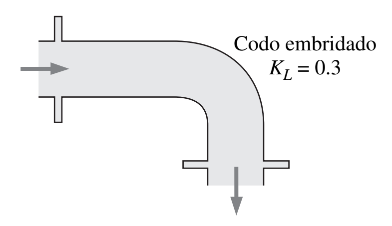
$$K_L = \left(1 - \frac{A_{\text{pequeña}}}{A_{\text{grande}}}\right)^2 \qquad \text{(ensanchamiento repentino)} \qquad \textbf{(8-60)}$$

donde $A_{\text{pequeña}}$ y A_{grande} son las áreas transversales de las tuberías pequeña y grande, respectivamente. Note que $K_L = 0$ cuando no hay cambio de área ($A_{\text{pequeña}} = A_{\text{grande}}$) y $K_L = 1$ cuando una tubería descarga en un depósito ($A_{\text{grande}} \gg A_{\text{pequeña}}$). Tal relación no existe para una contracción repentina, y los valores K_L en dicho caso se pueden leer en la gráfica de la Tabla 8-4. Las pérdidas debidas a expansión y contracción se pueden reducir considerablemente cuando se instalan cambiadores graduales de área cónicos (toberas y difusores) entre las tuberías pequeña y grande. En la Tabla 8-4 se presentan valores K_L pa-

ra casos representativos de ensanchamiento y contracción gradual. Note que en los cálculos de pérdida de carga, se debe usar la velocidad en la *tubería pequeña* como la velocidad de referencia en la ecuación 8-56. Las pérdidas en los ensanchamientos usualmente son mucho mayores que las pérdidas en las contracciones debido a la separación del flujo.

Los sistemas de tubería también implican cambios en la dirección sin un cambio en el diámetro. A tales secciones de flujo se les llama *codos* o *flexiones*. Las pérdidas en estos accesorios se deben a la separación del flujo (como un automóvil que sale del camino cuando entra muy rápido a una curva) en el lado interior y en los flujos arremolinados secundarios que se provocan por diferentes longitudes de trayectoria. Se puede minimizar las pérdidas debidas al cambio de dirección "facilitando el giro del fluido" al usar los codos circulares en lugar de los esquinados (Fig. 8-38). Pero puede ser necesario el uso de flexiones de vueltas agudas (y por lo tanto sufrir un castigo en el coeficiente de pérdida) cuando el espacio para dar vuelta está limitado. En estos casos, las pérdidas se pueden minimizar al utilizar las álabes directores colocadas adecuadamente para ayudar a que el flujo dé vuelta de manera ordenada sin que salga del curso. En la Tabla 8-4 se proporcionan los coeficientes de pérdida de algunos codos circulares y esquinados, así como Te-ramificaciones. Estos coeficientes no incluyen las pérdidas por fricción a lo largo de los tramos curvos de la tubería. Las pérdidas de este tipo se deben calcular como en las tuberías rectas (con el uso de la longitud de la línea central como la longitud de la tubería) y sumarse a otras pérdidas.

Comúnmente, las *válvulas* se usan en los sistemas de tubería para controlar las razones de flujo al simplemente alterar la pérdida de carga hasta que se logra la razón de flujo deseada. Para las válvulas es deseable tener un coeficiente de pérdida muy bajo cuando están totalmente abiertas, de modo que causen la mínima pérdida de carga durante la operación de carga completa. En la actualidad, son de uso común varios diseños distintos de válvulas, cada uno con ventajas y desventajas. La *válvula de compuerta* se desliza arriba y abajo como una compuerta, la *válvula de globo* cierra un agujero colocado en la válvula, la *válvula de ángulo* es una válvula de globo con una vuelta de 90° y la *de retención* permite que el fluido fluya sólo en una dirección, como un diodo en un circuito eléctrico. En la Tabla 8-4 se indican los coeficientes de pérdida representativos de los diseños populares. Note que el coeficiente de pérdida aumenta notablemente conforme la válvula se cierra (Fig. 8-39). Además, la desviación en los coeficientes de pérdida para diferentes fabricantes es más grande para las válvulas debido a sus geometrías complejas.



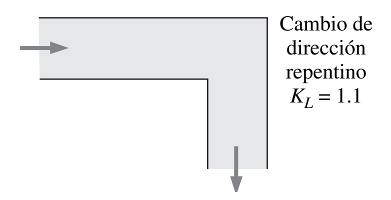


FIGURA 8-38
Se pueden minimizar las pérdidas debidas al cambio de dirección "facilitando el giro del fluido" al usar los codos circulares en vez de los esquinados.

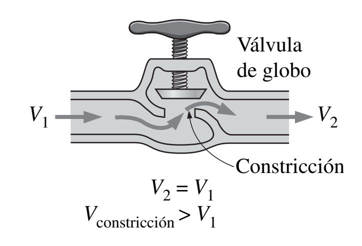


FIGURA 8-39
La gran pérdida de carga en una válvula parcialmente cerrada se debe a desaceleración irreversible, separación de flujo y mezcla de fluido de alta velocidad que llega del paso estrecho de la válvula.

EJEMPLO 8-6 Pérdida de carga y elevación de presión en ensanchamiento gradual

Una tubería horizontal de agua de 6 cm de diámetro se ensancha gradualmente a una tubería de 9 cm de diámetro (Fig. 8-40). Las paredes de la sección de ensanchamiento tienen un ángulo de 30° desde la horizontal. La velocidad y presión promedio del agua antes de la sección de ensanchamiento son 7 m/s y 150 kPa, respectivamente. Determine la pérdida de carga en la sección de ensanchamiento y la presión en la tubería de diámetro más grande.

SOLUCIÓN Una tubería horizontal de agua se ensancha gradualmente en una tubería de diámetro más grande. Se deben determinar la pérdida de carga y la presión a la salida del ensanchamiento.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** El flujo en las secciones 1 y 2 es totalmente desarrollado y turbulento, con $\alpha_1 = \alpha_2 \cong 1.06$.

Propiedades La densidad del agua se toma como $\rho = 1\,000$ kg/m^3. El coeficiente de pérdida para expansión gradual de $\theta = 60°$ de ángulo total incluido es $K_L = 0.07$.

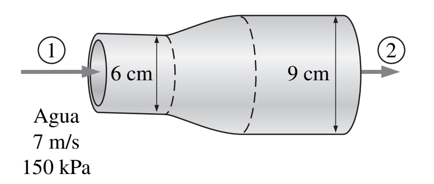


FIGURA 8-40
Esquema para el ejemplo 8-6.

Análisis Note que la densidad del agua permanece constante, la velocidad corriente abajo del agua se determina a partir de la conservación de la masa como:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad \rightarrow \quad \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 \quad \rightarrow \quad V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{D_1^2}{D_2^2} V_1$$

$$V_2 = \frac{(0.06 \text{ m})^2}{(0.09 \text{ m})^2}(7 \text{ m/s}) = 3.11 \text{ m/s}$$

En consecuencia la pérdida de carga irreversible en la sección de ensanchamiento se vuelve:

$$h_L = K_L \frac{V_1^2}{2g} = (0.07) \frac{(7 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = \mathbf{0.175 \text{ m}}$$

Cuando se ve que $z_1 = z_2$ y que no intervienen bombas o turbinas, la ecuación de energía para la sección de ensanchamiento se puede expresar en términos de cargas como:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \cancel{z_1} + h_{\text{bomba}, u} \nearrow^0 = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{z_2} + h_{\text{turbina}, e} \nearrow^0 + h_L$$

$$\rightarrow \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

Cuando se resuelve para P_2 y se sustituye,

$$P_2 = P_1 + \rho \left\{ \frac{\alpha_1 V_1^2 - \alpha_2 V_2^2}{2} - g h_L \right\} = (150 \text{ kPa}) + (1\,000 \text{ kg/m}^3)$$

$$\times \left\{ \frac{1.06(7 \text{ m/s})^2 - 1.06(3.11 \text{ m/s})^2}{2} - (9.81 \text{ m/s}^2)(0.175 \text{ m}) \right\}$$

$$\times \left(\frac{1 \text{ kN}}{1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2} \right) \left(\frac{1 \text{ kPa}}{1 \text{ kN/m}^2} \right)$$

$$= \mathbf{169 \text{ kPa}}$$

En consecuencia, pese a la pérdida de carga (y presión), la presión *aumenta* de 150 a 169 kPa a la salida del ensanchamiento. Esto se debe a la conversión de presión dinámica a presión estática cuando la velocidad de flujo promedio disminuye en la tubería más grande.

Discusión Es de conocimiento común que se necesita la corriente arriba de mayor presión para provocar flujo, y puede sorprenderle al lector que la presión corriente abajo haya *aumentado* después del ensanchamiento, pese a la pérdida. Esto se debe a que el flujo es dirigido por la suma de las tres cargas que incluyen la carga total (la carga de presión, la carga de velocidad y la carga de elevación). Durante la expansión del flujo, la carga corriente arriba de mayor velocidad se convierte en carga de presión corriente abajo, y este aumento supera la pérdida de carga no-recuperable. Además, el lector puede estar tentado a resolver este problema con el uso de la ecuación de Bernoulli. Tal solución ignoraría la pérdida de carga (y la presión asociada) y resultaría en una incorrecta presión más alta para el fluido corriente abajo.

8-7 ▪ REDES DE TUBERÍAS Y SELECCIÓN DE BOMBA



FIGURA 8-41
Red de tuberías en una instalación industrial.
Cortesía de UMDE Engineering, Contracting, and Trading. Usada con autorización.

La mayoría de los sistemas de tubería que se encuentran en la práctica, como los sistemas de distribución de agua en las ciudades o establecimientos comerciales o residenciales incluyen numerosas conexiones en paralelo y en serie, así como diversas fuentes (suministros de fluido en el sistema) y cargas de sistema de tuberías (descargas de fluido del sistema) (Fig. 8-41). Un proyecto de tuberías

puede implicar el diseño de un nuevo sistema o la expansión de un sistema existente. El objetivo de la ingeniería en estos proyectos es diseñar un sistema de tuberías que entregará las razones de flujo especificadas a presiones confiables al costo total mínimo (inicial más de operación y mantenimiento). Ya preparada la plantilla del sistema, la determinación de los diámetros de las tuberías y las presiones a través del sistema, mientras se mantiene dentro de las restricciones presupuestales, por lo general demanda la resolución repetida del sistema hasta que se alcanza la solución óptima. El modelado en computadora y el análisis de los sistemas hacen que esta tediosa tarea sea una labor simple.

Los sistemas de tuberías por lo común incluyen varias tuberías conectadas unas con otras en serie y/o en paralelo, como se muestra en las figuras 8-42 y 8-43. Cuando las tuberías se conectan **en serie**, la razón de flujo a través de todo el sistema permanece constante sin importar los diámetros de las tuberías individuales en el sistema. Ésta es una consecuencia natural del principio de la conservación de masa para flujo estacionario incompresible. La pérdida de carga total en este caso es igual a la suma de las pérdidas de carga en las tuberías individuales en el sistema, que incluyen las pérdidas menores. Se considera que las pérdidas de ensanchamiento o contracción en las conexiones pertenecen a la tubería de diámetro más pequeño, pues los coeficientes de pérdida de ensanchamiento y contracción se definen sobre la base de la velocidad promedio en la tubería de diámetro más pequeño.

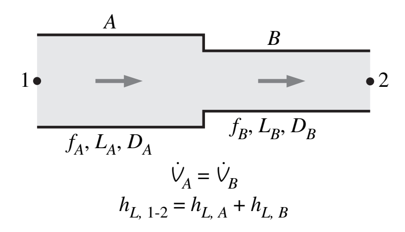


FIGURA 8-42
Para tuberías *en serie*, la razón de flujo es la misma en cada tubería, y la pérdida de carga total es la suma de las pérdidas de carga en tuberías individuales.

Para una tubería que se ramifica en dos (o más) **tuberías paralelas** y luego se vuelven a juntar en una unión corriente abajo, la razón de flujo total es la suma de las razones de flujo en las tuberías individuales. La caída de presión (o pérdida de carga) en cada tubería individual conectada en paralelo debe ser la misma porque $\Delta P = P_A - P_B$ y las presiones de unión P_A y P_B son las mismas para todas las tuberías individuales. Para un sistema de dos tuberías paralelas 1 y 2 entre las uniones A y B con pérdidas menores despreciables, esto se puede expresar como:

$$h_{L,\,1} = h_{L,\,2} \quad \rightarrow \quad f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} = f_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g}$$

Entonces las razones de las velocidades promedio y los flujos volumétricos en las dos tuberías paralelas se convierten en:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{f_2}{f_1}\frac{L_2}{L_1}\frac{D_1}{D_2}\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = \frac{A_{c,\,1}V_1}{A_{c,\,2}V_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}\left(\frac{f_2}{f_1}\frac{L_2}{L_1}\frac{D_1}{D_2}\right)^{1/2}$$

Por lo tanto, los flujos relativos en las tuberías paralelas se establecen a partir del requisito de que la pérdida de carga en cada tubería es la misma. Este resultado se puede extender a cualquier número de tuberías conectadas en paralelo. El resultado también es válido para tuberías en donde las pérdidas menores son significativas si las longitudes equivalentes para los accesorios que contribuyen

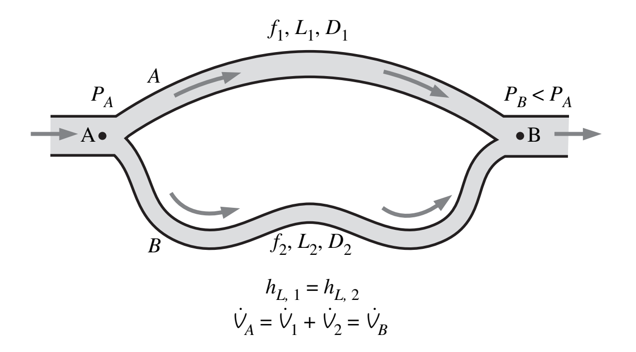


FIGURA 8-43
Para tuberías *en paralelo*, la pérdida de carga es la misma en cada tubería, y la razón de flujo total es la suma de las razones de flujo en las tuberías individuales.

a las pérdidas menores se suman a la longitud de la tubería. Note que la razón de flujo en una de las ramas paralelas es proporcional a su diámetro a la potencia 5/2 y es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud y factor de fricción.

El análisis de las redes de tuberías, sin importar qué tan complejas sean, se basa en dos principios simples:

1. *Se debe satisfacer la conservación de la masa a través del sistema.* Esto se hace cuando se necesita para todas las uniones en el sistema que el flujo total que entra a una unión sea igual al flujo total que sale de la unión. Además, la razón de flujo debe permanecer constante en las tuberías conectadas en serie sin importar los cambios en los diámetros.

2. *La caída de presión (y por lo tanto la pérdida de carga) entre dos uniones debe ser la misma para todas las trayectorias entre las dos uniones.* Esto porque la presión es una función puntual y no puede tener dos valores en un punto específico. En la práctica, esta regla se aplica cuando se necesita que la suma algebraica de las pérdidas de carga en un circuito (para todos los circuitos) sea igual a cero (una pérdida de carga se toma como positiva para flujo en la dirección de las manecillas del reloj y negativa para flujo en la dirección contraria a éstas).

Por lo tanto, el análisis de las redes de tuberías es muy similar al de los circuitos eléctricos, y la razón de flujo corresponde a la corriente eléctrica y la presión corresponde al potencial eléctrico. Sin embargo, la situación aquí es mucho más compleja, ya que a diferencia de la resistencia eléctrica, la "resistencia de flujo" es una función significativamente no-lineal. En consecuencia, el análisis de las redes de tuberías exige la solución simultánea de un sistema de ecuaciones no-lineales. El análisis de estos sistemas está fuera del ámbito de este texto de carácter introductorio.

Sistemas de tuberías con bombas y turbinas

Cuando un sistema de tuberías incluye una bomba y/o turbina, la ecuación de energía de flujo estacionario sobre una base de masa unitaria se puede expresar como (véase Sección 5-7):

$$\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + w_{\text{bomba, } u} = \frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + w_{\text{turbina, } e} + gh_L \quad \textbf{(8-61)}$$

También se puede expresar en términos de cargas como:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba, } u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina, } e} + h_L \quad \textbf{(8-62)}$$

donde $h_{\text{bomba},u} = w_{\text{bomba},u}/g$ es la carga de bomba útil entregada al fluido, $h_{\text{turbina},e} = w_{\text{turbina},e}/g$ es la carga de turbina extraída del fluido, a es el factor de corrección de energía cinética cuyo valor está cerca de 1 para la mayoría de los flujos (turbulentos) y h_L es la pérdida de carga total en las tuberías (inclusive las pérdidas menores si son importantes) entre los puntos 1 y 2. La carga de bomba es cero si el sistema de tubería no incluye una bomba o un ventilador, la carga de turbina es cero si el sistema no incluye una turbina y ambos son cero si el sistema no incluye algún dispositivo mecánico para producir o consumir trabajo.

Muchos sistemas de tuberías prácticos incluyen una bomba para llevar un fluido de un depósito a otro. Cuando se considera que los puntos 1 y 2 están en las *superficies libres* de los depósitos, en este caso la ecuación de energía se reduce para la carga de bomba útil necesaria a (Fig. 8-44):

$$h_{\text{bomba, } u} = (z_2 - z_1) + h_L \quad \textbf{(8-63)}$$

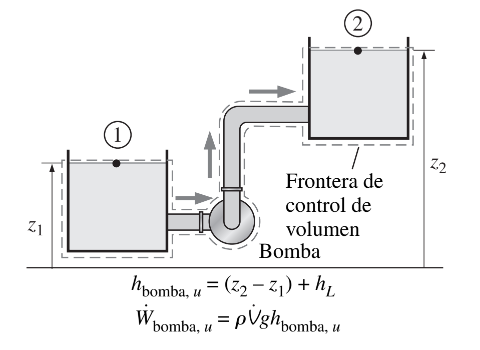


FIGURA 8-44
Cuando una bomba pasa un fluido de un depósito a otro, la carga de bomba útil necesaria es igual a la diferencia de elevación entre los dos depósitos más la pérdida de carga.

porque las velocidades en las superficies libres son despreciables y las presiones están a presión atmosférica. Por lo tanto, la carga de bomba útil es igual a la diferencia de elevación entre los dos depósitos más la pérdida de carga. Si la pérdida de carga es despreciable en comparación con $z_2 - z_1$, la carga de bomba útil simplemente es igual a la diferencia de elevación entre los dos depósitos. En el caso de $z_1 > z_2$ (el primer depósito está a una elevación mayor que el segundo) sin bomba, el flujo se conduce por medio de gravedad a una razón de flujo que provoca una pérdida de carga igual a la diferencia de elevación. Un argumento similar tiene lugar para la carga de turbina de una planta hidroeléctrica, cuando se sustituye en la ecuación 8-63 $h_{bomba,u}$ por $-h_{turbina,e}$.

Una vez que se conoce la carga de bomba útil, la *potencia mecánica que necesita desarrollar la bomba acoplada con un motor eléctrico* y la *potencia eléctrica consumida por el motor de la bomba* para una razón de flujo específica se determinan a partir de:

$$\dot{W}_{bomba,cigüeñal} = \frac{\rho\dot{V}gh_{bomba,\,u}}{\eta_{bomba}} \qquad \text{y} \qquad \dot{W}_{eléct} = \frac{\rho\dot{V}gh_{bomba,\,u}}{\eta_{\,bomba\text{-}motor}} \tag{8-64}$$

donde $\eta_{bomba\text{-}motor}$ es la *eficiencia del acoplamiento de bomba con motor*, que es el producto de las eficiencias de la bomba y el motor (Fig. 8-45). La eficiencia de acoplamiento bomba-motor se define como la razón de la energía útil entregada al fluido por la bomba a la energía eléctrica consumida por el motor de la bomba y usualmente varía entre 50 y 85 por ciento.

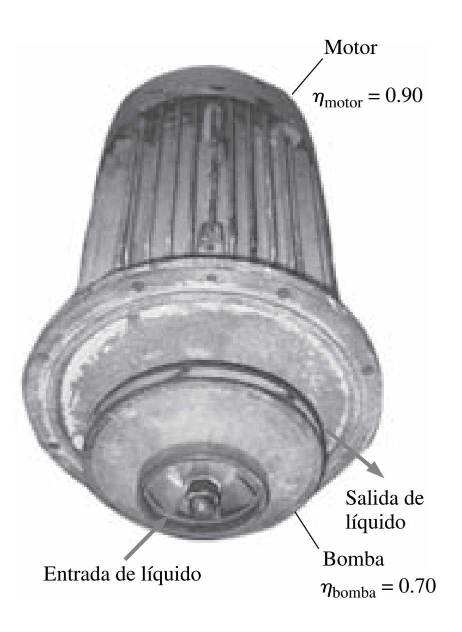


FIGURA 8-45
La eficiencia del acoplamiento bomba-motor es el producto de las eficiencias de la bomba y el motor.
Cortesía Yunus Çengel

La pérdida de carga de un sistema de tuberías aumenta (por lo general cuadráticamente) con la razón de flujo. Una gráfica de la carga de bomba útil necesaria $h_{bomba,u}$ como función de la razón de flujo se llama **curva del sistema** (o **demanda**). La carga producida por una bomba tampoco es constante. Tanto la carga de bomba como la eficiencia de bomba varían con la razón de flujo, y los fabricantes de bombas suministran esta variación en forma tabular o gráfica, como se muestra en la figura 8-46. Estas $h_{bomba,u}$ y $\eta_{bomba,u}$ determinadas experimentalmente, graficadas contra el flujo volumétrico $\dot{V}$ se llaman **curvas características** (o de **suministro** o de **rendimiento** o de **operación**). Note que la razón de flujo de una bomba aumenta conforme disminuye la carga necesaria. El punto de intersección de la curva característica de bomba con el eje vertical usualmente representa la *carga máxima* que la bomba puede proporcionar, mientras que el punto de intersección con el eje horizontal indica la *razón de flujo máxima* (llamada **entrega libre**) que la bomba puede suministrar.

La *eficiencia* de una bomba es suficientemente alta para cierto rango de combinación de carga y razón de flujo. En consecuencia, una bomba que pueda suministrar la carga y razón de flujo necesarios no es esencialmente una elección adecuada para un sistema de tuberías a menos que la eficiencia de la bomba en dichas condiciones sea suficientemente alta. La bomba instalada en un sistema de tuberías operará en el punto donde intersequen la *curva de sistema* y la *curva característica*. Este punto de intersección se llama **punto de operación**, como se muestra en la figura 8-46. La carga útil producida por la bomba en este pun-

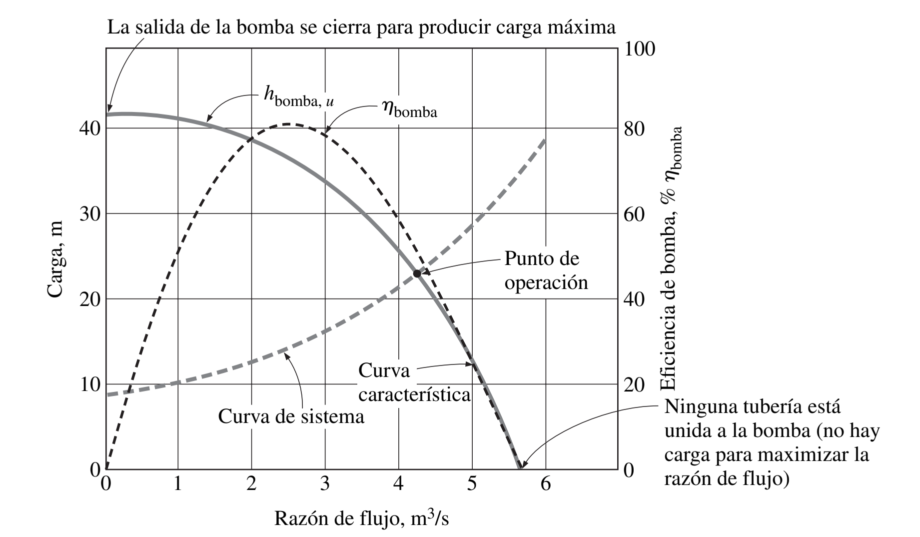


FIGURA 8-46
Curvas características para bombas centrífugas, curva de sistema para un sistema de tuberías y punto de operación.

to, iguala las necesidades de carga del sistema a dicha razón de flujo. Además, la eficiencia de la bomba durante la operación es el valor correspondiente a dicha razón de flujo.

EJEMPLO 8-7 Bombeo de agua a través de dos tuberías paralelas

Se debe bombear agua a 20°C desde un depósito (z_A = 5 m) a otro depósito a una elevación mayor (z_B = 13 m) a través de dos tuberías de 36 m de largo conectadas en paralelo, como se muestra en la figura 8-47. Las tuberías son de acero comercial, y los diámetros de las dos tuberías son 4 y 8 cm. El agua se bombeará mediante un acoplamiento motor-bomba con una eficiencia del 70 por ciento que extrae 8 kW de potencia eléctrica durante la operación. Las pérdidas menores y la pérdida de carga en las tuberías que conectan las uniones de las tuberías paralelas a los dos depósitos se consideran despreciables. Determine la razón de flujo total entre los depósitos y la razón de flujo a través de cada una de las tuberías paralelas.

SOLUCIÓN Está dada la potencia de bombeo aplicada a un sistema de tuberías con dos tuberías paralelas. Se deben determinar las razones de flujo.

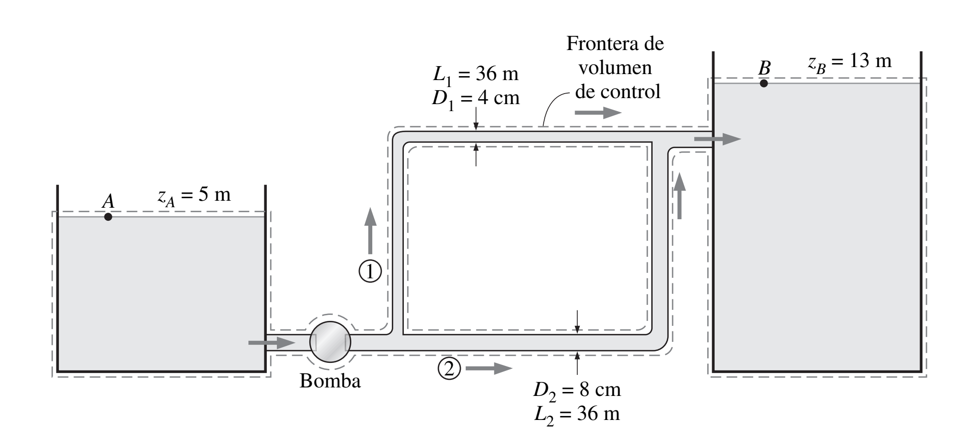


FIGURA 8-47
Sistema de tuberías comentado en el Ejemplo 8-7.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Los efectos de entrada son despreciables y por lo tanto el flujo está totalmente desarrollado. **3** La elevación de los depósitos permanece constante. **4** Se dice que las pérdidas menores y la pérdida de carga en las tuberías distintas a las tuberías paralelas son despreciables. **5** Los flujos a través de ambas tuberías son turbulentos (por verificar).

Propiedades La densidad y la viscosidad dinámica del agua a 20°C son ρ = 998 kg/m^3 y μ = 1.002 $\times$ 10^{-3} kg/m · s. La rugosidad de la tubería de acero comercial es ε = 0.000045 m.

Análisis Este problema no se puede resolver directamente porque no se conocen las velocidades (o razones de flujo) en las tuberías. Por lo tanto, normalmente se usaría un método de prueba y error. Sin embargo, los actuales paquetes de resolución de ecuaciones, como el EES, son fáciles de adquirir, por lo tanto simplemente se establece el sistema de ecuaciones por resolver mediante un paquete de resolución de ecuaciones. La carga útil suministrada por la bomba al fluido se determina a partir de:

$$\dot{W}_{\text{eléct}} = \frac{\dot{V} g h_{\text{bomba, }u}}{\eta_{\text{bomba}-\text{motor}}} \quad \rightarrow \quad 8\,000 \text{ W} = \frac{(998 \text{ kg/m}^3)\dot{V}(9.81 \text{ m/s}^2)h_{\text{bomba, }u}}{0.70} \tag{1}$$

Se eligen los puntos A y B en las superficies libres de los dos depósitos. Cuando se nota que el fluido en ambos puntos está abierto a la atmósfera (y por lo tanto $P_A = P_B = P_{\text{atm}}$) y que las velocidades del fluido en ambos puntos son cero ($V_A = V_B = 0$), la ecuación de energía para un volumen de control entre estos dos puntos se simplifica a:

$$\frac{\cancel{P_A}}{\rho g} + \alpha_A \frac{V_A^2}{2g}\nearrow^0 + z_A + h_{\text{bomba, }u} = \frac{\cancel{P_B}}{\rho g} + {}_B\frac{V_B^2}{2g}\nearrow^0 + z_B + h_L \rightarrow h_{\text{bomba, }u} = (z_B - z_A) + h_L$$

o

$$h_{\text{bomba, }u} = (13 - 5) + h_L \tag{2}$$

donde

$$h_L = h_{L,1} = h_{L,2} \tag{3)(4}$$

La tubería de 4 cm de diámetro se designa con 1 y la tubería de 8 cm de diámetro se designa con 2. La velocidad promedio, el número de Reynolds, el factor de fricción y la pérdida de carga en cada tubería se expresan como:

$$V_1 = \frac{\dot{V}_1}{A_{c,1}} = \frac{\dot{V}_1}{\pi D_1^2/4} \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{\dot{V}_1}{\pi(0.04 \text{ m})^2/4} \tag{5}$$

$$V_2 = \frac{\dot{V}_2}{A_{c,2}} = \frac{\dot{V}_2}{\pi D_2^2/4} \quad \rightarrow \quad V_2 = \frac{\dot{V}_2}{\pi(0.08 \text{ m})^2/4} \tag{6}$$

$$\text{Re}_1 = \frac{\rho V_1 D_1}{\mu} \quad \rightarrow \quad \text{Re}_1 = \frac{(998 \text{ kg/m}^3)V_1(0.04 \text{ m})}{1.002 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} \tag{7}$$

$$\text{Re}_2 = \frac{\rho V_2 D_2}{\mu} \quad \rightarrow \quad \text{Re}_2 = \frac{(998 \text{ kg/m}^3)V_2(0.08 \text{ m})}{1.002 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} \tag{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2.0 \log\left(\frac{\varepsilon/D_1}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_1\sqrt{f_1}}\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2.0 \log\left(\frac{0.000045}{3.7 \times 0.04} + \frac{2.51}{\text{Re}_1\sqrt{f_1}}\right) \tag{9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_2}} = -2.0 \log\left(\frac{\varepsilon/D_2}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_2\sqrt{f_2}}\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f_2}} = -2.0 \log\left(\frac{0.000045}{3.7 \times 0.08} + \frac{2.51}{\text{Re}_2\sqrt{f_2}}\right) \quad \textbf{(10)}$$

$$h_{L,1} = f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} \quad \rightarrow \quad h_{L,1} = f_1 \frac{36 \text{ m}}{0.04 \text{ m}} \frac{V_1^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} \quad \textbf{(11)}$$

$$h_{L,2} = f_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g} \quad \rightarrow \quad h_{L,2} = f_2 \frac{36 \text{ m}}{0.08 \text{ m}} \frac{V_2^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} \quad \textbf{(12)}$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad \textbf{(13)}$$

Éste es un sistema de 13 ecuaciones con 13 incógnitas, y su solución simultánea con un paquete de resolución de ecuaciones produce:

$$\dot{V} = \mathbf{0.0300\ m^3/s}, \quad \dot{V}_1 = \mathbf{0.00415\ m^3/s}, \quad \dot{V}_2 = \mathbf{0.0259\ m^3/s}$$

$$V_1 = 3.30 \text{ m/s}, \quad V_2 = 5.15 \text{ m/s}, \quad h_L = h_{L,1} = h_{L,2} = 11.1 \text{ m}, \quad h_{\text{bomba}} = 19.1 \text{ m}$$

$$\text{Re}_1 = 131\,600, \quad \text{Re}_2 = 410\,000, \quad f_1 = 0.0221, \quad f_2 = 0.0182$$

Note que Re $>$ 4 000 para ambas tuberías, y por lo tanto se verifica la suposición de flujo turbulento.

Discusión Las dos tuberías paralelas son idénticas, excepto que el diámetro de la primera es la mitad del diámetro de la segunda. Pero sólo 14 por ciento del agua fluye a través de la primera tubería. Esto muestra la considerable dependencia de la razón de flujo (y la pérdida de carga) del diámetro. Además, se puede demostrar que si las superficies libres de los depósitos estuvieran a la misma elevación (y por lo tanto $z_A = z_B$), la razón de flujo aumentaría en 20 por ciento, de 0.0300 a 0.0361 m^3/s. De otra manera, si los depósitos fueran como están dados, pero las pérdidas de carga irreversibles fueran despreciables, la razón de flujo se volvería 0.0715 m^3/s (un aumento de 138 por ciento).

EJEMPLO 8-8 Flujo de agua conducido por gravedad en una tubería

Se tiene agua a 10°C que fluye de un depósito grande a uno más pequeño a través de un sistema de tuberías de hierro fundido de 5 cm de diámetro, como se muestra en la figura 8-48. Determine la elevación z_1 para una razón de flujo de 6 L/s.

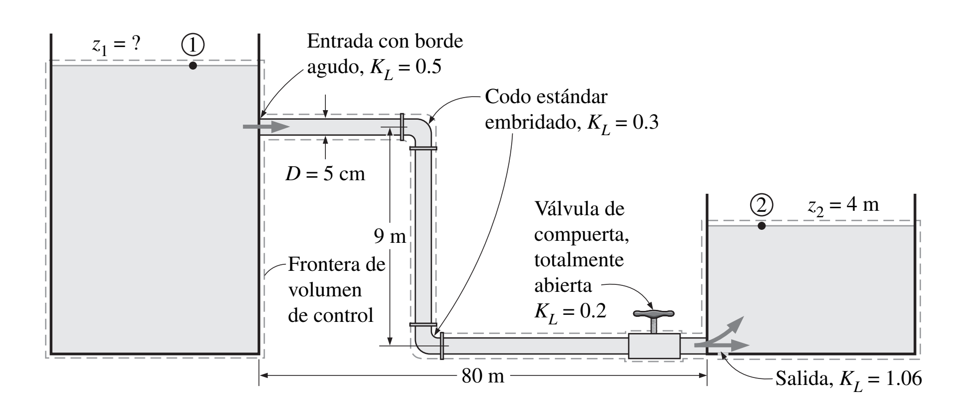


FIGURA 8-48
Sistema de tuberías comentado en el ejemplo 8-8.

SOLUCIÓN Está dada la razón de flujo a través de un sistema de tuberías que conecta dos depósitos. Se debe determinar la elevación del depósito fuente.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Las elevaciones de los depósitos permanecen constantes. **3** No hay bombas o turbinas en la línea.

Propiedades La densidad y la viscosidad dinámica del agua a 10°C son $\rho = 999.7$ kg/m^3 y $\mu = 1.307 \times 10^{-3}$ kg/m · s. La rugosidad de la tubería de hierro fundido es $\varepsilon = 0.00026$ m.

Análisis El sistema de tubería tiene 89 m de tuberías, una entrada con borde agudo ($K_L = 0.5$), dos codos estándar embridados ($K_L = 0.3$ para cada uno), una válvula de compuerta totalmente abierta ($K_L = 0.2$) y una salida sumergida ($K_L = 1.06$). Los puntos 1 y 2 se eligen en las superficies libres de los dos depósitos. Cuando se nota que el fluido en ambos puntos está abierto a la atmósfera (y por ende $P_1 = P_2 = P_{atm}$) y que las velocidades del fluido en ambos puntos son cero ($V_1 = V_2 = 0$), la ecuación de energía para un volumen de control entre estos dos puntos se simplifica a:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g}^{\nearrow 0} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}^{\nearrow 0} + z_2 + h_L \quad \rightarrow \quad z_1 = z_2 + h_L$$

donde

$$h_L = h_{L,\,\text{total}} = h_{L,\,\text{mayor}} + h_{L,\,\text{menor}} = \left(f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g}$$

porque el diámetro del sistema de tuberías es constante. La velocidad promedio en la tubería y el número de Reynolds son:

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{0.006 \text{ m}^3\text{/s}}{\pi(0.05 \text{ m})^2/4} = 3.06 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(999.7 \text{ kg/m}^3)(3.06 \text{ m/s})(0.05 \text{ m})}{1.307 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 117\ 000$$

El flujo es turbulento porque Re > 4 000. Note que $\varepsilon/D = 0.00026/0.05 = 0.0052$, y el factor de fricción se puede determinar a partir de la ecuación de Colebrook (o el diagrama de Moody):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{0.0052}{3.7} + \frac{2.51}{117\ 000\sqrt{f}}\right)$$

Ello proporciona $f = 0.0315$. La suma de los coeficientes de pérdida es:

$$\sum K_L = K_{L,\,\text{entrada}} + 2K_{L,\,\text{codo}} + K_{L,\,\text{válvula}} + K_{L,\,\text{salida}}$$
$$= 0.5 + 2 \times 0.3 + 0.2 + 1.06 = 2.36$$

Entonces la pérdida de carga total y la elevación del depósito fuente se convierten en:

$$h_L = \left(f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g} = \left(0.0315\frac{89 \text{ m}}{0.05 \text{ m}} + 2.36\right)\frac{(3.06 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 27.9 \text{ m}$$

$$z_1 = z_2 + h_L = 4 + 27.9 = \mathbf{31.9\ m}$$

Por lo tanto, la superficie libre del primer depósito debe ser 31.9 m sobre el nivel del suelo para garantizar el flujo de agua entre los dos depósitos a la razón especificada.

Discusión Note que en este caso, $fL/D = 56.1$ que es aproximadamente 24 veces el coeficiente total de pérdida menor. En consecuencia, ignorar las fuentes de pérdidas menores en este caso resultaría en casi 4 por ciento de error.

Se puede demostrar que la pérdida de carga total sería de 35.9 m (en vez de 27.9 m) si la válvula estuviera cerrada 3/4, y caería a 24.8 m si la tubería entre los dos depósitos fuera recta al nivel del suelo (por tanto, cuando se eliminan los

codos y la sección vertical de la tubería). La pérdida de carga se podría reducir todavía más (de 24.8 a 24.6 m) cuando se redondea la entrada. La pérdida de carga se puede reducir considerablemente (de 27.9 a 16.0 m) si se sustituyen las tuberías de hierro fundido por tuberías lisas, como las de plástico.

EJEMPLO 8-9 Efecto de vaciado sobre la razón de flujo de una ducha

Las cañerías de un baño de un edificio se conforman por tuberías de cobre de 1.5 cm de diámetro con conectores roscados, como se muestra en la figura 8-49. *a*) Si la presión manométrica en la entrada del sistema es de 200 kPa durante una ducha y el depósito del retrete está lleno (no hay flujo en dicho ramal), determine la razón de flujo del agua a través de la regadera de la ducha. *b*) Determine el efecto del vaciado del retrete sobre la razón de flujo a través de la regadera de la ducha. Considere que los coeficientes de la pérdida de la regadera de ducha y del depósito son 12 y 14, respectivamente.

SOLUCIÓN Está dado el sistema de cañerías de agua fría de un baño. Se debe determinar la razón de flujo a través de la ducha y el efecto de vaciado del retrete sobre la razón de flujo.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** El flujo es turbulento y totalmente desarrollado. **3** El depósito está abierto a la atmósfera. **4** Las cargas de velocidad son despreciables.

Propiedades Las propiedades del agua a 20°C son ρ = 998 kg/m^3, μ = 1.002 $\times$ 10^{-3} kg/m · s y $\nu = \mu/\rho$ = 1.004 $\times$ 10^{-6} m^2/s. La rugosidad de las tuberías de cobre es ε = 1.5 $\times$ 10^{-6} m.

Análisis Éste es un problema del segundo tipo porque exige determinar la razón de flujo para un diámetro de tubería y caída de presión específicas. La solución exige un enfoque iterativo dado que la razón de flujo (y por lo tanto la velocidad del flujo) se desconoce.

a) El sistema de tuberías de la ducha necesita 11 m de tubería, una conexión en T con flujo en línea (K_L = 0.9), dos codos estándar (K_L = 0.9 para cada uno), una válvula de globo totalmente abierta (K_L = 10) y una regadera de ducha (K_L = 12). En consecuencia, ΣK_L = 0.9 + 2 $\times$ 0.9 + 10 + 12 = 24.7. Cuando se nota que la regadera de la ducha está abierta a la atmósfera y las cargas de velocidad son despreciables, la ecuación de energía para un volumen de control entre los puntos 1 y 2 se simplifica a:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba, }u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina, }e} + h_L$$

$$\rightarrow \qquad \frac{P_{1,\text{ man}}}{\rho g} = (z_2 - z_1) + h_L$$

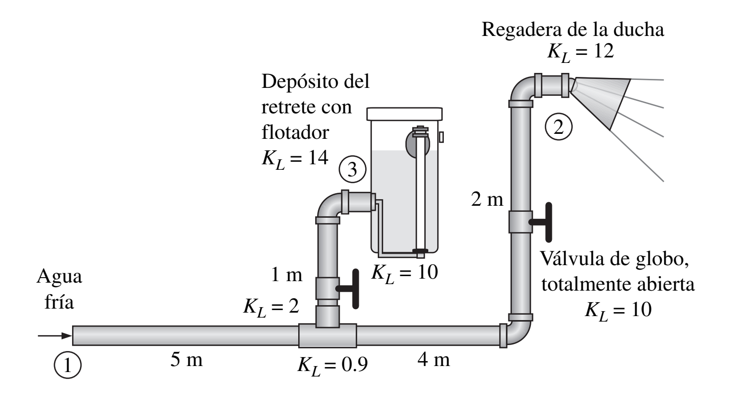


FIGURA 8-49
Esquema para el Ejemplo 8-9.

En consecuencia, la pérdida de carga es:

$$h_L = \frac{200\ 000\ \text{N/m}^2}{(998\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)} - 2\ \text{m} = 18.4\ \text{m}$$

Además:

$$h_L = \left(f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g} \quad \rightarrow \quad 18.4 = \left(f\frac{11\ \text{m}}{0.015\ \text{m}} + 24.7\right)\frac{V^2}{2(9.81\ \text{m/s}^2)}$$

porque el diámetro del sistema de tuberías es constante. La velocidad promedio en la tubería, el número de Reynolds y el factor de fricción son;

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} \quad \rightarrow \quad V = \frac{\dot{V}}{\pi(0.015\ \text{m})^2/4}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} \quad \rightarrow \quad \text{Re} = \frac{V(0.015\ \text{m})}{1.004 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\log\left(\frac{1.5 \times 10^{-6}\ \text{m}}{3.7(0.015\ \text{m})} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$$

Éste es un conjunto de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, y al resolverlos con un paquete de resolución de ecuaciones, como el EES, se produce:

$$\dot{V} = 0.00053\ \text{m}^3/\text{s}, \quad f = 0.0218, \quad V = 2.98\ \text{m/s} \qquad \text{y} \qquad \text{Re} = 44\ 550$$

En consecuencia, la razón de flujo del agua a través de la regadera de ducha es **0.53 L/s.**

b) Cuando el retrete se vacía, el flotador se acciona y abre la válvula. El agua en descarga comienza a llenar de nuevo el depósito, lo que resulta en flujo paralelo después de la conexión en T. Los coeficientes de la pérdida de carga y la pérdida menor para el ramal de la ducha se determinaron en *a*) $h_{L,\,2} = 18.4$ m y $\Sigma K_{L,\,2} = 24.7$, respectivamente. Las cantidades correspondientes para el ramal del depósito se pueden determinar de manera similar como:

$$h_{L,\,3} = \frac{200\ 000\ \text{N/m}^2}{(998\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)} - 1\ \text{m} = 19.4\ \text{m}$$

$$\Sigma K_{L,\,3} = 2 + 10 + 0.9 + 14 = 26.9$$

En este caso, las ecuaciones importantes son:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

$$h_{L,\,2} = f_1\frac{5\ \text{m}}{0.015\ \text{m}}\frac{V_1^2}{2(9.81\ \text{m/s}^2)} + \left(f_2\frac{6\ \text{m}}{0.015\ \text{m}} + 24.7\right)\frac{V_2^2}{2(9.81\ \text{m/s}^2)} = 18.4$$

$$h_{L,\,3} = f_1\frac{5\ \text{m}}{0.015\ \text{m}}\frac{V_1^2}{2(9.81\ \text{m/s}^2)} + \left(f_3\frac{1\ \text{m}}{0.015\ \text{m}} + 26.9\right)\frac{V_3^2}{2(9.81\ \text{m/s}^2)} = 19.4$$

$$V_1 = \frac{\dot{V}_1}{\pi(0.015\ \text{m})^2/4}, \quad V_2 = \frac{\dot{V}_2}{\pi(0.015\ \text{m})^2/4}, \quad V_3 = \frac{\dot{V}_3}{\pi(0.015\ \text{m})^2/4}$$

$$\text{Re}_1 = \frac{V_1(0.015\ \text{m})}{1.004 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}}, \quad \text{Re}_2 = \frac{V_2(0.015\ \text{m})}{1.004 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}}, \quad \text{Re}_3 = \frac{V_3(0.015\ \text{m})}{1.004 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}}$$



FIGURA 8-50
La razón de flujo de agua fría a través de una ducha se puede afectar considerablemente cuando se vacía un retrete cercano.

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2.0\log\left(\frac{1.5 \times 10^{-6}\text{ m}}{3.7(0.015\text{ m})} + \frac{2.51}{\text{Re}_1\sqrt{f_1}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_2}} = -2.0\log\left(\frac{1.5 \times 10^{-6}\text{ m}}{3.7(0.015\text{ m})} + \frac{2.51}{\text{Re}_2\sqrt{f_2}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_3}} = -2.0\log\left(\frac{1.5 \times 10^{-6}\text{ m}}{3.7(0.015\text{ m})} + \frac{2.51}{\text{Re}_3\sqrt{f_3}}\right)$$

Cuando se resuelven simultáneamente estas 12 ecuaciones con 12 incógnitas con el uso de un paquete de resolución de ecuaciones, las razones de flujo se determinan como:

$$\dot{V}_1 = 0.00090\text{ m}^3/\text{s}, \quad \dot{V}_2 = 0.00042\text{ m}^3/\text{s} \quad \text{y} \quad \dot{V}_3 = 0.00048\text{ m}^3/\text{s}$$

En consecuencia, cuando se vacía el retrete se **reduce la razón de flujo del agua fría a través de la ducha en 21 por ciento**, de 0.53 a 0.42 L/s, lo que provoca que el agua de la ducha se vuelva muy caliente súbitamente (Fig. 8-50).

Discusión Si se consideraran las cargas de velocidad, la razón de flujo a través de la ducha sería de 0.43 en vez de 0.42 L/s. Por lo tanto, la suposición de cargas de velocidad despreciables es razonable en este caso.

Note que una fuga en un sistema de tuberías provocaría el mismo efecto, y por tanto una caída inexplicable en el punto final puede señalar una fuga en el sistema.

8-8 ▪ MEDICIÓN DE RAZÓN DE FLUJO Y DE VELOCIDAD

Un área de importante aplicación de la mecánica de fluidos es la determinación de la razón de flujo de fluidos, y se han creado numerosos dispositivos, en el transcurso de los años, con el propósito de medir el flujo. Los flujómetros varían notablemente en sus niveles de sofisticación, tamaño, costo, precisión, versatilidad, capacidad, caída de presión y principio operativo. A continuación se ofrece un panorama de los instrumentos de medición usados comúnmente para medir la razón de flujo de líquidos y gases que fluyen a través de tuberías o ductos. La consideración se limita a flujo incompresible.

Algunos flujómetros miden la razón de flujo directamente cuando se descarga y se recarga continuamente una cámara de medición de volumen conocido y se mantiene constante el número de descargas por unidad de tiempo. Pero, la mayoría de los flujómetros mide la razón de flujo indirectamente: miden la velocidad promedio V o una cantidad que se relaciona con la velocidad promedio, como la presión y la fuerza de arrastre y determinan el flujo volumétrico $\dot{V}$ a partir de:

$$\dot{V} = VA_c \tag{8-65}$$

donde A_c es el área transversal del flujo. En consecuencia, la medición de la razón de flujo por lo general se realiza cuando se mide la velocidad de flujo, y la mayoría de los flujómetros simplemente son velocímetros que se usan con el propósito de medir flujo.

La velocidad en una tubería varía de cero en la pared a un máximo en el centro. Es importante considerarlo cuando se toman mediciones de velocidad. Por ejemplo, para flujo laminar, la velocidad promedio es la mitad de la velocidad en la línea central. Pero éste no es el caso en flujo turbulento, y puede ser necesario tomar el promedio ponderado de varias mediciones de velocidad local para determinar la velocidad promedio.

Las técnicas de medición de razón de flujo van desde las muy comunes hasta las muy elegantes. La razón de flujo del agua a través de una manguera de jardín, por ejemplo, se puede medir, simplemente, cuando se junta el agua en una cubeta de volumen conocido y se divide la cantidad reunida entre el tiempo de recolección (Fig. 8-51). Una manera no muy correcta de estimar la velocidad de flujo de un río es soltar un flotador en el río y medir el tiempo de deriva entre dos posiciones específicas. Por otro lado, algunos flujómetros usan la propagación del sonido en los fluidos que fluyen, mientras que otros usan la fuerza electromotriz que se genera cuando un fluido pasa a través de un campo magnético. En esta sección se comentan dispositivos que se usan con frecuencia para medir velocidad y razón de flujo, comenzando con la sonda de presión estática de Pitot, mencionada en el capítulo 5.

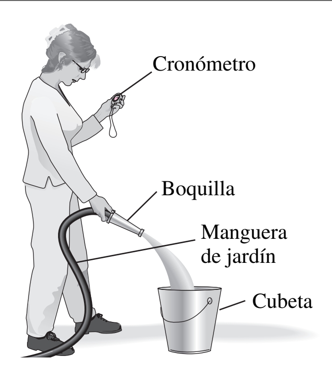


FIGURA 8-51
Una manera primitiva (pero bastante precisa) de medir la razón de flujo del agua a través de una manguera de jardín consiste en juntar agua en una cubeta y registrar el tiempo de recolección.

Sonda de Pitot y sonda de Pitot estática (tubo de Prandtl)

Las **sondas de Pitot** (también llamadas *tubos de Pitot*) y las **sondas de Pitot estáticas (tubos de Prandtl)**, llamadas así en honor del ingeniero francés Henri de Pitot (1695-1771), se usan para medición de razón de flujo. Una sonda de Pitot consiste en un tubo con un orificio de borde redondeado en el punto de estancamiento que mide la presión de estancamiento, mientras que una sonda de Pitot estática (tubo de Prandtl) tiene además de este orificio para la medición de presión de estancamiento varios orificios ubicados a lo largo de una circunferencia en la superficie exterior para medir la presión estática y así mide presiones de estancamiento y estáticas (Figs. 8-52 y 8-53). Pitot fue la primera persona que midió velocidad con el tubo orientado corriente arriba, mientras que el ingeniero francés Henry Darcy (1803-1858) desarrolló la mayoría de las características de los instrumentos que se usan en la actualidad, inclusive el empleo de pequeñas aberturas y la colocación del tubo estático en el mismo ensamble. Por lo tanto, es más apropiado llamar a las sondas de Pitot estáticas **sondas de Pitot-Darcy (también conocidas como tubos de Prandtl)**.

La sonda de Pitot estática mide la velocidad local cuando se mide la diferencia de presión en conjunto aplicando la ecuación de Bernoulli. Consiste en un tubo doble delgado alineado con el flujo y conectado a un medidor de presión diferencial. El tubo interior está totalmente abierto al flujo en la boquilla y por lo tanto mide la presión de estancamiento en dicha posición (punto 1). El tubo exterior está sellado en la nariz, pero tiene agujeros a los lados de la pared exterior (punto 2) y por lo tanto mide la presión estática. Para flujo incompresible con velocidades suficientemente altas (de modo que los efectos de fricción entre los puntos 1 y 2 son despreciables), la ecuación de Bernoulli es aplicable y se puede expresar como:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad \textbf{(8-66)}$$

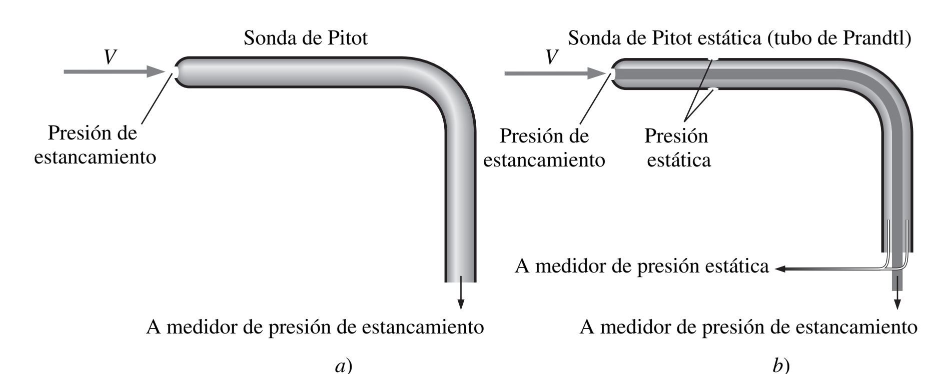


FIGURA 8-52
a) Una sonda de Pitot mide presión de estancamiento en la nariz de la sonda, mientras que *b*) una sonda de Pitot estática (tubo de Prandtl) mide tanto presión de estancamiento como presión estática, a partir de lo cual se puede calcular la velocidad de flujo.

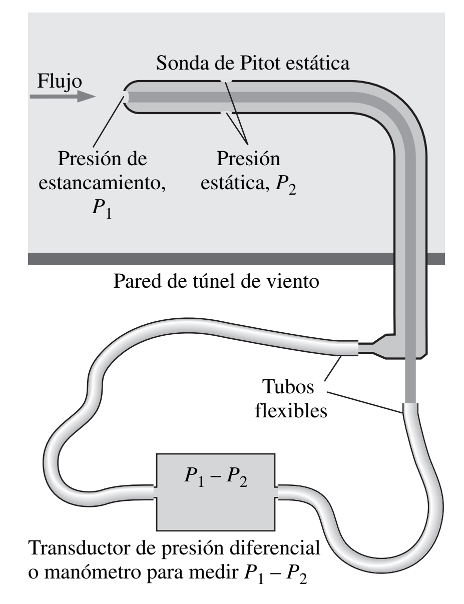


FIGURA 8-53
Medición de velocidad de flujo con una sonda de Pitot estática (también se puede usar un manómetro en vez del transductor de presión diferencial).

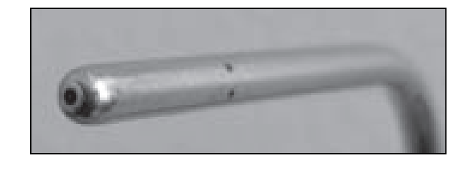


FIGURA 8-54
Acercamiento de una sonda de Pitot estática, que muestra el agujero de presión de estancamiento y dos de los cinco agujeros de presión estática circular.
Fotografía de Po-Ya Abel Chuang.

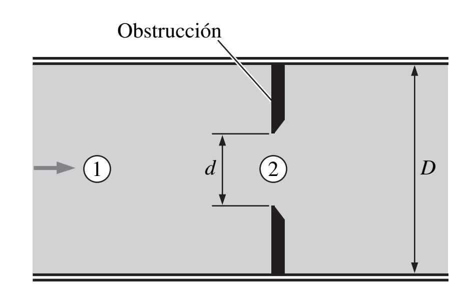


FIGURA 8-55
Flujo a través de una restricción en una tubería.

Cuando se nota que $z_1 \cong z_2$, porque los agujeros de presión estática de la sonda de Pitot estática se distribuyen circularmente alrededor del tubo y $V_1 = 0$ debido a las condiciones de estancamiento, la velocidad de flujo $V = V_2$ se vuelve:

Fórmula de Pitot: $$V = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} \qquad \textbf{(8-67)}$$

que se conoce como **fórmula de Pitot**. Si la velocidad se mide en una posición donde la velocidad local es igual a la velocidad de flujo promedio, la razón de flujo volumétrica se puede determinar a partir de: $\dot{V} = VA_c$.

La sonda de Pitot estática es un dispositivo sencillo, barato y enormemente confiable, pues no tiene partes móviles (Fig. 8-54). También provoca muy poca caída de presión y por lo general no perturba el flujo de manera apreciable. Sin embargo, es importante que se alinee adecuadamente con el flujo para evitar errores significativos que se puedan causar por una alineación incorrecta. Además, la diferencia entre las presiones estática y de estancamiento (que es la presión dinámica) es proporcional a la densidad del fluido y el cuadrado de la velocidad de flujo. Se puede usar para medir velocidad en líquidos y en gases. Cuando se nota que los gases tienen bajas densidades, la velocidad de flujo debe ser suficientemente alta cuando la sonda de Pitot estática se use para flujo de gas, de modo que se cree una presión dinámica mensurable.

Flujómetros de obstrucción: placas de orificio, medidores de Venturi y toberas de flujo

Considere flujo estacionario incompresible de un fluido en una tubería horizontal de diámetro D que se restringe a un área de flujo de diámetro d, como se muestra en la figura 8-55. Las ecuaciones de equilibrio de masa y de Bernoulli entre una posición antes de la restricción (punto 1) y la posición donde ocurre la restricción (punto 2) se puede escribir como:

Equilibrio de masa: $$\dot{V} = A_1V_1 = A_2V_2 \quad \rightarrow \quad V_1 = (A_2/A_1)V_2 = (d/D)^2V_2 \qquad \textbf{(8-68)}$$

Ecuación de Bernoulli ($z_1 = z_2$): $$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \qquad \textbf{(8-69)}$$

Cuando se combinan las ecuaciones 8-68 y 8-69 y se resuelven para la velocidad V_2 se obtiene:

Obstrucción (sin pérdida): $$V_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(1 - \beta^4)}} \qquad \textbf{(8-70)}$$

donde $\beta = d/D$ es la razón de diámetros. Después que se conoce V_2, la razón de flujo se puede determinar a partir de $\dot{V} = A_2V_2 = (\pi d^2/4)V_2$.

Este simple análisis muestra que la razón de flujo a través de una tubería se puede determinar cuando se restringe el flujo y se mide la disminución en presión debida al aumento en velocidad en el sitio de restricción. Cuando se nota que la caída de presión entre dos puntos a lo largo del flujo se puede medir con facilidad por medio de un transductor de presión diferencial o manómetro, parece que se puede construir un dispositivo simple de medición de razón de flujo cuando se obstruye el flujo. Los flujómetros que se basan en este principio se llaman **flujómetros de obstrucción** y se usan para medir razones de flujo de gases y líquidos.

La velocidad en la ecuación 8-70 se obtiene cuando se supone ausencia de las pérdidas, y por lo tanto es la velocidad máxima que puede ocurrir en el sitio de restricción. En realidad, son inevitables algunas pérdidas de presión debidas a efectos de fricción, y por lo tanto la velocidad será menor. Además, la corriente

de fluido continuará contraída al pasar la obstrucción, y el área de vena contracta será menor que el área de flujo de la obstrucción. Ambas pérdidas se pueden explicar al incorporar un factor de corrección llamado **coeficiente de descarga** C_d cuyo valor (que es menor que 1) se determina experimentalmente. Entonces la razón de flujo para el flujómetro de obstrucción se puede expresar como:

Flujómetros de obstrucción:
$$\dot{V} = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(1 - \beta^4)}} \quad \textbf{(8-71)}$$

donde $A_0 = A_2 = \pi d^2/4$ es el área transversal del agujero y $\beta = d/D$ es la razón del diámetro del agujero al diámetro de la tubería. El valor de C_d depende tanto de β como del número de Reynolds $\text{Re} = V_1 D/\nu$, y las gráficas y correlaciones de ajuste de curvas para C_d están disponibles para varios tipos de medidores de obstrucción.

De los numerosos tipos de medidores de obstrucción disponibles, los más ampliamente usados son las placas de orificio, las toberas de flujo y los medidores Venturi (Fig. 8-56). Los datos determinados experimentalmente para coeficientes de descarga se expresan como (Miller, 1997)

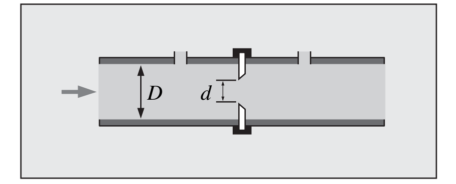
Placas de orificio:
$$C_d = 0.5959 + 0.0312\beta^{2.1} - 0.184\beta^8 + \frac{91.71\beta^{2.5}}{\text{Re}^{0.75}} \quad \textbf{(8-72)}$$

Toberas de flujo:
$$C_d = 0.9975 - \frac{6.53\beta^{0.5}}{\text{Re}^{0.5}} \quad \textbf{(8-73)}$$

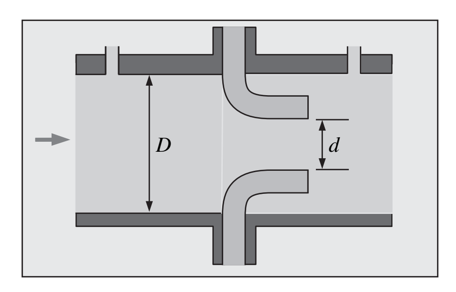
Estas relaciones son válidas para $0.25 < \beta < 0.75$ y $10^4 < \text{Re} < 10^7$. Los valores precisos de C_d dependen del diseño particular del flujómetro de obstrucción y por lo tanto se deben consultar los datos del fabricante cuando estén disponibles. Para flujos con números de Reynolds altos (Re > 30 000), el valor de C_d se puede tomar como 0.96 para toberas de flujo y 0.61 para placas de orificio.

Debido a su diseño currentilíneo, los coeficientes de descarga de los medidores Venturi son muy altos, y varían entre 0.95 y 0.99 (los valores más altos son para los números de Reynolds más altos) para la mayoría de los flujos. A falta de datos específicos, se puede tomar $C_d = 0.98$ para medidores Venturi. Además, el número de Reynolds depende de la velocidad del flujo, que no se conoce *a priori*. Por lo tanto, la solución es iterativa en naturaleza cuando se usan correlaciones de ajuste de curva para C_d.

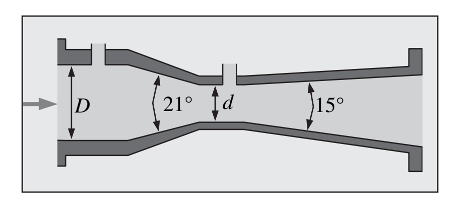
La placa de orificio tiene un diseño más simple y ocupa un espacio mínimo, porque consiste de una placa con un agujero en medio, pero existen variaciones considerables en su diseño (Fig. 8-57). Algunas placas de orificio tienen bordes agudos, mientras que otras son biseladas o redondeadas. El cambio repentino en



a) Placa de orificio



b) Tobera de flujo



c) Medidor Venturi

FIGURA 8-56
Tipos comunes de medidores de obstrucción.



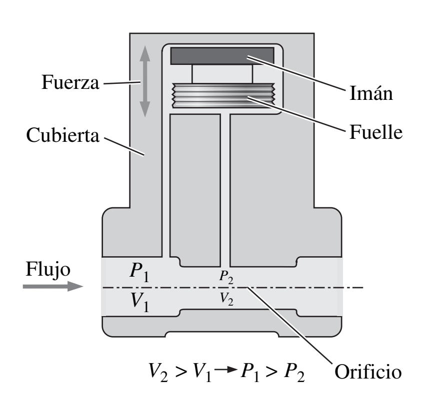


FIGURA 8-57
Placa de orificio y esquema que muestra su transductor de presión integrado y lector digital.
Cortesía de KOBOLD Instruments, Pittsburgh, PA. www.koboldusa.com. Reproducido con autorización.

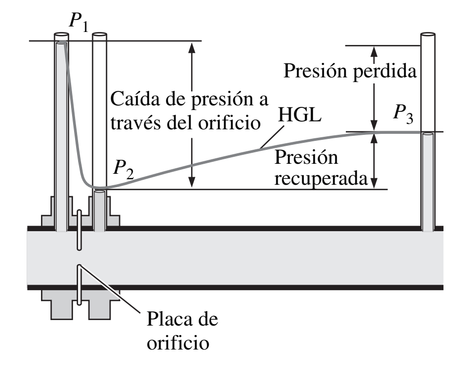


FIGURA 8-58
Variación de presión a lo largo de una sección de flujo con una placa de orificio conforme se mide con tubos piezométricos; se muestran la presión perdida y la recuperación de presión.

el área de flujo en las placas de orificio provoca considerables giros y por lo tanto pérdidas de carga significativas o pérdidas de presión permanentes, como se muestra en la figura 8-58. En las toberas de flujo, la placa se sustituye por una tobera y, por lo tanto, el flujo en la tobera es continuo. Como resultado, la vena contracta prácticamente se elimina y la pérdida de carga es pequeña. Sin embargo, las toberas de flujo son más caras que las placas de orificio.

El medidor Venturi, inventado por el ingeniero estadounidense Clemans Herschel (1842-1930), y nombrado por él en honor del italiano Giovanni Venturi (1746-1822) por sus trabajos pioneros acerca de las secciones cónicas de flujo, es el flujómetro más preciso en este grupo, pero también el más caro. Su contracción y expansión graduales evitan la separación del flujo y los remolinos, y sólo tiene pérdidas de fricción en las superficies de la pared interior. Los medidores Venturi causan pérdidas de carga muy bajas, como se muestra en la figura 8-59, y por lo tanto se deben preferir para aplicaciones que no pueden permitir grandes caídas de presión. La pérdida de carga irreversible para los medidores Venturi debida a la fricción sólo es de alrededor de 10 por ciento.

EJEMPLO 8-10 Medición de razón de flujo con una placa de orificio

Con una placa de orificio de 3 cm de diámetro equipada con un manómetro de mercurio, se debe medir la razón de flujo del metanol a 20°C (ρ = 788.4 kg/m^3 y μ = 5.857 $\times$ 10^{-4} kg/m · s) a través de una tubería de 3 cm de diámetro, como se muestra en la figura 8-60. Si la lectura del manómetro es de 11 cm, determine la razón de flujo del metanol a través de la tubería y la velocidad de flujo promedio.

SOLUCIÓN Se debe medir la razón de flujo del metanol con una placa de orificio. Para una caída de presión dada a través de la placa de orificio, se deben determinar la razón de flujo y la velocidad de flujo promedio.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** El coeficiente de descarga del medidor de orificio es C_d = 0.61.

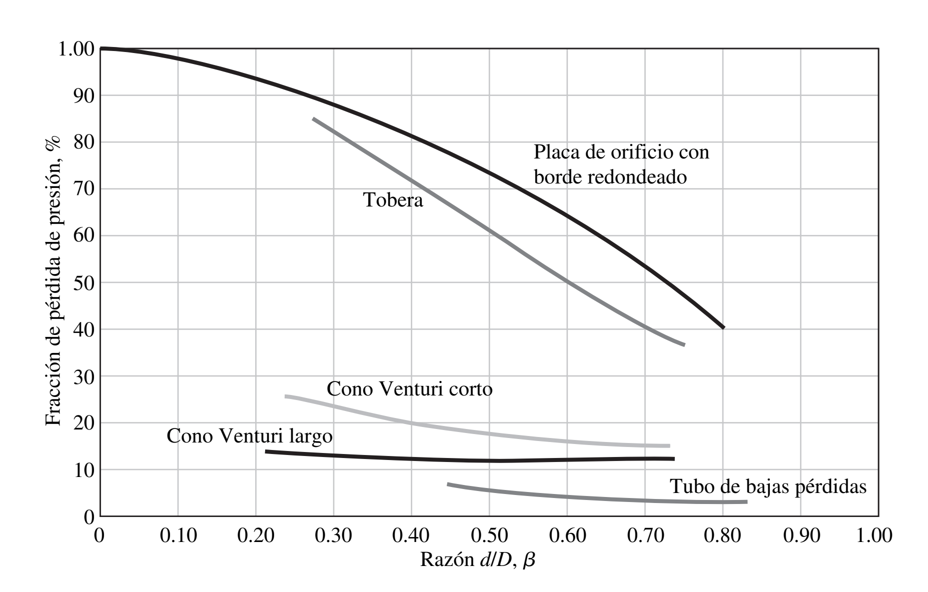


FIGURA 8-59
Fracción de pérdida de presión (o carga) para varios medidores de obstrucción.

Tomado de ASME Fluid Meters. *Reproducido con autorización de ASME International.*

Propiedades La densidad y viscosidad dinámica del metanol son $\rho = 788.4$ kg/m^3 y $\mu = 5.857 \times 10^{-4}$ kg/m · s, respectivamente. La densidad del mercurio se toma como 13 600 kg/m^3.

Análisis La razón de diámetros y el área de garganta del orificio son:

$$\beta = \frac{d}{D} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(0.03\text{ m})^2}{4} = 7.069 \times 10^{-4}\text{ m}^2$$

La caída de presión a través de la placa de orificio se puede expresar como:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = (\rho_{\text{Hg}} - \rho_{\text{met}})gh$$

Entonces la relación de la razón de flujo para medidores de obstrucción se vuelve:

$$\dot{V} = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(1 - \beta^4)}} = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(\rho_{\text{Hg}} - \rho_{\text{met}})gh}{\rho_{\text{met}}(1 - \beta^4)}} = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(\rho_{\text{Hg}}/\rho_{\text{met}} - 1)gh}{1 - \beta^4}}$$

Cuando se sustituye la razón de flujo se determina en:

$$\dot{V} = (7.069 \times 10^{-4}\text{ m}^2)(0.61)\sqrt{\frac{2(13\,600/788.4 - 1)(9.81\text{ m/s}^2)(0.11\text{ m})}{1 - 0.75^4}}$$

$$= \mathbf{3.09 \times 10^{-3}\ m^3/s}$$

que equivale a 3.09 L/s. La velocidad de flujo promedio en la tubería se determina cuando se divide la razón de flujo entre el área transversal de la tubería:

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{3.09 \times 10^{-3}\text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0.04\text{ m})^2/4} = \mathbf{2.46\ m/s}$$

Discusión El número de Reynolds del flujo a través de la tubería es:

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(788.4\text{ kg/m}^3)(2.46\text{ m/s})(0.04\text{ m})}{5.857 \times 10^{-4}\text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 1.32 \times 10^5$$

Cuando se sustituye $\beta = 0.75$ y $\text{Re} = 1.32 \times 10^5$ en la relación de coeficiente de descarga del orificio:

$$C_d = 0.5959 + 0.0312\beta^{2.1} - 0.184\beta^8 + \frac{91.71\beta^{2.5}}{\text{Re}^{0.75}}$$

produce $C_d = 0.601$, que está muy cerca del valor supuesto de 0.61. Cuando se usa este valor refinado de C_d, la razón de flujo se convierte en 3.04 L/s, que difiere del resultado original sólo por 1.6 por ciento. En consecuencia, es conveniente analizar los medidores de orificio con el valor recomendado de $C_d = 0.61$ para el coeficiente de descarga, y luego verificar el valor supuesto. Si el problema se resuelve con un paquete de resolución de ecuaciones, como el EES, entonces el problema se puede plantear con la fórmula de ajuste de curva para C_d (que depende del número de Reynolds), y todas las ecuaciones se pueden resolver simultáneamente con el paquete de resolución de ecuaciones que realiza las iteraciones necesarias.

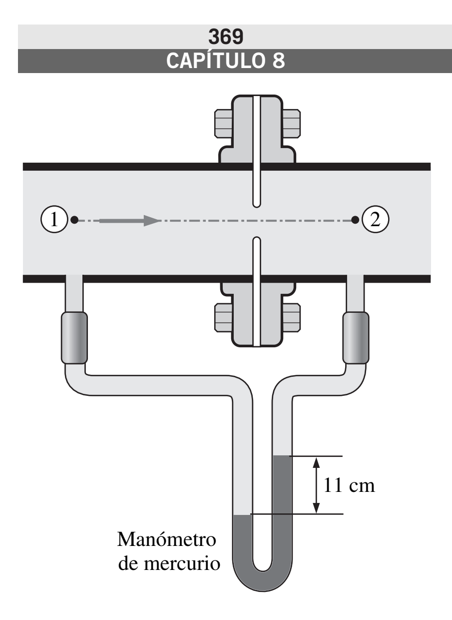


FIGURA 8-60
Esquema de la placa de orificio analizada en el ejemplo 8-10.

Flujómetros de desplazamiento positivo

Cuando se compra gasolina para el auto, surge un interés en la cantidad total de gasolina que fluye a través de la boquilla mientras se llena el tanque, en lu-

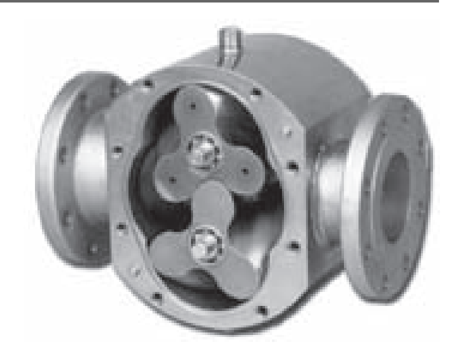


FIGURA 8-61
Flujómetro de desplazamiento positivo con diseño de impulsor de doble hélice trilobulada.
Cortesía de Flow Technology, Inc. Fuente: www.ftimeters.com

gar de la razón de flujo de la gasolina. De igual modo, hay preocupación por la cantidad total de agua o gas natural que se usa en los hogares durante un periodo de facturación. En éstas y muchas otras aplicaciones, la cantidad de interés es la cantidad total de masa o volumen de un fluido que pasa a través de una sección transversal de una tubería durante cierto periodo en lugar del valor instantáneo de la razón de flujo, y los **flujómetros de desplazamiento positivo** están adaptados de manera adecuada para estas aplicaciones. Existen varios tipos de medidores de desplazamiento, y se basan con el llenado y descarga continua de la cámara de medición. Operan cuando capturan cierta cantidad de fluido entrante, lo desplazan al lado de descarga del medidor y cuentan el número de tales ciclos de descarga-carga para determinar la cantidad total de fluido desplazado. El espacio libre entre el impulsor y su carcasa se debe controlar cuidadosamente para impedir fugas y, por lo tanto, evitar errores.

La figura 8-61 muestra un flujómetro de desplazamiento positivo con dos impulsores rotatorios activados por el líquido que fluye. Cada impulsor tiene tres lóbulos y cada vez que un lóbulo pasa por un sensor no-intrusivo se genera una señal de salida pulsátil. Cada pulso representa un volumen conocido de líquido que se captura entre los lóbulos de los impulsores, y un controlador electrónico convierte los pulsos a unidades de volumen. Este medidor particular tiene una precisión citada de 0.1 por ciento, tiene una caída de presión baja y se puede usar con líquidos de grande o baja viscosidad a temperaturas de hasta 230°C y presiones de hasta 7 Mpa para razones de flujo de 700 gal/min (o 50 L/s).

Los flujómetros de uso más generalizado para medir volúmenes líquidos son los **flujómetros de disco nutante**, que se muestran en la figura 8-62. Usualmente se emplean como medidores de agua y gasolina. El líquido entra al medidor de disco en nutación a través de la cámara (*A*). Esto provoca que el disco (*B*) tenga nutación o bambolee y resulte en la rotación de un perno (*C*) y la excitación de un imán (*D*). Esta señal se trasmite a través de la carcasa del medidor a un segundo imán (*E*). El volumen total se obtiene cuando se cuenta el número de estas señales durante un proceso de descarga.

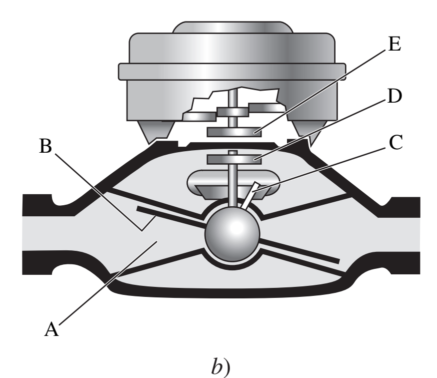
Las cantidades de flujo de gas, como la cantidad de gas natural que se usa en los edificios, comúnmente se miden al usar flujómetros de fuelle que desplazan determinada cantidad de volumen de gas durante cada revolución.

Flujómetros de turbina

Todos conocen por experiencia que una hélice que se sostiene frente al viento rota, y la razón de rotación aumenta conforme aumenta la velocidad del viento.



a)

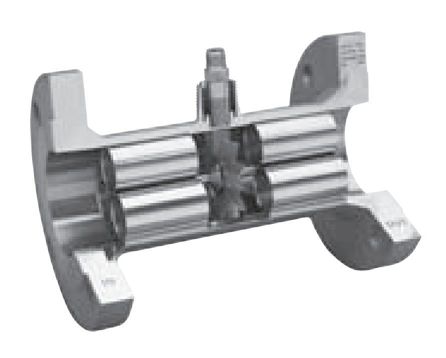


b)

FIGURA 8-62
Flujómetro de disco en nutación.
a) Cortesía de Badger Meter, Inc. Fuente: www.badgermeter.com



a)



b)



c)

FIGURA 8-63
a) Flujómetro de turbina en línea para medir flujo de líquidos, donde el flujo viene de izquierda a derecha; *b*) acercamiento de las hélices de la turbina en el interior del flujómetro, visto sobre el eje con el flujo normal a la página, y *c*) un flujómetro de turbina portátil para medir velocidad del viento, que en la foto no mide flujo de modo que las hélices de la turbina son visibles. El flujómetro en *c*) además mide la temperatura del aire por conveniencia.

Fotografías a) y c) por John M. Cimbala. Fotografía b) cortesía de Hoffer Flow Controls.

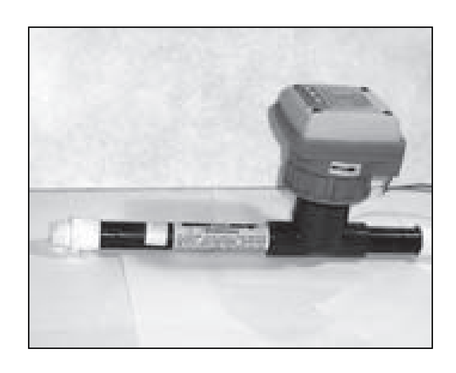
Es posible que el lector también haya visto que las hélices de la turbina de las turbinas de viento rotan, más bien, lentamente a vientos bajos, pero bastante rápido a vientos altos. Estas observaciones sugieren que se puede medir la velocidad del flujo en una tubería cuando se coloca una hélice que rote libremente en el interior de una sección de tubería y se realice la calibración necesaria. Los dispositivos de medición de flujo que funcionan con este principio se llaman **flujómetros de turbina** o, en ocasiones, **flujómetros de hélice**, aunque esto último es un error porque, por definición, las hélices añaden energía a un fluido, mientras que las turbinas extraen energía de un fluido.

Un flujómetro de turbina consiste de una sección de flujo cilíndrico que alberga una turbina (un rotor con álabes directores) que es libre de rotar, álabes directores estacionarias adicionales a la entrada para enderezar el flujo y un sensor que genera un pulso cada vez que pasa un punto marcado en la turbina para determinar la razón de rotación. La rapidez rotacional de la turbina aproximadamente es proporcional a la razón de flujo del fluido. Los flujómetros de turbina proporcionan resultados precisos (tan precisos como 0.25 por ciento) sobre un amplio rango de razones de flujo cuando se calibran adecuadamente para las condiciones de flujo anticipadas. Los flujómetros de turbina tienen pocas álabes (en ocasiones sólo dos) cuando se usan para medir flujo de líquido, pero varias cuando se usan para medir flujo de gas para garantizar generación de torque adecuado. La pérdida de carga causada por la turbina es muy pequeña.

Los flujómetros de turbina se han usado de manera extensa para medición de flujo desde la década de los años cuarenta debido a su simplicidad, bajo costo y precisión sobre un amplio rango de condiciones de flujo. Se fabrican comercialmente para líquidos y gases y para tuberías en general de todos los tamaños. Los flujómetros de turbina también se usan, por lo general para medir velocidades de flujo en flujos no-confinados como vientos, ríos y corrientes oceánicas. El dispositivo portátil que se muestra en la figura 8-63*b*) se usa para medir velocidad de viento.

Flujómetros de rueda de paletas

Los flujómetros de rueda de paletas son alternativas de bajo costo a los flujómetros de turbinas para flujos donde no se necesita una muy alta precisión. En los flujómetros de rueda de paletas, la rueda (el rotor y las paletas) es perpendicular al flujo, como se muestra en la figura 8-64, en lugar de ser paralela como fue el



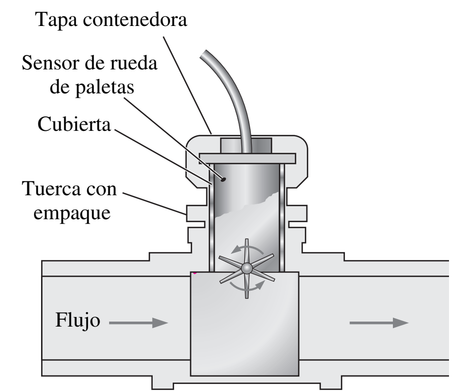


FIGURA 8-64
Flujómetro con rueda de paletas para medir flujo de líquido, donde el flujo va de izquierda a derecha, y un diagrama esquemático de su operación.
Fotografía de John M. Cimbala.

caso con los flujómetros de turbina. Las paletas sólo cubren una porción de la sección transversal del flujo (por lo general, menos de la mitad) y por lo tanto la pérdida de carga es mucho más pequeña en comparación con la de los flujómetros de turbina, pero la profundidad de la inserción de la rueda de paletas en el flujo es de importancia decisiva para la precisión. Además, no se necesitan filtros porque las ruedas de paletas no son susceptibles de atascarse. Un sensor detecta el paso de cada aspa de la rueda de paletas y trasmite una señal. Entonces un microprocesador convierte esta información de velocidad rotacional en razón de flujo o cantidad de flujo integrada.

Flujómetros de área variable (rotámetro)

Un flujómetro simple, confiable, barato y fácil de instalar con caída de presión baja y sin conexiones eléctricas que además proporciona una lectura directa de la razón de flujo para un amplio rango de líquidos y gases es el **flujómetro de área variable**, también llamado **rotámetro**. Un flujómetro de área variable consiste de un estrecho tubo transparente cónico vertical fabricado de vidrio o plástico con un flotador en su interior que tiene libertad de moverse, como se muestra en la figura 8-65. Conforme el fluido fluye a través del tubo estrecho, el flotador sube dentro del tubo hasta una posición donde el peso del flotador, la fuerza de arrastre y la fuerza de flotabilidad se equilibran mutuamente y la fuerza neta que actúa sobre el flotador es cero. La razón de flujo se determina con simplemente igualar la posición del flotador contra la escala de flujo graduada en el exterior del estrecho tubo transparente.



a) *b*)

FIGURA 8-65
Dos tipos de flujómetros de área variable: *a*) medidor común basado en gravedad y *b*) medidor de resorte opuesto.
a) Fotografía de Luke A. Cimbala y b) Cortesía de Insite, Universal Flow Monitors, Inc. Reproducido con autorización.

Se sabe por experiencia que los vientos fuertes derriban árboles, rompen líneas de trasmisión eléctrica y arrebatan sombreros o sombrillas. Esto se debe a que la fuerza de arrastre aumenta con la velocidad del flujo. El peso y la fuerza de flotabilidad que actúan sobre el flotador son constantes, pero la fuerza de arrastre cambia con la velocidad del flujo. Además, la velocidad disminuye a lo largo del tubo de sección decreciente en la dirección del flujo debido al aumento en el área transversal. Existe cierta velocidad que genera suficiente fuerza de arrastre para equilibrar el peso del flotador y la fuerza de flotabilidad, y la posición en la que ocurre esta velocidad alrededor del flotador es la posición donde el flotador se asienta. El grado de disminución del tubo se puede hacer tal que la elevación vertical cambie linealmente con la razón de flujo y por lo tanto el tubo se puede calibrar linealmente para razones de flujo. El tubo transparente también permite que el fluido se vea durante el flujo.

Existen muchos tipos de flujómetros de área variable. El flujómetro basado en gravedad, el cual ya se comentó, se debe colocar verticalmente, para que el fluido entre desde el fondo y salga de lo alto. En los flujómetros de resorte opuesto,

la fuerza de arrastre se equilibra con la fuerza del resorte y estos flujómetros se pueden instalar horizontalmente. Otro tipo de flujómetro usa un pistón de ajuste holgado en lugar de un flotador.

La precisión de los flujómetros de área variable usualmente es de ± 5 por ciento. Por lo tanto, estos flujómetros no son adecuados para aplicaciones que exigen mediciones de precisión. Sin embargo, algunos fabricantes citan precisiones del orden de 1 por ciento. Además, los medidores dependen de la verificación visual de la posición del flotador y, por lo tanto, no se puede usar para medir razones de flujo de fluidos que sean opacos o sucios, o fluidos que recubran al flotador porque estos fluidos bloquean el acceso visual. Finalmente, los tubos de vidrio son propensos a romperse; por lo tanto tienen un riesgo de seguridad si se manejan fluidos tóxicos. En tales aplicaciones, los flujómetros de área variable se deben instalar en posiciones con tráfico mínimo.

Flujómetros ultrasónicos

Es una observación común que, cuando se arroja una piedra al agua en reposo, las ondas generadas se dispersan como círculos concéntricos uniformemente en todas direcciones. Pero cuando una piedra se lanza en un flujo de agua, como un río, las ondas se mueven mucho más rápido en la dirección del flujo (las velocidades de la onda y del flujo se suman ya que están en la misma dirección) en comparación con las ondas que se mueven en la dirección corriente arriba (las velocidades de la onda y del flujo se restan, porque están en direcciones opuestas). Como resultado, las ondas parecen dispersarse corriente abajo mientras parece que están más cercanas entre sí corriente arriba. La diferencia entre el número de ondas en las partes del flujo corrientes arriba y abajo por unidad de longitud es proporcional a la velocidad del flujo. Esto sugiere que la velocidad del flujo se puede medir cuando se compara la propagación de las ondas en las direcciones de ida y vuelta al flujo. El **flujómetro ultrasónico** opera con base en este principio, con el uso de ondas sonoras en el rango ultrasónico (por lo general a una frecuencia de 1 MHz).

Los flujómetros ultrasónicos (o acústicos) operan mediante la generación de ondas sonoras con un transductor y miden la propagación de dichas ondas a través de un fluido que fluye. Existen dos tipos básicos de flujómetros ultrasónicos: flujómetros de *tiempo de tránsito* y de *efecto Doppler* (o *desplazamiento hacia el rojo*). El flujómetro de tiempo de tránsito trasmite ondas sonoras en las direcciones corriente arriba y corriente abajo y mide la diferencia en el tiempo de viaje. En la figura 8-66 se muestra un medidor ultrasónico de tiempo de tránsito. En él se intervienen dos transductores que alternativamente trasmiten y reciben ondas ultrasónicas, una en la dirección del flujo y la otra en la dirección opuesta. El tiempo de viaje para cada dirección se puede medir con precisión y se puede calcular la diferencia en el tiempo de viaje. La velocidad de flujo promedio V en la tubería es proporcional a esta diferencia de tiempo de viaje Δt y se puede determinar a partir de:

$$V = KL\,\Delta t \quad \text{(8-74)}$$

donde L es la distancia entre los transductores y K es una constante.

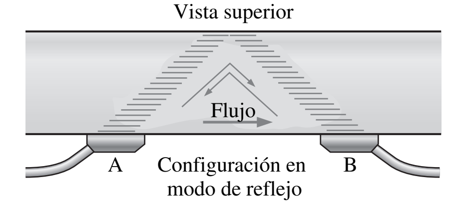


FIGURA 8-66
Operación de un flujómetro ultrasónico de tiempo de tránsito equipado con dos transductores, www.flocat.com

Flujómetros ultrasónicos de efecto Doppler

Quizá el lector habrá notado que cuando un auto se aproxima rápidamente sonando su claxon, el tono del sonido agudo de éste cae a uno más bajo conforme el auto pasa junto a usted. Eso se debe a que las ondas sonoras se comprimen enfrente del auto y se dispersan detrás de él. Este corrimiento en frecuencia se llama **efecto Doppler** y forma la base para la operación de la mayoría de los flujómetros ultrasónicos.

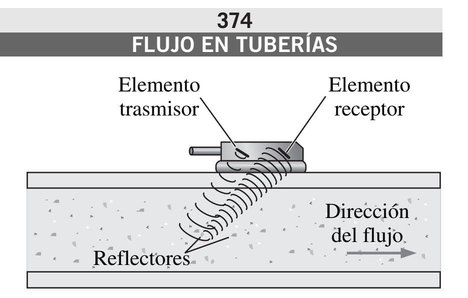


FIGURA 8-67
Operación de un flujómetro ultrasónico de efecto Doppler equipado con un transductor presionado contra la superficie exterior de una tubería.

Los **flujómetros ultrasónicos de efecto Doppler** miden la velocidad de flujo promedio a lo largo de la trayectoria sonora. Esto se hace cuando se aprieta con fuerza un transductor piezoeléctrico sobre la superficie exterior de una tubería (o se presiona el transductor contra la tubería para unidades portátiles). El transductor trasmite una onda sonora a una frecuencia fija a través de la pared de la tubería y hacia el líquido que fluye. Las ondas reflejadas por las impurezas, como partículas sólidas suspendidas o burbujas de gas atrapadas, se trasmiten a un transductor receptor. El cambio en la frecuencia de las ondas reflejadas es proporcional a la velocidad del flujo y un microprocesador determina la velocidad del flujo cuando compara el desplazamiento de la frecuencia entre las señales transmitida y reflejada (Figs. 8-67 y 8-68). La razón de flujo y la cantidad total de flujo también se pueden determinar cuando se usa la velocidad medida por medio de la configuración adecuada del flujómetro para una tubería dada y las condiciones del flujo.

La operación de los flujómetros ultrasónicos depende de las ondas ultrasonoras que se reflejan de las discontinuidades en la densidad. Los flujómetros ultrasónicos comunes exigen que el líquido contenga impurezas en concentraciones mayores que 25 partes por millón (ppm) en tamaños mayores que al menos 30 μm. Pero las unidades ultrasónicas avanzadas también pueden medir la velocidad de los líquidos limpios cuando sienten las ondas reflejadas de los remolinos turbulentos en la corriente del flujo, siempre que se instalen en ubicaciones donde estas perturbaciones no sean simétricas y a un alto nivel, como la sección de flujo justo corriente abajo de un codo de 90°.

Los flujómetros ultrasónicos tienen las siguientes ventajas:

- Son fáciles y rápidos de instalar cuando se aprietan con fuerza en el lado exterior de las tuberías de 0.6 cm hasta casi 3 m de diámetro, e inclusive en canales abiertos.
- No interfieren. Dado que los medidores se aprietan, no hay necesidad de detener la operación y perforar en las tuberías y no producen demoras.
- No hay caída de presión porque los medidores no interfieren el flujo.

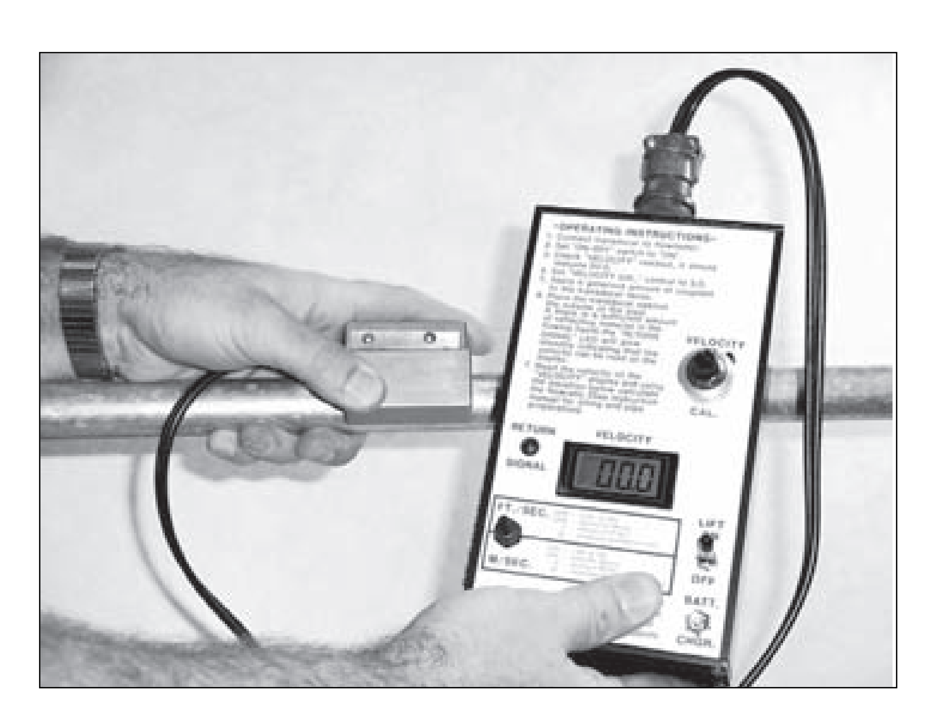


FIGURA 8-68
Los flujómetros ultrasónicos permiten medir la velocidad del flujo, inclusive sin tener contacto con el fluido con simplemente presionar un transductor sobre la superficie exterior de la tubería.
Fotografía de J. Matthew Deepe.

- Puesto que no hay contacto directo con el fluido, no hay peligro de corrosión u obstrucción.
- Son adecuados para una amplia variedad de fluidos, desde químicos tóxicos hasta suspensiones espesas y líquidos limpios, para medición de flujo permanente o temporal.
- No hay partes móviles y por lo mismo los medidores ofrecen confiabilidad y operación libre de mantenimiento.
- También pueden medir cantidades de flujo en flujo inverso.
- Las precisiones citadas son de 1 a 2 por ciento.

Los flujómetros ultrasónicos son dispositivos no invasivos, y los transductores ultrasónicos pueden trasmitir efectivamente señales a través de paredes de tuberías de cloruro de polivinil (PVC), acero, hierro y vidrio. Sin embargo, las tuberías recubiertas y las de concreto no son adecuadas para esta técnica de medición porque absorben las ondas ultrasonoras.

Flujómetros electromagnéticos

Se sabe que, desde los experimentos de Faraday en 1830, cuando un conductor se mueve en un campo magnético se crea una fuerza electromotriz a través del conductor como resultado de inducción magnética. La Ley de Faraday establece que el voltaje inducido a través de cualquier conductor mientras se mueve en ángulos rectos en un campo magnético es proporcional a la velocidad de dicho conductor. Eso sugiere que es posible determinar la velocidad del flujo cuando se sustituye el conductor sólido con un fluido conductor, y los **flujómetros electromagnéticos** hacen justo eso. Los flujómetros electromagnéticos se han usado desde mediados de 1950. Se venden en varios diseños como los tipos de flujo completo e inserción.

Un *flujómetro electromagnético de flujo completo* es un dispositivo no-invasivo que consiste de una bobina magnética que encierra a la tubería y dos electrodos metidos en la tubería a lo largo de un diámetro a través de las perforaciones y colocados al nivel de la superficie interior de la tubería de modo que los electrodos están en contacto con el fluido, pero no interfieren con el flujo y no provocan pérdida de carga alguna (Fig. 8-69*a*). Los electrodos se conectan a un voltímetro. Las bobinas generan un campo magnético cuando se sujetan a corriente eléctrica, y el voltímetro mide la diferencia de potencial eléctrico entre los electrodos. Esta diferencia de potencial es proporcional a la velocidad del flujo del fluido conductor, y en consecuencia se puede calcular la velocidad del flujo al relacionarlo con el voltaje generado.

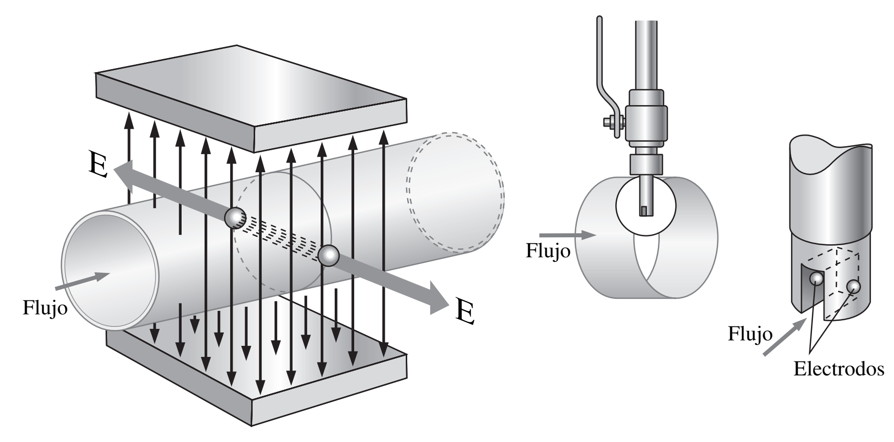


FIGURA 8-69
Flujómetros electromagnéticos: *a*) de flujo completo y *b*) de inserción, www.flocat.com

Los *flujómetros electromagnéticos de inserción* operan de manera similar, pero el campo magnético está confinado dentro de un canal de flujo en la punta de una barra insertada en el flujo, como se muestra en la figura 8-69*b*).

Los flujómetros electromagnéticos son adecuados para medir velocidades de flujo de metales líquidos como mercurio, sodio y potasio que se utilizan en algunos reactores nucleares. También se pueden usar para líquidos que son malos conductores, como el agua, siempre que contengan una cantidad adecuada de partículas cargadas. La sangre y el agua de mar, por ejemplo, contienen suficientes cantidades de iones y por lo mismo se pueden usar flujómetros electromagnéticos para medir sus razones de flujo. También se pueden usar para medir las razones de flujo de químicos, farmacéuticos, cosméticos, líquidos corrosivos, bebidas, fertilizantes y varias suspensiones espesas y aguas residuales, siempre que las sustancias tengan conductividades eléctricas suficientemente altas. Los flujómetros electromagnéticos no son adecuados para usarse con agua destilada o desionizada.

Los flujómetros electromagnéticos miden la velocidad de flujo indirectamente, y por lo tanto es importante la calibración cuidadosa durante la instalación. Su uso se limita, por su costo relativamente alto, potencia de consumo y las restricciones de los tipos de fluidos adecuados con los que se pueden utilizar.

Flujómetros de vórtice

Quizá el lector ha notado que, cuando una corriente de flujo, como un río, encuentra una obstrucción como una roca, el fluido se separa y se desplaza alrededor de la roca. Pero la presencia de la roca se mantiene durante cierta distancia corriente abajo a través de los remolinos que genera.

La mayoría de los flujos que se han encontrado en la práctica son turbulentos, y un disco o un cilindro corto colocado coaxialmente en el flujo desprende vórtices (véase también el capítulo 4). Se observa que dichos vórtices se desprenden periódicamente, y la frecuencia de derrame es proporcional a la velocidad de flujo promedio. Esto sugiere que la razón de flujo se puede determinar cuando se generan vórtices en el flujo cuando se coloca una obstrucción a lo largo del flujo y se mide la frecuencia de derrame. Los dispositivos de medición de flujo que operan según este principio se llaman **flujómetros de vórtice**. El *número de Strouhal*, $\text{St} = fd/V$, donde f es la frecuencia de derrame de vórtice, d es el diámetro o ancho característico de la obstrucción y V es la velocidad del flujo que incide sobre la obstrucción, también permanece constante en este caso, siempre que la velocidad del flujo sea lo suficientemente alta.

Un flujómetro de vórtice consiste de un cuerpo acuñado de bordes agudos colocado en el flujo que sirve como el generador de vórtice, y un detector (como un transductor de presión que registra la oscilación en la presión) colocado a una corta distancia corriente abajo en la superficie interior del revestimiento para medir la frecuencia de derrame. El detector puede ser un sensor ultrasónico, electrónico o de fibra óptica que monitorea los cambios en el patrón de vórtice y trasmite una señal de salida pulsátil (Fig. 8-70). Entonces, un microprocesador usa la información de la frecuencia para calcular y desplegar la velocidad del

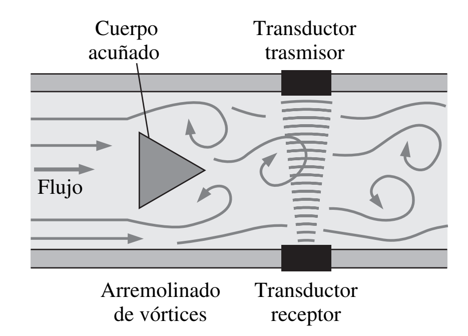


FIGURA 8-70
Operación de un flujómetro de vórtice, www.flocat.com

flujo o la razón de flujo. La frecuencia de derrame de vórtice es proporcional a la velocidad promedio sobre un amplio rango de números de Reynolds, y los flujómetros de vórtice operan confiablemente y con precisión a números de Reynolds de 10^4 a 10^7.

El flujómetro de vórtice tiene la ventaja de que no contiene partes móviles y es inherentemente confiable, versátil y muy preciso (por lo genera ± 1 por ciento sobre un amplio rango de razones de flujo), pero obstruye el flujo y por lo tanto causa considerable pérdida de carga.

Anemómetros térmicos (hilo caliente y película caliente)

Se introdujeron a finales de la década de los años cincuenta y han sido de uso común desde entonces en instalaciones y laboratorios de investigación de fluidos. Como el nombre implica, los anemómetros térmicos incluyen un sensor que se calienta eléctricamente, como se muestra en la figura 8-71, y utilizan un efecto térmico para medir velocidad de flujo. Los anemómetros térmicos tienen sensores extremadamente pequeños y se pueden usar para medir la velocidad instantánea en cualquier punto en el flujo sin perturbar considerablemente el flujo. Pueden tomar miles de mediciones de velocidad por segundo con excelente resolución espacial y temporal, y por lo mismo se pueden usar para estudiar los detalles de las fluctuaciones en el flujo turbulento. Pueden medir con precisión velocidades en líquidos y gases sobre un amplio rango: desde unos cuantos centímetros hasta cientos de metros por segundo.

Corriente eléctrica I
Velocidad de flujo V
Soporte del alambre
Sensor (un alambre delgado de aproximadamente 1 mm de largo con un diámetro de 5 μm)

FIGURA 8-71
Sensor calentado eléctricamente y su soporte, en una sonda de hilo caliente.

Un anemómetro térmico se llama **anemómetro de hilo caliente** si el elemento sensible es un alambre, y **anemómetro de película caliente** si el sensor es una delgada película metálica (menos de 0.1 μm de grosor) montada sobre un soporte cerámico relativamente grueso con un diámetro aproximado de 50 μm. El anemómetro de hilo caliente se caracteriza por su alambre sensor muy pequeño, característico de pocas micras de diámetro y de milímetros de longitud. El sensor está fabricado de platino, tungsteno o aleación de platino-iridio, y se une a la sonda con sujetadores. El fino alambre sensor de un anemómetro de hilo caliente es muy frágil debido a su pequeño tamaño y con facilidad se puede romper si el líquido o gas contiene cantidades excesivas de contaminantes o materia en partículas. Esto es en especial de consecuencia a altas velocidades. En estos casos, se deben usar las sondas de película caliente más resistentes. Pero, el sensor de la sonda de película caliente es más grande, tiene respuesta a frecuencia considerablemente más baja e interfiere más con el flujo; por lo tanto, no siempre es adecuado para estudiar los finos detalles del flujo turbulento.

El principio operativo de un anemómetro de temperatura constante (CTA, por sus siglas en inglés), el tipo más común se muestra de manera esquemática en la figura 8-72, es el siguiente: el sensor se calienta eléctricamente a una temperatura específica (por lo general, alrededor de 200°C). El sensor tiende a enfriarse conforme pierde calor hacia el fluido que fluye en los alrededores, pero los con-

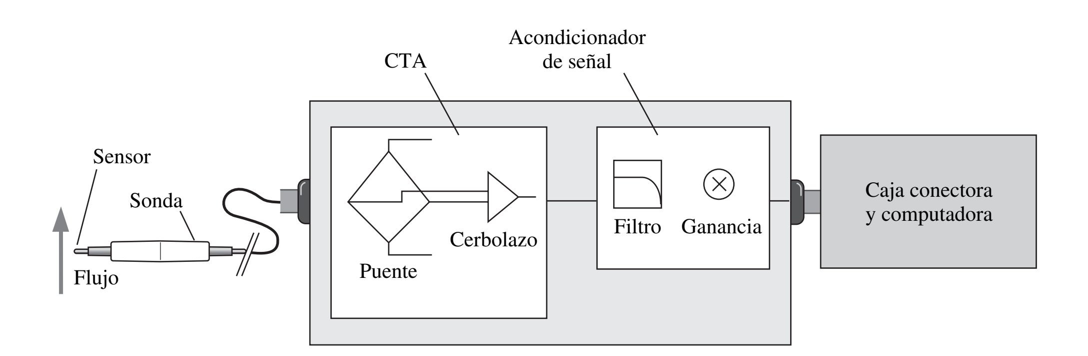
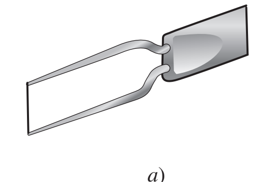
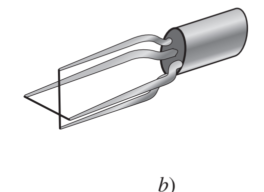


FIGURA 8-72
Esquema de un sistema de anemómetro térmico.





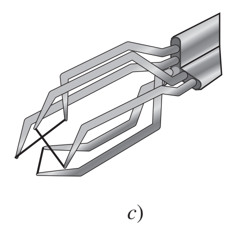


FIGURA 8-73
Sondas de anemómetro térmico con sensores sencillo, doble y triple para medir simultáneamente componentes de velocidad: *a*) uni-, *b*) bi- y *c*) tridimensional.

troles electrónicos mantienen al sensor a una temperatura constante cuando varía la corriente eléctrica (lo que se hace cuando varía el voltaje) según se necesite. Mientras mayor sea la velocidad de flujo, mayor será la razón de transferencia de calor desde el sensor, y más grande el voltaje que se necesite aplicar a través del sensor para mantenerlo a temperatura constante. Existe una correlación cercana entre la velocidad del flujo y el voltaje, y la velocidad de flujo se puede determinar cuando se mide el voltaje aplicado por un amplificador o la corriente eléctrica que pasa a través del sensor.

El sensor se mantiene a una temperatura constante durante la operación, y su contenido de energía térmica permanece constante. La conservación del principio de energía exige que el calentamiento eléctrico de Joule $\dot{W}_{\text{eléct}} = I^2R_w = E^2/R_w$ del sensor deba ser igual a la razón total de pérdida de calor del sensor $\dot{Q}_{\text{total}}$, que consiste de transferencia de calor por convección, porque la conducción hacia los soportes del alambre y la radiación hacia las superficies circunvecinas son pequeñas y pueden despreciarse. Cuando se usan las relaciones adecuadas para convección forzada, el equilibrio de energía se puede expresar por medio de la **Ley de King** como:

$$E^2 = a + bV^n \tag{8-75}$$

donde E es el voltaje y los valores de las constantes a, b y n están calibradas para una sonda dada. Una vez que se mide el voltaje, esta relación produce directamente la velocidad del flujo V.

La mayoría de los sensores de hilo caliente tienen un diámetro de 5 μm y una longitud de aproximadamente 1 mm y están hechos de tungsteno. El alambre está microsoldado a unos pernos con forma de aguja incrustados en un cuerpo de sonda, que está conectado a la electrónica del anemómetro. Los anemómetros térmicos se pueden usar para medir simultáneamente componentes de velocidad bidimensional o tridimensional cuando se usan sondas con dos o tres sensores, respectivamente (Fig. 8-73). Cuando se seleccionan sondas, se debe tener cuidado del tipo y el nivel de contaminación del fluido, el número de componentes de velocidad a medir, la resolución espacial y temporal necesaria, y la posición de la medición.

Velocimetría láser Doppler

La **velocimetría láser Doppler** (**LDV**, por sus siglas en inglés), también llamada **velocimetría láser** (**LV**) o **anemometría láser Doppler** (**LDA**), es una técnica óptica para medir velocidad de flujo en un punto deseado sin perturbar el flujo. A diferencia de la anemometría térmica, la LDV no involucra sondas o alambres insertados en el flujo, es un método no-intrusivo. Como la anemometría térmica, puede medir con precisión velocidad en un volumen muy pequeño, y también se puede usar para estudiar los detalles del flujo en una localidad, incluso fluctuaciones turbulentas, y se puede trasladar a través de todo el campo de flujo sin intrusión.

La técnica LDV se creó a mediados de la década de los años sesenta y encontró una amplia aceptación debido a la alta precisión que ofreció tanto para flujos

de gas como de líquidos; la alta resolución espacial que ofrece; y, en años recientes, su capacidad para medir los tres componentes de velocidad. Sus desventajas son el costo relativamente caro; el requisito de suficiente transparencia entre la fuente láser, la posición del blanco en el flujo y el fotodetector; y el requisito de alineación cuidadosa de los haces emitido y reflejado para precisión. La última desventaja se elimina para el caso de un sistema LDV de fibra óptica, porque está alineado en la fábrica.

El principio operativo del LDV se basa en el envío de un haz de luz monocromática (todas las ondas están en fase y a la misma longitud de onda) coherente hacia el blanco, la recolección de la luz reflejada por las pequeñas partículas en el área del blanco, la determinación del cambio en la frecuencia de la radiación reflejada debida al efecto Doppler y la relación de este cambio de frecuencia con la velocidad del flujo del fluido en el área del blanco.

Los sistemas LDV están disponibles en muchas configuraciones diferentes. En la figura 8-74 se muestra un sistema básico LDV de haz dual para medir un solo componente de velocidad. En el corazón de todos los sistemas LDV está una fuente de poder láser, que por lo general es un láser helio-neón o argón-ion con una salida de potencia de 10 mW a 20 W. Los láser se prefieren sobre otras fuentes de luz, porque los haces láser son sumamente coherentes y altamente enfocados. El láser de helio-neón, por ejemplo, emite radiación en una longitud de onda de 0.6328 μm, que está en el rango de color rojo-naranja. El haz láser se divide primero en dos haces paralelos de igual intensidad por medio de un espejo medio plateado llamado *divisor de haz*. Entonces ambos haces pasan a través de una lente convergente que enfoca los haces en un punto en el flujo (el *blanco*). El pequeño volumen de fluido donde los dos haces intersecan es la región en la cual la velocidad se mide y se llama el *volumen de medición* o el *volumen focal*. El volumen de medición recuerda un elipsoide, por lo general de 0.1 mm de diámetro y 0.5 mm de longitud. La luz láser se dispersa por medio de las partículas que pasan a través de este volumen de medición, y la luz dispersada en cierta dirección se recolecta con una lente receptora y se pasa a través de un fotodetector que convierte las fluctuaciones de la intensidad de la luz en fluctuaciones de una señal de voltaje. Finalmente, un procesador de señal determina la frecuencia de la señal de voltaje y por lo tanto la velocidad del flujo.

En la figura 8-75 se muestran las ondas de los dos haces láser que cruzan por el volumen de medición. Las ondas de los dos haces interfieren en el volumen de medición, lo que crea una franja brillante donde están en fase y por lo tanto se apoyan mutuamente, pero crean una franja oscura donde están fuera de fase y en consecuencia se cancelan una a otra. Las franjas brillante y oscura forman líneas paralelas al plano medio entre los dos haces láser incidentes. Con trigonometría se puede demostrar que el espaciamiento s entre las líneas de las franjas, que se puede ver como la longitud de onda de las franjas, es $s = \lambda/[2\ \text{sen}(\alpha/2)]$, donde λ es la longitud de onda del haz láser y α es el ángulo entre los dos haces

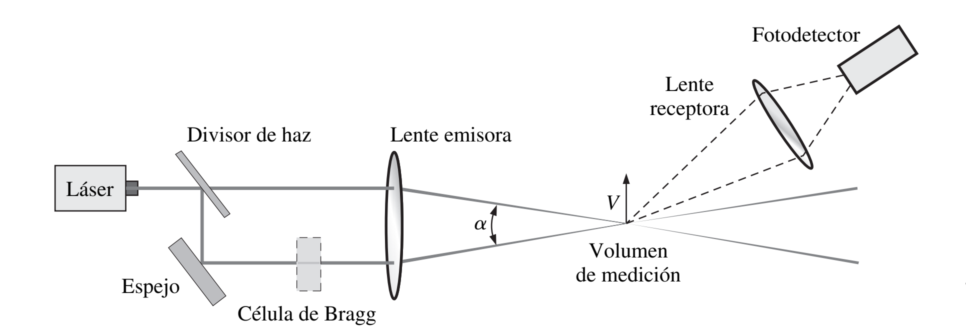


FIGURA 8-74
Sistema LDV de haz dual en modo de dispersión frontal.

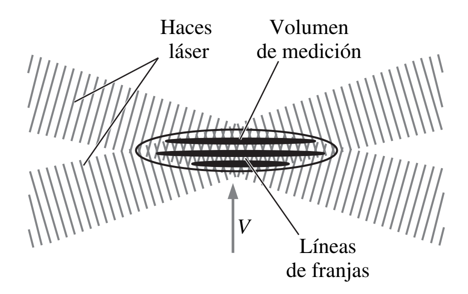


FIGURA 8-75
Franjas que se forman como resultado de la interferencia en la intersección de dos haces láser de un sistema LDV (las líneas representan picos de ondas). El diagrama superior es una vista de acercamiento de dos franjas.

láser. Cuando una partícula atraviesa estas líneas de franja con velocidad V, la frecuencia de las líneas dispersadas es

$$f = \frac{V}{s} = \frac{2V\,\mathrm{sen}(\alpha/2)}{\lambda} \quad \textbf{(8-76)}$$

Esta relación fundamental muestra que la velocidad del flujo es proporcional a la frecuencia; se conoce como la ecuación LDV. Conforme una partícula pasa a través del volumen de medición, la luz reflejada es brillante, luego oscura, luego brillante, etcétera, debido al patrón de franja y la velocidad de flujo se determina cuando se mide la frecuencia de la luz reflejada. El perfil de velocidad en una sección transversal de una tubería se puede obtener cuando se hace el mapa de flujo a través de la tubería (Fig. 8-76).

Obviamente, el método LDV depende de la presencia de las franjas dispersadas, y por ende el flujo debe contener una cantidad suficiente de pequeñas partículas llamadas *semillas* o *partículas sembradas*. Las partículas deben ser lo suficientemente pequeñas para seguir al flujo de forma cercana, de modo que la velocidad de partícula es igual a la velocidad de flujo, pero lo suficientemente grande (en relación con la longitud de onda de la luz láser) como para dispersar una cantidad adecuada de luz. Las partículas con un diámetro de 1 mm usualmente sirven de manera correcta a este propósito. Algunos fluidos, como el agua del grifo, naturalmente contienen una cantidad adecuada de tales partículas, y no es necesario sembrar. Los gases como el aire, por lo común se siembran con humo o con partículas hechas de látex, petróleo u otros materiales. Cuando se usan tres pares de haces láser con diferentes longitudes de onda, el sistema LDV también se usa para obtener los tres componentes de velocidad en cualquier punto del flujo.

Velocimetría de imagen de partícula

La **velocimetría de imagen de partícula** (**PIV**, por sus siglas en inglés) es una técnica de láser pulsátil doble que se usa para medir la distribución de velocidad instantánea en un plano de flujo cuando se determina fotográficamente el desplazamiento de las partículas en el plano durante un intervalo muy breve. A diferencia de los métodos como la anemometría de hilo caliente y la LDV, que miden velocidad en un punto, la PIV proporciona valores de velocidad simultáneamente a lo largo de toda una sección transversal, y por ende es una técnica de campo completo. La PIV combina la precisión de la LDV con la capacidad de visualización del flujo y proporciona mapeo instantáneo de campo de flujo. Todo el perfil de velocidad instantánea en una sección transversal de una tubería, por

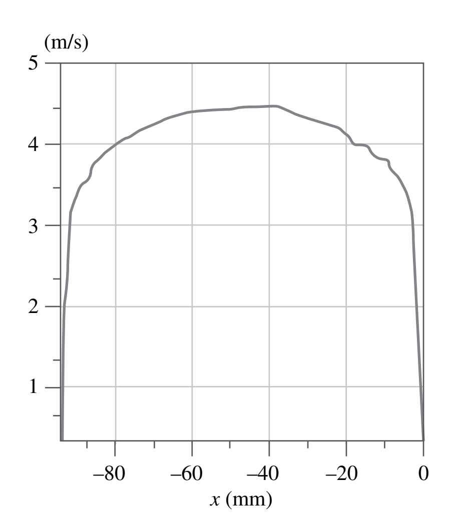


FIGURA 8-76
Perfil de velocidad promediado en el tiempo de flujo de tubería turbulento obtenido mediante un sistema LDV.
Cortesía Dantec Dynamics, Inc. www.dantecmt.com. Reproducido con autorización.

ejemplo, se puede obtener con una sola medición PIV. Un sistema PIV se puede visualizar como una cámara que puede tomar una instantánea de la distribución de velocidad en cualquier plano deseado del flujo. La visualización común del flujo proporciona un cuadro cualitativo de los detalles del flujo. La PIV también ofrece una descripción *cuantitativa* precisa de varias cantidades del flujo como el campo de velocidad, y por lo tanto la capacidad para analizar numéricamente el flujo con el uso de los datos de velocidad ofrecidos. Debido a la capacidad de campo completo, la PIV también se usa para validar paquetes computacionales de dinámica de fluidos (CFD, por sus siglas en inglés) (capítulo 15).

La técnica PIV se ha utilizado desde mediados de la década de los años ochenta, y su uso y capacidades han aumentado en años recientes con las mejoras en las tecnologías de cámara de carga acoplada (CCD) y dispositivo de registro de imagen. La precisión, flexibilidad y versatilidad de los sistemas PIV con su capacidad de capturar imágenes de todo el campo con tiempo de exposición por abajo de los microsegundos, los ha convertido en herramientas extremadamente valiosas en el estudio de los flujos supersónicos, las explosiones, la propagación de fuego, el crecimiento y colapso de burbujas, turbulencia y flujo no-estacionario.

La técnica PIV para medición de velocidad consiste de dos pasos principales: visualización y procesamiento de imagen. El primer paso es sembrar el flujo de partículas adecuadas con la finalidad de indicar el movimiento del fluido. Luego un pulso de haz de luz de láser ilumina una delgada rebanada de campo de flujo en el plano deseado, y las posiciones de las partículas en dicho plano se determinan cuando se detecta la luz dispersada por las partículas en un video digital o cámara fotográfica colocada en ángulos adecuados al plano iluminado (Fig. 8-77). Después de un breve periodo Δt (usualmente en ms), las partículas se iluminan de nuevo con un segundo pulso de haz de luz de láser, y se registran sus nuevas posiciones. Con la información de estas dos imágenes de cámara sobrepuestas se determinan los desplazamientos Δs de partícula para todas las partículas, y la magnitud de la velocidad de las partículas en el plano iluminado por el haz de luz de láser se determina a partir de $\Delta s/\Delta t$. La dirección del movimiento de las partículas también se determina a partir de las dos posiciones, de modo que se calculan los dos componentes de velocidad en el plano. Los algoritmos integrados de los sistemas PIV determinan las velocidades a miles de elementos de área llamados *regiones de interrogación* a través de todo el plano y muestran el campo de velocidad sobre el monitor de computadora en cualquier forma deseada (Fig. 8-78).

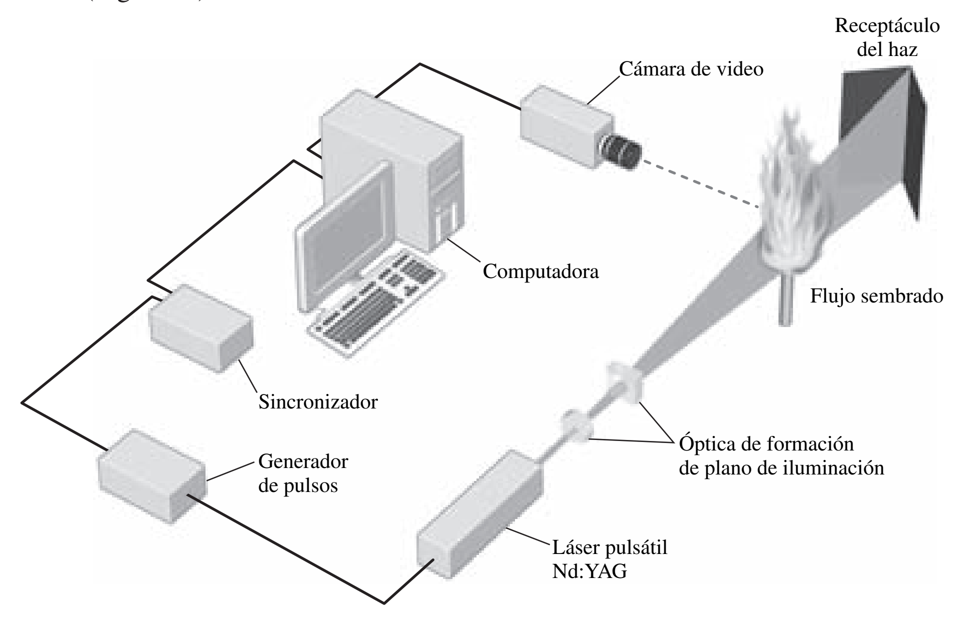


FIGURA 8-77
Sistema PIV para estudiar estabilización de flama.
Cortesía de TSI Incorporated (www.tsi.com). Reproducido con autorización.

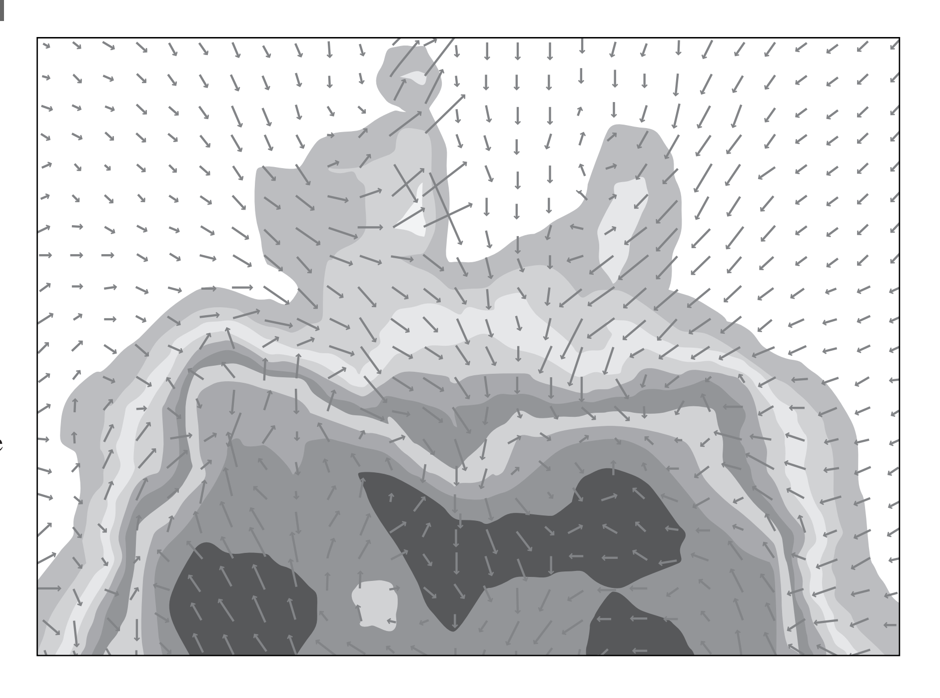


FIGURA 8-78
Campo de velocidad instantánea en la región de estela de un automóvil, medida por un sistema PIV en un túnel de viento. Los vectores de velocidad están sobrepuestos sobre una gráfica de contorno de presión. La interfase entre dos áreas adyacentes de diferente intensidad de color gris es una isobara.
Cortesía Dantec Dynamics, Inc. www.dantecmt.com

La técnica PIV se apoya en la luz láser dispersada por las partículas, y, si es necesario, el flujo se debe sembrar con partículas, también llamadas *marcadores*, con la finalidad de obtener una señal reflejada adecuada. Las partículas sembradas deben tener la capacidad de seguir las líneas de trayectoria en el flujo para que sus movimientos sean representativos del flujo, y esto exige que la densidad de la partícula sea igual a la densidad del fluido (de modo que sean neutralmente flotantes) o las partículas serán tan pequeñas (del tamaño de mm) que sus movimientos relativos al fluido serán insignificantes. Para sembrar en un flujo de gas o de un líquido hay disposición de varias de estas partículas. Las partículas muy pequeñas se deben usar en flujos de alta velocidad. Las partículas de carburo de silicio (diámetro medio de 1.5 μm) son adecuadas para flujo tanto de líquido como de gas, las partículas de dióxido de titanio (diámetro medio de 0.2 μm) por lo general se usan para flujo de gas y son adecuadas para aplicaciones de alta temperatura, y las partículas de látex de poliestireno (diámetro nominal de 1.0 μm) son adecuadas para aplicaciones de baja temperatura. Las partículas recubiertas de metal (diámetro medio de 9.0 μm) también se usan para flujos de agua sembrada para mediciones LDV debido a su alta reflectividad. Las burbujas de gas, así como las gotas de ciertos líquidos como el aceite de oliva o el de silicio se usan como partículas sembradas después de que se atomizan a esferas en el orden de los micrómetros.

Con los sistemas PIV se pueden usar diversas fuentes de luz láser, como argón, vapor de cobre y Nd:YAG, esto dependiendo de los requisitos para duración de pulso, potencia y tiempo entre pulsos. Los láser de Nd:YAG se usan comúnmente en los sistemas PIV sobre un amplio rango de aplicaciones. Un sistema de formación de haz, como dispositivo de generación de luz o un sistema de fibra óptica, se usan para obtener un espacio plano de un grosor específico de pulsaciones de láser de alta energía.

Con la PIV también se pueden obtener otras propiedades del flujo, como la vorticidad y las razones de esfuerzo, y se pueden estudiar los detalles de la turbulencia. Los recientes avances en la tecnología PIV han hecho posible obtener perfiles de velocidad tridimensionales en una sección transversal de un flujo con el uso de dos cámaras (Fig. 8-79). Esto se hace cuando se registran simultáneamente las imágenes del plano que sirve de blanco por medio de ambas cámaras en diferentes ángulos, procesan la información para producir dos mapas de velocidad bidimensional separados, y los combinan para generar el campo de velocidad tridimensional instantáneo.

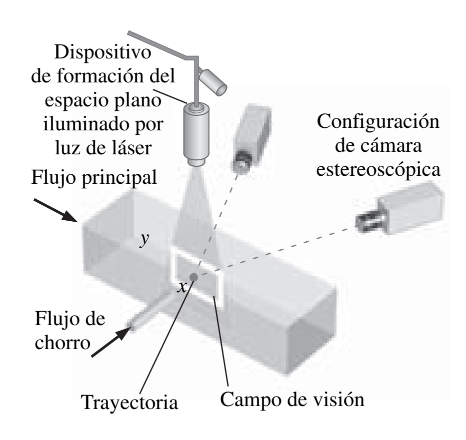


FIGURA 8-79
Sistema PIV tridimensional configurado para estudiar la mezcla de un chorro de aire con flujo de ducto transversal.
Cortesía de TSI Incorporated (www.tsi.com). Reproducido con autorización.



PROYECTOR DE APLICACIONES ■ Cómo funcionan, o no funcionan, los flujómetros de placa de orificio

Autor invitado: Lorenz Sigurdson, Vortex Fluid Dynamics Lab, University of Alberta

La ecuación de Bernoulli es la más confiable de todas las ecuaciones de la mecánica de fluidos porque es una ecuación escalar y tiene un amplio rango de aplicaciones. Un uso muy valioso está en el desarrollo de la teoría de obstrucción de Bernoulli. Esta teoría permite estimar la velocidad de flujo a partir de la caída de presión medida entre las posiciones corriente arriba y corriente abajo de una obstrucción en un flujo de tubería. El flujo de volumen se puede calcular con el uso de la ecuación de Bernoulli, la conservación de masa y la geometría de obstrucción. La obstrucción más barata de producir es una placa con un orificio circular en ella. Existen cientos de miles de flujómetros de placa de orificio en uso en Estados Unidos. Es el estándar internacional aceptado de medición de flujo de volumen. La precisión se puede volver muy importante en industrias como el entubado de gas natural, donde la comodidad se compra y vende con base en las mediciones de dichos medidores. Algunas tuberías llevan más de un millón de dólares por hora de gas natural.

Para propósitos prácticos se necesita la calibración del medidor porque, aunque la tubería y el diámetro del orificio pueden ser conocidos, el flujo se separa del labio del orificio y crea un tubo de flujo más estrecho que el diámetro del orificio. El flujo se acelera a través de esta vena contracta. La figura 8-80 muestra el flujo corriente abajo del orificio visto con el uso de unos chorros de humo para introducir líneas de traza en un flujómetro transparente. La calibración supone que no hay pulsación en el flujo de tubería. Sin embargo, éste no es el caso en la práctica si existe un compresor reciprocante en la tubería, o una válvula que ajusta holgadamente. La figura 8-81 muestra lo que le ocurre a la vena contracta en esta circunstancia, si la frecuencia de la pulsación está cerca de una frecuencia resonante de las estructuras del flujo turbulento. El diámetro de la vena contracta se reduce. Deje de leer y pregúntese: “¿esto provocará una predicción baja o alta de la razón de flujo?”.

La conservación de la masa y la sección contraída más estrecha significan una mayor velocidad promedio, sin pulsación. La ecuación de Bernoulli establece que ahí la presión será más baja como resultado, lo que significa una caída de presión más grande y una predicción alta. Se han encontrado errores tan altos como 40 por ciento a niveles de pulsación elevados. Para la tubería de gas natural mencionada, ¡eso podría significar pagar (o ganar) $400 000 más por hora! Corriente abajo de la placa de orificio también existe inestabilidad característica que previamente se ha encontrado en flujos de corte, flujos a chorro y flujos que se separaron de la superficie y volvieron a apegarse a ella (Sigurdson, 1995; Sigurdson y Chapple, 1997). Afortunadamente, los diseñadores de instalación de medidores ahora pueden evitar las peligrosas frecuencias de pulsación resonante asociadas con dichas inestabilidades, de ese modo minimizan el error del flujómetro.

Referencias

Sigurdson, L. W., “The Structure and Control of a Turbulent Reattaching Flow,” *J. Fluid Mechanics*, 298, pp. 139-165, 1995.

Sigurdson, L. W. y Chapple, D., “Visualization of Acoustically Pulsated Flow through an Orifice Plate Flow Meter,” *Proc. 1st Pacific Image Processing and Flow Visualization Conf.*, Honolulu, HI, febrero 23-26, 1997.

Sigurdson, L. W. y Chapple, D., “A Turbulent Mechanism for Pulsation—Induced Orifice Plate Flow Meter Error,” *Proc. 13th Australasian Fluid Mechanics Conf.*, diciembre 13-18, 1998, Monash U., Melbourne, Australia, Thompson, M.C., y Hourigan, K., eds., 1, pp. 67-70, 1998.

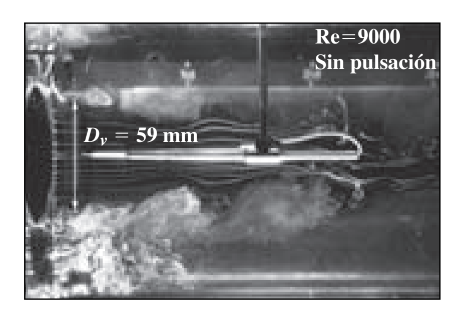


FIGURA 8-80
Fotografía de líneas de traza a base de la técnica de visualización de humo en un flujómetro de placa de orificio sin pulsación presente, número de Reynolds = 9 000. D_v indica el diámetro estimado de vena contracta. A lo largo de la línea central de la tubería se puede ver una sonda de hilo caliente.
Tomado de Sigurdson y Chapple (1998).

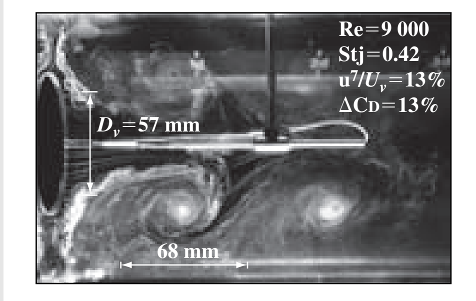


FIGURA 8-81
Fotografía de las líneas de traza a base de la técnica de visualización de humo en un flujómetro de placa de orificio con pulsación presente, que muestra un efecto significativo. El medidor tiene un error de 13 por ciento. Número de Reynolds = 9 000. El diámetro de vena contracta D_v se reduce del caso sin pulsación de la figura 8-80.
Tomado de Sigurdson y Chapple (1998).

RESUMEN

En el *flujo interno*, una tubería está totalmente llena con un fluido. El *flujo laminar* se caracteriza por líneas de corriente suaves y movimiento enormemente ordenado, y el *flujo turbulento* se caracteriza por fluctuaciones de velocidad y movimiento enormemente desordenado. El *número de Reynolds* se define como:

$$\text{Re} = \frac{\text{Fuerzas inerciales}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{V_{\text{prom}}D}{\nu} = \frac{\rho V_{\text{prom}}D}{\mu}$$

En la mayoría de las condiciones prácticas, el flujo en una tubería es laminar a $\text{Re} < 2\,300$, turbulento a $\text{Re} > 4\,000$ y transicional entre estos valores.

La región del flujo en la que se sienten los efectos de las fuerzas de corte viscosas se llama *capa límite de velocidad*. La región desde la entrada de la tubería al punto en el que la capa límite sumerge en la línea central se llama *región de entrada hidrodinámica*, y la longitud de esta región se llama *longitud de entrada hidrodinámica* L_h. Está dada por:

$$L_{h,\,\text{laminar}} \cong 0.05\,\text{Re}\,D \quad \text{y} \quad L_{h,\,\text{turbulento}} \cong 10D$$

El coeficiente de fricción en la región de flujo totalmente desarrollado permanece constante. Las velocidades *máxima* y *promedio* en el flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería circular son:

$$u_{\text{máx}} = 2V_{\text{prom}} \quad \text{y} \quad V_{\text{prom}} = \frac{\Delta P D^2}{32\mu L}$$

El *flujo volumétrico* y la *caída de presión* para flujo laminar en una tubería horizontal son:

$$\dot{V} = V_{\text{prom}}A_c = \frac{\Delta P \pi D^4}{128\mu L} \quad \text{y} \quad \Delta P = \frac{32\mu L V_{\text{prom}}}{D^2}$$

Estos resultados para tuberías horizontales también se pueden usar para tuberías inclinadas siempre que ΔP se sustituya por $\Delta P - \rho g L \text{ sen } \theta$:

$$V_{\text{prom}} = \frac{(\Delta P - \rho g L \text{ sen } \theta)D^2}{32\mu L} \quad \text{y}$$

$$\dot{V} = \frac{(\Delta P - \rho g L \text{ sen } \theta)\pi D^4}{128\mu L}$$

La *pérdida de presión* y la *pérdida de carga* para todos los tipos de flujos internos (laminar o turbulento, en tuberías circulares o no-circulares, superficies lisas o rugosas) se expresan como:

$$\Delta P_L = f\frac{L}{D}\frac{\rho V^2}{2} \quad \text{y} \quad h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

donde $\rho V^2/2$ es la *presión dinámica* y la cantidad adimensional f es el *factor de fricción*. En casos de flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería circular, el factor de fricción es $f = 64/\text{Re}$.

Para tuberías no-circulares, el diámetro en las relaciones previas se sustituye por el *diámetro hidráulico* que se define como $D_h = 4A_c/p$, donde A_c es el área transversal de la tubería y p es el perímetro húmedo.

En el flujo turbulento totalmente desarrollado, el factor de fricción depende del número de Reynolds y la *rugosidad relativa* ε/D. El factor de fricción en flujo turbulento está dado por la *ecuación de Colebrook*, que se expresa como:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$$

La gráfica de esta fórmula se conoce como diagrama de Moody. El diseño y análisis de sistemas de tuberías implica determinar la pérdida de carga, la razón de flujo o el diámetro de la tubería. Las iteraciones tediosas en estos cálculos se pueden evitar cuando se usa la fórmula de Swamee-Jain expresada como:

$$h_L = 1.07\frac{\dot{V}^2 L}{gD^5}\left\{\ln\left[\frac{\varepsilon}{3.7D} + 4.62\left(\frac{\nu D}{\dot{V}}\right)^{0.9}\right]\right\}^{-2}$$

$$10^{-6} < \ /D < 10^{-2}$$
$$3\,000 < \text{Re} < 3 \times 10^8$$

$$\dot{V} = -0.965\left(\frac{gD^5 h_L}{L}\right)^{0.5} \ln\left[\frac{\varepsilon}{3.7D} + \left(\frac{3.17\nu^2 L}{gD^3 h_L}\right)^{0.5}\right]$$

$$\text{Re} > 2\,000$$

$$D = 0.66\left[\varepsilon^{1.25}\left(\frac{L\dot{V}^2}{gh_L}\right)^{4.75} + \nu\dot{V}^{9.4}\left(\frac{L}{gh_L}\right)^{5.2}\right]^{0.04}$$

$$10^{-6} < \ /D < 10^{-2}$$
$$5\,000 < \text{Re} < 3 \times 10^8$$

Las pérdidas que ocurren en los accesorios de tubería como uniones, válvulas, flexiones, codos, conexiones en T, entradas, salidas, ensanchamientos y contracciones se llaman *pérdidas menores*. Éstas, por lo general, se expresan en términos del *coeficiente de pérdida* K_L. La pérdida de carga para un accesorio se determina a partir de:

$$h_L = K_L\frac{V^2}{2g}$$

Cuando todos los coeficientes están disponibles, la pérdida de carga total en un sistema de tuberías se determina a partir de:

$$h_{L,\,\text{total}} = h_{L,\,\text{mayor}} + h_{L,\,\text{menor}} = \sum_i f_i\frac{L_i}{D_i}\frac{V_i^2}{2g} + \sum_j K_{L,j}\frac{V_j^2}{2g}$$

Si todo el sistema de tuberías tiene un diámetro constante, la pérdida de carga total se reduce a:

$$h_{L,\,\text{total}} = \left(f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g}$$

El análisis de un sistema de tuberías se basa en dos principios simples: 1) se debe satisfacer la conservación de la masa a través del sistema y 2) la caída de presión entre dos puntos debe ser la misma para todas las trayectorias entre los dos puntos. Cuando las tuberías se conectan *en serie*, la razón de flujo a tra-

vés de todo el sistema permanece constante sin importar los diámetros de las tuberías individuales. Para una tubería que se ramifica en dos (o más) *tuberías paralelas* y luego se vuelven a juntar en una unión corriente abajo, la razón de flujo total es la suma de las razones de flujo en las tuberías individuales, pero la pérdida de carga en cada rama es la misma.

Cuando un sistema de tuberías involucra una bomba y/o turbina, la ecuación de energía de flujo estacionario se expresa como:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{bomba, } u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbina, } e} + h_L$$

Cuando se conoce la carga de bomba útil $h_{\text{bomba},u}$, la potencia mecánica que necesita suministrar la bomba al fluido y la potencia eléctrica consumida por el motor de la bomba para una razón de flujo especificada se determinan a partir de:

$$\dot{W}_{\text{bomba, eje}} = \frac{\dot{V} g h_{\text{bomba, } u}}{\eta_{\text{bomba}}} \quad \text{y} \quad \dot{W}_{\text{eléct}} = \frac{\dot{V} g h_{\text{bomba, } u}}{\eta_{\text{bomba-motor}}}$$

donde $h_{\text{bomba-motor}}$ es la *eficiencia del acoplamiento bomba-motor*, que es el producto de las eficiencias de la bomba y el motor.

La gráfica de la pérdida de carga contra la razón de flujo $\dot{V}$ se llama *curva del sistema*. La carga producida por una bomba no es una constante, y las curvas de $h_{\text{bomba},u}$ y h_{bomba} contra $\dot{V}$ se llaman *curvas características*. Una bomba instalada en un sistema de tuberías opera en el *punto de operación*, que es el punto de intersección de la curva del sistema y la curva característica.

Las técnicas e instrumentos de medición de flujo se pueden considerar en tres grandes categorías: 1) técnicas e instrumentos de medición de razones de flujo volumétrico (o de masa), como los flujómetros de obstrucción, las turbinas de flujo, los flujómetros de desplazamiento positivos, los rotámetros y los medidores ultrasónicos; 2) las técnicas de medición de velocidad puntual, como las sondas de Pitot estática, las sondas de alambres caliente y la LDV y 3) técnicas de medición de velocidad de campo completo como la PIV.

En este capítulo se ha hecho énfasis en el flujo a través de tuberías. En el capítulo 14 se proporciona un tratamiento detallado de los numerosos tipos de bombas y turbinas, incluso sus principios operativos y parámetros de desempeño.

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. H. S. Bean (ed.). *Fluid Meters: Their Theory and Applications*, 6a. ed. Nueva York: American Society of Mechanical Engineers, 1971.

2. M. S. Bhatti y R. K. Shah. "Turbulent and Transition Flow Convective Heat Transfer in Ducts." In *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, ed. S. Kakaç, R. K. Shah, y W. Aung. Nueva York: Wiley Interscience, 1987.

3. C. F. Colebrook. "Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition between the Smooth and Rough Pipe Laws," *Journal of the Institute of Civil Engineers London.* 11 (1939), pp. 133-156.

4. C. T. Crowe, J. A. Roberson y D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics*, 7a. ed. Nueva York: Wiley, 2001.

5. F. Durst, A. Melling y J. H. Whitelaw. *Principles and Practice of Laser-Doppler Anemometry*, 2a, ed. Nueva York: Academic, 1981.

6. R. W. Fox y A. T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 5a. ed. Nueva York: Wiley, 1999.

7. *Fundamentals of Orifice Meter Measurement*. Houston, TX: Daniel Measurement and Control, 1997.

8. S. E. Haaland. "Simple and Explicit Formulas for the Friction Factor in Turbulent Pipe Flow," *Journal of Fluids Engineering*, Marzo de 1983, pp. 89-90.

9. I. E. Idelchik. *Handbook of Hydraulic Resistance*, 3a. ed. Boca Ratón, FL: CRC Press, 1993.

10. W. M. Kays y M. E. Crawford. *Convective Heat and Mass Transfer*, 3a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1993.

11. R. W. Miller. *Flow Measurement Engineering Handbook,* 3a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1997.

12. L. F. Moody. "Friction Factors for Pipe Flows," *Transactions of the ASME* 66 (1944), pp. 671-684.

13. B. R. Munson, D. F. Young y T. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4a. ed. Nueva York: Wiley, 2002.

14. O. Reynolds. "On the Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and the Law of Resistance in Parallel Channels." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 174 (1883), pp. 935-982.

15. H. Schlichting. *Boundary Layer Theory*, 7a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1979.

16. R. K. Shah y M. S. Bhatti. "Laminar Convective Heat Transfer in Ducts." In *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, ed. S. Kakaç, R. K. Shah, y W. Aung. Nueva York: Wiley Interscience, 1987.

17. P. L. Skousen. *Valve Handbook*. Nueva York: McGraw-Hill, 1998.

18. P. K. Swamee y A. K. Jain. "Explicit Equations for Pipe-Flow Problems," *Journal of the Hydraulics Division. ASCE* 102, no. HY5 (Mayo de 1976), pp. 657-664.

19. G. Vass. "Ultrasonic Flowmeter Basics," *Sensors*, 14, no. 10 (1997).

20. A. J. Wheeler y A. R. Ganji. *Introduction to Engineering Experimentation*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.

21. F. M. White. *Fluid Mechanics*, 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2003.

22. W. Zhi-qing. "Study on Correction Coefficients of Laminar and Turbulent Entrance Region Effects in Round Pipes," *Applied Mathematical Mechanics*, 3 (1982), p. 433.

PROBLEMAS*

Flujo laminar y turbulento

8-1C ¿Por qué los líquidos usualmente se transportan en tuberías circulares?

8-2C ¿Cuál es el significado físico del número de Reynolds? ¿Cómo se define para: *a*) flujo en una tubería circular de diámetro interior *D* y *b*) flujo en un ducto rectangular de sección transversal $a \times b$?

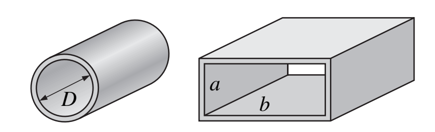


FIGURA P8-2C

8-3C Considere a una persona que primero camina en el aire y luego en agua a la misma velocidad. ¿Para cuál movimiento el número de Reynolds será mayor?

8-4C Demuestre que el número de Reynolds para flujo en una tubería circular de diámetro *D* se puede expresar como $\text{Re} = 4\dot{m}/(\pi D\mu)$.

8-5C ¿Cuál fluido a temperatura ambiente necesita una bomba más grande para flujo a una velocidad específica en una tubería dada: agua o aceite de motor? ¿Por qué?

8-6C ¿Cuál es el valor aceptado del número de Reynolds sobre el cual el flujo en tuberías lisas es turbulento?

8-7C Considere el flujo de aire y agua en tuberías del mismo diámetro, a la misma temperatura y a la misma velocidad media. ¿Cuál flujo es más probable que sea turbulento?

8-8C ¿Qué es diámetro hidráulico? ¿Cómo se define? ¿A qué es igual para una tubería circular de diámetro *D*?

8-9C ¿Cómo se define la longitud de entrada hidrodinámica para flujo en una tubería? ¿La longitud de entrada es más larga en flujo laminar o turbulento?

8-10C Considere flujo laminar en una tubería circular. ¿El esfuerzo cortante en la pared τ_w será mayor cerca de la entrada de la tubería o cerca de la salida? ¿Por qué? ¿Cuál sería su respuesta si el flujo fuese turbulento?

8-11C ¿Cómo afecta la rugosidad de la superficie a la caída de presión en una tubería si el flujo es turbulento? ¿Cuál sería su respuesta si el flujo fuera laminar?

Flujo totalmente desarrollado en tuberías

8-12C ¿Cómo varía el esfuerzo cortante en la pared τ_w a lo largo de la dirección del flujo en la región totalmente desarrollada en *a*) flujo laminar y *b*) flujo turbulento?

8-13C ¿Qué propiedad del fluido causa el desarrollo de la capa límite de velocidad? ¿Para qué tipos de fluidos no habrá capa límite de velocidad en una tubería?

8-14C En la región totalmente desarrollada de flujo en una tubería circular, ¿el perfil de velocidad cambiará en la dirección del flujo?

8-15C ¿Cómo se relaciona el factor de fricción para flujo en una tubería, con la pérdida de presión? ¿Cómo se relaciona la pérdida de presión con el requerimiento de potencia de bombeo para una razón de flujo de masa dada?

8-16C Alguien afirma que el esfuerzo de corte en el centro de una tubería circular en flujo laminar totalmente desarrollado es cero. ¿Está de acuerdo con esta afirmación? Explíquela.

8-17C Alguien afirma que en flujo turbulento totalmente desarrollado en una tubería, el esfuerzo de corte es máximo en la superficie de la tubería. ¿Usted está de acuerdo con esta afirmación? Explíquela.

8-18C Considere flujo totalmente desarrollado en una tubería circular con efectos de entrada despreciables. Si la longitud de la tubería se duplica, ¿la pérdida de carga *a*) se duplica, *b*) es más que el doble, *c*) menos que el doble, *d*) se reduce a la mitad o *e*) permanece constante.

8-19C Alguien afirma que el flujo volumétrico en una tubería circular con flujo laminar se puede determinar cuando se mide la velocidad en la línea central en la región completamente desarrollada, multiplicarla por el área transversal y dividir el resultado entre 2. ¿Usted está de acuerdo? Explíquelo.

8-20C Alguien afirma que la velocidad promedio en una tubería circular en flujo laminar totalmente desarrollado se puede determinar con simplemente medir la velocidad en *R*/2 (a la mitad del camino entre la superficie de la pared y la línea central). ¿Usted está de acuerdo? Explíquelo.

---

* Los problemas designados por una "C" son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

8-21C Considere flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería circular. Si el diámetro de la tubería se reduce a la mitad mientras la razón de flujo y la longitud de la tubería se mantienen constantes, la pérdida de carga ¿*a*) se duplicará, *b*) triplicará, *c*) cuadruplicará, *d*) aumentará por un factor de 8, o *e*) aumentará por un factor de 16?

8-22C ¿Cuál es el mecanismo físico que provoca que el factor de fricción sea mayor en el flujo turbulento?

8-23C ¿Qué es viscosidad turbulenta? ¿Qué la causa?

8-24C La pérdida de carga para cierta tubería circular está dada por $h_L = 0.0826fL(\dot{V}^2/D^5)$, donde *f* es el factor de fricción (adimensional), *L* es la longitud de la tubería, $\dot{V}$ es el flujo volumétrico y *D* es el diámetro de la tubería. Determine si el 0.0826 es una constante dimensional o adimensional. Esta ecuación tal cual ¿es dimensionalmente homogénea?

8-25C Considere flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería circular. Si la viscosidad del fluido se reduce a la mitad mediante calentamiento mientras la razón de flujo se mantiene constante, ¿cómo cambiará la pérdida de carga?

8-26C ¿Cómo se relaciona la pérdida de carga con la pérdida de presión? Para un fluido dado, explique cómo convertiría pérdida de carga en pérdida de presión.

8-27C Considere flujo laminar de aire en una tubería circular con superficies perfectamente lisas. ¿Usted cree que el factor de fricción para este flujo será cero? Explíquelo.

8-28C Explique por qué el factor de fricción es independiente del número de Reynolds a números de Reynolds mayores.

8-29I Hay disponibilidad de petróleo a 80°F (ρ = 56.8 lbm/ft^3 y μ = 0.0278 lbm/ft que fluye de manera estacionaria en una tubería de 0.5 in de diámetro y 120 ft de largo. Durante el flujo, la presión en la entrada y salida de la tubería se mide en 120 y 14 psi, respectivamente. Determine la razón de flujo del petróleo a través de la tubería, si se supone que la tubería está *a*) horizontal, *b*) inclinada 20° hacia arriba y *c*) inclinada 20° hacia abajo.

8-30 Se tiene petróleo con una densidad de 850 kg/m^3 y viscosidad cinemática de 0.00062 m^2/s que se descarga por medio de una tubería horizontal de 5 mm de diámetro y 40 m de longitud desde un tanque de almacenamiento abierto a la atmósfera. La altura del nivel del líquido sobre el centro de la tubería es de 3 m. Sin considerar las pérdidas menores, determine la razón de flujo del petróleo a través de la tubería.

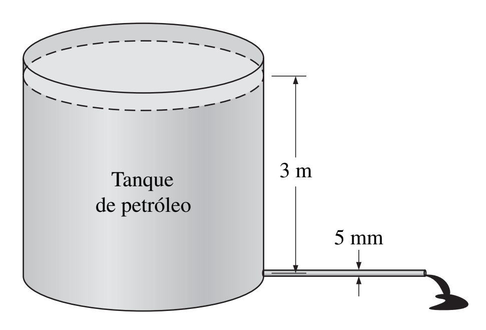


FIGURA P8-30

8-31 Se tiene agua a 10°C (ρ = 999.7 kg/m^3 y μ = 1.307 $\times$ 10^{-3} kg/m · s) que fluye de manera estable en una tubería de 0.20 cm de diámetro y 15 m de largo a una velocidad promedio de 1.2 m/s. Determine: *a*) la caída de presión, *b*) la pérdida de carga y *c*) la necesidad de potencia de bombeo para superar esta caída de presión. *Respuestas: a*) 188 kPa, *b*) 19.2 m, *c*) 0.71 W

8-32 Se tiene agua a 15°C (ρ = 999.1 kg/m^3 y μ = 1.138 $\times$ 10^{-3} kg/m · s) que fluye a una razón de 8 L/s de manera estacionaria en una tubería horizontal de 30 m de largo y 4 cm de diámetro fabricada de acero inoxidable. Determine: *a*) la caída de presión, *b*) la pérdida de carga y *c*) la potencia de bombeo necesaria para superar esta caída de presión.

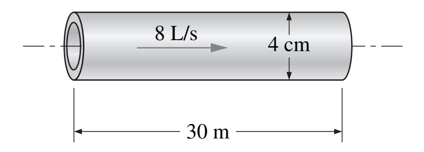


FIGURA P8-32

8-33I Se tiene aire caliente a 1 atm y 100°F que se debe transportar en un ducto plástico circular de 400 ft de largo a una razón de 12 ft^3/s. Si la pérdida de carga en la tubería no supera los 50 ft, determine el diámetro mínimo del ducto.

8-34 En flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería circular, la velocidad en *R*/2 (mitad del camino entre la superficie de la pared y la línea central) se mide en 6 m/s. Determine la velocidad en el centro de la tubería. *Respuesta:* 8 m/s

8-35 El perfil de velocidad en flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería circular de radio interior *R* = 2 cm, en m/s, está dado por $u(r) = 4(1 - r^2/R^2)$. Determine las velocidades promedio y máxima en la tubería y el flujo volumétrico.

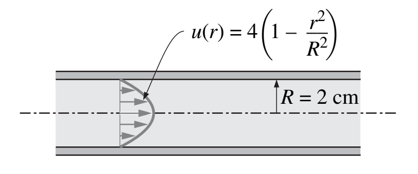


FIGURA P8-35

8-36 Repita el problema 8-35 pero con una tubería de 7 cm de radio interior.

8-37 Considere un colector solar de aire que tiene 1 m de ancho y 5 m de largo y un espaciamiento constante de 3 cm entre la cubierta de vidrio y la placa del colector. El aire fluye a una temperatura promedio de 45°C a una razón de 0.15 m^3/s a través del lado de 1 m de ancho del colector a lo largo del pasaje de 5 m de largo. Sin considerar los efectos de entrada y rugosidad, determine la caída de presión en el colector. *Respuesta:* 29 Pa

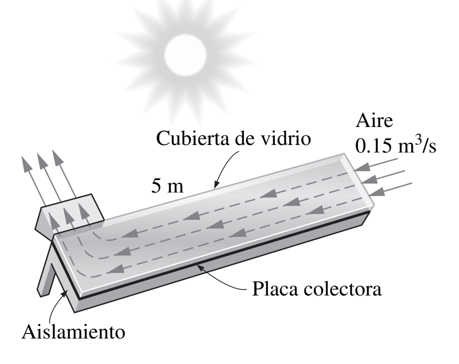


FIGURA P8-37

8-38 Considere el flujo de petróleo con ρ = 894 kg/m^3 y μ = 2.33 kg/m · s en un oleoducto de 40 cm de diámetro a una velocidad promedio de 0.5 m/s. Una sección de 300 m de largo del oleoducto pasa a través de las aguas congeladas de un lago. Sin considerar los efectos de entrada, determine la potencia de bombeo requerida para superar las pérdidas de presión y para mantener el flujo de petróleo en la tubería.

8-39 Considere flujo laminar de un fluido a través de un canal cuadrado con superficies lisas. Ahora, la velocidad promedio del fluido se duplica. Determine el cambio en la pérdida de carga del fluido. Suponga que el régimen de flujo permanece invariable.

8-40 Repita el problema 8-39 para flujo turbulento en tuberías lisas para las que el factor de fricción está dado como $f = 0.184\text{Re}^{-0.2}$. ¿Cuál sería su respuesta para flujo totalmente turbulento en una tubería rugosa?

8-41 Se tiene aire que entra a una sección de 7 m de largo de un ducto rectangular de 15 cm × 20 cm de sección transversal fabricado de acero comercial a 1 atm y 35°C a una velocidad promedio de 7 m/s. Sin considerar los efectos de entrada, determine la potencia de ventilador necesaria para superar las pérdidas de presión en esta sección del ducto. *Respuesta:* 4.9 W

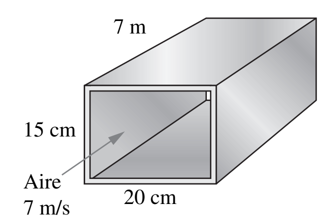


FIGURA P8-41

8-42I Se tiene agua a 60°F que pasa a través de tubos de cobre con 0.75 in de diámetro interno a una razón de 1.2 lbm/s. Determine la potencia de bombeo por ft de longitud de tubería que se necesita para mantener este flujo a la razón especificada.

8-43 Se tiene petróleo con ρ = 876 kg/m^3 y μ = 0.24 kg/m · s que fluye a través de una tubería de 1.5 cm de diámetro que descarga en la atmósfera a 88 kPa. La presión absoluta 15 m antes de la salida se mide en 135 kPa. Determine la razón de flujo del petróleo a través de la tubería si la tubería está: *a*) horizontal, *b*) inclinada 8° hacia arriba desde la horizontal y *c*) inclinada 8° hacia abajo desde la horizontal

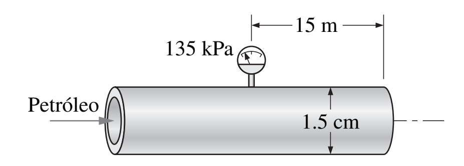


FIGURA P8-43

8-44 Se tiene glicerina a 40°C con ρ = 1 252 kg/m^3 y μ = 0.27 kg/m · s que fluye a través de una tubería de 2 cm de diámetro y 25 m de largo que descarga en la atmósfera a 100 kPa. La razón de flujo a través de la tubería es de 0.035 L/s. *a*) Determine la presión absoluta 25 m antes de la salida de la tubería. *b*) ¿A qué ángulo θ se debe inclinar la tubería hacia arriba de la horizontal para que la presión en toda la tubería sea la presión atmosférica y la razón de flujo se mantenga igual?

8-45 En un sistema de calefacción de aire, el aire caliente a 40°C y 105 kPa de presión absoluta se distribuye a través de un ducto rectangular de 0.2 m × 0.3 m fabricado de acero comercial, a una razón de 0.5 m^3/s. Determine la caída de presión y la pérdida de carga a través de una sección de 40 m de largo del ducto.

8-46 Se tiene glicerina a 40°C con ρ = 1 252 kg/m^3 y μ = 0.27 kg/m · s que fluye a través de una tubería horizontal lisa de 5 cm de diámetro, con una velocidad promedio de 3.5 m/s. Determine la caída de presión a lo largo de 10 m de la tubería.

8-47 Reconsidere el problema 8-46. Con el Software EES (o algún otro) investigue el efecto del diámetro de la tubería sobre la caída de presión para la misma razón de flujo constante. Varíe el diámetro de la tubería de 1 a 10 cm en incrementos de 1 cm. Tabule y grafique los resultados, dibuje sus conclusiones.

8-48I Se tiene aire a 1 atm y 60°F que fluye a través de un ducto cuadrado de 1 ft × 1 ft fabricado de acero comercial, a una razón de 1 200 cfm. Determine la caída de presión y la pérdida de carga por ft del ducto.

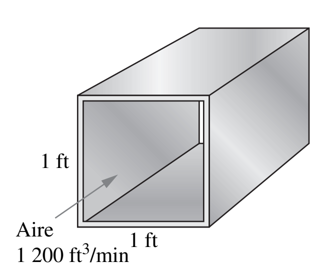


FIGURA P8-48E

8-49 Se tiene amoniaco líquido a −20°C que fluye a través de una sección de 30 m de largo de un tubo de cobre de 5 mm

de diámetro a una razón de 0.15 kg/s. Determine la caída de presión, la pérdida de carga y la potencia de bombeo necesaria para superar las pérdidas de fricción en el tubo. *Respuestas:* 4 792 kPa, 734 m, 1.08 kW

8-50 Los intercambiadores de calor de tubos y coraza con cientos de tubos albergados en una estructura se usan por lo común en la práctica para transferir calor entre dos fluidos. Uno de estos intercambiadores de calor usado en un sistema solar activo de calentamiento de agua transfiere calor desde una solución agua-anticongelante que fluye a través de la coraza y el colector solar hacia el agua fresca que fluye a través de los tubos a una temperatura promedio de 60°C a una razón de 15 L/s. El intercambiador de calor contiene 80 tubos de latón de 1 cm de diámetro interior y 1.5 m de largo. Sin considerar las pérdidas de entrada, salida y de carga, determine la caída de presión a través de un solo tubo y la potencia de bombeo necesaria para mantener el flujo en los tubos de este intercambiador de calor de tubos y coraza

Después de operar largo tiempo, sobre las superficies interiores de los tubos se acumula sarro con 1 mm de espesor y una rugosidad equivalente de 0.4 mm. Para la misma entrada de potencia de bombeo, determine la reducción porcentual en la razón de flujo del agua a través de los tubos.

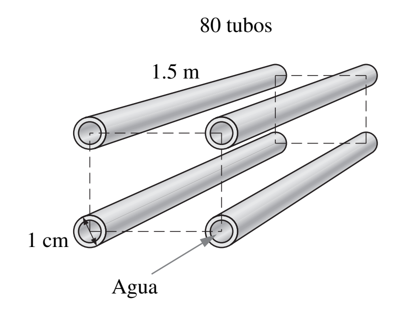


FIGURA P8-50

Pérdidas menores

8-51C ¿Qué es la pérdida menor en el flujo de tubería? ¿Cómo se define el coeficiente de pérdida menor K_L?

8-52C Defina la longitud equivalente para pérdida menor en un flujo de tubería. ¿Cómo se relaciona con el coeficiente de pérdida menor?

8-53C El efecto de redondear la entrada de una tubería sobre el coeficiente de pérdida ¿es: *a*) despreciable, *b*) poco significativo o *c*) muy significativo.

8-54C El efecto de redondear la salida de una tubería sobre el coeficiente de pérdida ¿es: *a*) despreciable, *b*) poco significativo o *c*) muy significativo?

8-55C ¿Qué tiene mayor coeficiente de pérdida menor durante el flujo en tubería: ¿la expansión gradual o la contracción gradual? ¿Por qué?

8-56C Un sistema de tuberías incluye vueltas agudas, y por lo tanto pérdidas considerables de carga menor. Una forma de reducir la pérdida de carga es sustituir las vueltas agudas con codos circulares. ¿Cuál es otra forma?

8-57C Durante un proyecto de retroajuste de un sistema de flujo de fluidos para reducir la potencia de bombeo, se propone instalar álabes directores en los codos esquinados o sustituir los codos esquinados de 90° por los codos suaves. ¿Cuál procedimiento resultará en una mayor reducción en las necesidades de potencia de bombeo?

8-58 Se debe extraer agua de un depósito de 3 m de alto cuando se perfora un agujero de 1.5 cm de diámetro en la superficie del fondo. Sin considerar el efecto del factor de corrección de energía cinética, determine la razón de flujo del agua a través del agujero si: *a*) la entrada del agujero está redondeada y *b*) la entrada tiene borde agudo.

8-59 Considere el flujo proveniente de un depósito de agua a través de un orificio circular de diámetro *D* en la pared lateral a una distancia vertical *H* desde la superficie libre. La razón de flujo a través de un orificio real con una entrada de borde agudo (K_L = 0.5) será considerablemente menor que la razón de flujo calculada en la suposición de flujo "sin fricción" y, por tanto, pérdida cero para el orificio. Tome en cuenta la pérdida en orificio, pero sin considerar el efecto del factor de corrección de energía cinética y obtenga una relación para el "diámetro equivalente" del agujero con borde agudo para sustituir en las relaciones de flujo sin fricción.

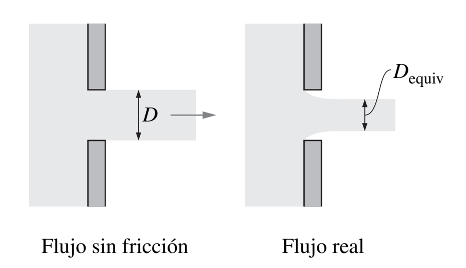


FIGURA P8-59

8-60 Repita el problema 8-59 para una entrada ligeramente redondeada (K_L = 0.12).

8-61 Una tubería horizontal tiene una expansión repentina desde D_1 = 8 cm hasta D_2 = 16 cm. La velocidad del agua en la sección más pequeña es de 10 m/s y el flujo es turbulento. La presión en la sección más pequeña es P_1 = 300 kPa. Cuando se considera el factor de corrección de energía cinética como 1.06 tanto en la entrada como en la salida, determine la presión corriente abajo P_2, y estime el error que habría ocurrido si se hubiera usado la ecuación de Bernoulli. *Respuesta:* 321 kPa, 28 kPa

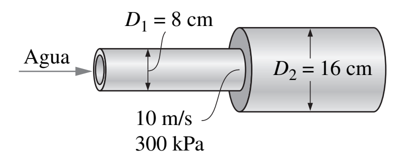


FIGURA P8-61

Sistemas de tubería y selección de bomba

8-62C Un sistema de tuberías tiene dos tuberías de diferentes diámetros (pero de longitud, material y rugosidad idénticos) conectadas en serie. ¿Cómo compararía: *a*) las razones de flujo y *b*) las caídas de presión en estas dos tuberías?

8-63C Un sistema de tuberías tiene dos tuberías de diámetros diferentes (pero de longitud, material y rugosidad idénticos) conectadas en paralelo. ¿Cómo compararía: *a*) las razones de flujo y *b*) las caídas de presión en estas dos tuberías?

8-64C Un sistema de tuberías tiene dos tuberías de diámetros idénticos pero de diferentes longitudes conectadas en paralelo. ¿Cómo compararía las caídas de presión en estas dos tuberías?

8-65C Se bombea agua desde un depósito grande inferior hasta un depósito superior. Alguien afirma que si la pérdida de carga es despreciable, la carga de bomba necesaria es igual a la diferencia de elevación entre las superficies libres de los dos depósitos. ¿Usted está de acuerdo?

8-66C Un sistema de tubería equipado con una bomba opera de manera estacionaria. Explique cómo se establece el punto de operación (la razón de flujo y la pérdida de carga).

8-67C Para un sistema de tubería defina la curva del sistema, la curva característica y el punto de operación en una gráfica de carga contra razón de flujo.

8-68 Se tiene agua a 20°C que será bombeada desde un depósito (z_A = 2 m) hasta otro a una elevación mayor (z_B = 9 m) a través de dos tuberías de plástico de 25 m de largo conectadas en paralelo. Los diámetros de las dos tuberías son de 3 y 5 cm. El agua se bombeará con un acoplamiento de motor-bomba de 68 por ciento de eficiencia que extrae 7 kW de potencia eléctrica durante la operación. Las pérdidas menores y la pérdida de carga en las tuberías que conectan las tuberías paralelas a los dos depósitos se consideran despreciables. Determine la razón de flujo total entre los depósitos y las razones de flujo a través de cada una de las tuberías paralelas.

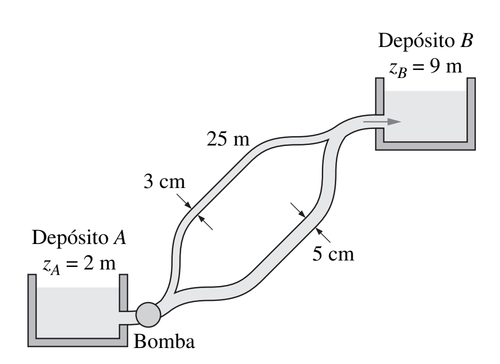


FIGURA P8-68

8-69I Se tiene agua a 70°F que fluye por medio de gravedad desde un depósito grande a una elevación hasta uno más pequeño a través de un sistema de tubería de hierro fundido de 120 ft de largo y 2 in de diámetro que incluye cuatro codos embridados estándar, una entrada redondeada, una salida con borde agudo y una válvula de compuerta completamente abierta. Si se considera la superficie libre del depósito más bajo como el nivel de referencia, determine la elevación z_1 del depósito más alto para una razón de flujo de 10 ft^3/min. *Respuesta:* 23.1 ft

8-70 Un tanque de 3 m de diámetro inicialmente está lleno con agua 2 m sobre el centro de un orificio de borde agudo y 10 cm de diámetro. La superficie del tanque de agua está abierta a la atmósfera, y el orificio drena a la atmósfera. Si desprecia el efecto del factor de corrección de energía cinética, calcule: *a*) la velocidad inicial de flujo del tanque y *b*) el tiempo que se requiere para vaciar el tanque. ¿El coeficiente de pérdida del orificio provoca un aumento considerable en el tiempo de drenado del tanque?

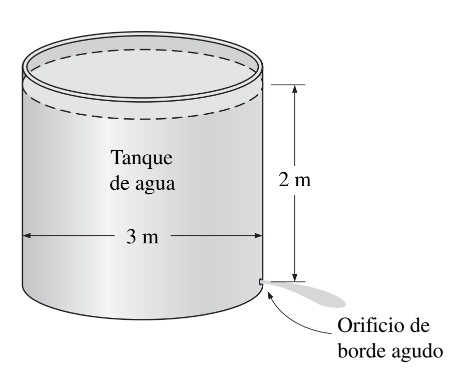


FIGURA P8-70

8-71 Un tanque de 3 m de diámetro inicialmente está lleno con agua 2 m arriba del centro de un orificio de borde agudo y 10 cm de diámetro. La superficie del agua del tanque está abierta a la atmósfera, y el orificio drena a la atmósfera a través de una tubería de 100 m de largo. El coeficiente de fricción de la tubería se puede considerar como 0.015 y el efecto del factor de corrección de energía cinética se puede despreciar. Determine: *a*) la velocidad inicial desde el tanque y *b*) el tiempo que se necesita para vaciarlo.

8-72 Reconsidere el problema 8-71. Con la finalidad de drenar el tanque más rápido, se instala una bomba cerca de la salida del tanque. Determine cuánta entrada de potencia de bomba se necesita para establecer una velocidad de agua promedio de 4 m/s cuando el tanque está lleno en z = 2 m. Además, si se supone que la velocidad de descarga permanece constante, estime el tiempo que se requiere para drenar el tanque.

Alguien sugiere que no hay diferencia si la bomba se ubica al principio o al final de la tubería, y que el rendimiento será el mismo en cualquier caso, pero otra persona afirma que colocar

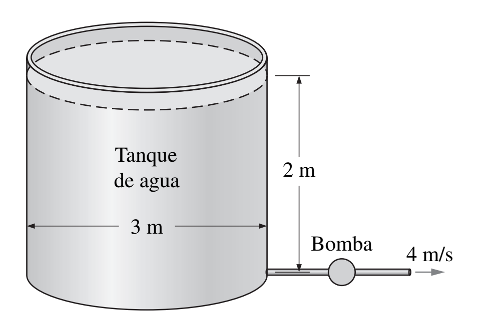


FIGURA P8-72

la bomba cerca del final de la tubería puede provocar cavitación. La temperatura del agua es de 30°C, de modo que la presión del vapor de agua es P_v = 4.246 kPa = 0.43 m de columna de agua y el sistema se ubica a nivel del mar. Investigue si existe la posibilidad de cavitación y si debería estar preocupado por la ubicación de la bomba.

8-73 Se tiene petróleo a 20°C que fluye a través de un embudo vertical de vidrio que consiste de un depósito cilíndrico de 15 cm de alto y una tubería de 1 cm de diámetro y 25 cm de alto. El embudo siempre se mantiene lleno con la adición de petróleo de un tanque. Si se supone que los efectos de entrada son despreciables, determine la razón de flujo del petróleo a través del embudo y calcule la "efectividad del embudo", que se puede definir como el cociente de la razón de flujo real a través del embudo a la razón de flujo máxima para el caso "sin fricción". *Respuestas:* 4.09×10^{-6} m³/s, 1.86 por ciento

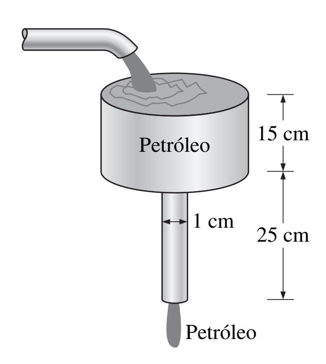


FIGURA P8-73

8-74 Repita el problema 8-73 y suponga: *a*) que se duplica el diámetro de la tubería y *b*) que se duplica la longitud de la tubería.

8-75 Se tiene agua a 15°C que se drena de un depósito grande con el uso de dos tuberías de plástico horizontales conectadas en serie. La primera tubería mide 20 m de largo y tiene un diámetro de 10 cm, mientras que la segunda tubería mide 35 m de largo y tiene un diámetro de 4 cm. El nivel del agua en el depósito está 18 m sobre la línea central de la tubería. La entrada de la tubería tiene borde agudo y la contracción entre las dos tuberías es repentina. Si se desprecia el efecto del factor de corrección de energía cinética, determine la razón de descarga del agua del depósito.

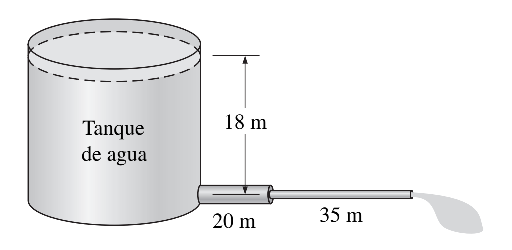


FIGURA P8-75

8-76I Un granjero debe bombear agua a 70°F de un río a un tanque de almacenamiento de agua cercano y emplea una tubería plástica de 125 ft de largo y 5 in de diámetro con tres codos suaves embridados de 90°. La velocidad del agua cerca de la superficie del río es de 6 ft/s, y la entrada de la tubería se coloca en el río normal a la dirección del flujo de agua para sacar ventaja de la presión dinámica. La diferencia de elevación entre el río y la superficie libre del tanque es de 12 ft. Para una razón de flujo de 1.5 ft³/s y una eficiencia de acoplamiento bomba-motor de 70 por ciento, determine la entrada de potencia eléctrica necesaria para el acoplamiento bomba-motor.

8-77I Reconsidere el problema 8-76I. Con el Software EES (u otro) investigue el efecto del diámetro de la tubería sobre la entrada de potencia eléctrica necesaria para la bomba. Varíe el diámetro de la tubería de 1 a 10 in, en incrementos de 1 in. Tabule y grafique los resultados, dibuje sus conclusiones.

8-78 Un tanque de agua lleno con agua que el sol calentó a 40°C servirá para duchas en un campo que usa flujo impulsado por gravedad. El sistema incluye 20 m de tubería de hierro galvanizado de 1.5 cm de diámetro con cuatro codos esquinados de 90° sin álabes directores y una válvula de globo totalmente abierta. Si el agua fluye a una razón de 0.7 L/s a través de la ducha, determine qué tan alto, del nivel de salida de la ducha, debe estar el nivel del agua en el tanque. No considere las pérdidas en la entrada y la regadera, e ignore el efecto del factor de corrección de energía cinética.

8-79 Dos depósitos de agua, *A* y *B*, están conectados a través de una tubería de hierro fundido de 40 m de largo y 2 cm de diámetro con una entrada de borde agudo. La tubería también tiene una válvula de retención de charnela y una válvula de compuerta totalmente abierta. El nivel del agua en ambos depósitos es el mismo, pero el depósito *A* está presurizado con aire comprimido, mientras que el depósito *B* está abierto a la atmósfera a 88 kPa. Si la razón de flujo inicial a través de la tubería es de 1.2 l/s, determine la presión de aire absoluta en lo alto del depósito *A*. Considere que la temperatura del agua es de 10°C. *Respuesta:* 733 kPa

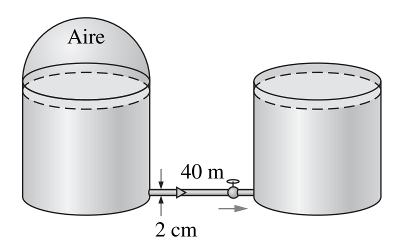


FIGURA P8-79

8-80 Un camión cisterna con respiradero se debe llenar con petróleo con ρ = 920 kg/m³ y μ = 0.045 kg/m · s de un depósito subterráneo con una manguera plástica de 20 m de largo y 5 cm de diámetro que tiene una entrada ligeramente redondeada y dos codos suaves de 90°. La diferencia de elevación entre el nivel del petróleo en el depósito y lo alto del camión cisterna donde descarga la manguera es de 5 m. La capacidad del camión cisterna es de 18 m³ y el tiempo de llenado es de 30 min. Considere que el factor de corrección de energía cinética en la descarga de la manguera es de 1.05 y al suponer una eficiencia

del acoplamiento bomba-motor de 82 por ciento, determine la entrada de potencia necesaria para el acoplamiento bomba-motor.

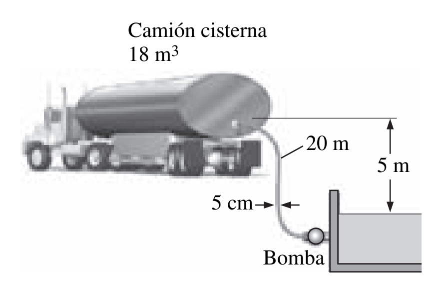


FIGURA P8-80

8-81 Dos tuberías de idéntico material y longitud se conectan en paralelo. El diámetro de la tubería *A* es el doble del diámetro de la tubería *B*. Si se supone que el factor de fricción es el mismo en ambos casos, y sin considerar pérdidas menores, determine el cociente de las razones de flujo en las dos tuberías.

8-82 Cierta parte de unas tuberías de hierro fundido de un sistema de distribución de agua involucra dos tuberías en paralelo. Ambas tuberías paralelas tienen un diámetro de 30 cm y el flujo es totalmente turbulento. Una de las ramas (tubería *A*) mide 1 000 m de largo, mientras que la otra rama (tubería *B*) mide 3 000 m de largo. Si la razón de flujo a través de la tubería *A* es de 0.4 m^3/s, determine la razón de flujo a través de la tubería *B*. No considere pérdidas menores y suponga que la temperatura del agua es de 15°C. Demuestre que el flujo es totalmente turbulento y por lo tanto el factor de fricción es independiente del número de Reynolds. *Respuesta:* 0.231 m^3/s

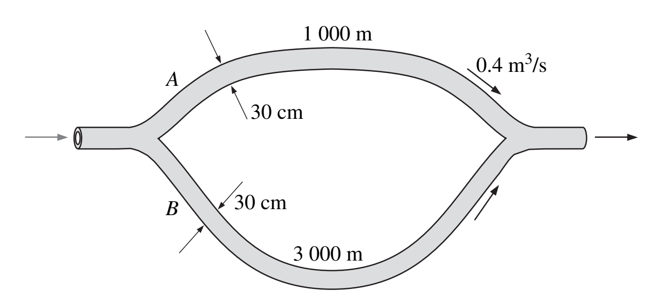


FIGURA P8-82

8-83 Repita el problema 8-82 y suponga que la tubería *A* tiene una válvula de compuerta semicerrada (K_L = 2.1) mientras que la tubería *B* tiene una válvula de globo totalmente abierta (K_L = 10) y las otras pérdidas menores son despreciables. Suponga que el flujo es totalmente turbulento.

8-84 Un sistema de calefacción geotérmica de un distrito incluye el transporte de agua geotérmica a 110°C desde un pozo geotérmico hasta una ciudad a aproximadamente la misma elevación por una distancia de 12 km a una razón de 1.5 m^3/s en tuberías de acero inoxidable de 60 cm de diámetro. Las presiones del fluido en el pozo y el punto de llegada a la ciudad son las mismas. Las pérdidas menores son despreciables debido a la gran razón de longitud a diámetro y al relativamente pequeño número de accesorios que provocan pérdidas menores. *a*) Si se supone que la eficiencia bomba-motor es de 74 por ciento, determine el consumo de potencia eléctrica del sistema para bombeo. ¿Recomendaría usar sólo una bomba de gran potencia o varias bombas más pequeñas de potencias iguales dispersas a lo largo de la tubería? Explique. *b*) Determine el costo diario del consumo de potencia del sistema si el costo unitario de la electricidad es de $0.06/kWh. *c*) Se estima que la temperatura del agua geotérmica cae 0.5°C durante este largo flujo. Determine si el calentamiento por fricción durante el flujo puede recompensar esta caída en la temperatura.

8-85 Repita el problema 8-84 para tuberías de hierro fundido del mismo diámetro.

8-86E Una secadora de ropa descarga aire a 1 atm y 120°F a una razón de 1.2 ft^3/s cuando su redondeada salida de aire de 5 in de diámetro y pérdida despreciable no está conectada a ducto alguno. Determine la razón de flujo cuando la salida de aire se conecta a un ducto de 15 ft de largo y 5 in de diámetro hecho de hierro galvanizado, con tres codos suaves embridados de 90°. Considere que el factor de fricción del ducto es de 0.019 y suponga que la potencia de ventilador permanece constante.

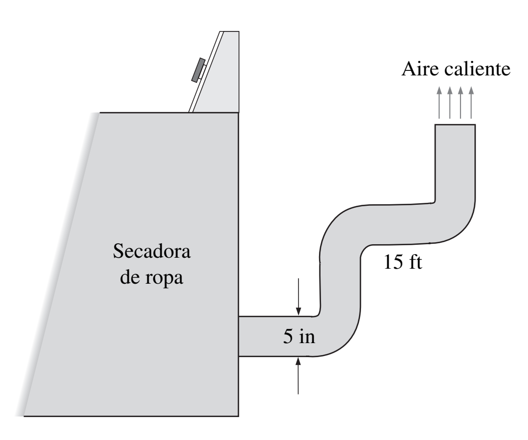


FIGURA P8-86E

8-87 En edificios altos, el agua caliente del tanque del agua circula a través de un lazo, de modo que el usuario no tiene que esperar a que se drene toda el agua fría en las grandes tuberías antes de que el agua caliente comience a salir. Cierto lazo de recirculación tiene tuberías de hierro fundido de 40 m de largo y 1.2 cm de diámetro con seis codos suaves roscados de 90° y dos válvulas de compuerta totalmente abiertas. Si la velocidad de flujo promedio a través del lazo es de 2.5 m/s, determine la potencia necesaria para la bomba de recirculación. Considere que la temperatura promedio del agua es de 60°C y la eficiencia de la bomba es de 70 por ciento. *Respuesta:* 0.217 kW

8-88 Reconsidere el problema 8-87. Con el Software EES (o algún otro) investigue el efecto de la velocidad de flujo promedio sobre la entrada de potencia a la bom-

ba de recirculación. Varíe la velocidad de 0 a 3 m/s en incrementos de 0.3 m/s. Tabule y grafique los resultados.

8-89 Repita el problema 8-87, pero con tuberías de plástico.

Mediciones de velocidad y razón de flujo

8-90C ¿Cuáles son las consideraciones básicas cuando se selecciona un flujómetro para medir la razón de flujo de un fluido?

8-91C Explique cómo se mide la razón de flujo con un tubo de Pitot estático y indique sus ventajas y desventajas con respecto a costo, caída de presión, confiabilidad y precisión.

8-92C Explique cómo se mide la razón de flujo con flujómetros del tipo obstrucción. Compare los medidores de placa de orificio, toberas de flujo y medidores Venturi respecto a costo, tamaño, pérdida de carga y precisión.

8-93C ¿Cómo operan los flujómetros de desplazamiento positivo? ¿Por qué se usan comúnmente para medir gasolina, agua y gas natural?

8-94C Explique cómo se mide la razón de flujo con un flujómetro de turbina y explique cómo se comparan con otros tipos de flujómetros respecto a costo, pérdida de carga y precisión.

8-95C ¿Cuál es el principio operativo de los flujómetros de área variable (rotámetros)? ¿Cómo se comparan con otros tipos de flujómetros respecto a costo, pérdida de carga y confiabilidad?

8-96C ¿Cuál es la diferencia entre los principios operativos de los anemómetros térmicos y láser Doppler?

8-97C ¿Cuál es la diferencia entre la velocimetría láser Doppler (LDV) y la velocimetría de imagen de partícula (PIV)?

8-98 La razón de flujo del amoniaco a 10°C (ρ = 624.6 kg/m^3 y μ = 1.697 × 10^{-4} kg/m · s) a través de una tubería de 3 cm de diámetro se medirá con una tobera de flujo de 1.5 cm de diámetro equipada con un manómetro de presión diferencial. Si el manómetro lee una diferencia de presión de 4 kPa, determine la razón de flujo del amoniaco a través de la tubería y la velocidad de flujo promedio.

8-99 Se debe determinar la razón de flujo del agua a través de una tubería de 10 cm de diámetro cuando se mide la velocidad del agua en varias posiciones a lo largo de una sección transversal. Para el conjunto de mediciones dado en la tabla, determine la razón de flujo.

r, cm	V, m/s
0	6.4
1	6.1
2	5.2
3	4.4
4	2.0
5	0.0

8-100I Una placa de orificio de 2 in de diámetro se usa para medir la razón de flujo de masa de agua a 60°F (ρ = 62.36 lbm/ft^3 y μ = 7.536 × 10^{-4} lbm/ft · s) a través de una tubería horizontal de 4 in de diámetro. Se usa un manómetro de mercurio para medir la diferencia de presión a través de la placa de orificio. Si la lectura del manómetro diferencial es de 6 in, determine el flujo volumétrico del agua a través de la tubería, la velocidad promedio y la pérdida de carga causada por el medidor de orificio.

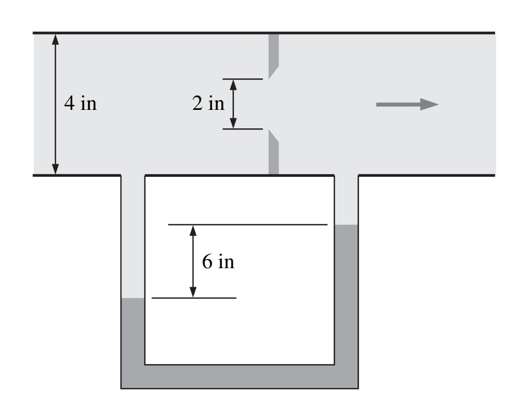


FIGURA P8-100E

8-101I Repita el problema 8-100I, pero con una lectura del manómetro diferencial de 9 in.

8-102 La razón de flujo de agua a 20°C (ρ = 998 kg/m^3 y μ = 1.002 × 10^{-3} kg/m · s) a través de una tubería de 50 cm de diámetro se mide en 250 L/s con un medidor de orificio de 30 cm de diámetro. Determine la diferencia de presión indicada por el medidor de orificio y la pérdida de carga.

8-103 Un medidor Venturi equipado con un manómetro diferencial se usa para medir la razón de flujo de agua a 15°C (ρ = 999.1 kg/m^3) a través de una tubería horizontal de 5 cm de diámetro. El diámetro de la garganta Venturi es de 3 cm, y la caída de presión medida es de 5 kPa. Cuando se considera el coeficiente de descarga como 0.98, determine el flujo volumétrico del agua y la velocidad promedio en la tubería. *Respuestas:* 2.35 L/s y 1.20 m/s

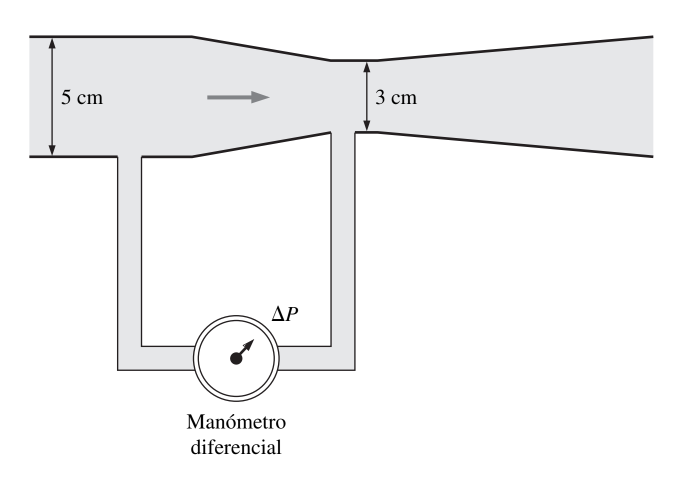


FIGURA P8-103

8-104 Reconsidere el problema 8-103. Varíe la caída de presión de 1 kPa a 10 kPa, evalúe la razón de flujo a intervalos de 1 kPa y grafique contra la caída de presión.

8-105 La razón de flujo de aire a 20°C (ρ = 1.204 kg/m^3) a través de un ducto de 15 cm de diámetro se mide con un medidor Venturi equipado con un manómetro de agua. La garganta del tubo Venturi tiene un diámetro de 6 cm y el manómetro tiene una lectura máxima de 40 cm. Considere que el coeficiente de descarga es de 0.98 y determine el máximo flujo másico de aire que puede medir este medidor Venturi. *Respuesta:* 0.273 kg/s

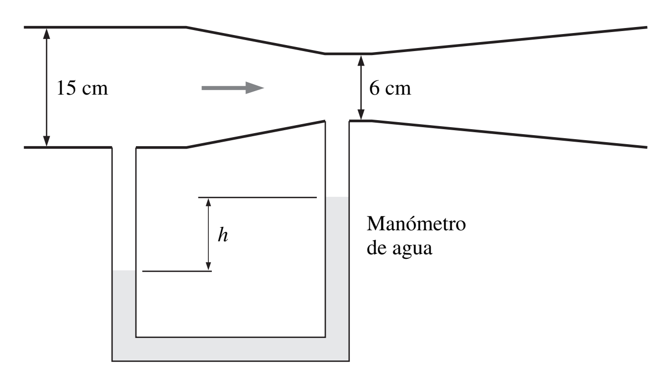


FIGURA P8-105

8-106 Repita el problema 8-105 para una garganta de tubo Venturi de 7.5 cm de diámetro.

8-107 Un medidor Venturi vertical equipado con un manómetro de presión diferencial como el de la figura P8-107 se utiliza para medir la razón de flujo de propano líquido a 10°C (ρ = 514.7 kg/m^3) a través de una tubería vertical de 8 cm de diámetro. Para un coeficiente de descarga de 0.98, determine el flujo volumétrico de propano a través de la tubería.

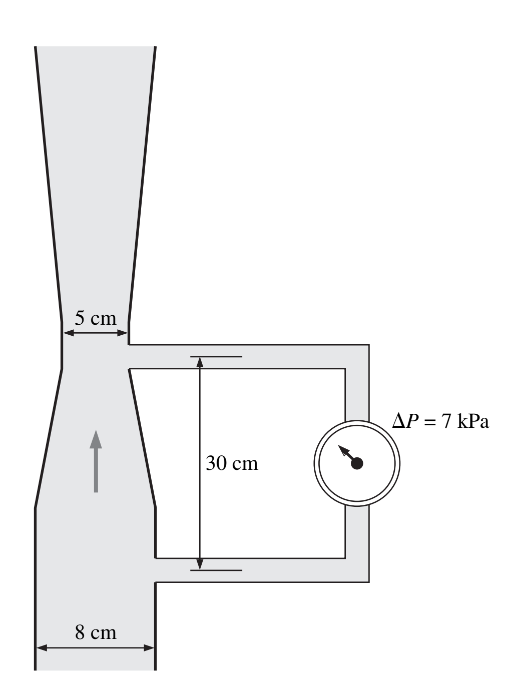


FIGURA P8-107

8-108 Una tobera equipada con un manómetro diferencial se usa para medir la razón de flujo de agua a 10°C (ρ = 999.7 kg/m^3 y μ = 1.307 × 10^{-3} kg/m · s) en una tubería horizontal de 3 cm de diámetro. El diámetro de la salida de la tobera es de 1.5 cm y la caída de presión medida es de 3 kPa. Determine el flujo volumétrico del agua, la velocidad promedio a través de la tubería y la pérdida de carga.

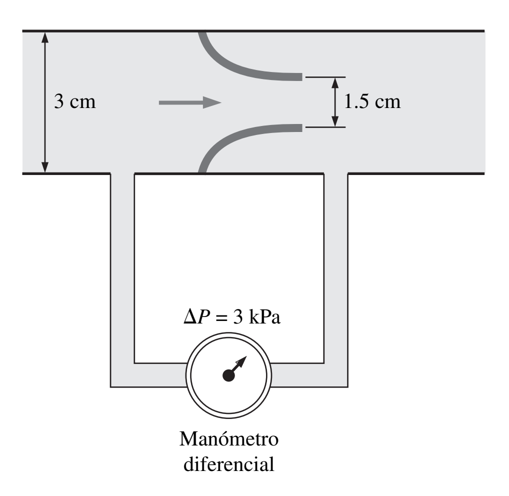


FIGURA P8-108

8-109 Un tanque de queroseno de 16 L (ρ = 820 kg/m^3) se llena con una manguera de 2 cm de diámetro equipada con un medidor de tobera de 1.5 cm de diámetro. Si toma 20 s para llenar el tanque, determine la diferencia de presión indicada por el medidor de tobera.

8-110 La razón de flujo del agua a 20°C (ρ = 998 kg/m^3 y μ = 1.002 × 10^{-3} kg/m · s) a través de una tubería de 4 cm de diámetro se mide con un medidor de tobera de 2 cm de diámetro equipado con un manómetro invertido aire-agua. Si el manó-

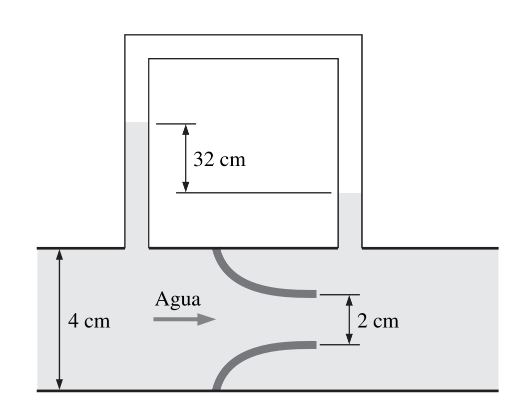


FIGURA P8-110

metro indica una lectura de columna de agua de 32 cm, determine el flujo volumétrico del agua y la pérdida de carga causada por el medidor de tobera.

8-111I El flujo volumétrico de líquido refrigerante 134a a 10°F (ρ = 83.31 lbm/ft3) se medirá con un medidor Venturi horizontal con un diámetro de 5 in en la entrada y 2 in en la garganta. Si un medidor de presión diferencial indica una caída de presión de 7.4 psi, determine la razón de flujo del refrigerante. Considere que el coeficiente de descarga del medidor Venturi es de 0.98

Problemas de repaso

8-112 Las necesidades de aire comprimido de una instalación de manufactura se satisfacen con un compresor de 150 hp que extrae aire del exterior a través de un ducto de 8 m de largo y 20 cm de diámetro hecho con delgadas hojas de hierro galvanizado. El compresor toma aire a una razón de 0.27 m^3/s en las condiciones externas de 15°C y 95 kPa. Sin considerar alguna pérdida menor, determine la potencia útil usada por el compresor para superar las pérdidas por fricción en este ducto. *Respuesta:* 9.66 W

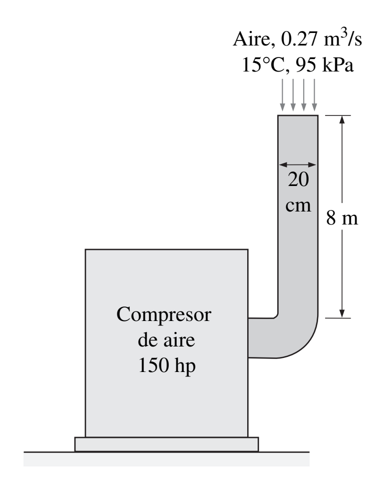


FIGURA P8-112

8-113 Una casa construida a la orilla de un río se enfría en verano usando el agua fría del río. Una sección de 15 m de largo de un ducto circular de acero inoxidable de 20 cm de diámetro pasa a través del agua del río. El aire fluye en la sección sumergida del ducto a 3 m/s a una temperatura promedio de 15°C. Para una eficiencia de ventilador de 62 por ciento, determine la potencia necesaria para superar la fricción del flujo en esta sección del ducto.

8-114 El perfil de velocidad en flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería circular, en m/s, está dada por, $u(r) = 6(1 - 100r^2)$, donde r es la distancia radial desde la línea central de la tubería en m. Determine: *a*) el radio de la tubería, *b*) la velocidad promedio a través de la tubería y *c*) la velocidad máxima en la tubería.

8-115I El perfil de velocidad, en ft/s, en un flujo laminar totalmente desarrollado de agua a 40°F en una tubería circular horizontal de 80 ft de largo, está dado por $u(r) = 0.8(1 - 625r^2)$, donde r es la distancia radial desde la línea central de la tubería en ft. Determine: *a*) el flujo volumétrico del agua a través de la tubería, *b*) la caída de presión en la tubería y *c*) la potencia de bombeo útil necesaria para superar esta caída de presión.

8-116I Repita el problema 8-115I, pero suponga que la tubería está inclinada 12° de la horizontal y el flujo asciende.

8-117 Considere flujo proveniente de un depósito a través de una tubería horizontal de longitud L y diámetro D conectada a la pared lateral del depósito a una distancia vertical H de la superficie libre. La razón de flujo a través de una tubería real con una sección reentrante (K_L = 0.8) será considerablemente menor que la razón de flujo a través del orificio calculada al suponer flujo "sin fricción" y por lo tanto de pérdida cero. Obtenga una relación para el "diámetro equivalente" de la tubería reentrante para usar en las relaciones para flujo sin fricción a través de un orificio y determine su valor para el factor de fricción, longitud y diámetro de una tubería de 0.018, 10 m y 0.04 m, respectivamente. Suponga que el factor de fricción de la tubería permanece constante y el efecto del factor de corrección de energía cinética es despreciable.

8-118 Se debe extraer agua de un depósito de agua de 5 m de alto cuando se perfora un orificio redondeado de 3 cm de diámetro con pérdida despreciable en la superficie del fondo y se une un codo horizontal de 90° de longitud despreciable. Cuando se considera que el factor de corrección de energía cinética es de 1.05, determine la razón de flujo del agua a través del codo si: *a*) el codo es un codo suave embridado y *b*) el codo es un

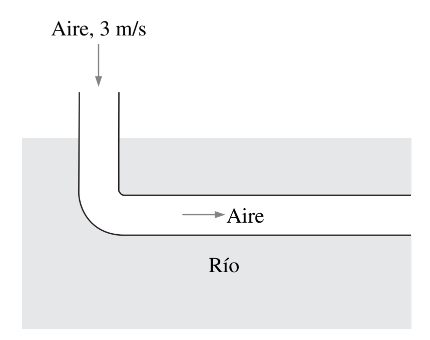


FIGURA P8-113

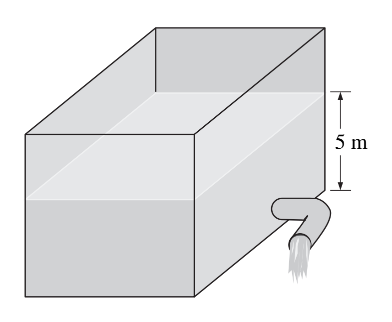


FIGURA P8-118

codo esquinado sin álabes directores. *Respuestas: a*) 0.00603 m^3/s, *b*) 0.00478 m^3/s

8-119 En un sistema de calefacción geotérmica de distrito, se deben entregar 10 000 kg/s de agua caliente a una distancia de 10 km, en una tubería horizontal. Las pérdidas menores son despreciables y la única pérdida considerable de energía surgirá de la fricción de la tubería. El factor de fricción se puede considerar como 0.015. Especificar una tubería de diámetro más grande reduciría la velocidad del agua, la carga de velocidad, la fricción de tubería y por tanto el consumo de potencia. Pero una tubería más grande también costaría más dinero inicialmente y para instalar. Dicho de otro modo: existe un diámetro de tubería óptimo que minimizará la suma del costo de tubería y el futuro costo de energía eléctrica.

Suponga que el sistema funcionará 24 h/día, todos los días, durante 30 años. Durante este tiempo, el costo de la electricidad permanecerá constante a $0.06/kWh. Suponga que el rendimiento del sistema permanece constante durante décadas (esto puede no ser cierto, en especial si a través de la tubería pasa agua sumamente mineralizada: se puede formar sarro). La bomba tiene una eficiencia global de 80 por ciento. El costo por comprar, instalar y aislar una tubería de 10 km depende del diámetro D y está dado por $Costo = \$10^6 D^2$, donde D está en m. Si por simplicidad supone inflación y razón de interés cero, así como cero valor de reparación y costo de mantenimiento cero, determine el diámetro de tubería óptimo.

8-120 Se tiene agua a 15°C que se descargará de un depósito a una razón de 18 L/s con el uso de dos tuberías horizontales de hierro fundido conectadas en serie y una bomba entre ellas. La primera tubería mide 20 m de largo y 6 cm de diámetro, mientras que la segunda tubería mide 35 m de largo y 4 cm de diámetro. El nivel del agua en el depósito está 30 m sobre la línea central de la tubería. La entrada de la tubería tiene bordes agudos y las pérdidas relacionadas con la conexión de la bomba son despreciables. Ignore el efecto del factor de corrección de energía cinética y determine la carga de bombeo necesaria y la potencia de bombeo mínima para mantener la razón de flujo indicada.

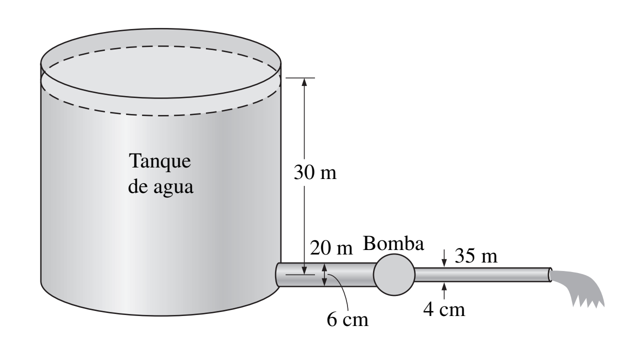


FIGURA P8-120

8-121 Reconsidere el problema 8-120. Con el Software EES (o algún otro) investigue el efecto del diámetro de la segunda tubería sobre la carga de bombeo necesaria para mantener la razón de flujo indicada. Varíe el diámetro de 1 a 10 cm en incrementos de 1 cm. Tabule y grafique los resultados.

8-122 Dos tuberías de diámetro y material idénticos se conectan en paralelo. La longitud de la tubería *A* es el doble de la longitud de la tubería *B*. Si supone que el flujo es totalmente turbulento en ambas tuberías, y por lo tanto el factor de fricción es independiente del número de Reynolds, y no considera las pérdidas menores, determine el cociente de las razones de flujo en las dos tuberías. *Respuesta:* 0.707

8-123 Una tubería que transporta petróleo a 40°C a una razón de 3 m^3/s se ramifica en dos tuberías paralelas fabricadas de acero comercial que se vuelven a conectar corriente abajo. La tubería *A* mide 500 m de largo y tiene un diámetro de 30 cm, mientras que la tubería *B* mide 800 m de largo y tiene un diámetro de 45 cm. Las pérdidas menores se consideran despreciables. Determine la razón de flujo a través de cada una de las tuberías paralelas.

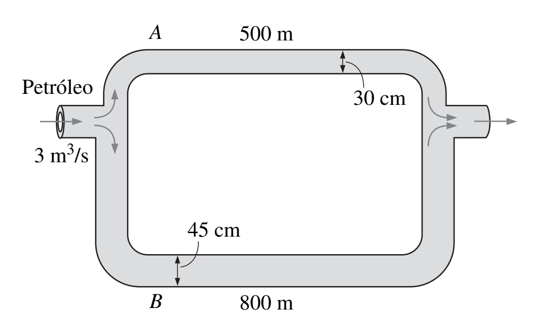


FIGURA P8-123

8-124 Repita el problema 8-123 para el flujo de agua caliente a 100°C de un sistema de calefacción de un distrito.

8-125I Una fuente de agua se instalará en una ubicación remota al unir una tubería de hierro fundido directamente a una tubería principal por la que el agua fluye a 70°F y 60 psig. La entrada a la tubería tiene bordes agudos y el sistema de tubería de 50 ft de largo tiene tres codos esquinados de 90° sin álabes directores, una válvula de compuerta totalmente abierta y una válvula de ángulo con un coeficiente de pérdida de 5 cuando está totalmente abierta. Si el sistema debe proporcionar agua a una razón de 20 gal/min y la diferencia de elevación entre la tubería y la fuente es despreciable, determine el diámetro mínimo del sistema de tubería. *Respuesta:* 0.76 in

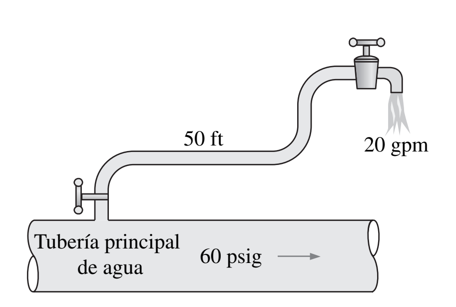


FIGURA P8-125I

8-126I Repita el problema 8-125I para tuberías de plástico.

8-127 En una planta hidroeléctrica, a la turbina se suministra agua a 20°C a una razón de 0.8 m^3/s a través de una tubería de hierro fundido de 200 m de largo y 0.35 m de diámetro. La diferencia de elevación entre la superficie libre del depósito y la descarga de turbina es de 70 m, y la eficiencia combinada turbina-generador es de 84 por ciento. Sin considerar las pérdidas menores debidas a la gran razón de longitud a diámetro, determine la potencia eléctrica reproducida por esta planta.

8-128 En el problema 8-127, el diámetro de la tubería se triplica con la finalidad de reducir las pérdidas de la tubería. Determine el porcentaje de aumento en la potencia neta es resultado de esta modificación.

8-129I Las necesidades de agua potable en una oficina se satisfacen por medio de grandes botellas de agua. En la botella, que está en un anaquel elevado, se introduce un extremo de una manguera plástica de 0.35 in de diámetro y 6 ft de largo, mientras que el otro extremo, con una válvula de tipo todo-nada, se mantiene 3 ft por abajo del fondo de la botella. Si el nivel del agua en la botella es de 1 ft cuando está llena, determine cuánto tiempo tardará llenar un vaso de 8 oz (= 0.00835 ft^3) *a*) cuando la botella se abre por primera vez y *b*) cuando la botella está casi vacía. Considere que el coeficiente de pérdida menor, inclusive la válvula todo-nada, es de 2.8 cuando está totalmente abierta. Suponga que la temperatura del agua es la misma que la temperatura ambiente de 70°F. *Respuestas:* (*a*) 2.4 s, (*b*) 2.8 s

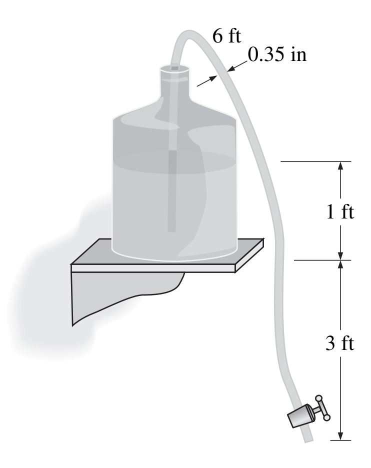


FIGURA P8-129I

8-130I Reconsidere el problema 8-129I. Con el Software EES (o algún otro) investigue el efecto del diámetro de la manguera sobre el tiempo necesario para llenar un vaso cuando la botella está llena. Varíe el diámetro de 0.2 a 2 in, en incrementos de 0.2 in. Tabule y grafique sus resultados.

8-131I Reconsidere el problema 8-129I. El oficinista que configuró el sistema de sifón compró un tramo de 12 ft de largo del tubo plástico y quería usarlo todo para evitar cortarlo en pedazos, porque pensó que la diferencia de elevación es lo que hace funcionar al sifón y que la longitud del tubo no es importante. Así que utilizó todo el tubo de 12 ft de largo. Si supone que las vueltas o constricciones en el tubo no son significativas (sea muy optimista) y que se mantiene la misma elevación, determine el tiempo que tarda en llenar un vaso de agua para ambos casos.

8-132 Una tubería circular de agua tiene un ensanchamiento repentino desde el diámetro D_1 = 15 cm hasta D_2 = 20 cm. La presión y la velocidad promedio del agua en la tubería más pequeña son P_1 = 120 kPa y 10 m/s, respectivamente, y el flujo es turbulento. Con la aplicación de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía, y sin considerar los efectos de los factores de corrección de energía cinética y de cantidad de movimiento de flujo, demuestre que el coeficiente de pérdida para el ensanchamiengto repentino es $K_L = (1 - D_1^2/D_2^2)^2$, y calcule K_L y P_2 para el caso dado.

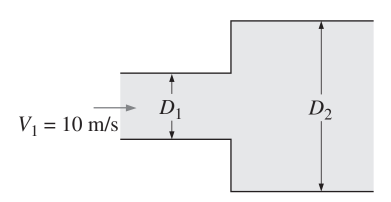


FIGURA P8-132

8-133 El agua a 20°C en una alberca de 10 m de diámetro y 2 m de altura desde el fondo se debe vaciar cuando se abre la tapa de una tubería plástica horizontal de 3 cm de diámetro y 25 m de largo unida al fondo de la alberca. Determine la razón inicial de descarga del agua a través de la tubería y el tiempo que tardará en vaciarse totalmente la alberca, si supone que la entrada a la tubería está redondeada con pérdida despreciable. Considere que el factor de fricción de la tubería es de 0.022. Con la velocidad de descarga inicial, verifique si éste es un valor razonable para el factor de fricción. *Respuestas:* 1.01 L/s, 86.7 *h*

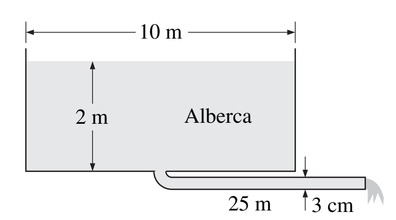


FIGURA P8-133

8-134 Reconsidere el problema 8-133. Con el Software EES (o algún otro) investigue el efecto del diámetro de tubería de descarga sobre el tiempo necesario para vaciar completamente la alberca. Varíe el diámetro de 1 a 10 cm, en incrementos de 1 cm. Tabule y grafique sus resultados.

8-135 Repita el problema 8-133 para una entrada de borde agudo a la tubería con K_L = 0.5. ¿Esta "pérdida menor" realmente es "menor" o no lo es?

8-136 Un sistema que consiste de dos tanques cilíndricos interconectados, con D_1 = 30 cm y D_2 = 12 cm, se usará para determinar el coeficiente de descarga de un corto tramo de tubo con la placa de orificio de diámetro D_0 = 5 mm instalada en él. Al principio (t = 0 s), las alturas del fluido en los tanques son h_1 = 50 cm y h_2 = 15 cm, como se muestra en la figura P8-136. Si toma 170 s que los niveles de fluido en los dos tanques se igualen y el flujo se detenga, determine el coeficiente de descarga de la placa de orificio. No considere algunas otras pérdidas asociadas con este flujo.

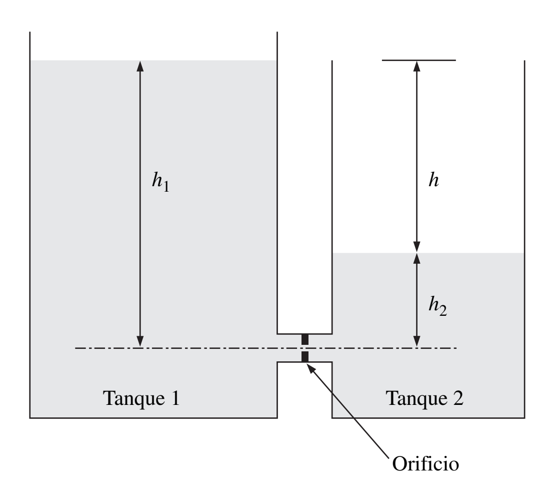


FIGURA P8-136

8-137 Un líquido sumamente viscoso se descarga de un contenedor grande a través de un tubo de diámetro pequeño en flujo laminar. Sin considerar efectos de entrada y cargas de velocidad, obtenga una relación para la variación de la profundidad del fluido en el tanque con el tiempo.

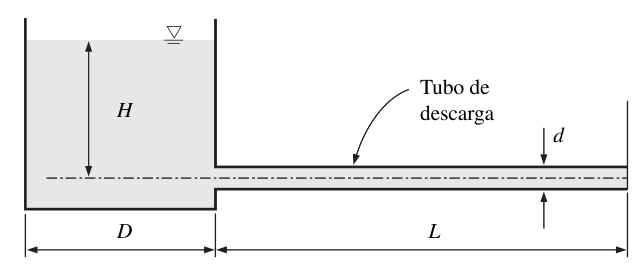


FIGURA P8-137

8-138 Un estudiante debe determinar la viscosidad cinemática de un aceite con el sistema que se muestra en el problema 8-137. La altura inicial del fluido en el tanque es H = 40 cm, el diámetro del tubo es d = 6 mm, la longitud del tubo es L = 0.65 m, y el diámetro del tanque es D = 0.63 m. El lector observa que toma 2 842 s que el nivel del fluido en el tanque caiga a 36 cm. Encuentre la viscosidad del fluido.

Problemas de diseño y ensayo

8-139 Las cajas electrónicas, como las computadoras, por lo general se enfrían con un ventilador. Escriba un ensayo acerca del aire forzado que enfría las cajas electrónicas y acerca de la selección del ventilador para dispositivos electrónicos.

8-140 Diseñe un experimento para medir la viscosidad de los líquidos con el uso de un embudo vertical con un depósito cilíndrico de altura h y una sección de flujo estrecha de diámetro D y longitud L. Realice hipótesis adecuadas, obtenga una relación para viscosidad en términos de cantidades fácilmente mensurables, como densidad y razón de flujo volumétrico. ¿Hay necesidad de usar un factor de corrección?

8-141 Se debe elegir una bomba para una cascada en un jardín. El agua se junta en un cazo en el fondo, y la diferencia de elevación entre la superficie libre del cazo y la posición donde se descarga el agua es de 3 m. La razón de flujo del agua es de al menos 8 L/s. Seleccione una unidad motor-bomba adecuada para esta tarea, identifique tres fabricantes e indique números de modelo y precios. Haga una elección y explique por qué seleccionó dicho producto. También estime el costo del consumo de potencia anual de esta unidad si se supone operación continua.

8-142 Durante un viaje a un campamento, usted nota que el agua se descarga desde un depósito elevado hasta una corriente en el valle a través de una tubería de plástico de 30 cm de diámetro. La diferencia de elevación entre la superficie libre del depósito y la corriente es de 70 m. Usted concibe la idea de generar potencia a partir de este flujo de agua. Diseñe una planta de generación de potencia que producirá la mayor potencia posible a partir de este recurso. Además, investigue el efecto de la generación de potencia sobre la razón de descarga del agua. ¿Qué razón de descarga maximizará la generación de potencia?

CAPÍTULO

9

ANÁLISIS DIFERENCIAL DE FLUJO DE FLUIDOS

En este capítulo se deducen las ecuaciones diferenciales del movimiento de fluidos, es decir, la conservación de la masa (*ecuación de continuidad*) y la segunda Ley de Newton (*ecuación de Navier-Stokes*). Dichas ecuaciones se aplican a cada punto en el campo de flujo y por lo tanto permiten resolver los detalles del flujo en todas partes en el *dominio del flujo*. Por desgracia, la mayoría de las ecuaciones diferenciales que se presentan en la mecánica de fluidos son muy difíciles de resolver y con frecuencia exigen utilizar computadora. Además, estas ecuaciones se deben combinar cuando es necesario con ecuaciones adicionales como sería una ecuación de estado y una ecuación para transporte de energía y/o especies. Se ofrece un procedimiento paso a paso para resolver este conjunto de ecuaciones diferenciales de movimiento de fluido y obtener soluciones analíticas para numerosos ejemplos simples. Además se introduce el concepto de *función de corriente*; las curvas de una función de corriente constante evidencian ser *líneas de corriente* en campos de flujo bidimensional.

OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Entender cómo se deducen las ecuaciones diferenciales de conservación de masa y cantidad de movimiento.
- Calcular la función de corriente y campo de presión, y graficar líneas de corriente para un campo de velocidad conocido.
- Obtener soluciones analíticas de las ecuaciones de movimiento para campos de flujo simples.

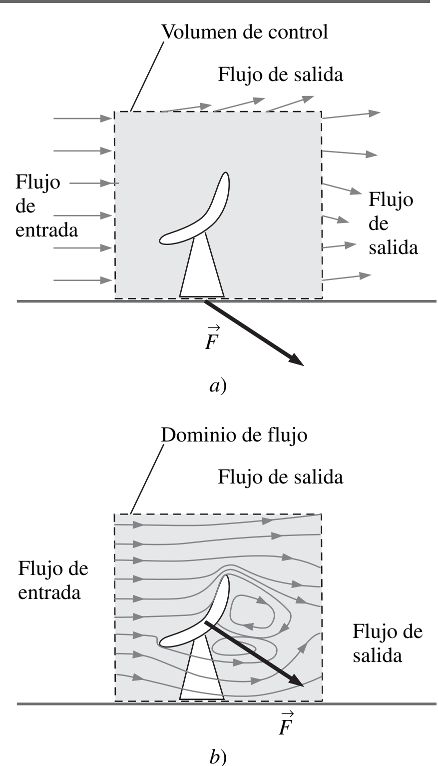


FIGURA 9-1
a) En el análisis de volumen de control, el interior del volumen de control se trata como una "caja negra"; pero, *b*) en el análisis diferencial, *todos* los detalles del flujo se resuelven en *cada* punto dentro del dominio del flujo.

9-1 ▪ INTRODUCCIÓN

En el capítulo 5 se dedujeron las leyes de conservación de masa y energía para el volumen de control y en el capítulo 6 la ecuación de cantidad de movimiento. El análisis de volumen de control es útil cuando se está interesado en las características globales de un flujo, como la razón de flujo de masa hacia dentro o hacia fuera del volumen de control o las fuerzas netas aplicadas a los cuerpos. En la figura 9-1*a* se ilustra un ejemplo para un caso de viento que fluye alrededor de una antena satelital. Se considera un volumen de control rectangular alrededor de la antena satelital, como se ilustra. Si se conoce la velocidad del aire a lo largo de toda la superficie de control, se puede calcular la fuerza de reacción neta sobre la antena satelital sin, inclusive, conocer detalle alguno acerca de su geometría. De hecho, el interior del volumen de control se trata como una "caja negra" en el análisis del volumen de control: *no se puede* obtener conocimiento detallado acerca de las propiedades de flujo como velocidad o presión en puntos *adentro* del volumen de control.

Por otra parte, el **análisis diferencial** implica el uso de ecuaciones diferenciales de movimiento de fluido a *cualquier* y *cada* punto en el campo de flujo sobre una región llamada **dominio de flujo**. La técnica diferencial se puede considerar el análisis de millones de pequeños volúmenes de control apilados extremo con extremo y encima unos de otros a todo lo largo del campo de flujo. En el límite, cuando el número de pequeños volúmenes de control tiende al infinito, y el tamaño de cada volumen de control se encoge a un punto, las ecuaciones de conservación se simplifican a un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que son válidas en cualquier punto en el flujo. Cuando se resuelven, estas ecuaciones diferenciales muestran detalles acerca de la velocidad, densidad, presión, entre otras características, en *cada* punto a través de *todo* el dominio de flujo. En la figura 9-1*b*, por ejemplo, el análisis diferencial del flujo de aire alrededor de la antena satelital produce formas de línea de corriente, y una distribución de presión detallada alrededor de ella, entre otras. A partir de estos detalles, se puede integrar para encontrar características globales del flujo, como la fuerza neta sobre la antena satelital.

En un problema de flujo de fluidos, como el que se ilustra en la figura 9-1, donde la densidad del aire y los cambios de temperatura son insignificantes, es suficiente resolver dos ecuaciones diferenciales de movimiento: conservación de masa y segunda Ley de Newton (conservación de cantidad de movimiento lineal). Para flujo incompresible tridimensional existen *cuatro incógnitas* (las componentes de velocidad u, v, w y la presión P) y *cuatro ecuaciones* (una de la conservación de masa, que es una ecuación escalar; y tres de la segunda Ley de Newton, que es una ecuación vectorial). Como se verá, las ecuaciones están **acopladas**, lo que significa que algunas de las variables aparecen en las cuatro ecuaciones; por lo tanto, el conjunto de ecuaciones diferenciales se debe resolver simultáneamente para las cuatro incógnitas. Además, se deben especificar las **condiciones de frontera** para las variables en *todas las fronteras del dominio de flujo*, incluso entradas, salidas y paredes. Para finalizar, si el flujo es no-estacionario se debe llevar la solución a lo largo del tiempo conforme el campo de flujo cambie. El lector puede observar cómo el análisis diferencial del flujo de fluidos se puede volver bastante complicado y difícil. Aquí las computadoras son de una ayuda tremenda, como se comenta en el capítulo 15. No obstante, hay mucho que puede hacerse de manera analítica y se comienza con la deducción de la ecuación diferencial para la conservación de la masa.

9-2 ▪ CONSERVACIÓN DE MASA: LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

A través de la aplicación del teorema de transporte de Reynolds (capítulo 4), se tiene la siguiente expresión general para la conservación de masa que se aplica a un volumen de control:

Conservación de masa para VC:

$$0 = \int_{\text{VC}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \tag{9-1}$$

Recuerde que la ecuación 9-1 es válida tanto para volúmenes de control fijos como en movimiento, siempre que el vector de velocidad sea la velocidad *absoluta* (como se ve por un observador fijo). Cuando existen entradas y salidas definidas adecuadamente, la ecuación 9-1 puede reescribirse como:

$$\int_{\text{VC}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = \sum_{\text{ent}} \dot{m} - \sum_{\text{sal}} \dot{m} \tag{9-2}$$

En palabras, la razón neta de cambio de masa dentro del volumen de control es igual a la razón a la que fluye la masa hacia el volumen de control menos la razón a la que fluye la masa afuera del volumen de control. La ecuación 9-2 se aplica a *cualquier* volumen de control, sin importar su tamaño. Para generar una ecuación diferencial para la conservación de masa, imagine que el volumen de control se encoge a tamaño infinitesimal, con dimensiones *dx*, *dy* y *dz* (Fig. 9-2). En el límite, todo el volumen de control se encoge a un *punto* en el flujo.

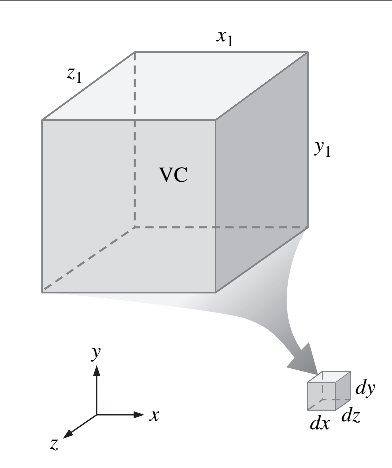


FIGURA 9-2
Para deducir una ecuación diferencial de conservación imagine que un volumen de control se encoge a tamaño infinitesimal.

Deducción con el uso del teorema de divergencia

La manera más rápida y directa de deducir la forma diferencial de la conservación de la masa es aplicar el **teorema de divergencia** a la ecuación 9-1. El teorema de divergencia también se llama **teorema de Gauss**, en honor al matemático alemán Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Este teorema permite transformar una integral de volumen de la divergencia de un vector en una integral de área sobre la superficie que define el volumen. Para cualquier vector $\vec{G}$, la **divergencia** de $\vec{G}$ se define como $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$ y el teorema de divergencia se puede escribir como:

Teorema de divergencia:

$$\int_{V} \vec{\nabla} \cdot \vec{G}\, dV = \oint_{A} \vec{G} \cdot \vec{n}\, dA \tag{9-3}$$

El círculo sobre la integral de área se usa para destacar que la integral se debe evaluar sobre *toda el área de la superficie cerrada A* que rodea al volumen V. Note que la superficie de control de la ecuación 9-1 *es* una superficie cerrada, aun cuando no siempre se agregue el círculo al símbolo de integral. La ecuación 9-3 se aplica a *cualquier* volumen, de modo que se elige el volumen de control de la ecuación 9-1. También se hace $\vec{G} = \rho\vec{V}$ porque $\vec{G}$ puede ser cualquier vector. La sustitución de la ecuación 9-3 en la ecuación 9-1 convierte la integral de superficie en una integral de volumen:

$$0 = \int_{\text{VC}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_{\text{VC}} \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right) dV$$

Ahora se combinan en una las dos integrales de volumen:

$$\int_{\text{VC}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right)\right] dV = 0 \tag{9-4}$$

Para finalizar, se afirma que la ecuación 9-4 debe sostenerse para *cualquier* volumen de control sin importar su tamaño o forma. Esto sólo es posible si el integrando (el término dentro de los corchetes) es idénticamente cero. Por lo tanto,

se tiene una ecuación diferencial general para la conservación de la masa, mejor conocida como **ecuación de continuidad**:

Ecuación de continuidad: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right) = 0 \quad \textbf{(9-5)}$$

La ecuación 9-5 es la forma general de la ecuación de continuidad que es válida inclusive para el flujo compresible porque no se ha supuesto flujo incompresible en el proceso de su reducción. Es válida en cualquier punto en el dominio de flujo.

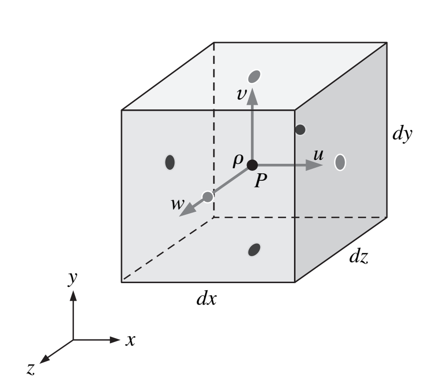


FIGURA 9-3
Para deducir la ecuación diferencial de conservación de masa en coordenadas cartesianas se usa un pequeño volumen de control con forma de caja centrado en el punto *P*; los puntos indican el centro de cada cara.

Deducción con el uso de un volumen de control infinitesimal

Ahora se deduce la ecuación de continuidad de manera diferente, cuando se comienza con un volumen de control sobre el que se aplica conservación de masa. Considere un volumen de control infinitesimal con forma de caja alineado con los ejes en coordenadas cartesianas (Fig. 9-3). Las dimensiones de la caja son *dx*, *dy* y *dz*, y el centro de la caja se muestra en algún punto arbitrario *P* desde el origen (la caja se puede ubicar en cualquier parte en el campo de flujo). En el centro de la caja se define la densidad como *r* y las componentes de velocidad *u*, *v* y *w*, como se muestra. En posiciones alejadas del centro de la caja, se usa una **expansión en serie de Taylor** en torno al centro de la caja (punto *P*) (la serie recibe su nombre en honor de su creador, el matemático inglés Brook Taylor, 1685-1731). Por ejemplo, el centro de la cara de la extrema derecha de la caja se ubica a una distancia *dx*/2 desde la mitad de la caja en la dirección *x*, el valor de ρu en dicho punto es:

$$(\rho u)_{\text{centro de la cara derecha}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \cdots \quad \textbf{(9-6)}$$

Sin embargo, conforme la caja que representa el volumen de control se encoge en un punto, los términos de segundo orden y de orden superior se vuelven despreciables. Por ejemplo, suponga $dx/L = 10^{-3}$, donde *L* es alguna longitud característica del dominio de flujo. Entonces $(dx/L)^2 = 10^{-6}$, un factor mil veces menor que *dx*/*L*. De hecho, cuanto más pequeña sea *dx*, más cierta será la suposición de que los términos de segundo orden son despreciables. Cuando se aplica esta expansión en serie de Taylor truncada a la densidad por la componente de velocidad normal en el punto central de cada una de las seis caras de la caja, se tiene:

Centro de la cara derecha: $$(\rho u)_{\text{centro de la cara derecha}} \cong \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

Centro de la cara izquierda: $$(\rho u)_{\text{centro de la cara izquierda}} \cong \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

Centro de la cara frontal: $$(\rho w)_{\text{centro de la cara frontal}} \cong \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}$$

Centro de la cara posterior: $$(\rho w)_{\text{centro de la cara posterior}} \cong \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}$$

Centro de la cara superior: $$(\rho v)_{\text{centro de la cara superior}} \cong \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

Centro de la cara inferior: $$(\rho v)_{\text{centro de la cara inferior}} \cong \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

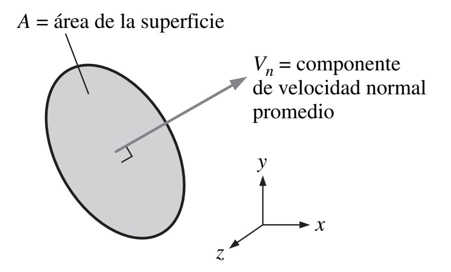


FIGURA 9-4
La razón de flujo de masa a través de una superficie es igual a $\rho V_n A$.

La razón de flujo de masa hacia dentro o fuera de las caras es igual a la densidad por la componente de velocidad normal en el punto central de la cara, por el área de la superficie de la cara. En otras palabras, $\dot{m} = \rho V_n A$ en cada cara, donde V_n es la magnitud de la velocidad normal a través de la cara y A es el área de la superficie de la cara (Fig. 9-4). En la figura 9-5 se ilustra la razón de flujo de masa a través de cada cara del volumen de control infinitesimal. También se podrían construir expansiones en series de Taylor truncadas en el centro de cada cara para las componentes de velocidad restantes (no-normales), pero esto no es necesario ya que dichas componentes son *tangenciales* a la cara en consideración. Por ejemplo, el valor de ρv en el centro de la cara derecha se puede estimar por medio de una expansión similar, pero, dado que v es tangencial a la cara derecha de la caja, no contribuye a la razón de flujo de masa hacia dentro o fuera de dicha cara.

Conforme el volumen de control se encoge a un punto, el valor de la integral de volumen en el lado izquierdo de la ecuación 9-2 se vuelve:

Razón de cambio de masa dentro del VC:
$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV \cong \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz \tag{9-7}$$

porque el volumen de la caja es $dx\, dy\, dz$. Ahora se aplican las aproximaciones de la figura 9-5 al lado derecho de la ecuación 9-2. Se suman todas las razones de flujo de masa hacia adentro y afuera del volumen de control a través de las caras. Las caras izquierda, inferior y posterior contribuyen al *flujo de entrada* de masa, y el primer término en el lado derecho de la ecuación 9-2 se convierte en:

Razón de flujo de masa neta hacia VC:

$$\sum_{\text{ent}} \dot{m} \cong \underbrace{\left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz}_{\text{cara izquierda}} + \underbrace{\left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz}_{\text{cara inferior}} + \underbrace{\left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy}_{\text{cara posterior}}$$

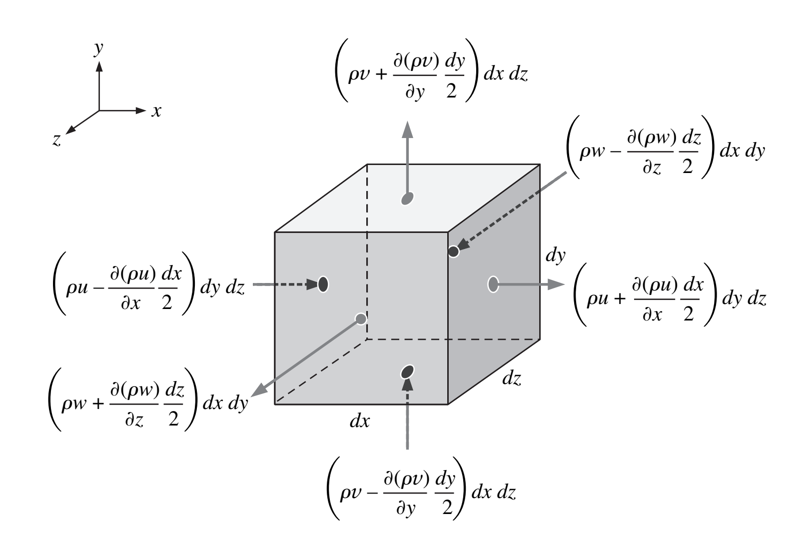


FIGURA 9-5
Flujo de entrada o de salida a través de cada cara del volumen de control diferencial; los puntos indican el centro de cada cara.

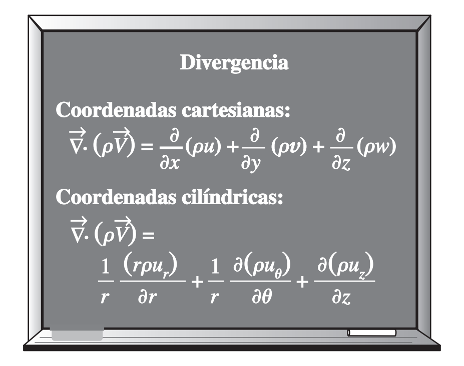


FIGURA 9-6
Divergencia en coordenadas cartesianas y cilíndricas.

De manera similar, las caras derecha, superior y frontal contribuyen al *flujo de salida*, y el segundo término en el lado derecho de la ecuación 9-2 se convierte en:

Razón de flujo de masa de salida neta de VC:

$$\sum_{\text{sal}} \dot{m} \cong \underbrace{\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\,dz}_{\text{cara izquierda}} + \underbrace{\left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\,dz}_{\text{cara inferior}} + \underbrace{\left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\,dy}_{\text{cara posterior}}$$

Se sustituye la ecuación 9-7 y estas dos ecuaciones para razón de flujo de masa en la ecuación 9-2. Muchos de los términos se cancelan mutuamente; después de combinar y simplificar los términos restantes, queda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

El volumen de la caja, $dx\,dy\,dz$, aparece en cada término y puede eliminarse. Después de reordenar se termina con la siguiente ecuación diferencial para conservación de masa en coordenadas cartesianas:

Ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(9-8)}$$

La ecuación 9-8 es la forma de la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas válida para el flujo compresible. Se puede escribir en forma más compacta cuando se reconoce el operador de divergencia (Fig. 9-6), que produce exactamente la misma ecuación que la 9-5.

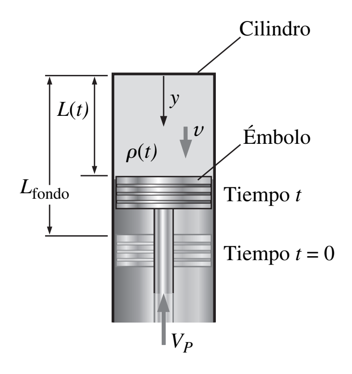


FIGURA 9-7
Combustible y aire son comprimidos por un émbolo en un cilindro dentro de un motor de combustión interna.

EJEMPLO 9-1 Compresión de una mezcla aire-combustible

En un cilindro de un motor de combustión interna, un émbolo comprime una mezcla de aire y combustible (Fig. 9-7). El origen de la coordenada y está en lo alto del cilindro, y y apunta directo hacia abajo, como se muestra. Se supone que el émbolo se mueve con rapidez constante V_P. La distancia L entre lo alto del cilindro y el émbolo disminuye con el tiempo de acuerdo con la aproximación lineal $L = L_{\text{fondo}} - V_P t$, donde L_{fondo} es la posición del émbolo cuando está en el fondo de su ciclo en el tiempo $t = 0$, como se ilustra en la figura 9-7. En $t = 0$, la densidad de la mezcla aire-combustible en el cilindro es igual a $\rho(0)$ en todas partes. Estime la densidad de la mezcla aire-combustible como función del tiempo y los parámetros dados durante la carrera de émbolo desde abajo hasta arriba.

SOLUCIÓN Se debe estimar la densidad de la mezcla aire-combustible como función del tiempo y los parámetros dados en el enunciado del problema.
Hipótesis **1** La densidad varía con el tiempo, pero no en el espacio; en otras palabras, la densidad es uniforme en todos los puntos del cilindro en cualquier momento de tiempo dado, pero cambia con el tiempo: $\rho = \rho(t)$. **2** La componente de velocidad v varía con y y t, pero no con x o z; en otras palabras, $v = v(y, t)$ sólo. **3** $u = w = 0$. **4** Durante la compresión no escapa masa del cilindro.
Análisis Primero se necesita establecer una expresión para la componente de velocidad v como función de y y t. Claramente, $v = 0$ en $y = 0$ (la parte superior del cilindro) y $v = -V_P$ en $y = L$. Por simplicidad, se supone que v varía linealmente entre estas dos condiciones de frontera:

Componente de velocidad vertical: $$v = -V_P\frac{y}{L} \qquad \textbf{(1)}$$

donde L es función del tiempo, como está dado. La ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas en su forma para el flujo compresible (Ec. 9-8) es apropiada para la solución de este problema:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}}_{0 \text{ pues } u=0} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}_{0 \text{ pues } w=0} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

Sin embargo, debido a la hipótesis 1, la densidad no es una función de y y por lo tanto puede salir de la derivada con respecto a y como un factor independiente de y. Cuando se sustituye la ecuación 1 para v y la expresión dada para L, se diferencia y se simplifica, se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial v}{\partial y} = -\rho \frac{\partial}{\partial y}\left(-V_P \frac{y}{L}\right) = \rho \frac{V_P}{L} = \rho \frac{V_P}{L_{\text{fondo}} - V_P t} \tag{2}$$

Debido a la hipótesis 1 se sustituye $\partial\rho/\partial t$ con $d\rho/dt$ en la ecuación 2. Después de separar variables se obtiene una expresión que puede integrarse analíticamente:

$$\int_{\rho=\rho(0)}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \int_{t=0}^{t} \frac{V_P}{L_{\text{fondo}} - V_P t}\, dt \quad \rightarrow \quad \ln \frac{\rho}{\rho(0)} = \ln \frac{L_{\text{fondo}}}{L_{\text{fondo}} - V_P t} \tag{3}$$

Para finalizar, entonces, se tiene la expresión deseada para ρ como función del tiempo:

$$\rho = \rho(0) \frac{L_{\text{fondo}}}{L_{\text{fondo}} - V_P t} \tag{4}$$

Cuando se conserva la convención de resultados sin dimensiones, la ecuación 4 se puede reescribir como:

$$\frac{\rho}{\rho(0)} = \frac{1}{1 - V_P t / L_{\text{fondo}}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\rho^* = \frac{1}{1 - t^*}} \tag{5}$$

donde $\rho^* = \rho/\rho(0)$ y $t^* = V_P t/L_{\text{fondo}}$. La ecuación 5 se grafica en la figura 9-8.

Discusión En $t^* = 1$, el émbolo toca la parte superior del cilindro y ρ tiende a infinito. En un motor de combustión interna real, el émbolo se detiene antes de alcanzar lo alto del cilindro, con lo que forma lo que se llama volumen mínimo (correspondiente al punto muerto superior de la posición del émbolo), que usualmente constituye de 4 a 12 por ciento del volumen de cilindro máximo. La suposición de densidad uniforme dentro del cilindro es la suposición más débil en este análisis simplificado. En realidad, ρ puede ser una función tanto del espacio como del tiempo.

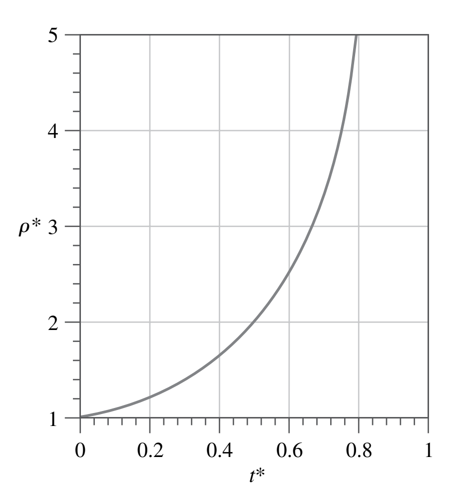


FIGURA 9-8
Densidad adimensional como función del tiempo adimensional para el Ejemplo 9-1.

Forma alternativa de la ecuación de continuidad

La ecuación 9-5 se expande cuando se usa la regla del producto sobre el término de divergencia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\rho}_{\text{derivada material de } \rho} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{9-9}$$

Cuando se reconoce *la derivada* material en la ecuación 9-9 (véase capítulo 4), y se divide entre *r*, la ecuación de continuidad para el flujo compresible se escribe en una forma alternativa:

Forma alternativa de la ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{9-10}$$

La ecuación 9-10 muestra que, mientras se sigue un elemento de fluido a través del campo de flujo (a éste se le llama **elemento material** o partícula de fluido),

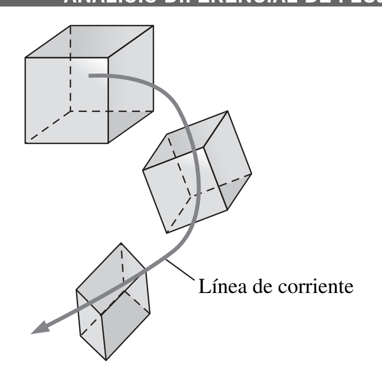


FIGURA 9-9
Conforme un elemento material se mueve a través de un campo de flujo, su densidad cambia de acuerdo con la ecuación 9-10.

su densidad cambia con el cambio $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$. (Fig. 9-9). Por otra parte, si los cambios en la densidad del elemento material son despreciablemente pequeños en comparación con las magnitudes de los gradientes de velocidad en $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ conforme el elemento se mueve por ahí, entonces $\rho^{-1}D\rho/Dt \cong 0$ y el flujo se aproxima como **incompresible**.

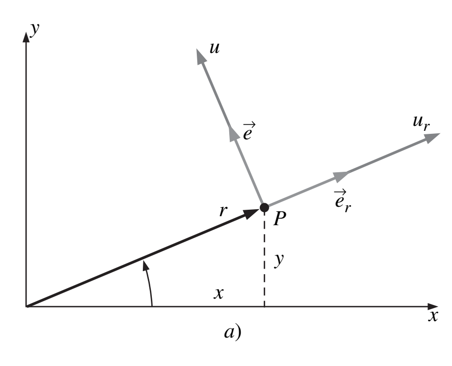
Ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas

Numerosos problemas en mecánica de fluidos se resuelven de modo más conveniente en **coordenadas cilíndricas** (r, θ, z) (se llaman **coordenadas polares en caso bidimensional** [r, θ]), en lugar de coordenadas cartesianas. Por simplicidad, primero se introducen coordenadas cilíndricas en dos dimensiones (coordenadas polares) (Fig. 9-10*a*). Por costumbre, r es la distancia radial desde el origen hasta cierto punto (P) y θ es el ángulo medido desde el eje x (θ siempre se define como positivo en la dirección contraria al giro de las manecillas del reloj). En la figura 9-10*a* también se muestran las componentes de velocidad, u_r y u_θ, y los vectores unitarios, $\vec{e}_r$ y $\vec{e}_\theta$. En tres dimensiones, imagine deslizamiento en todas partes en la figura 9-10*a* afuera de la página a lo largo del eje z (normal al plano xy) a cierta distancia z. En la figura 9-10*b* se intentó dibujarlo. En tres dimensiones, se tiene un tercer componente de velocidad, u_z, y un tercer vector unitario, $\vec{e}_z$, también se ilustra en la figura 9-10*b*.

Las siguientes transformaciones de coordenadas se obtienen a partir de la ecuación 9-10:

Transformaciones de coordenadas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{9-11}$$



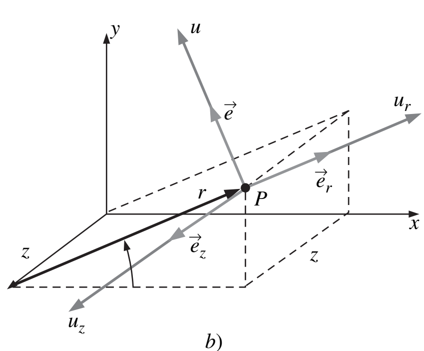


FIGURA 9-10
Componentes de velocidad y vectores unitarios en coordenadas cilíndricas: *a*) flujo bidimensional en el plano xy o $r\theta$, *b*) flujo tridimensional.

La coordenada z es la misma en coordenadas cilíndricas y cartesianas.

Para obtener una expresión para la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas, se tienen dos opciones. Primera, se puede usar directamente la ecuación 9-5, ya que se dedujo sin importar la elección del sistema coordenado. Simplemente se busca la expresión para el operador de divergencia en coordenadas cilíndricas en un libro de cálculo vectorial (por ejemplo, Spiegel, 1968; véase también la figura 9-6). Segunda, se puede dibujar un elemento de fluido tridimensional infinitesimal en coordenadas cilíndricas y analizar las razones de flujo de masa hacia dentro y fuera del elemento, similar a lo que se hizo antes en coordenadas cartesianas. De cualquier manera, se termina con:

Ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u\ )}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \tag{9-12}$$

Los detalles del segundo método pueden encontrarse en Fox y McDonald (1998).

Casos especiales de la ecuación de continuidad

Ahora se observan dos casos especiales, o simplificaciones, de la ecuación de continuidad. En particular, primero se considera flujo compresible estacionario, y luego flujo incompresible.

Caso especial 1: flujo compresible estacionario

Si el flujo es compresible pero estacionario, $\partial/\partial t$ de cualquier variable es igual a cero. Por lo tanto, la ecuación 9-5 se reduce a:

Ecuación de continuidad-flujo estacionario:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) = 0 \tag{9-13}$$

En coordenadas cartesianas, la ecuación 9-13 se reduce a:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \text{(9-14)}$$

En coordenadas cilíndricas, la ecuación 9-13 se reduce a:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \quad \text{(9-15)}$$

Caso especial 2: flujo incompresible

Si el flujo se aproxima como incompresible, la densidad no es función del tiempo o el espacio. Por tanto, $\partial\rho/\partial t \cong 0$ en la ecuación 9-5 y ρ se puede sacar del operador de divergencia. Por lo tanto, la ecuación 9-5 se reduce a:

Ecuación de continuidad-flujo incompresible:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{(9-16)}$$

El mismo resultado se obtiene si se comienza con la ecuación 9-10 y se reconoce que, para un flujo incompresible, la densidad no cambia apreciablemente cuando una partícula de fluido atraviesa el campo de flujo como se indicó. Por lo tanto, la derivada material de ρ es aproximadamente cero, y la ecuación 9-10 se reduce inmediatamente a la ecuación 9-16.

Es posible que haya notado que, *en la ecuación 9-16, no quedan derivadas con respecto al tiempo*. A partir de esto se llega a la conclusión que *inclusive si el flujo es no-estacionario, la ecuación 9-16 se aplica en cualquier instante*. Físicamente, esto significa que, conforme el campo de velocidad cambia en una parte de un campo de flujo incompresible, todo el resto del campo de flujo se ajusta inmediatamente al cambio, de modo que la ecuación 9-16 se satisface en todo momento. Para flujo compresible éste no es el caso. De hecho, una perturbación en una parte del flujo no la sienten las partículas del fluido a cierta distancia hasta que la onda sonora proveniente de la perturbación alcanza esta distancia. Los ruidos muy intensos, como los provenientes de una arma o explosión, generan una **onda de choque** que en realidad viaja *más rápido* que la velocidad del sonido (en la figura 9-11 se ilustra la onda de choque que produce una explosión). Las ondas de choque y otras manifestaciones de flujo compresible se comentan en el capítulo 12.

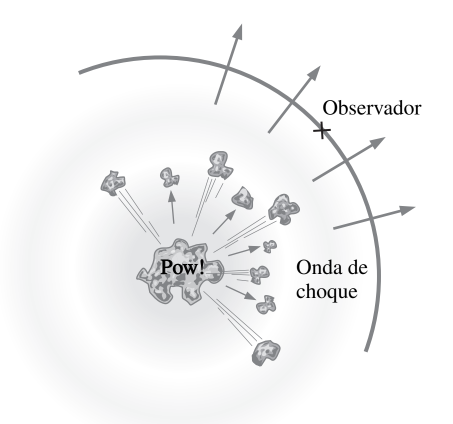


FIGURA 9-11
La perturbación proveniente de una explosión no se siente hasta que la onda de choque alcanza al observador.

En coordenadas cartesianas, la ecuación 9-16 es:

Ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas, flujo incompresible:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{(9-17)}$$

La ecuación 9-17 es la forma de la ecuación de continuidad que probablemente se encontrará con mayor frecuencia. Se aplica al flujo estacionario o no-estacionario, incompresible, tridimensional y conviene memorizarla.

En coordenadas cilíndricas, la ecuación 9-16 es:

Ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas, flujo incompresible:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u\ )}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0 \quad \text{(9-18)}$$

EJEMPLO 9-2 **Diseño de un ducto convergente para un flujo compresible**

Para un túnel de viento de alta velocidad se diseña un ducto convergente bidimensional. Su pared inferior es plana y horizontal, y la pared superior es curva de manera que la velocidad del viento axial *u* aumenta más o menos linealmente

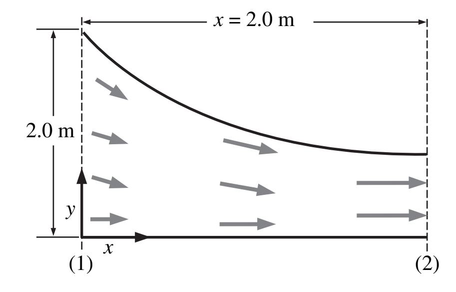


FIGURA 9-12
Ducto convergente, diseñado para un túnel de viento de alta velocidad (no a escala).

de u_1 = 100 m/s en la sección (1) a u_2 = 300 m/s en la sección (2) (Fig. 9-12). Mientras tanto, la densidad del aire ρ disminuye más o menos linealmente de ρ_1 = 1.2 kg/m^3 en la sección (1) a ρ_2 = 0.85 kg/m^3 en la sección (2). El ducto convergente mide 2.0 m de largo y 2.0 m de alto en la sección (1). *a*) Prediga la componente y de velocidad, $v(x, y)$, en el ducto. *b*) Grafique la forma aproximada del ducto, al despreciar la fricción sobre las paredes. *c*) ¿Qué tan alto debe ser el ducto en la sección (2), la salida del ducto?

SOLUCIÓN Se tienen que predecir la componente de velocidad v, graficar de manera aproximada el ducto y predecir su altura en la salida del ducto para una componente de velocidad u y una densidad ρ dados.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario y bidimensional en el plano *xy*. **2** Se desprecia la fricción sobre las paredes. **3** La velocidad axial u aumenta linealmente con x y la densidad ρ disminuye linealmente con x.

Propiedades El fluido es aire a temperatura ambiente (25°C). La velocidad del sonido es aproximadamente 346 m/s, de modo que el flujo es subsónico, pero compresible.

Análisis *a*) Se escriben expresiones para u y ρ que las fuerce a ser lineales en x,

$$u = u_1 + C_u x \qquad \text{donde} \qquad C_u = \frac{u_2 - u_1}{\Delta x} = \frac{(300 - 100)\text{ m/s}}{2.0\text{ m}} = 100\text{ s}^{-1} \tag{1}$$

y

$$\rho = \rho_1 + C_\rho x \qquad \text{donde} \qquad C_\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta x} = \frac{(0.85 - 1.2)\text{ kg/m}^3}{2.0\text{ m}} = -0.175\text{ kg/m}^4 \tag{2}$$

La ecuación de continuidad en caso estacionario (Ec. 9-14) para este flujo compresible bidimensional se simplifica a:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}_{0\ (2\text{-D})} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \tag{3}$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones 1 y 2 en la ecuación 3, y se nota que C_u y C_ρ son constantes:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial[(\rho_1 + C_\rho x)(u_1 + C_u x)]}{\partial x} = -(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho) - 2C_u C_\rho x$$

La integración con respecto de y produce:

$$\rho v = -(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho)y - 2C_u C_\rho xy + f(x) \tag{4}$$

Note que, puesto que la integración es una integración parcial con respecto a una variable, se ha agregado una función arbitraria de x en vez de simplemente una constante de integración. A continuación se aplican condiciones de frontera. Se afirma que, dado que la pared inferior es plana y horizontal, v debe ser igual a cero en $y = 0$ para cualquier x. Esto sólo es posible si $f(x) = 0$. Cuando se resuelve la ecuación 4 para v se obtiene:

$$v = \frac{-(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho)y - 2C_u C_\rho xy}{\rho} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v = \frac{-(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho)y - 2C_u C_\rho xy}{\rho_1 + C_\rho x}} \tag{5}$$

b) Cuando se usan las ecuaciones 1 y 5 y las técnicas descritas en el capítulo 4, se grafican varias líneas de corriente entre $x = 0$ y $x = 2.0$ m en la figura 9-13. La línea de corriente que comienza en $x = 0$ $y = 2.0$ m aproxima la pared superior del ducto.

FIGURA 9-13
Líneas de corriente para el ducto convergente del ejemplo 9-2.

c) En la sección (2), la línea de corriente superior cruza $y = 0.941$ m en $x = 2.0$ m. Por lo tanto, la altura predicha del ducto en la sección (2) es **0.941 m**.
Discusión Se puede verificar que la combinación de las ecuaciones 1, 2 y 5 satisface la ecuación de continuidad. Sin embargo, esto no garantiza que la densidad y las componentes de velocidad en realidad *seguirán* estas ecuaciones si el ducto se construyera como está diseñado aquí. El flujo real depende de la *caída de presión* entre las secciones (1) y (2); la aceleración del flujo deseada puede producirse por la caída de presión sin considerar otras causas. La temperatura también puede cambiar considerablemente en este tipo de flujo compresible, en donde el aire acelera hacia velocidades sónicas.

EJEMPLO 9-3 Incompresibilidad de un flujo bidimensional no-estacionario

Considere el campo de velocidad del Ejemplo 4-5: un campo de velocidad bidimensional no-estacionario dado por $\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + [1.5 + 2.5 \text{ sen } (\omega t) - 0.8y]\vec{j}$, donde la frecuencia angular ω es igual a 2π rad/s (una frecuencia física de 1 Hz). Verifique que este campo de flujo se puede aproximar como incompresible.

SOLUCIÓN Se tiene que verificar que un campo de velocidad dado corresponde al flujo incompresible.
Hipótesis **1** El flujo es bidimensional, lo que implica ausencia de componente *z* de velocidad y no hay variación de *u* o *v* con *z*.
Análisis Las componentes de velocidad en las direcciones *x* y *y*, respectivamente, son:

$$u = 0.5 + 0.8x \qquad \text{y} \qquad v = 1.5 + 2.5 \text{ sen } (\omega t) - 0.8y$$

Si el flujo es incompresible, se debe aplicar la ecuación 9-16. Más específicamente, debe aplicarse la ecuación 9-17 en coordenadas cartesianas. Compruebe:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{0.8} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-0.8} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{0 \text{ puesto que 2-D}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 0.8 - 0.8 = 0$$

Se observa que la ecuación de continuidad para el flujo incompresible se satisface, de hecho, en cualquier instante de tiempo, y **este campo de flujo puede aproximarse como incompresible**.
Discusión Aunque existe un término no-estacionario en *v*, su derivada con respecto a *y* se vuelve cero y no aparece en la ecuación de continuidad.

EJEMPLO 9-4 Cómo encontrar una componente de velocidad desconocida

Se conocen dos componentes de velocidad de un campo tridimensional de flujo incompresible estacionario, es decir, $u = ax^2 + by^2 + cz^2$ y $w = axz + byz^2$, donde *a*, *b* y *c* son constantes. Falta la componente *y* de velocidad (Fig. 9-14). Genere una expresión para *v* como función de *x*, *y* y *z*.

SOLUCIÓN Tiene que encontrarse la componente *y* de velocidad, *v*, con las expresiones dadas para *u* y *w*.
hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El flujo es incompresible.
Análisis Dado que el flujo es estacionario e incompresible, y puesto que se trabaja en coordenadas cartesianas, se aplica la ecuación 9-17 al campo de flujo:

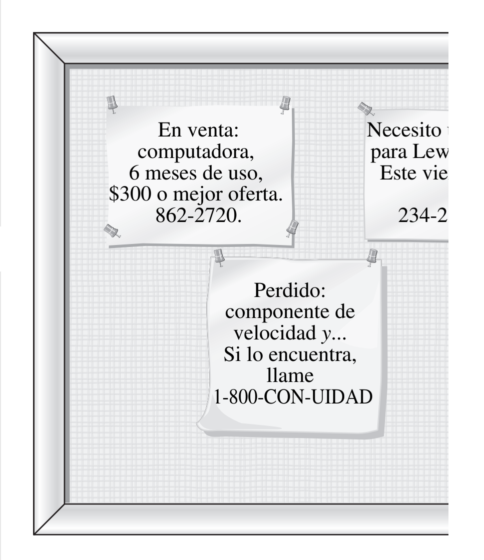


FIGURA 9-14
Se puede usar la ecuación de continuidad para encontrar una componente de velocidad faltante.

Condición para incompresibilidad:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2ax} - \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{ax + 2byz} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -3ax - 2byz$$

A continuación se integra respecto a y. Dado que la integración es una integración parcial con respecto a una variable, se agrega alguna función arbitraria de x y z en vez de una sola constante de integración.

Solución: $$\boldsymbol{v = -3axy - by^2z + f(x,z)}$$

Discusión Cualquier función de x y z produce una v que satisface la ecuación de continuidad para el flujo incompresible, puesto que en la ecuación de continuidad no existen derivadas de v respecto a x o z.

EJEMPLO 9-5 Torbellino incompresible bidimensional

Considere un flujo incompresible bidimensional en coordenadas cilíndricas; la componente de velocidad tangencial es $u_\theta = K/r$, donde K es una constante. Esto representa una clase de flujos llamados torbellinos. Genere una expresión para la otra componente de velocidad, u_r.

SOLUCIÓN Para una componente de velocidad tangencial dada, genere una expresión para la componente de velocidad radial.

Hipótesis **1** El flujo es bidimensional en el plano xy- ($r\theta$-) (la velocidad no es función de z, y $u_z = 0$ en todas partes). **2** El flujo es incompresible.

Análisis La ecuación de continuidad de flujo incompresible (Ec. 9-18) para este caso bidimensional se simplifica a:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial z}}}_{0 \text{ (2-D)}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \tag{1}$$

La expresión dada para u_θ no depende de θ y por lo tanto la ecuación 1 se reduce a:

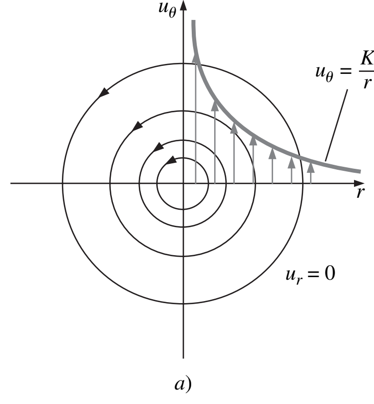
$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad ru_r = f(\theta, t) \tag{2}$$

donde se introdujo una función arbitraria de θ y t en vez de una constante de integración, puesto que se realizó una integración parcial con respecto a r. Cuando se resuelve para u_r,

$$\boldsymbol{u_r = \frac{f(\theta, t)}{r}} \tag{3}$$

Por tanto, *cualquier componente de velocidad radial de la forma dada por la ecuación 3 produce un campo de velocidad incompresible bidimensional que satisface la ecuación de continuidad.*

Se presentan casos específicos. El caso más simple es cuando $f(\theta, t) = 0$ ($u_r = 0$, $u_\theta = K/r$). Esto produce el **torbellino lineal** tratado en el capítulo 4, como se bosqueja en la figura 9-15*a*. Otro caso simple es cuando $f(\theta, t) = C$, donde C es una constante. Esto produce una velocidad radial cuya magnitud se desliza como $1/r$. Para C negativa, imagine un torbellino lineal en espiral/sumidero, en el que los elementos de fluido no sólo dan vuelta alrededor del origen, sino que son absorbidos en el origen (en realidad se absorben a lo largo de una línea que coincide con el eje z). Esto se ilustra en la figura 9-15*b*.



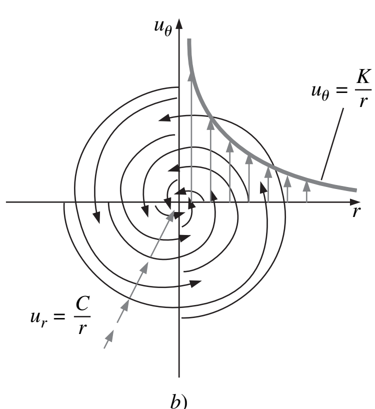


FIGURA 9-15
Líneas de corriente y perfiles de velocidad para *a*) un flujo de torbellino lineal y *b*) un torbellino lineal en espiral/sumidero.

Discusión Se pueden obtener otros flujos más complicados cuando se hace que $f(\theta, t)$ sea alguna otra función. Para cualquier función $f(\theta, t)$, en un instante de tiempo dado se satisface la ecuación de continuidad bidimensional para el flujo incompresible.

EJEMPLO 9-6 Comparación de continuidad y razón de deformación volumétrica

Recuerde que la *razón de deformación volumétrica* se definió en el capítulo 4. En coordenadas cartesianas:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \textbf{(1)}$$

Demuestre que la razón de deformación volumétrica es cero para flujo incompresible. Comente la interpretación física de la razón de deformación volumétrica para flujos incompresibles y compresibles.

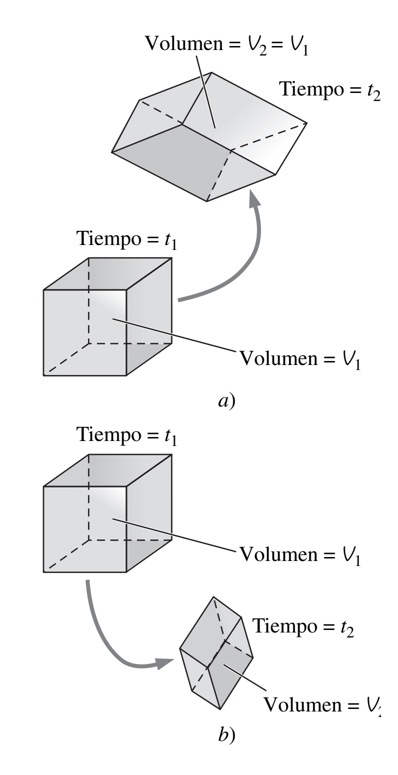


FIGURA 9-16
a) En un campo de flujo incompresible, los elementos de fluido pueden trasladarse, distorsionarse y rotar, pero no crecer o encogerse en volumen; *b*) en un campo de flujo compresible, los elementos de fluido pueden crecer o encogerse en volumen conforme se trasladan, distorsionan y rotan.

SOLUCIÓN Debe demostrarse que la razón de deformación volumétrica es cero en un flujo incompresible, y discutir su significado físico en flujo incompresible y compresible.

Análisis Si el flujo es incompresible, se aplica la ecuación 9-16. Más específicamente, en coordenadas cartesianas se aplica la ecuación 9-17. Al comparar la ecuación 9-17 con la ecuación 1:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = 0 \qquad \text{para flujo incompresible}$$

En consecuencia, *la razón de deformación volumétrica es cero en un campo de flujo incompresible*. De hecho, es posible definir la incompresibilidad como $DV/Dt = 0$. Físicamente, conforme se sigue un elemento de fluido, partes de él pueden estirarse mientras que otras partes se pueden encoger, y el elemento se puede trasladar, distorsionar y rotar, pero su volumen permanece constante a lo largo de toda su trayectoria a través del campo de flujo (Fig. 9-16*a*). Esto es cierto siempre que el flujo sea estacionario o no-estacionario, en tanto sea incompresible. Si el flujo fuese compresible, la razón de deformación volumétrica no sería cero, lo que implica que los elementos de fluido se pueden expandir en volumen (dilatar) o encoger en volumen conforme se mueven en el campo de flujo (Fig. 9-16*b*). Específicamente, considere la ecuación 9-10, una alternativa de la ecuación de continuidad para flujo compresible. Por definición, $\rho = m/V$, donde m es la masa de un elemento de fluido. Para un elemento material (al observar una partícula de fluido conforme se mueve a través del campo de flujo), m debe ser constante. Cuando se aplican ciertas transformaciones algebráicas a la ecuación 9-10 se produce:

$$\frac{1}{\rho}\frac{D}{Dt} = \frac{V}{m}\frac{D(m/V)}{Dt} = -\frac{V}{m}\frac{m}{V^2}\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{V} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}}$$

Discusión El resultado es general y no está limitado a coordenadas cartesianas. Se aplica a flujos no-estacionarios así como a estacionarios.

EJEMPLO 9-7 Condiciones para flujo incompresible

Considere un campo de velocidad estacionario dado por $\vec{V} = (u, v, w) = a(x^2y + y^2)\vec{i} + bxy^2\vec{j} + cx\vec{k}$, donde a, b y c son constantes. ¿En qué condiciones este campo de flujo es incompresible?

SOLUCIÓN Debe determinarse una relación entre las constantes *a*, *b* y *c* que garantice incompresibilidad.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El flujo es incompresible (con ciertas restricciones a determinar).

Análisis Se aplica la ecuación 9-17 al campo de velocidad dado:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2axy} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{2bxy} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{0} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 2axy + 2bxy = 0$$

Así, para garantizar incompresibilidad, las constantes *a* y *b* deben ser iguales en magnitud, pero opuestas en signo:

Condición para incompresibilidad: $\boldsymbol{a = -b}$

Discusión Si *a* no fuera igual a $-b$, este todavía puede ser un campo de flujo válido, pero la densidad variaría con la posición en el campo de flujo. En otras palabras, el flujo sería *compresible* y se necesitaría satisfacer la ecuación 9-14 en vez de la 9-17.

9-3 ▪ LA FUNCIÓN DE CORRIENTE

La función de corriente en coordenadas cartesianas

Considere el caso simple de flujo bidimensional incompresible en el plano *xy*. La ecuación de continuidad (Ec. 9-17) en coordenadas cartesianas se reduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{9-19}$$

Una inteligente transformación de variables permite reescribir la ecuación 9-19 en términos de *una* variable dependiente (ψ) en vez de *dos* variables dependientes (u y v). La **función de corriente** ψ se define como:

Función de corriente bidimensional para el flujo incompresible en coordenadas cartesianas:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{9-20}$$

La función de corriente y la correspondiente función de potencial de velocidad (capítulo 10) las introdujo por primera vez el matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1739-1813). La sustitución de la ecuación 9-20 en la ecuación 9-19 produce:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\,\partial x} = 0$$

que se satisface idénticamente para cualquier función suave $\psi(x, y)$, puesto que el orden de diferenciación (al principio con respecto a y y luego con respecto a x o al principio con respecto a x y luego con respecto a y) es irrelevante.

El lector puede preguntarse por qué se eligió colocar el signo negativo a v en lugar de a u (se podría haber definido la función de corriente con los signos invertidos, y la continuidad todavía se habría satisfecho idéntica). La respuesta es que, aunque el signo es arbitrario, la definición de la ecuación 9-20 conduce el flujo de izquierda a derecha conforme ψ aumenta en la dirección y, lo que usualmente se prefiere. La mayoría de los libros de mecánica de fluidos definen ψ de

esta forma, aunque en ocasiones ψ se define con los signos opuestos (por ejemplo, en el campo de calidad del aire interior, Heinsohn y Cimbala, 2003).

¿Qué se ganó con esta transformación? Primero, como se mencionó, una sola variable (ψ) sustituye *dos* variables (u y v): una vez que se conoce ψ se pueden generar u y v por medio de la ecuación 9-20 y se tiene la garantía de que la solución satisface la condición de continuidad, ecuación 9-19. Segundo, se evidencia que la función de corriente tiene significado físico útil (Fig. 9-17). Es decir:

Las curvas de ψ constante son **líneas de corriente** del flujo.

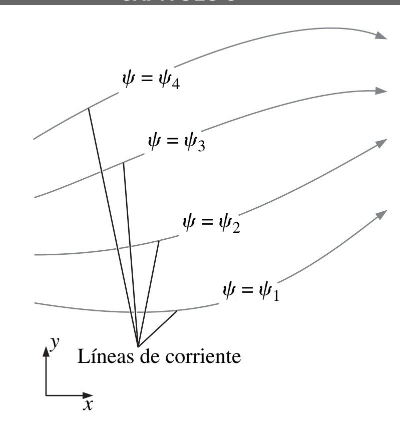


FIGURA 9-17
Las curvas de función de corriente constante representan líneas de corriente del flujo.

Esto se prueba con facilidad cuando se considera una línea de corriente en el plano xy, como se bosqueja en la figura 9-18. Recuerde del capítulo 4 que, a lo largo de tal línea de corriente:

A lo largo de una línea de corriente: $$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad \rightarrow \quad \underbrace{-v}_{\partial\psi/\partial x}\,dx + \underbrace{u}_{\partial\psi/\partial y}\,dy = 0$$

donde se aplicó la ecuación 9-20, la definición de ψ. Por lo tanto:

A lo largo de una línea de corriente: $$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0 \qquad \textbf{(9-21)}$$

Pero, para cualquier función suave ψ de dos variables x y y, se sabe, de matemáticas, que el cambio total de ψ desde el punto (x, y) hasta otro punto $(x + dx, y + dy)$ a determinada distancia infinitesimal es:

Cambio total de ψ: $$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy \qquad \textbf{(9-22)}$$

Al comparar la ecuación 9-21 con la ecuación 9-22 se ve que $d\psi = 0$ a lo largo de una línea de corriente; por ende, se probó el enunciado de que ψ es constante a lo largo de las líneas de corriente.

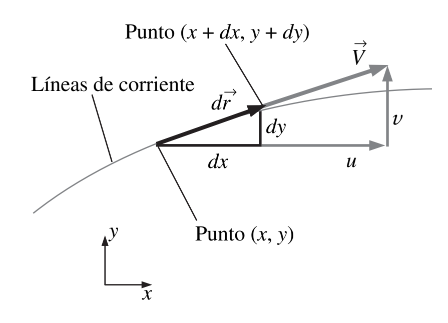


FIGURA 9-18
Longitud de arco $d\vec{r} = (dx, dy)$ y vector de velocidad local $\vec{V} = (u, v)$ a lo largo de una línea de corriente bidimensional en el plano xy.

EJEMPLO 9-8 Cálculo del campo de velocidad a partir de la función de corriente

Un campo de flujo bidimensional incompresible estacionario en el plano xy tiene una función de corriente dada por $\psi = ax^3 + by + cx$, donde a, b y c son constantes: $a = 0.50\ (\text{m} \cdot \text{s})^{-1}$, $b = -2.0$ m/s, y $c = -1.5$ m/s. *a*) Obtenga expresiones para las componentes de velocidad u y v. *b*) Verifique que el campo de flujo satisface la ecuación de continuidad para el flujo incompresible. *c*) Grafique varias líneas de corriente del flujo en el cuadrante superior derecho.

SOLUCIÓN Para una función de corriente dada: calcule las componentes de velocidad, verifique la incompresibilidad y grafique líneas de corriente del flujo.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El flujo es incompresible (se tiene que verificar esta suposición). **3** El flujo es bidimensional en el plano xy, lo que implica que $w = 0$ y ni u ni v dependen de z.

Análisis *a*) Use la ecuación 9-20 para obtener expresiones para u y v al diferenciar la función de corriente:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \boldsymbol{b} \qquad \text{y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial \text{x}} = \boldsymbol{-3ax^2 - c}$$

b) Dado que u no es función de x, y que v no es función de y, se ve inmediatamente que se satisface la ecuación de continuidad bidimensional para el flujo incompresible (Ec. 9-19). De hecho, dado que ψ es suave en x y y, la ecuación de

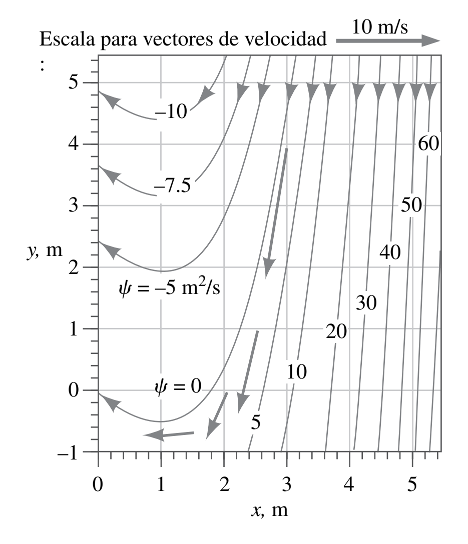


FIGURA 9-19
Líneas de corriente para el campo de velocidad del Ejemplo 9-8; el valor de ψ constante se indica para cada línea de corriente y los vectores de velocidad se muestran en cuatro posiciones.

continuidad bidimensional para el flujo incompresible en el plano *xy* se satisface automáticamente por la definición misma de ψ. Se llega a la conclusión de que **el flujo es de hecho incompresible**.
c) Para graficar líneas de corriente, se resuelve la ecuación dada o para *y* como función de *x* y ψ, o para *x* como función de *y* y ψ. En este caso, la primera opción es más sencilla, y se tiene:

$$\textit{Ecuación para una línea de corriente:} \quad y = \frac{\psi - ax^3 - cx}{b}$$

Esta ecuación se grafica en la figura 9-19 para diversos valores de ψ y para los valores proporcionados de *a*, *b* y *c*. El flujo es casi recto hacia abajo a grandes valores de *x*, pero se curva hacia arriba para $x < 1$ m.
Discusión Puede verificarse que $v = 0$ en $x = 1$ m. De hecho, v es negativo para $x > 1$ m y positivo para $x < 1$ m. La dirección del flujo también puede determinarse cuando se selecciona un punto arbitrario en el flujo, por decir ($x = 3$ m, $y = 4$ m), y se calcula ahí la velocidad. Se obtiene $u = -2.0$ m/s y $v = -12.0$ m/s en este punto que muestra que el fluido fluye hacia abajo a la izquierda en esta región del campo de flujo. Para mejor claridad, en este punto de la figura 9-19 también se grafica el vector de velocidad; que es paralelo a la línea de corriente cerca de este punto. También se grafican los vectores de velocidad en otros tres puntos.

EJEMPLO 9-9 Cálculo de función de corriente para un campo de velocidad conocido

Considere un campo de velocidad bidimensional de flujo estacionario de fluido incompresible con $u = ax + b$ y $v = -ay + cx$, donde *a*, *b* y *c* son constantes: $a = 0.50\ s^{-1}$, $b = 1.5$ m/s y $c = 0.35\ s^{-1}$. Genere una expresión para la función de corriente y grafique algunas líneas de corriente del flujo en el cuadrante superior derecho.

SOLUCIÓN Para un campo de velocidad dado se tiene que generar una expresión para ψ y graficar varias líneas de corriente para los valores dados de las constantes *a*, *b* y *c*.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El flujo es incompresible. **3** El flujo es bidimensional en el plano *xy*, lo que implica que $w = 0$ y ni *u* ni *v* dependen de *z*.
Análisis Se comienza por elegir una de las dos ecuaciones 9-20 que definen la función de corriente (no importa cuál de las dos se elija: la solución será idéntica).

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = ax + b$$

A continuación se integra respecto a *y*, y se nota que ésta es una integración parcial con respecto a una variable y, de modo que se agrega una función arbitraria de la otra variable, *x*, en vez de una constante de integración:

$$\psi = axy + by + g(x) \qquad (1)$$

Ahora se toma la otra de las dos ecuaciones 9-20, se deriva la ecuación 1 y se reordena del modo siguiente:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ay - g'(x) \qquad (2)$$

donde $g'(x)$ denota dg/dx pues *g* es una función de sólo una variable, *x*. Ahora se tienen dos expresiones para la componente de velocidad v, la ecuación dada en

el enunciado del problema y la ecuación 2. Se igualan éstas y se integra respecto a x para encontrar $g(x)$:

$$v = -ay + cx = -ay - g'(x) \quad \rightarrow \quad g'(x) = -cx \quad \rightarrow \quad g(x) = -c\frac{x^2}{2} + C \qquad \textbf{(3)}$$

Note que aquí se agregó una constante de integración arbitraria C, pues g es función sólo de x. Para finalizar, cuando se sustituye la ecuación 3 en la ecuación 1 se produce la expresión final para ψ:

Solución:

$$\boldsymbol{\psi = axy + by - c\frac{x^2}{2} + C} \qquad \textbf{(4)}$$

Para graficar las líneas de corriente, note que la ecuación 4 representa una *familia* de curvas, una única curva para cada valor de la constante ($\psi - C$). Puesto que C es arbitraria, es común establecerla igual a cero, aunque se puede establecer igual a cualquier valor deseado. Por simplicidad, se hace $C = 0$ y se resuelve la ecuación 4 para y como función de x, lo que produce:

Ecuación para líneas de corriente:

$$y = \frac{\psi + cx^2/2}{ax + b} \qquad \textbf{(5)}$$

Para los valores dados de las constantes a, b y c, en la figura 9-20 se grafica la ecuación 5 para diversos valores de ψ; estas curvas de ψ constante son líneas de corriente del flujo. A partir de la figura 9-20 se puede ver que éste es un flujo que converge suavemente en el cuadrante superior derecho.

Discusión Siempre es conveniente comprobar las transformaciones algebraicas. En este ejemplo, se debe sustituir la ecuación 4 en la ecuación 9-20 para verificar que se obtienen las componentes de velocidad correcta.

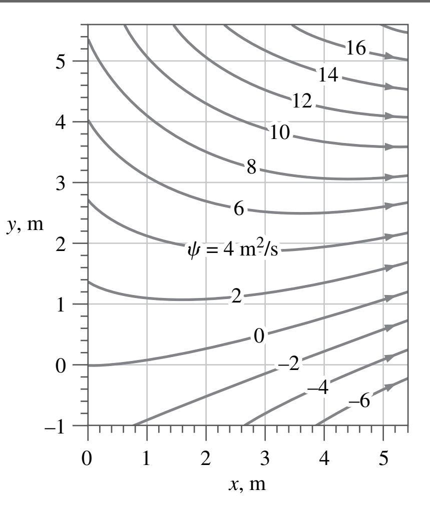


FIGURA 9-20
Líneas de corriente para el campo de velocidad del ejemplo 9-9; para cada línea de corriente se indica el valor de la constante ψ.



Existe otro hecho físicamente importante acerca de la función de corriente:

> La diferencia en el valor de ψ de una línea de corriente a otra es igual a la razón de flujo volumétrico por unidad de ancho entre las dos líneas de corriente.

Este enunciado se ilustra en la figura 9-21. Considere dos líneas de corriente, ψ_1 y ψ_2, e imagine un flujo bidimensional en el plano xy, de ancho unitario perpendicular al plano de la página (1 m en la dirección $-z$). Por definición, *ningún flujo puede cruzar una línea de corriente*. En consecuencia, el fluido que ocupa el espacio entre estas dos líneas de corriente permanece confinado entre las mismas dos líneas de corriente. En consecuencia la razón de flujo de masa a través de cualquier sección transversal entre las líneas de corriente es la misma en cualquier instante de tiempo. La sección transversal puede tener cualquier forma, siempre que comience en la línea de corriente 1 y termine en la línea de corriente 2. En la figura 9-21, por ejemplo, la sección A es un arco suave desde una línea de corriente hasta la otra, mientras que la sección B es ondulada. Para flujo bidimensional incompresible estacionario en el plano xy, la razón de flujo volumétrico $\dot{V}$ entre las dos líneas de corriente (por unidad de ancho) debe, por lo tanto, ser una constante. Si las dos líneas de corriente se dispersan, como lo hacen desde la sección transversal A hacia la sección transversal B, la velocidad promedio entre las dos líneas de corriente disminuye en concordancia, de modo que la razón de flujo volumétrica permanece igual ($\dot{V}_A = \dot{V}_B$). En la figura 9-19 del Ejemplo 9-8 se grafican los vectores de velocidad en cuatro posiciones en el campo de flujo entre las líneas de corrientes $\psi = 0$ m²/s $\psi = 5$ m²/s. El lector puede ver claramente que, conforme las líneas de corriente divergen unas de otras, el vector de velocidad se desliza en magnitud. Del mismo modo, cuando

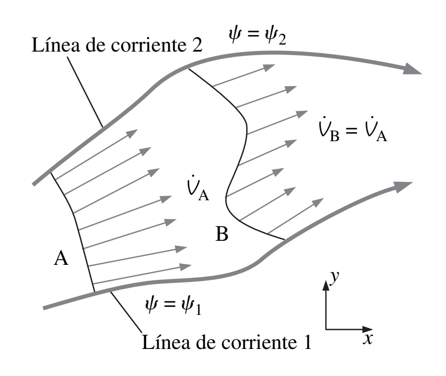
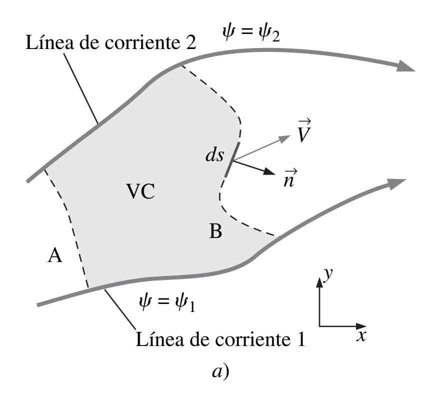


FIGURA 9-21
Para líneas de corriente bidimensionales en el plano xy, la razón de flujo volumétrico $\dot{V}$ por unidad de ancho entre dos líneas de corriente es la misma a través de cualquier sección transversal.



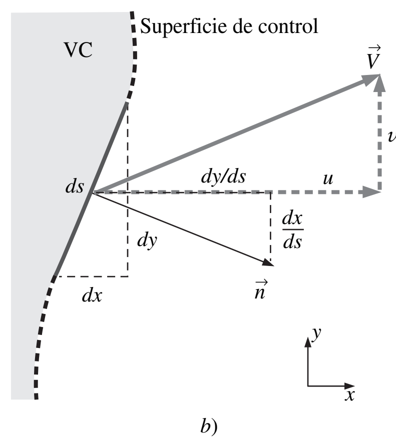


FIGURA 9-22
a) Volumen de control acotado por las líneas de corriente ψ_1 y ψ_2 y las secciones A y B en el plano *xy*; *b*) vista amplificada de la región alrededor de la longitud infinitesimal *ds*.

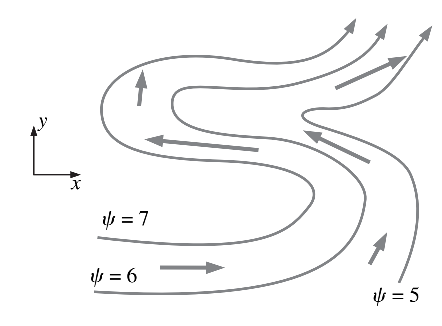


FIGURA 9-23
Ilustración de la "convención del lado izquierdo". En el plano *xy*, el valor de la función de corriente siempre aumenta hacia la izquierda de la dirección del flujo.

las líneas de corriente *convergen*, la velocidad promedio entre ellas debe aumentar.

El enunciado dado se prueba matemáticamente cuando se considera un volumen de control acotado por las dos líneas de corriente de la ecuación 9-21 y por la sección transversal A y la sección transversal B (Fig. 9-22). En la figura 9-22*a* se ilustra una longitud infinitesimal *ds* a lo largo de la sección B, junto con su vector normal unitario $\vec{n}$. En la figura 9-22*b* se bosqueja una vista amplificada de esta región para mayor claridad. Como se muestra, las dos componentes de *ds* son *dx* y *dy*; por lo tanto, el vector normal unitario es:

$$\vec{n} = \frac{dy}{ds}\vec{i} - \frac{dx}{ds}\vec{j}$$

La razón de flujo volumétrico por unidad de ancho a través del segmento *ds* de la superficie de control es:

$$d\dot{V} = \vec{V}\cdot\underbrace{\vec{n}\,dA}_{ds} = (u\vec{i} + v\vec{j})\cdot\left(\frac{dy}{ds}\vec{i} - \frac{dx}{ds}\vec{j}\right)ds \qquad \textbf{(9-23)}$$

donde $dA = ds$ por $1 = ds$, donde el 1 indica un ancho unitario perpendicular al plano de la página, sin importar el sistema de unidades. Cuando se expande el producto punto de la ecuación 9-23 y se aplica la ecuación 9-20, se obtiene:

$$d\dot{V} = u\,dy - v\,dx = \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx = d\psi \qquad \textbf{(9-24)}$$

La razón de flujo volumétrico total a través de la sección transversal B se encuentra cuando se integra la ecuación 9-24 desde la línea de corriente 1 hasta la línea de corriente 2:

$$\dot{V}_B = \int_B \vec{V}\cdot\vec{n}\,dA = \int_B d\dot{V} = \int_{\psi=\psi_1}^{\psi=\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \qquad \textbf{(9-25)}$$

Por lo tanto, la razón de flujo volumétrico por unidad de ancho a través de la sección B es igual a la diferencia entre los dos valores de la función de corriente que acotan la sección B. Ahora considere todo el volumen de control de la figura 9-22*a*. Puesto que se sabe que ningún flujo cruza las líneas de corriente, la conservación de masa demanda que la razón de flujo volumétrico hacia dentro del volumen de control a través de la sección A sea idéntico a la razón de flujo volumétrico hacia fuera del volumen de control a través de la sección B. Para finalizar, dado que se puede elegir una sección transversal de cualquier forma o ubicación entre las dos líneas de corriente, se prueba el enunciado.

Cuando se lidia con funciones de corriente, la dirección del flujo se obtiene mediante lo que se llama "convención de lado izquierdo". A saber, si observa el plano *xy* desde el eje *z* (Fig. 9-23) y se mueve en la dirección del flujo, la función de corriente aumenta hacia su izquierda.

El valor de ψ aumenta hacia la izquierda de la dirección del flujo en el plano *xy*.

En la figura 9-23, por ejemplo, la función de corriente aumenta hacia la izquierda de la dirección del flujo sin importar cuánto gire y dé vueltas el flujo. Note también que, cuando las líneas de corriente se separan (esquina inferior derecha de la figura 9-23), la magnitud de la velocidad en su cercanía es pequeña respecto a la velocidad en las posiciones donde las líneas de corriente se juntan (región media de la figura 9-23). Esto se explica fácilmente con la conservación de masa. Conforme las líneas de corriente convergen, el área transversal entre ellas disminuye, y la velocidad debe aumentar para mantener la razón de flujo entre las líneas de corriente.



FIGURA 9-24
Líneas de traza producidas por flujo Hele-Shaw sobre una placa inclinada. Las líneas de traza modelan líneas de corriente de flujo potencial (capítulo 10) sobre una placa inclinada bidimensional de la misma forma de sección transversal.
Cortesía de Howell Peregrine, School of Mathematics, University of Bristol. Reproducido con autorización.

EJEMPLO 9-10 Velocidad relativa deducida a partir de líneas de corriente

El **flujo Hele-Shaw** se produce cuando se fuerza un líquido por mediante una delgada brecha entre placas paralelas. En la figura 9-24 se proporciona un ejemplo de flujo Hele-Shaw para flujo sobre una placa inclinada. Las líneas de traza se generan cuando se introduce tintura en puntos igualmente espaciados corriente arriba del campo de visión. Dado que el flujo es estacionario, las líneas de traza coinciden con las líneas de corriente. El fluido es agua y las placas de vidrio están separadas 1.0 mm. Discuta cómo puede describir, a partir del patrón de línea de corriente, si la velocidad del flujo en una región particular del campo de flujo es (relativamente) grande o pequeña.

SOLUCIÓN Para el conjunto dado de líneas de corriente, debe explicar cómo puede describir la velocidad relativa del fluido.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El flujo es incompresible. **3** El flujo modela flujo potencial bidimensional en el plano *xy*.
Análisis Cuando las líneas de corriente igualmente espaciadas se dispersan unas de otras, ello indica que la velocidad del flujo disminuyó en dicha región. Del mismo modo, si las líneas de corriente se acercan, la velocidad del flujo aumentó en esa región. En la figura 9-24 se infiere que el flujo corriente arriba lejos de la placa es recto y uniforme, puesto que las líneas de corriente están igualmente espaciadas. El fluido desacelera conforme se aproxima a la placa, en especial cerca del punto de estancamiento, como lo indica la ancha brecha entre las líneas de corriente. El flujo acelera rápidamente a velocidades muy altas alrededor de las esquinas agudas de la placa, como lo indican las líneas de corriente más juntas.
Discusión Las líneas de traza del flujo Hele-Shaw ponen en evidencia que son similares a las de flujo potencial, que se tratan en el capítulo 10.

EJEMPLO 9-11 Razón de flujo volumétrico deducida a partir de líneas de corriente

A través de una estrecha rendija en la pared inferior de un canal de agua se succiona agua. El agua en el canal fluye de izquierda a derecha con velocidad uniforme $V = 1.0$ m/s. La rendija es perpendicular al plano *xy* y corre a lo largo del eje *z* a través de todo el canal, que tiene ancho $w = 2.0$ m. Por lo tanto, el flujo es aproximadamente bidimensional en el plano *xy*. En la figura 9-25 se grafican y etiquetan varias líneas de corriente del flujo.

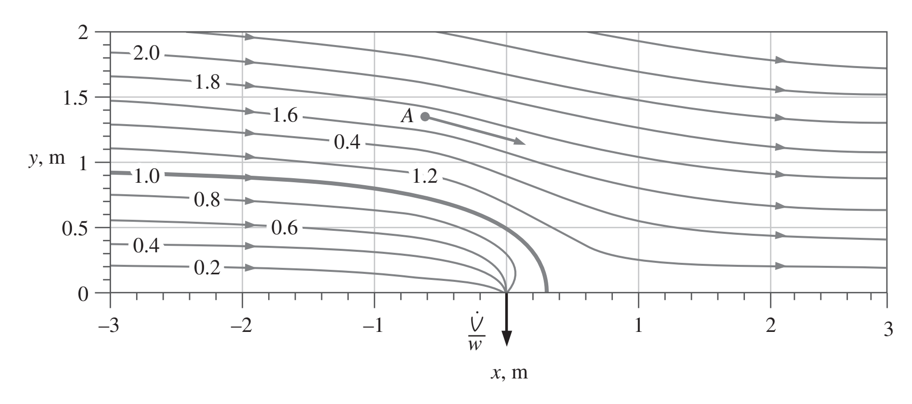


FIGURA 9-25
Líneas de corriente para flujo libre a lo largo de una pared con una estrecha rendija de succión; los valores de línea de corriente se muestran en unidades de m^2/s; la línea de corriente gruesa es la línea de corriente divisora. La dirección del vector de velocidad en el punto *A* se determina por medio de la convención del lado izquierdo.

La línea de corriente gruesa de la figura 9-25 se llama **línea de corriente divisora** porque divide el flujo en dos partes. A saber, toda el agua por abajo de esta línea de corriente divisora se succiona en la rendija, mientras que toda el agua sobre la línea de corriente divisora continúa en su camino corriente abajo. ¿Cuál es la razón de flujo volumétrico del agua que se succionará a través de la rendija? Estime la magnitud de la velocidad en el punto *A*.

SOLUCIÓN Para el conjunto de líneas de corriente dado, debe determinar la razón de flujo volumétrico a través de la rendija y estimar la velocidad del fluido en un punto.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El flujo es incompresible. **3** El flujo es bidimensional en el plano *xy*. **4** La fricción a lo largo de la pared inferior es despreciable.

Análisis Por la ecuación 9-25, la razón de flujo volumétrico por uni-dad de ancho entre la pared inferior (ψ_{pared} = 0) y la línea de corriente divisora (ψ_{divisora} = 1.0 m^2/s) es:

$$\frac{\dot{V}}{w} = \psi_{\text{divisora}} - \psi_{\text{pared}} = (1.0 - 0)\ \text{m}^2/\text{s} = 1.0\ \text{m}^2/\text{s}$$

Todo este flujo debe pasar a través de la rendija. Puesto que el canal mide 2.0 m de ancho, la razón de flujo volumétrica total a través de la rendija es:

$$\dot{V} = \frac{\dot{V}}{w}w = (1.0\ \text{m}^2/\text{s})(2.0\ \text{m}) = \mathbf{2.0\ m^3/s}$$

Para estimar la rapidez en el punto *A*, se mide la distancia *d* entre las dos líneas de corriente que encierran al punto *A*. Se encuentra que la línea de corriente 1.8 está aproximadamente a 0.21 m de distancia de la línea de corriente 1.6 en la vecindad del punto *A*. La razón de flujo volumétrico por unidad de ancho (perpendicular al plano de la página) entre estas dos líneas de corriente es igual a la diferencia en valor de la función de corriente. Por lo tanto, puede estimarse la velocidad en el punto *A*,

$$V_A \cong \frac{\dot{V}}{w\delta} = \frac{1}{\delta}\frac{\dot{V}}{w} = \frac{1}{\delta}(\psi_{1.8} - \psi_{1.6}) = \frac{1}{0.21\ \text{m}}(1.8 - 1.6)\ \text{m}^2/\text{s} = \mathbf{0.95\ m/s}$$

La estimación concuerda muy bien con la velocidad conocida de flujo libre (1.0 m/s), lo que indica que el fluido en la cercanía del punto *A* fluye a casi la misma velocidad que el flujo libre, pero apunta ligeramente hacia abajo.

Discusión Las líneas de corriente de la figura 9-25 se generaron por superposición de una corriente uniforme y un *sumidero lineal*, cuando se supone un flujo irrotacional (potencial). Tal superposición se comenta en el capítulo 10.

La función de corriente en coordenadas cilíndricas

Para flujo bidimensional, también se puede definir la función de corriente en coordenadas cilíndricas, lo que es más conveniente para muchos problemas. Note que por *bidimensional* se da a entender que sólo existen dos coordenadas espaciales independientes relevantes, sin dependencia de la tercera componente. Existen dos posibilidades. La primera es **flujo plano**, tal como el de las ecuaciones 9-19 y 9-20, pero en términos de (r, θ) y (u_r, u_θ) en lugar de (x, y) y (u, v) (véase la Fig. 9-10*a*). En este caso no existe dependencia de la coordenada z. Se simplifica la ecuación de continuidad para fluido incompresible, ecuación 9-18, para flujo plano bidimensional en el plano $r\theta$:

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_\theta)}{\partial\theta} = 0 \qquad \textbf{(9-26)}$$

La función de corriente se define como:

Función de corriente para el flujo plano incompresible en coordenadas cilíndricas:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad \text{y} \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad \textbf{(9-27)}$$

Note de nuevo que los signos están invertidos en algunos libros de texto. Puede sustituir la ecuación 9-27 en la ecuación 9-26 para convencerse de que la ecuación 9-26 se satisface idénticamente para cualquier función suave $\psi(r, \theta)$, puesto que el orden de diferenciación (al principio con respecto a r y luego con respecto a θ o al principio con respecto a θ y luego con respecto a r) es irrelevante para una función suave.

El segundo tipo de flujo bidimensional en coordenadas cilíndricas es **flujo axisimétrico**, en el que r y z son las variables espaciales relevantes, u_r y u_z son componentes de velocidad distintos de cero y no hay dependencia de θ (Fig. 9-26). Los ejemplos de flujo axisimétrico incluyen flujo alrededor de esferas, balas y los frentes de muchos objetos como torpedos y misiles, que serían axisimétricos en todas partes si no fuera por sus aletas. Para flujo axisimétrico incompresible, la ecuación de continuidad es:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(9-28)}$$

La función de corriente ψ se define de modo que satisfacen exactamente la ecuación 9-28, siempre que, desde luego, ψ sea una función suave de r y z:

Función de corriente de flujo axisimétrico incompresible en coordenadas cilíndricas

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad \text{y} \qquad u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad \textbf{(9-29)}$$

Note también que existe otra manera de describir flujos axisimétricos, a saber, cuando se usan coordenadas cartesianas (x, y) y (u, v), pero se fuerza a la coordenada x a ser el eje de simetría. Esto puede crear confusión porque las ecuaciones de movimiento deben modificarse en concordancia para explicar la axisimetría. No obstante, con frecuencia éste es el procedimiento que se usa en las herramientas CFD. La ventaja es que, después de que se establece una malla en el plano xy, la *misma* malla se puede usar tanto para flujo plano (flujo en el plano xy sin dependencia de z) como para flujo axisimétrico (flujo en el plano xy con simetría rotacional en torno al eje x). En este texto no se comentan las ecuaciones para esta descripción alternativa de flujos axisimétricos.

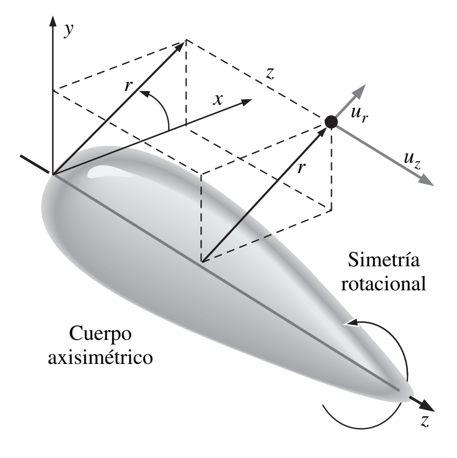


FIGURA 9-26
Flujo sobre un cuerpo axisimétrico en coordenadas cilíndricas con simetría rotacional en torno al eje z; ni la geometría ni el campo de velocidad dependen de θ, y $u_\theta = 0$.

EJEMPLO 9-12 Función de corriente en coordenadas cilíndricas

Considere un torbellino lineal, definido como flujo plano estacionario incompresible en el que las componentes de velocidad son $u_r = 0$ y $u_\theta = K/r$, donde K es una constante. Este flujo se representa en la figura 9-15*a*). Derive una expresión para la función de corriente $\psi(r, \theta)$ y pruebe que las líneas de corriente son círculos.

SOLUCIÓN Para un campo de velocidad dado, en coordenadas cilíndricas, se debe derivar una expresión para la función de corriente.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El flujo es incompresible. **3** El flujo es plano en el plano $r\theta$.
Análisis Se usa la definición de función de corriente dada por la ecuación 9-27. Puede elegirse cualquier componente para comenzar; se elige la componente tangencial:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -u_\theta = -\frac{K}{r} \qquad \rightarrow \qquad \psi = -K \ln r + f(\theta) \tag{1}$$

Ahora se usa la otra de las dos ecuaciones 9-27:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}f'(\theta) \tag{2}$$

donde la prima denota una derivada respecto a θ. Cuando se iguala u_r a partir de la información dada con la ecuación 2 se observa que:

$$f'(\theta) = 0 \qquad \rightarrow \qquad f(\theta) = C$$

donde C es una constante de integración arbitraria. Por lo tanto, la ecuación 1 es:

Solución: $$\boldsymbol{\psi = -K \ln r + C} \tag{3}$$

Para finalizar de la ecuación 3 se observa que las curvas de ψ constante se producen cuando se establece r en un valor constante. Dado que las curvas de r constante son círculos por definición, las líneas de corriente (curvas de ψ constante) deben por tanto ser círculos en torno al origen, como en la figura 9-15*a*).

Para los valores dados de C y ψ se resuelve la ecuación 3 para r al graficar las líneas de corriente:

Ecuación para líneas de corriente: $$r = e^{-(\psi - C)/K} \tag{4}$$

Para $K = 10$ m²/s y $C = 0$, las líneas de corriente desde $\psi = 0$ hasta 22 se grafican en la figura 9-27.
Discusión Note que para un incremento uniforme en el valor de ψ, las líneas de corriente se acercan más y más al origen conforme aumenta la velocidad tangencial. Éste es un resultado directo del enunciado de que la diferencia en el valor de ψ de una línea de corriente a la otra es igual a la razón de flujo volumétrico por unidad de ancho entre las dos líneas de corriente.

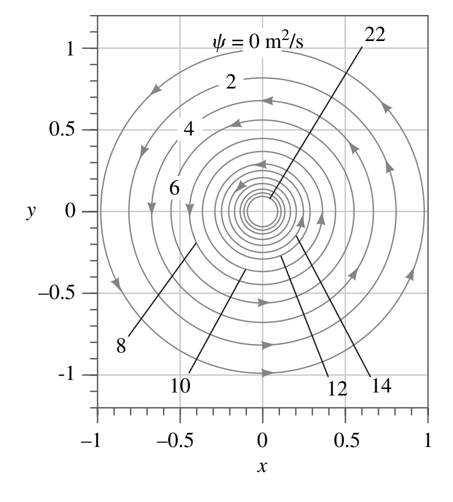


FIGURA 9-27
Líneas de corriente para el campo de velocidad del ejemplo 9-12, con $K = 10$ m²/s y $C = 0$; se indica el valor de ψ para varias líneas de corriente.

La función de corriente de flujo compresible*

Ahora se extenderá el concepto de función de corriente a flujo bidimensional estacionario *compresible* en el plano *xy*. La ecuación de continuidad de flujo compresible (Ec. 9-14) en coordenadas cartesianas se reduce a la siguiente en caso de flujo bidimensional estacionario:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \tag{9-30}$$

* Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Se introduce una **función de corriente de flujo compresible** que se denota como ψ_ρ,

Función de corriente de flujo dimensional estacionario, compresible, en coordenadas cartesianas:

$$\rho u = \frac{\partial \psi_\rho}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \rho v = -\frac{\partial \psi_\rho}{\partial x} \tag{9-31}$$

Por definición, ψ_ρ de la ecuación 9-31 satisface exactamente la ecuación 9-30, siempre que ψ_ρ sea una función suave de x y y. Muchas de las características de la función de corriente de flujo compresible son las mismas que las de ψ de flujo incompresible, como ya se indicó. Por ejemplo, las curvas de ψ_r constante todavía son líneas de corriente. Sin embargo, la diferencia en ψ_ρ de una línea de corriente a otra es razón de flujo de *masa* por unidad de ancho en lugar de razón de flujo volumétrico por unidad de ancho. Aunque no es tan popular como su contraparte incompresible, la función de corriente de flujo compresible se utiliza en algunos paquetes computacionales de CFD comerciales.

9-4 ▪ CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL: ECUACIÓN DE CAUCHY

Con la aplicación del teorema de transporte de Reynolds (capítulo 4), se tiene la expresión general para conservar la cantidad de movimiento lineal como se aplica a un volumen de control:

$$\sum \vec{F} = \int_{\text{VC}} \rho \vec{g}\, dV + \int_{\text{SC}} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{\text{VC}} \frac{\partial}{\partial t}(\ \vec{V})\, dV + \int_{\text{SC}} (\rho \vec{V})\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \tag{9-32}$$

donde σ_{ij} es el **tensor de esfuerzo** que se introdujo en el capítulo 6. En la figura 9-28 se muestran las componentes de σ_{ij} sobre las caras positivas de un volumen de control rectangular infinitesimal. La ecuación 9-32 se aplica a volúmenes de control fijos y en movimiento, siempre que $\vec{V}$ sea la velocidad absoluta (vista desde un observador fijo). Para el caso especial de flujo con entradas y salidas bien definidas, la ecuación 9-32 se puede simplificar del modo siguiente:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{cuerpo}} + \sum \vec{F}_{\text{superficie}} = \int_{\text{VC}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V})\, dV + \sum_{\text{sal}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta \dot{m} \vec{V} \tag{9-33}$$

donde $\vec{V}$ en los últimos dos términos se toman como la velocidad promedio en una entrada o salida, y β es del factor de corrección de flujo de cantidad de movimiento (capítulo 6). En palabras, la fuerza total que actúa sobre el volumen de control es igual a la razón a la que cambia la cantidad de movimiento dentro del volumen de control más la razón a la que sale el flujo de cantidad de movimiento del volumen de control menos la razón a la que entra el flujo de cantidad de movimiento al volumen de control. La ecuación 9-33 se aplica a *cualquier* volumen de control sin importar su tamaño. Para generar una ecuación diferencial para la conservación de cantidad de movimiento lineal, imagine que el volumen de control se encoge a tamaño infinitesimal. En el límite, todo el volumen de control se encoge a un *punto* en el flujo (Fig. 9-2). Aquí se toma el mismo enfoque que se utilizó para la conservación de masa; a saber: se muestra más de una manera para deducir la forma diferencial de conservación de cantidad de movimiento lineal.

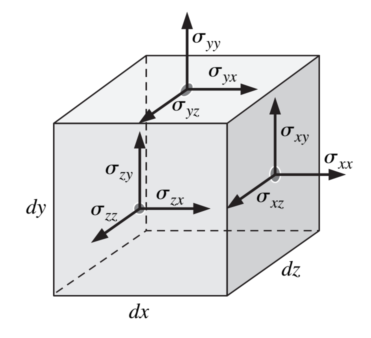


FIGURA 9-28
Componentes positivas del tensor de esfuerzo en coordenadas cartesianas sobre las caras positivas (derecha, superior y frontal) de un volumen de control rectangular infinitesimal. Los puntos indican el centro de cada cara. Las componentes positivas en las caras negativas (izquierda, inferior y posterior) están en la dirección opuesta de las que aquí se muestran.

Deducción con el uso del teorema de divergencia

La manera más directa (y más elegante) de deducir la forma diferencial de la conservación de cantidad de movimiento es aplicar el teorema de divergencia de la ecuación 9-3. Una forma más general del teorema de divergencia se aplica no

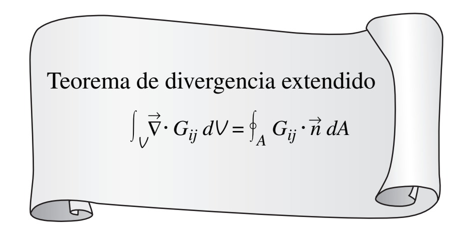


FIGURA 9-29
Una forma extendida del teorema de la divergencia es útil no sólo para vectores, sino también para tensores. En la ecuación, G_{ij} es un tensor de segundo orden, V es un volumen y A es el área de superficie que encierra y define al volumen.

sólo a vectores, sino también a otras cantidades, como los tensores, según se ilustra en la figura 9-29. Específicamente, si en el teorema de divergencia extendido de la figura 9-29 G_{ij} se sustituye con la cantidad $(\rho\vec{V})\vec{V}$, un tensor de segundo orden, el último término en la ecuación 9-32 se convierte en:

$$\int_{SC} (\rho\vec{V})\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V})\, dV \tag{9-34}$$

donde $\vec{V}\vec{V}$ es un producto vectorial llamado *producto exterior* del vector de velocidad consigo mismo (el producto exterior de dos vectores *no* es lo mismo que el producto interior o producto punto o producto escalar ni es lo mismo que el producto cruz de los dos vectores). De manera similar, si en la figura 9-29 G_{ij} se sustituye con el tensor de esfuerzo σ_{ij}, el segundo término en el lado izquierdo de la ecuación 9-32 se convierte en:

$$\int_{SC} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}\, dV \tag{9-35}$$

Por lo tanto, las dos integrales de superficie de la ecuación 9-32 se convierten en integrales de volumen, cuando se aplican las ecuaciones 9-34 y 9-35. Se combinan y reordenan términos y la ecuación 9-32 se reescribe como:

$$\int_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) - \rho\vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}\right] dV = 0 \tag{9-36}$$

Para finalizar, se afirma que la ecuación 9-36 debe sostenerse para *cualquier* volumen de control sin importar su tamaño o forma. Esto es posible sólo si el integrando (encerrado entre corchetes) es idénticamente cero. En consecuencia, se tiene una ecuación diferencial general para la conservación de cantidad de movimiento lineal, conocida como **ecuación de Cauchy**:

Ecuación de Cauchy:
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \tag{9-37}$$

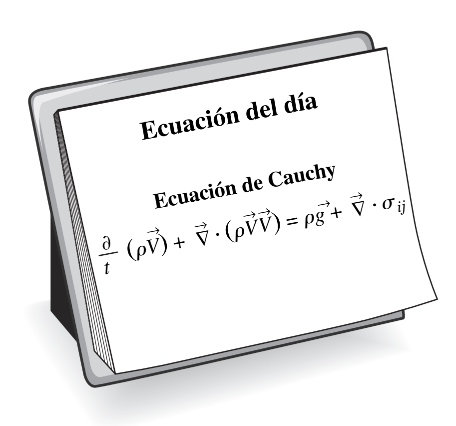


FIGURA 9-30
La *ecuación de Cauchy* es una forma diferencial de la Ley de conservación de cantidad de movimiento lineal. Se aplica a cualquier tipo de fluido.

La ecuación 9-37 recibe su nombre en honor al ingeniero y matemático francés Augustin Louis de Cauchy (1789-1857). Es válida para flujo compresible, así como para incompresible, puesto que no se ha hecho suposición alguna acerca de incompresibilidad. Es válida en cualquier punto en el dominio de flujo (Fig. 9-30). Note que la ecuación 9-37 es una ecuación *vectorial*, y por lo tanto representa tres ecuaciones escalares, una por cada eje coordenado en problemas tridimensionales.

Deducción con el uso de un volumen de control infinitesimal

Ahora se deducirá la ecuación de Cauchy en una segunda forma, con el uso de un volumen de control infinitesimal sobre el que se aplica conservación de cantidad de movimiento lineal (Ec. 9-33). Considere el mismo volumen de control con forma de caja que se usó para deducir la ecuación de continuidad (Fig. 9-3). En el centro de la caja, como anteriormente, se define la densidad como ρ y las componentes de velocidad u, v y w. También se define el tensor de esfuerzo como σ_{ij} en el centro de la caja. Por simplicidad, se considera la componente x de la ecuación 9-33, que se obtiene cuando se realiza $\sum \vec{F}$ igual a su componente x, $\sum F_x$, y $\vec{V}$ igual a su componente x, u. Esto no sólo simplifica los diagramas, sino que permite trabajar con una ecuación escalar, a saber:

$$\sum F_x = \sum F_{x,\,\text{cuerpo}} + \sum F_{x,\,\text{superficie}} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)\, dV + \sum_{\text{sal}} \beta\dot{m}u - \sum_{\text{ent}} \beta\dot{m}u \tag{9-38}$$

Conforme el volumen de control se encoge a un punto, el primer término en el lado derecho de la ecuación 9-38 se convierte en:

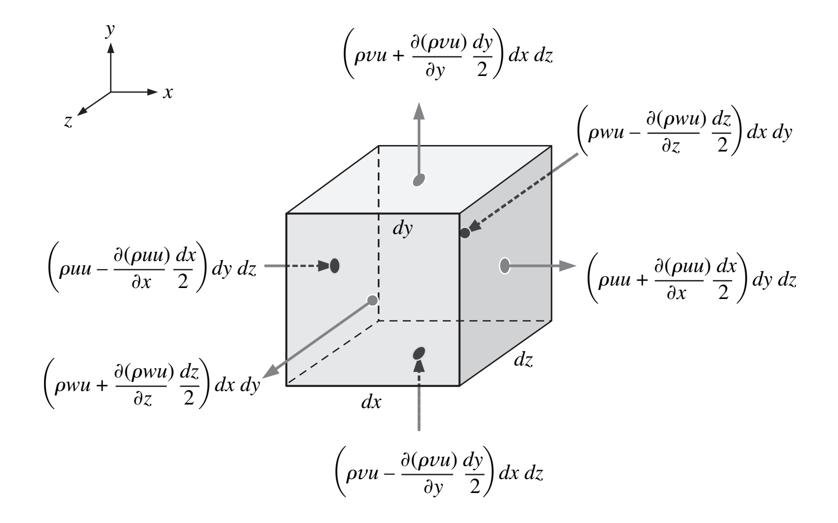




FIGURA 9-31
Flujos de entrada y salida de la componente x de cantidad de movimiento lineal a través de cada cara de un volumen de control infinitesimal; los puntos indican el centro de cada cara.

Razón de cambio de la componente x de cantidad de movimiento dentro del volumen de control:

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)\, dV \cong \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)\, dx\, dy\, dz \qquad \textbf{(9-39)}$$

puesto que el volumen del elemento diferencial es $dx\, dy\, dz$. Se aplican expansiones en serie de Taylor truncadas de primer orden en las posiciones alejadas del centro del volumen de control para aproximar los flujos de entrada y salida de la cantidad de movimiento en la dirección x. La figura 9-31 muestra dichos flujos de cantidad de movimiento en el punto central de cada una de las seis caras del volumen de control infinitesimal. Sólo se necesita considerar la componente de velocidad *normal* en cada cara, puesto que las componentes de velocidad tangenciales no aportan flujo de masa hacia fuera (o hacia dentro) de la cara y por lo tanto tampoco fluye cantidad de movimiento a través de la cara.

Cuando se suman todos los flujos de salida y se restan todos los flujos de entrada que se muestran en la figura 9-31, se obtiene una aproximación para los dos últimos términos de la ecuación 9-38:

Flujo de salida neto de la componente x de cantidad de movimiento a través de la superficie de control:

$$\sum_{\text{sal}} \beta \dot{m} u - \sum_{\text{ent}} \beta \dot{m} u \cong \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho wu)\right) dx\, dy\, dz \qquad \textbf{(9-40)}$$

donde β es igual a uno en todas las caras, congruente con la aproximación de primer orden.

A continuación, se suman todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control infinitesimal en la dirección x. Como se hizo en el capítulo 6, es necesario considerar tanto las fuerzas de cuerpo como las fuerzas de superficie. La fuerza de gravedad (peso) es la única fuerza de cuerpo que se considera. Para el caso general en el que el sistema coordenado no se puede alinear con el eje z (o con algún eje coordenado por esa razón), como se bosqueja en la figura 9-32, el vector gravedad se escribe como:

$$\vec{g} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k}$$

Por lo tanto, en la dirección x, la fuerza de cuerpo sobre el volumen de control es:

$$\sum F_{x,\text{ cuerpo}} = \sum F_{x,\text{ gravedad}} \cong \rho g_x\, dx\, dy\, dz \qquad \textbf{(9-41)}$$

A continuación, considere la fuerza de superficie neta en la dirección x. Recuerde que el tensor de esfuerzo σ_{ij} tiene dimensiones de fuerza por unidad de

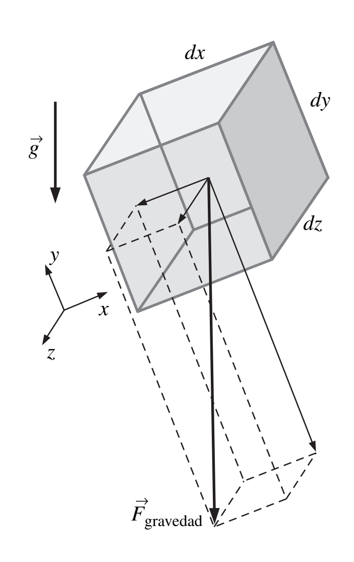


FIGURA 9-32
El vector de gravedad no necesariamente se alinea con algún eje particular, y existen tres componentes de la fuerza de cuerpo que actúan sobre un elemento de fluido infinitesimal.

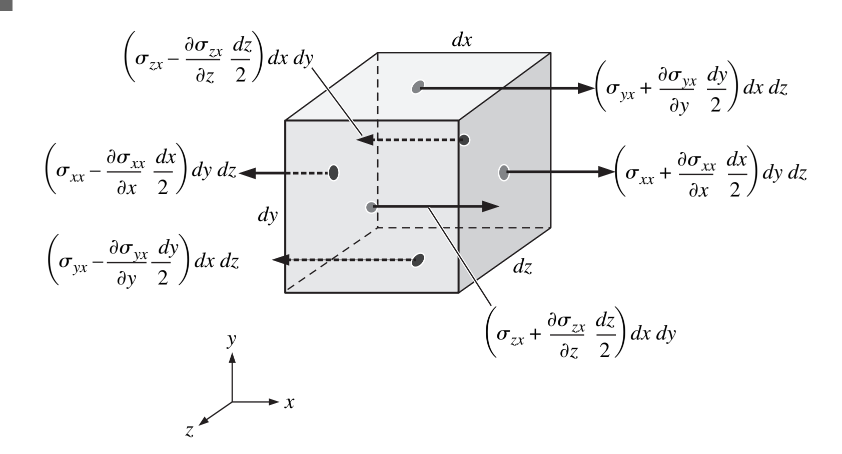


FIGURA 9-33
Dibujo que ilustra las fuerzas superficiales que actúan en la dirección x debidas a la componente de tensor de esfuerzo apropiada sobre cada cara del volumen de control diferencial; los puntos indican el centro de cada cara.

área. En consecuencia, para obtener una fuerza debe multiplicar cada componente de esfuerzo por el área superficial de la cara sobre la que actúa. Es necesario considerar sólo las componentes que apuntan en la dirección x (o $-x$) (las otras componentes del tensor de esfuerzo, aunque puedan ser distintas de cero, no contribuyen a una fuerza neta en la dirección x). Con expansiones en serie de Taylor truncadas, dibuje todas las fuerzas de superficie que contribuyen a una componente x neto de fuerza de superficie que actúa sobre el elemento de fluido diferencial (Fig. 9-33):

Cuando se suman todas las fuerzas de superficie que se ilustran en la figura 9-33, se obtiene una aproximación para la fuerza de superficie neta que actúa sobre el elemento de fluido diferencial en la dirección x:

$$\sum F_{x,\,\text{superficie}} \cong \left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zx}\right) dx\, dy\, dz \tag{9-42}$$

Ahora se sustituyen las ecuaciones de la 9-39 a la 9-42 en la ecuación 9-38, y note que el volumen del elemento diferencial de fluido, $dx\, dy\, dz$, aparece en todos los términos y se puede eliminar. Después de cierto reordenamiento se obtiene la forma diferencial de la ecuación de cantidad de movimiento x:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zx} \tag{9-43}$$

De manera similar, se generan formas diferenciales de las ecuaciones de las componentes y y z de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} = \rho g_y + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zy} \tag{9-44}$$

y

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = \rho g_z + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} \tag{9-45}$$

respectivamente. Para finalizar, se combinan las ecuaciones de la 9-43 a la 9-45 en una ecuación vectorial:

Ecuación de Cauchy: $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}\vec{V}) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación de Cauchy (Ec. 9-37); por lo tanto, se confirma que la deducción con el elemento de fluido diferencial produce el mis-

mo resultado que la deducción a partir del teorema de divergencia. Note que el producto $\vec{V}\vec{V}$ es un tensor de segundo orden (Fig. 9-34).

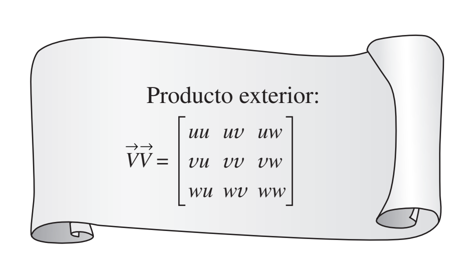


FIGURA 9-34
El producto exterior del vector $\vec{V} = (u, v, w)$ consigo mismo es un tensor de segundo orden. El producto que se muestra está en coordenadas cartesianas y se ilustra como una matriz de nueve componentes.

Forma alternativa de la ecuación de Cauchy

Cuando se aplica la regla de la derivada del producto al primer término del lado izquierdo de la ecuación 9-37 se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) = \rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{9-46}$$

El segundo término de la ecuación 9-37 se puede escribir como:

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{V}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} \tag{9-47}$$

Por lo tanto, se eliminó el tensor de segundo orden representado por $\vec{V}\vec{V}$. Después de cierto reordenamiento, la sustitución de las ecuaciones 9-46 y 9-47 en la ecuación 9-37 produce:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})\right] + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}$$

Pero la expresión en corchetes en esta ecuación es idénticamente cero por la ecuación de continuidad, ecuación 9-5. Cuando se combinan los dos términos restantes en el lado izquierdo, se escribe:

Forma alternativa de la ecuación de Cauchy:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right] = \rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij} \tag{9-48}$$

donde se reconoce la expresión entre corchetes como la aceleración material, la aceleración que sigue una partícula de fluido (véase el capítulo 4).

Deducción con el uso de la segunda Ley de Newton

La ecuación de Cauchy se deduce, inclusive, con una tercera forma. Es decir, se toma el elemento de fluido diferencial como un *elemento material* en lugar de un volumen de control. En otras palabras, un fluido dentro del elemento diferencial se considera como un pequeño *sistema* de identidad fija, que se mueve con el flujo (Fig. 9-35). La aceleración de este elemento de fluido es $\vec{a} = D\vec{V}/Dt$ por definición de aceleración material. Por la segunda Ley de Newton aplicada a un elemento material de fluido:

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\,dx\,dy\,dz\frac{D\vec{V}}{Dt} \tag{9-49}$$

Al instante de tiempo que se representa en la figura 9-35, la fuerza neta sobre el elemento de fluido diferencial se encuentra en la misma forma que la calculada anteriormente sobre el volumen de control diferencial. Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre el elemento de fluido es la suma de las ecuaciones 9-41 y 9-42, extendida a forma vectorial. Cuando se sustituye esto en la ecuación 9-49 y se divide entre $dx\,dy\,dz$, una vez más se genera la forma alternativa de la ecuación de Cauchy:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij} \tag{9-50}$$

La ecuación 9-50 es idéntica a la ecuación 9-48. En retrospectiva, se pudo haber comenzado desde el principio con la segunda Ley de Newton y evitar algo de álgebra. No obstante, ¡la deducción de la ecuación de Cauchy mediante tres métodos ciertamente aumenta la confianza en la validez de la ecuación!

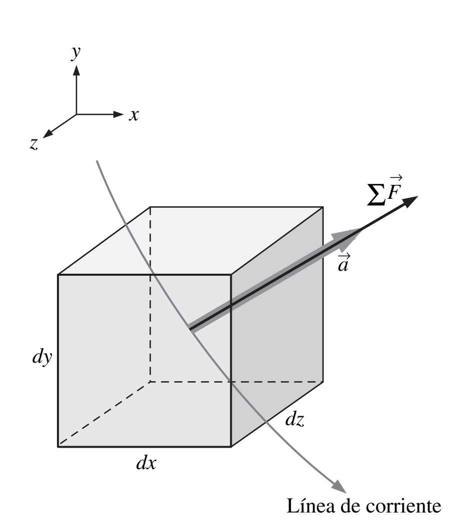


FIGURA 9-35
Si el elemento de fluido diferencial es un elemento material, se mueve con el flujo y la segunda Ley de Newton se aplica directamente.

Debe tenerse mucho cuidado cuando se expanda el último término de la ecuación 9-50, que es la divergencia de un tensor de segundo orden. En coordenadas cartesianas, las tres componentes de la ecuación de Cauchy son:

Componente x:
$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \quad \textbf{(9-51a)}$$

Componente y:
$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \quad \textbf{(9-51b)}$$

Componente z:
$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad \textbf{(9-51c)}$$

Esta sección concluye cuando se observa que no se puede resolver cualquier problema de mecánica de fluidos con la ecuación de Cauchy por sí misma (aun cuando se combine con la ecuación de continuidad). El problema es que se necesita expresar el tensor de esfuerzo σ_{ij} en términos de las incógnitas primarias en el problema, es decir, densidad, presión y velocidad. Esto se hace en la Sección 9-5 para el tipo más común de fluido.

9-5 ▪ LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES

Introducción

La ecuación de Cauchy (Ec. 9-37, o su forma alternativa, la Ec. 9-48) no es muy útil como se encuentra porque el tensor de esfuerzo σ_{ij} contiene nueve componentes, seis de los cuales son independientes (por simetría). En consecuencia, además de la densidad y de las tres componentes de velocidad, existen seis incógnitas adicionales, para un total de 10 incógnitas (en coordenadas cartesianas las incógnitas son ρ, u, v, w, σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yy}, σ_{yz} y σ_{zz}). Mientras tanto, hasta el momento sólo se han comentado cuatro ecuaciones: continuidad (una ecuación) y ecuación de Cauchy (tres ecuaciones). Desde luego, para que sean matemáticamente solucionables, el número de ecuaciones debe ser igual al número de incógnitas, y por lo tanto se necesitan seis ecuaciones más. Dichas ecuaciones se llaman **ecuaciones constitutivas** y permiten escribir las componentes del tensor de esfuerzo en términos del campo de velocidad y del campo de presión.

La primera acción que se hace es separar los esfuerzos de presión y los esfuerzos viscosos. Cuando un fluido está en reposo, el único esfuerzo que actúa en *cualquier* superficie de *cualquier* elemento de fluido es la presión hidrostática local P, que siempre actúa *hacia dentro* y *normal* a la superficie (Fig. 9-36). Por lo tanto, sin importar la orientación del eje coordenado, para un fluido en reposo el tensor de esfuerzo se reduce a:

Fluido en reposo:
$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \quad \textbf{(9-52)}$$

La presión hidrostática P en la ecuación 9-52 es la misma que la **presión termodinámica** con la que se está familiarizado a partir del estudio de la termodinámica. P se relaciona con la temperatura y la densidad por medio de algún tipo de **ecuación de estado** (por ejemplo, la Ley de gas ideal). Como nota marginal, esto complica todavía más un análisis de flujo de fluido compresible, pues se introduce una incógnita más, a saber, la temperatura T. Esta nueva incógnita implica otra ecuación —la forma diferencial de la ecuación de energía— que no se trata en este texto.

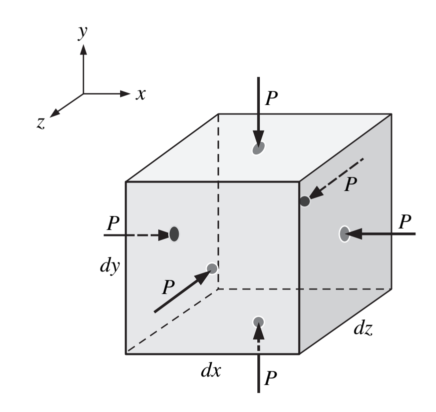


FIGURA 9-36
Para fluidos en reposo, el único esfuerzo sobre un elemento de fluido es la presión hidrostática, que siempre actúa hacia dentro y normal a cualquier superficie.

Cuando un fluido se *mueve*, la presión todavía actúa hacia dentro normal, pero también pueden existir esfuerzos viscosos. La ecuación 9-52 se generaliza para fluidos en movimiento como:

Fluidos en movimiento:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(9-53)}$$

donde se introduce un nuevo tensor, τ_{ij}, llamado **tensor de esfuerzo viscoso** o **tensor de esfuerzo desviatorio**. Matemáticamente, no se ha ayudado a la situación porque se sustituyeron las seis componentes incógnitas de σ_{ij} con seis componentes incógnitas de τ_{ij}, y se agregó *otra* incógnita, la presión P. Sin embargo, por fortuna, existen ecuaciones constitutivas que expresan τ_{ij}, en términos del campo de velocidad y propiedades de fluido mensurables como la viscosidad. La forma real de las relaciones constitutivas depende del tipo de fluido, como se comentará un poco más adelante

Como nota marginal, existen algunas sutilezas asociadas con la presión en la ecuación 9-53. Si el fluido es *incompresible*, no se tiene ecuación de estado (se sustituye por la ecuación ρ = constante) y ya no se puede definir P como la presión termodinámica. En vez de ello, en la ecuación 9-53 P se define como la **presión mecánica**:

Presión mecánica:

$$P_m = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \qquad \textbf{(9-54)}$$

A partir de la ecuación 9-54 se observa que *la presión mecánica es el esfuerzo normal medio que actúa hacia dentro sobre un elemento de fluido*. Por lo tanto algunos autores la llaman **presión media**. En consecuencia, cuando se trata con flujos de fluido incompresibles, la variable presión P siempre se interpreta como la presión mecánica P_m. Sin embargo, para campos de flujo *compresible*, la presión P en la ecuación 9-53 *es* la presión termodinámica, pero el esfuerzo normal medio que se siente en las superficies de un elemento de fluido no necesariamente es el mismo que P (la variable presión P y la presión mecánica P_m no necesariamente son equivalentes). Para un comentario más detallado de la presión mecánica, remítase a Panton (1996) o Kundu (1990).

Fluidos newtonianos *versus* fluidos no-newtonianos

El estudio de la deformación de los fluidos que fluyen se le llama **reología**; en la figura 9-37 se bosqueja el comportamiento reológico de varios fluidos. Este texto se concentra en los **fluidos newtonianos**, que se definen como *los fluidos para los que el esfuerzo de corte es linealmente proporcional a la razón de deformación por corte*. Los fluidos newtonianos (esfuerzo proporcional a razón de deformación) son análogos a los sólidos elásticos (Ley de Hooke: esfuerzo proporcional a deformación). Numerosos fluidos comunes, como el aire y otros gases, agua, queroseno, gasolina y otros líquidos que tienen como base el aceite, son fluidos newtonianos. Los fluidos donde los esfuerzos de corte *no* se relacionan linealmente con la razón de deformación por corte se llaman **fluidos no-newtonianos**. Como ejemplos se incluyen fangos y suspensiones coloidales, soluciones de polímeros, sangre, pasta y masa para pasteles. Algunos fluidos no-newtonianos exhiben "memoria": los esfuerzos de corte no sólo dependen de la razón de deformación local, sino también de su *historia*. Un fluido que regresa (completo o parcialmente) a su forma original después que se retira el esfuerzo aplicado se le nombra **viscoelástico**.

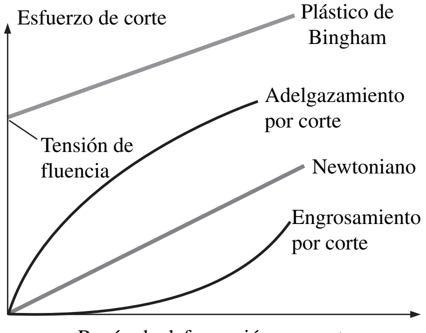


FIGURA 9-37
Comportamiento reológico de fluidos: esfuerzo de corte como función de la razón de deformación por corte.



FIGURA 9-38
Cuando un ingeniero se desliza en arena movediza (un *fluido dilatante*), cuanto más rápido intente moverse, más viscoso se vuelve el fluido.

Algunos fluidos no-newtonianos se llaman **fluidos de adelgazamiento por corte** o **fluidos seudoplásticos**, porque mientras más se corte el fluido, menos viscoso se vuelve. Un buen ejemplo es la pintura. La pintura es muy viscosa cuando se vierte de la lata o cuando se toma con la brocha, puesto que la razón de corte es pequeña. Sin embargo, conforme se aplica la pintura a la pared, la capa delgada de pintura entre la brocha y la pared se sujeta a una gran razón de corte y se vuelve mucho menos viscosa. Los **fluidos plásticos** son aquellos en los que el efecto de adelgazamiento por corte es extremo. En algunos fluidos se necesita un esfuerzo finito llamado **tensión de fluencia** antes de que el fluido comience a fluir del todo; a estos fluidos se les llama **fluidos plásticos de Bingham**. Ciertas pastas, como las cremas contra el acné y los dentífricos, son ejemplos de fluidos plásticos de Bingham. Si se sostiene el tubo de cabeza, la pasta no fluye, aun cuando existe un esfuerzo distinto de cero debido a la gravedad. Sin embargo, si se aprieta el tubo (lo que aumenta enormemente el esfuerzo), la pasta fluye como un fluido muy viscoso. Otros fluidos muestran el efecto opuesto y se llaman **fluidos de engrosamiento por corte** o **fluidos dilatantes**; mientras más se corte el fluido, *más* viscoso se vuelve. El mejor ejemplo es la arena movediza, una mezcla gruesa de arena y agua. Como todos saben, por las películas de Hollywood, es fácil salir con moverse *lentamente* a través de la arena movediza porque la viscosidad es baja; pero si el lector entra en pánico e intenta moverse rápidamente, la resistencia viscosa aumenta considerablemente y entonces quedará "pegado" (Fig. 9-38). Los fluidos de adelgazamiento por corte se usan en algunos aparatos para entrenamiento físico: cuanto más rápido los jale, más resistencia encontrará.

Deducción de la ecuación de Navier-Stokes para flujo isotérmico incompresible

De aquí en adelante el tema se limitará a fluidos newtonianos, donde por definición el tensor de esfuerzo es linealmente proporcional al tensor de razón de deformación. El resultado general (para flujo compresible) es bastante complicado y no se incluye aquí. En vez de ello, se supone flujo incompresible (ρ = constante). También se supone flujo aproximadamente isotérmico: a saber, que los cambios locales en temperatura son pequeños o inexistentes; esto elimina la necesidad de una ecuación diferencial de conservación de energía. Una consecuencia ulterior de la última suposición es que las propiedades de fluido, como la viscosidad dinámica μ y la viscosidad cinemática ν, también son constantes (Fig. 9-39). Con dichas suposiciones se puede demostrar (Kundu, 1990) que el tensor de esfuerzo viscoso se reduce a:

Para un flujo de fluido que es tanto incompresible como isotérmico:
- ρ = constante
- μ = constante

Y por lo tanto:
- ν = constante

FIGURA 9-39
La aproximación de flujo incompresible implica densidad constante, y la aproximación isotérmica implica viscosidad constante.

Tensor de esfuerzo viscoso para un fluido newtoniano incompresible con propiedades constantes:

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{9-55}$$

donde ε_{ij} es el tensor de razón de deformación que se definió en el capítulo 4. La ecuación 9-55 muestra que el esfuerzo es linealmente proporcional a la deformación. En coordenadas cartesianas, se mencionan las nueve componentes del tensor de esfuerzo viscoso, seis de las cuales son independientes debido a simetría:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{9-56}$$

En coordenadas cartesianas, el tensor de esfuerzo de la ecuación 9-53 se convierte por lo tanto en:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu \dfrac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\mu \dfrac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\mu \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \textbf{(9-57)}$$

Ahora se sustituye la ecuación 9-57 en las tres componentes cartesianas de la ecuación de Cauchy. Considere primero la componente x. La ecuación 9-51a se convierte en:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad \textbf{(9-58)}$$

Note que, dado que la presión consiste sólo de un esfuerzo normal, únicamente aporta un término a la ecuación 9-58. Sin embargo, dado que el tensor de esfuerzo viscoso consiste tanto de esfuerzos normal como de corte, aporta *tres* términos (por cierto, éste es un resultado directo cuando se toma la divergencia de un tensor de segundo orden).

Note también que, en tanto que las componentes de velocidad sean funciones suaves de x, y y z, el orden de diferenciación es irrelevante. Por ejemplo, la primera parte del último término en la ecuación 9-58 se puede reescribir como:

$$\mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Después de cierto reordenamiento inteligente de los términos viscosos en la ecuación 9-58:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \end{aligned}$$

El término entre paréntesis es cero debido a la ecuación de continuidad para flujo incompresible (Ec. 9-17). También se reconocen los últimos tres términos como el **laplaciano** de la componente de velocidad u en coordenadas cartesianas (Fig. 9-40). Por lo tanto, la componente x de la ecuación de cantidad de movimiento se escribe como:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 u \quad \textbf{(9-59a)}$$

De manera similar se escriben las componentes y y z de la ecuación de cantidad de movimiento como:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \nabla^2 v \quad \textbf{(9-59b)}$$

y

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \nabla^2 w \quad \textbf{(9-59c)}$$

respectivamente. Por último, se combinan las tres componentes en una ecuación vectorial; el resultado es la **ecuación de Navier-Stokes** para flujo incompresible con viscosidad constante.

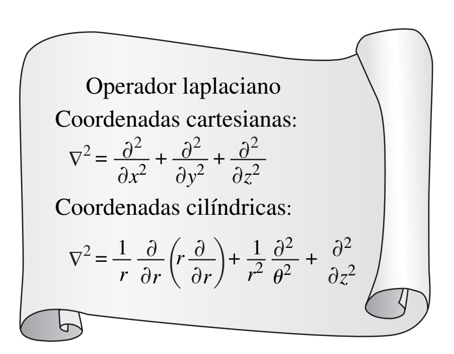


FIGURA 9-40
El operador laplaciano, que aquí aparece tanto en coordenadas cartesianas como cilíndricas, surge en el término que describe la viscosidad en la ecuación de Navier-Stokes para el flujo incompresible.

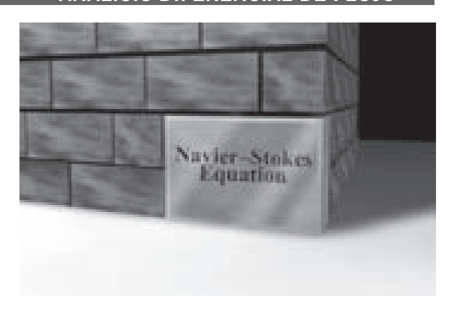


FIGURA 9-41
La ecuación de Navier-Stokes es la base de la mecánica de fluidos.

Ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V} \tag{9-60}$$

Aunque las componentes de la ecuación 9-60 se dedujeron en coordenadas cartesianas, la forma vectorial de la ecuación 9-60 es válida en cualquier sistema coordenado ortogonal. Esta famosa ecuación recibe su nombre en honor al ingeniero francés Louis Marie Henri Navier (1785-1836) y al matemático inglés sir George Gabriel Stokes (1819-1903), quienes desarrollaron los términos viscosos, aunque de manera independiente.

La ecuación de Navier-Stokes es la base de la mecánica de fluidos (Fig. 9-41). Puede parecer suficientemente inocua, pero es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, no-lineal e inestable. Si fuera posible resolver esta ecuación para flujos de cualquier geometría, este libro tendría la mitad de grueso. Por desgracia, las soluciones analíticas no se obtienen excepto para campos de flujo muy simples. ¡No está lejos de la verdad decir que el resto de este libro se dedica a resolver la ecuación 9-60! De hecho, muchos investigadores han dedicado sus estudios para intentar resolver la ecuación de Navier-Stokes.

La ecuación 9-60 tiene cuatro incógnitas (tres componentes de velocidad y la presión), aunque sólo representa tres ecuaciones (tres componentes puesto que es una ecuación vectorial). Obviamente, es necesaria otra ecuación para hacer solucionable el problema. La cuarta ecuación es la ecuación de continuidad para el flujo incompresible (Ec. 9-16). Antes de intentar resolver ese conjunto de ecuaciones diferenciales, es necesario elegir un sistema coordenado y expandir las ecuaciones en dicho sistema coordenado.

Ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas

La ecuación de continuidad (Ec. 9-16) y la ecuación de Navier-Stokes (Ec. 9-60) se expanden en coordenadas cartesianas (x, y, z) y (u, v, w):

Ecuación de continuidad de flujo incompresible:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{9-61a}$$

Componente x *de la ecuación de Navier-Stokes de flujo incompresible*:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{9-61b}$$

Componente y *de la ecuación de Navier-Stokes de flujo incompresible*:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{9-61c}$$

Componente z *de la ecuación de Navier-Stokes de flujo incompresible*:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{9-61d}$$

Ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas

La ecuación de continuidad (Ec. 9-16) y la ecuación de Navier-Stokes (Ec. 9-60) se expanden en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y (u_r, u_θ, u_z):

Ecuación de continuidad de flujo incompresible:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(9-62a)}$$

Componente r *de la ecuación de Navier-Stokes de flujo incompresible*:

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right] \qquad \textbf{(9-62b)}$$

Componente θ de la ecuación de Navier-Stokes de flujo incompresible:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)$$
$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \qquad \textbf{(9-62c)}$$

Componente z *de la ecuación de Navier-Stokes de flujo incompresible*:

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right] \qquad \textbf{(9-62d)}$$

Los términos “adicionales” en ambos lados de las componentes r y θ de la ecuación de Navier-Stokes (Ecs. 9-62*b* y 9-62*c*) surgen debido a la naturaleza especial de las coordenadas cilíndricas. De esta manera, conforme se mueve en la dirección θ, el vector unitario $\vec{e}_r$ también cambia de dirección; por lo tanto, las componentes r y θ se *acoplan* (Fig. 9-42). (Este efecto de acoplamiento no se presenta en coordenadas cartesianas y por lo tanto no existen términos “adicionales” en las ecuaciones 9-61.)

A continuación, se citan las seis componentes independientes del tensor de esfuerzo viscoso en coordenadas cilíndricas:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} & \mu\left[r\frac{\partial}{\partial_r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] & \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \\ \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] & 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) & \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) & \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) & 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(9-63)}$$

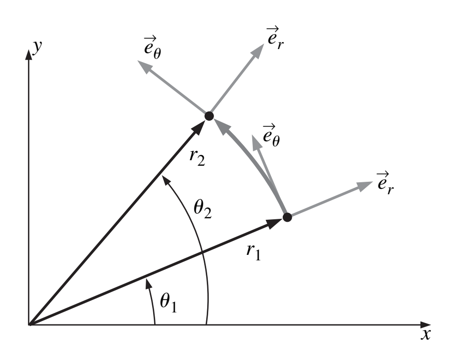


FIGURA 9-42
Los vectores unitarios $\vec{e}_r$ y $\vec{e}_\theta$ en coordenadas cilíndricas se *acoplan*: el movimiento en la dirección θ provoca que $\vec{e}_r$ ambie de dirección, y ello conduce a términos adicionales en las componentes r y θ de la ecuación de Navier-Stokes.

9-6 ▪ ANÁLISIS DIFERENCIAL DE PROBLEMAS DE FLUJO DE FLUIDOS

En esta sección se mostrará cómo aplicar las ecuaciones diferenciales de movimiento tanto en coordenadas cartesianas como en cilíndricas. Existen dos tipos de problemas para los que son útiles las ecuaciones diferenciales (de continuidad y de Navier-Stokes):

- Cálculo de campo de presión para un campo de velocidad conocido.
- Cálculo de campos de velocidad y presión para un flujo de geometría conocida y condiciones de frontera conocidas.

Por simplicidad, sólo se considera flujo incompresible, cuando se eliminan el cálculo de ρ como una variable. Además, la forma de la ecuación de Navier-Stokes que se derivó en la Sección 9-5 sólo es válida para fluidos newtonianos con propiedades constantes (viscosidad, conductividad térmica, entre otras). Para finalizar, se suponen variaciones de temperatura despreciables, de modo que T no es una variable. Quedan cuatro variables o incógnitas (presión más tres componentes de velocidad) y se tienen cuatro ecuaciones diferenciales (Fig. 9-43).

Flujo tridimensional incompresible

Cuatro variables o incógnitas:

- Presión P
- Tres componentes de velocidad $\vec{V}$

Cuatro ecuaciones de movimiento

- Continuidad, $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$
- Tres componentes de Navier-Stokes, $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V}$

FIGURA 9-43
Un campo de flujo tridimensional general, pero incompresible con propiedades constantes exige cuatro ecuaciones para resolver para cuatro incógnitas.

Cálculo del campo de presión para un campo de velocidad conocido

El primer conjunto de ejemplos implica cálculo del campo de presión para un campo de velocidad conocido. Dado que la presión no aparece en la ecuación de continuidad, teóricamente se puede generar un campo de velocidad basado exclusivamente en conservación de masa. Sin embargo, dado que la velocidad aparece tanto en la ecuación de continuidad como en la ecuación de Navier-Stokes, estas dos ecuaciones se *acoplan*. Además, la presión aparece en las tres componentes de la ecuación de Navier-Stokes y por lo tanto los campos de velocidad y presión también están acoplados. Este acoplamiento estrecho entre velocidad y presión permite calcular el campo de presión para un campo de velocidad conocido.

EJEMPLO 9-13 **Cálculo del campo de presión en coordenadas cartesianas**

Considere el campo de velocidad bidimensional incompresible del ejemplo 9-9, a saber, $\vec{V} = (u, v) = (ax + b)\vec{i} + (-ay + cx)\vec{j}$. Calcule la presión como función de x y y.

SOLUCIÓN Para un campo de velocidad dado, tiene que calcular el campo de presión.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El fluido es incompresible con propiedades constantes. **3** El flujo es bidimensional en el plano xy. **4** La gravedad no actúa en las direcciones x o y.
Análisis Primero verifique si el campo de velocidad dado satisface la ecuación de continuidad bidimensional incompresible:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{a} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-a} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{0\text{ (2-D)}} = a - a = 0 \qquad (1)$$

Por lo tanto, la continuidad de hecho se satisface por el campo de velocidad dado. Si la continuidad *no* se satisface, tendría que detenerse el análisis: el campo de velocidad dado no sería físicamente posible y no podría calcularse un campo de presión.

A continuación, se considera la componente *y* de la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho\Big(\underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}}_{0\ \text{(estacionaio)}} + \underbrace{u\frac{\partial v}{\partial x}}_{(ax+b)c} + \underbrace{v\frac{\partial v}{\partial y}}_{(-ay+cx)(-a)} + \underbrace{\cancel{w\frac{\partial v}{\partial z}}}_{0\ \text{(2-D)}}\Big) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \underbrace{\cancel{\rho g_y}}_{0} + \mu\Big(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}}_{0\ \text{(2-D)}}\Big)$$

La ecuación de cantidad de movimiento *y* se reduce a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho(-acx - bc - a^2y + acx) = \rho(-bc - a^2y) \tag{2}$$

La ecuación de cantidad de movimiento y se satisface, siempre que se pueda generar un campo de presión que satisfaga la ecuación 2. En forma similar, la ecuación de cantidad de movimiento *x* se reduce a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho(-a^2x - ab) \tag{3}$$

La ecuación de cantidad de movimiento *x* también se satisface, siempre que se pueda generar un campo de presión que satisfaga la ecuación 3.

Con la finalidad de que exista una solución para flujo estacionario, *P* no puede ser función del tiempo. Más aún, un campo de flujo incompresible físicamente estacionario en verdad requiere un campo de presión $P(x, y)$ que es una función suave de *x* y *y* (no puede haber discontinuidades súbitas o en *P* o en una derivada de *y*). Matemáticamente, esto necesita que el orden de diferenciación (al principio con respecto a *x* y luego con respecto a *y* o al principio con respecto a *y* y luego con respecto a *x*) no deba importar (Fig. 9-44). Se comprueba si esto es posible cuando se realiza una diferenciación cruzada de las ecuaciones 2 y 3, respectivamente:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

La ecuación 4 muestra que *P* es una función suave de *x* y *y*. Por lo tanto, *el campo de velocidad dado satisface la ecuación de Navier-Stokes de flujo bidimensional estacionario incompresible.*

Si en este punto del análisis la diferenciación cruzada de la presión produjera dos relaciones incompatibles (en otras palabras: si la ecuación de la figura 9-44 no se satisficiera), se llegaría a la conclusión que el campo de velocidad dado no podría satisfacer la ecuación de Navier-Stokes de flujo bidimensional estacionario incompresible, y se abandonaría el intento por calcular un campo de presión estacionario.

Para calcular $P(x, y)$ se integra la ecuación 2 (con respecto a *y*) para obtener una expresión para $P(x, y)$:

Campo de presión a partir de la componente y *de la cantidad de movimiento*:

$$P(x, y) = \rho\left(-bcy - \frac{a^2y^2}{2}\right) + g(x) \tag{5}$$

Note que se agregó una función arbitraria de la otra variable *x* en lugar de una constante de integración porque ésta es una integración con respecto a una variable. Entonces se saca la derivada parcial de la ecuación 5 respecto a *x* para obtener:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = g'(x) = \rho(-a^2x - ab) \tag{6}$$

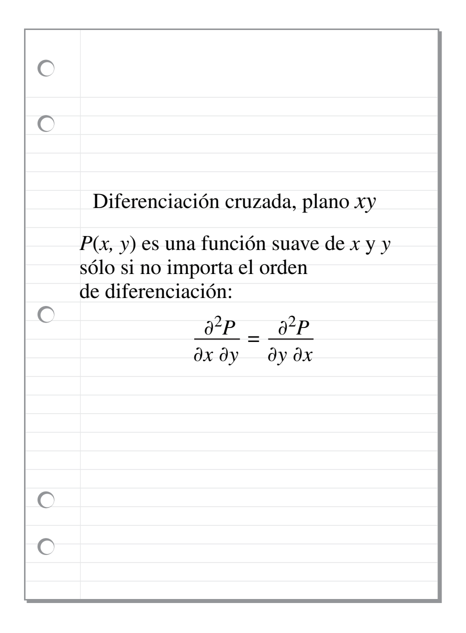


FIGURA 9-44
Para un campo de flujo bidimensional en el plano *xy*, la diferenciación cruzada revela si la presión *P* es una función suave.

donde se igualó el resultado de la ecuación 3 por uniformidad. Ahora se integra la ecuación 6 para obtener la función $g(x)$:

$$g(x) = \rho\left(-\frac{a^2x^2}{2} - abx\right) + C_1 \tag{7}$$

donde C_1 es una constante de integración arbitraria. Finalmente, la ecuación 7 se sustituye en la ecuación 5 para obtener la expresión final parar $P(x, y)$. El resultado es:

$$\boldsymbol{P(x, y) = \rho\left(-\frac{a^2x^2}{2} - \frac{a^2y^2}{2} - abx - bcy\right) + C_1} \tag{8}$$

Discusión Para la práctica, y como comprobación de las transformaciones algebraicas, debe diferenciar la ecuación 8 respecto tanto de *y* como de *x*, y comparar las ecuaciones 2 y 3. Además, intente obtener la ecuación 8 cuando comience con la ecuación 3 en vez de la ecuación 2; debe obtener el mismo resultado.

Note que la ecuación final (Ec. 8) para la presión en el Ejemplo 9-13 contiene una constante arbitraria C_1. Esto ilustra un punto importante acerca del campo de presión en un flujo incompresible; a saber:

> El campo de velocidad en un flujo incompresible no se afecta con la magnitud absoluta de la presión, sino sólo por las diferencias de presión.

Esto no debe sorprender si se observa la ecuación de Navier-Stokes, donde *P* aparece sólo como un *gradiente*, nunca por sí mismo. Otra manera de explicar este enunciado es que no es la magnitud absoluta de la presión la que importa, sino sólo las *diferencias* de presión (Fig. 9-45). Un resultado directo del enunciado es que se puede calcular el campo de presión hasta dentro de una constante arbitraria, pero con la finalidad de determinar dicha constante (C_1 en el ejemplo 9-13) se debe medir (u obtener de algún otro modo) *P* en alguna parte en el campo de flujo. En otras palabras: se necesita una condición de frontera de presión.

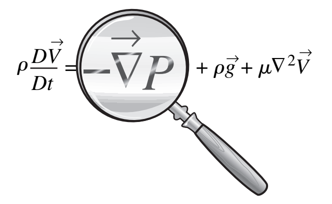


FIGURA 9-45
Dado que la presión sólo aparece como un gradiente en la ecuación de Navier-Stokes de flujo incompresible la magnitud absoluta de la presión no es relevante, sólo importa las *diferencias* de presión.

Este punto se ilustra con un ejemplo generado con el uso de **dinámica de fluidos computacional (CFD**, por sus siglas en inglés), donde las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes se resuelven numéricamente (capítulo 15). Considere un flujo descendente de aire a través de un canal en el que existe un bloqueo no-simétrico (Fig. 9-46) (note que el dominio de flujo computacional se extiende mucho más allá corriente arriba y corriente abajo de lo que se muestra en la figura 9-46). Se calculan dos casos que son idénticos excepto por la condición de presión. En el caso 1 se establece que la presión manométrica que está alejada corriente abajo del bloqueo es cero. En el caso 2 se establece la presión en la misma posición en 500 Pa de presión manométrica. En la figura 9-46 se muestra la presión manométrica en la parte central superior del campo de vista y en la central inferior del campo de vista para ambos casos, según se genera a partir de las dos soluciones CFD. El lector puede ver que el campo de presión para el caso 2 es idéntico al del caso 1, excepto que la presión aumentó en todas partes por 500 Pa. En la figura 9-46 también se muestran una gráfica de vector de velocidad y una gráfica de líneas de corriente para cada caso. Los resultados son idénticos, lo que confirma el enunciado de que el campo de velocidad no se afecta por la magnitud absoluta de la presión, sino sólo por las *diferencias* de presión. Cuando se resta la presión en la parte inferior desde la parte superior, se ve que $\Delta P = 12.784$ Pa para ambos casos.

El enunciado acerca de las diferencias de presión *no* es verdadero para campos de flujo *compresibles*, donde *P* es la presión termodinámica en vez de la presión mecánica. En esos casos, *P* se acopla con la densidad y la temperatura

por medio de una ecuación de estado, y la magnitud absoluta de la presión *es* importante. Una solución de flujo compresible implica no sólo ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento, sino también una ecuación de conservación de energía y una ecuación de estado.

Se aprovecha esta oportunidad para comentar todavía más acerca de los resultados CFD que se muestran en la figura 9-46. Se puede aprender mucho acerca de física de flujo de fluidos cuando se estudian flujos relativamente simples como éste. Note que la mayor parte de la caída de presión ocurre a través de la garganta del canal. Esto lo provoca la separación del flujo corriente abajo del bloqueo; el aire que se mueve rápidamente no puede dar vuelta alrededor de una esquina aguda, y el flujo se separa de las paredes conforme sale de la abertura. Las líneas de corriente indican grandes regiones de recirculación en ambos lados de la corriente abajo del canal en el bloqueo. La presión es baja en estas regiones de recirculación. Los vectores de velocidad indican un perfil de velocidad con forma de campana invertida que sale por la abertura, muy parecido al chorro de una tobera. Debido a la naturaleza no-simétrica de la geometría, el chorro da vuelta a la derecha y el flujo se reúne en la pared derecha mucho más pronto que en la pared izquierda. La presión aumenta un poco en la región donde el chorro incide sobre la pared derecha, como se esperaría. Para terminar, note que, conforme el aire acelera para apretujarse a través del orificio, las líneas de corriente convergen (como se discutió en la Sección 9-3). Conforme el chorro de aire se abre en abanico corriente abajo, las líneas de corriente divergen un poco. Note también que las líneas de corriente en las zonas de recirculación están muy separadas, lo que indica que las velocidades ahí son relativamente pequeñas; eso se verifica mediante las gráficas de vector de velocidad.

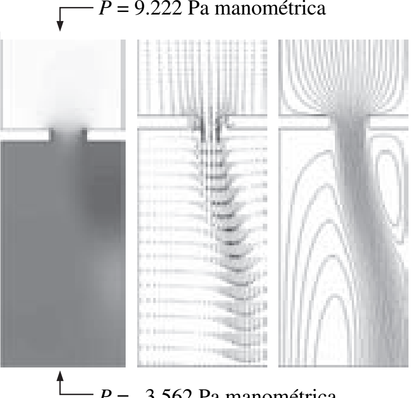
Para terminar, note que la mayoría de los paquetes computacionales de CFD *no* calculan presión mediante la integración de la ecuación Navier-Stokes como se hizo en el Ejemplo 9-13. En vez de ello, se usa cierto tipo de **algoritmo de corrección de presión**. La mayoría de los algoritmos usados comúnmente funcionan cuando se combinan las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes en tal forma que la presión aparezca en la ecuación de continuidad. Los algoritmos de corrección de presión más populares resultan en una forma de **ecuación de Poisson** para el cambio en presión ΔP a partir de una iteración (n) a la siguiente ($n + 1$):

Ecuación de Poisson para ΔP: $$\nabla^2(\Delta P) = \text{RHS}_{(n)} \qquad \textbf{(9-64)}$$

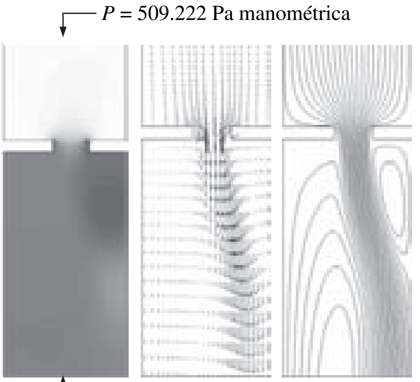
Entonces, conforme la computadora genera una solución, la ecuación de continuidad modificada se usa para "corregir" el campo de presión en la iteración ($n + 1$) a partir de sus valores en la iteración (n):

Corrección para P: $$P_{(n+1)} = P_{(n)} + \Delta P$$

Los detalles asociados con el desarrollo de los algoritmos de corrección de presión están fuera de los objetivos de este texto. Un ejemplo para flujos bidimensionales se desarrolla en Gerhart, Gross y Hochstein (1992).



a)



b)

FIGURA 9-46
Gráfica de contorno relleno de presión, gráfica de vector de velocidad y líneas de corriente para flujo de aire corriente abajo a través de un canal con bloqueo: *a*) caso 1; *b*) caso 2, idéntico al caso 1, excepto que P en todas partes aumentó en 500 Pa. En las gráficas de contorno en escala de grises, lo oscuro corresponde a presión baja y lo claro a presión alta.

EJEMPLO 9-14 Cálculo del campo de presión en coordenadas cilíndricas

Considere el campo de velocidad bidimensional y estacionario de fluido incompresible del Ejemplo 9-5 con la función $f(\theta, t)$ igual a 0. Esto representa un torbellino lineal cuyo eje yace a lo largo del eje de la coordenada z (Fig. 9-47). Las componentes de velocidad son $u_r = 0$ y $u_\theta = K/r$, donde K es una constante. Calcule la presión como una función de r y θ.

SOLUCIÓN Debe calcularse el campo de presión para un campo de velocidad dado.

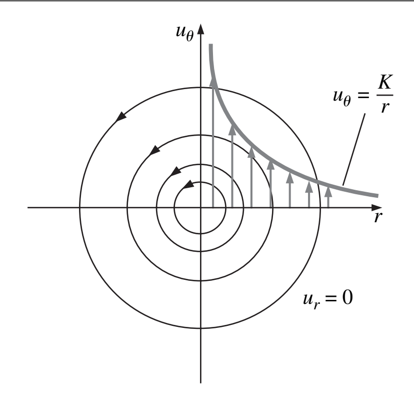


FIGURA 9-47
Líneas de corriente y perfiles de velocidad para un torbellino lineal.

Diferenciación cruzada, plano $r\theta$

$P(r, \theta)$ es una función suave de r y θ sólo si el orden de diferenciación no importa:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta} = \frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r}$$

FIGURA 9-48
Para un campo de flujo bidimensional en el plano $r\theta$, la diferenciación cruzada revela si la presión P es una función suave.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El fluido es incompresible con propiedades constantes. **3** El flujo es bidimensional en el plano $r\theta$. **4** La gravedad no actúa ni en la dirección r ni en la θ.

Análisis El campo de flujo debe satisfacer las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento, ecuaciones 9-62. Para flujo estacionario bidimensional incompresible:

Continuidad de flujo incompresible:
$$\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cancel{u_r})}{\partial r}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial(\cancel{u_\theta})}{\partial\theta}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial(\cancel{u_z})}{\partial z}}_{0} = 0$$

En consecuencia, se satisface la ecuación de continuidad de flujo incompresible. Ahora observe la componente θ de la ecuación de Navier-Stokes (Ec. 9-62*c*):

$$\rho\left(\underbrace{\frac{\partial \cancel{u_\theta}}{\cancel{\partial t}}}_{0\text{ (est.)}} + \underbrace{u_r\frac{\partial \cancel{u_\theta}}{\cancel{\partial r}}}_{(0)\left(-\frac{K}{r^2}\right)} + \underbrace{\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial \cancel{u_\theta}}{\cancel{\partial\theta}}}_{\left(\frac{K}{r^2}\right)(0)} + \underbrace{\frac{\cancel{u_r u_\theta}}{\cancel{r}}}_{0} + \underbrace{u_z\frac{\partial \cancel{u_\theta}}{\cancel{\partial z}}}_{0\text{ (2-D)}}\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta} + \underbrace{\cancel{\rho g_\theta}}_{0} + \mu\left(\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)}_{\frac{K}{r^3}} - \underbrace{\frac{u_\theta}{r^2}}_{\frac{K}{r^3}} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \cancel{u_\theta}}{\cancel{\partial\theta^2}}}_{0} + \underbrace{\frac{2}{r^2}\frac{\partial \cancel{u_r}}{\cancel{\partial\theta}}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 \cancel{u_\theta}}{\cancel{\partial z^2}}}_{0\text{ (2-D)}}\right)$$

La ecuación de cantidad de movimiento θ se reduce a:

Cantidad de movimiento θ:
$$\frac{\partial P}{\partial\theta} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

En consecuencia, se satisface la ecuación de cantidad de movimiento θ, siempre que se pueda generar un campo de presión apropiado que satisfaga la ecuación 1. En forma similar, la ecuación de cantidad de movimiento r (Ec. 9-62*b*) se reduce a:

Cantidad de movimiento r:
$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho\frac{K^2}{r^3} \qquad \textbf{(2)}$$

Por lo tanto, también se satisface la ecuación de cantidad de movimiento r, siempre que se pueda generar un campo de presión que satisfaga la ecuación 2.

Con la finalidad de que exista solución para un flujo estacionario, P no puede ser función del tiempo. Más aún, un campo de flujo incompresible estacionario físicamente real requiere un campo de presión $P(r, \theta)$ que sea una función suave de r y θ. Matemáticamente, esto requiere que el orden de diferenciación (al principio con respecto a r y luego con respecto a θ o al principio con respecto a θ y luego con respecto a r) no importe (Fig. 9-48). Se verifica si esto es así mediante diferenciación cruzada de la presión:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right) = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

La ecuación 3 muestra que P es una función suave de r y θ. Por lo tanto, *el campo de velocidad dado satisface la ecuación de Navier-Stokes de flujo bidimensional y estacionario de fluido incompresible*.

Cuando se integra la ecuación 1 respecto a θ para obtener una expresión para $P(r, \theta)$:

Campo de presión a partir de cantidad de movimiento θ: $$P(r, \theta) = 0 + g(r) \qquad \textbf{(4)}$$

Note que se agregó una función arbitraria de la otra variable *r*, en vez de una constante de integración, dado que ésta es una integración con respecto a una variable. Se toma la derivada parcial de la ecuación 4 respecto a *r* para obtener:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = g'(r) = \rho \frac{K^2}{r^3} \tag{5}$$

donde, por uniformidad, se ha igualado el resultado de la ecuación 2. Se integra la ecuación 5 para obtener la función $g(r)$:

$$g(r) = -\frac{1}{2}\rho \frac{K^2}{r^2} + C \tag{6}$$

donde *C* es una constante de integración arbitraria. Para terminar, se sustituye la ecuación 6 en la ecuación 4 para obtener la expresión final para $P(x, y)$. El resultado es:

$$\boldsymbol{P(r, \theta) = -\frac{1}{2}\rho \frac{K^2}{r^2} + C} \tag{7}$$

Por lo tanto, el campo de presión para un torbellino lineal disminuye como $1/r^2$ conforme se aproxima al origen (el origen mismo es un punto de singularidad). Este campo de flujo es un modelo sencillo de un tornado o huracán, y la presión baja en el centro es el "ojo de la tormenta" (Fig. 9-49). Note que este campo de flujo es irrotacional, por lo tanto se puede usar la ecuación de Bernoulli en lugar del procedimiento y a realizado, para calcular la presión. Si se invoca la presión P_∞ lejos del origen ($r \to \infty$), donde la velocidad local tiende a cero, la ecuación de Bernoulli muestra que a cualquier distancia *r* del origen:

Ecuación Bernoulli: $$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_\infty \quad \to \quad P = P_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{K^2}{r^2} \tag{8}$$

La ecuación 8 concuerda con la solución (Ec. 7) obtenida de la ecuación completa de Navier-Stokes si la constante *C* se hace igual a P_∞. Una región de flujo rotacional cerca del origen evitaría la singularidad allí y produciría un modelo físicamente más realista de un tornado.

Discusión Para practicar intente obtener la ecuación 7 al comenzar con la ecuación 2 en vez de la ecuación 1; debe obtener la misma respuesta.

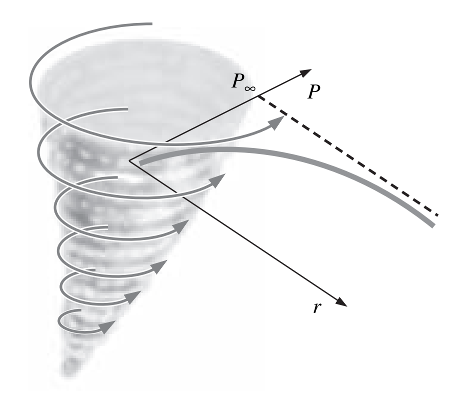


FIGURA 9-49
El torbellino lineal bidimensional es una aproximación sencilla de un tornado; la presión más baja está en el centro del vórtice.

Soluciones exactas de las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes

Los restantes problemas de ejemplo son soluciones exactas del conjunto de ecuaciones diferenciales que consiste de las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes. Como el lector podrá observar estos problemas son sencillos, de modo que tienen solución. La mayoría de ellos suponen fronteras infinitas y condiciones de flujo totalmente desarrollado, de modo que desaparecen los términos convectivos en el lado izquierdo de la ecuación de Navier-Stokes. Además, son casos de flujo laminar, bidimensional y estacionario o dependiente del tiempo de una forma predefinida. Existen seis pasos básicos en el procedimiento que se utilizan para resolver estos problemas, pasos mencionados en la figura 9-50. El paso 2 es especialmente crucial, pues las condiciones de frontera determinan la unicidad de la solución. El paso 4 no es posible analíticamente, excepto para problemas simples. En el paso 5 deben estar disponibles suficientes condiciones de frontera para resolver todas las constantes de integración producidas en el paso 4. El paso 6 implica la verificación de que se satisfacen todas las ecuaciones diferenciales y todas las condiciones de frontera. Se aconseja seguir

Paso 1: establecimiento del problema y la geometría (los bosquejos son útiles), identificación de todas las dimensiones y parámetros relevantes.

Paso 2: lista de todas las suposiciones, aproximaciones, simplificaciones y condiciones de frontera adecuadas.

Paso 3: simplificación de las ecuaciones diferenciales de movimiento (continuidad y Navier-Stokes) tanto como sea posible.

Paso 4: integración de las ecuaciones, lo que conduce a una o más constantes de integración.

Paso 5: aplicación de condiciones de frontera por resolver para las constantes de integración.

Paso 6: verificación de los resultados.

FIGURA 9-50
Procedimiento para resolver las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes.

estos pasos, incluso en casos donde algunos de los pasos parezcan triviales, con la finalidad de aprender el procedimiento.

Aunque los ejemplos mostrados aquí son simples, ilustran de manera adecuada el procedimiento aplicado para resolver estas ecuaciones diferenciales. En el capítulo 15 se trata cómo las computadoras permiten resolver *numéricamente* las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos mucho más complicados con el uso de CFD. El lector verá que aquí se usan las mismas técnicas: especificación de geometría, aplicación de condiciones de frontera, integración de las ecuaciones diferenciales, entre otras, aunque los pasos no siempre se siguen en el mismo orden.

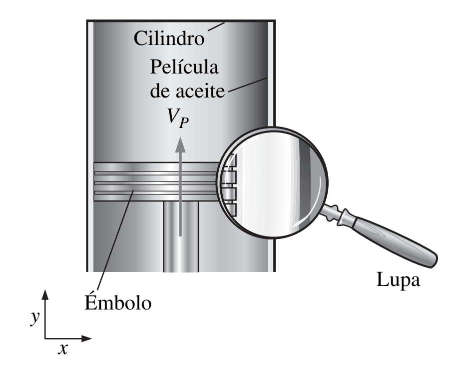


FIGURA 9-51
Un émbolo se mueve con rapidez V_P en un cilindro. Una delgada película de aceite se corta entre el émbolo y el cilindro; se muestra una vista amplificada de la película de aceite. La *condición de frontera de no-deslizamiento* requiere que la velocidad del fluido adyacente a una pared sea igual al de la pared.

Condiciones de frontera

Dado que las condiciones de frontera son tan cruciales para una solución adecuada, se tratan los tipos de condiciones de frontera que se encuentran comúnmente en análisis de flujo de fluidos. La condición de frontera de uso más generalizado es la **condición de no-deslizamiento**, que establece que, para un fluido en contacto con una pared sólida, *la velocidad del fluido debe ser igual al de la pared:*

Condición de frontera de no-deslizamiento: $$\vec{V}_{\text{fluido}} = \vec{V}_{\text{pared}} \qquad \textbf{(9-65)}$$

En otras palabras, como su nombre implica, no hay “deslizamiento” entre el fluido y la pared. Las partículas de fluido adyacentes a la pared se adhieren a la superficie de la pared y se mueven a la misma velocidad que la pared. Un caso especial de la ecuación 9-65 es para una pared en reposo con $\vec{V}_{\text{pared}} = 0$; *el fluido adyacente a una pared en reposo tiene velocidad cero*. Para casos en los que también se consideren los efectos de temperatura, la temperatura del fluido debe ser igual al de la pared; es decir, $T_{\text{fluido}} = T_{\text{pared}}$. Se debe tener cuidado de asignar la condición de no-deslizamiento de acuerdo con su elección de *marco de referencia*. Considere, por ejemplo, la delgada película de aceite entre un émbolo y la pared del cilindro (Fig. 9-51). Desde un marco de referencia relacionado con, el fluido adyacente al cilindro está en reposo, y el fluido adyacente al émbolo en movimiento tiene velocidad $\vec{V}_{\text{fluido}} = \vec{V}_{\text{pared}} = V_P\vec{j}$. Sin embargo, desde un marco de referencia *que se mueve con el émbolo*, el fluido adyacente al émbolo tiene velocidad cero, pero el fluido adyacente al cilindro tiene velocidad $\vec{V}_{\text{fluido}} = \vec{V}_{\text{pared}} = -V_P\vec{j}$. Una excepción a la condición de no-deslizamiento ocurre en flujos de gas rarificado, como durante el regreso de una nave espacial o en el estudio del movimiento de partículas extremadamente pequeñas (submicras). En estos flujos el aire puede, de hecho, deslizarse a lo largo de la pared, pero dichos flujos están fuera de los objetivos del ámbito de este texto.

Cuando dos fluidos (fluido *A* y fluido *B*) se encuentran en una interfase, las **condiciones de frontera de interfase** son:

Condiciones de frontera de interfase: $$\vec{V}_{\text{A}} = \vec{V}_{\text{B}} \quad \text{y} \quad \tau_{s,\text{A}} = \tau_{s,\text{B}} \qquad \textbf{(9-66)}$$

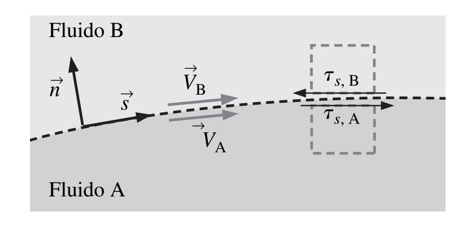


FIGURA 9-52
En una interfase entre dos fluidos, la velocidad de los dos fluidos debe ser igual. Además, el esfuerzo de corte paralelo a la interfase debe ser el mismo en ambos fluidos.

donde, además de la condición de que las velocidades de los dos fluidos deben ser iguales, los esfuerzos de corte τ_s que actúan sobre una partícula de fluido adyacente a la interfase en la dirección paralela a la interfase también deben ser iguales entre los dos fluidos (Fig. 9-52). Note que, en la figura, $\tau_{s,\text{A}}$ se dibuja en la *parte superior* de la partícula de fluido en el fluido *A*, mientras que $\tau_{s,\text{B}}$ se dibuja en la *parte inferior* de la partícula de fluido en el fluido *B*, y se consideró cuidadosamente la *dirección* del esfuerzo de corte. Debido a la convención de signo en el esfuerzo de corte, la dirección de las flechas en la figura 9-52 es opuesta (una consecuencia de la tercera Ley de Newton). Note que, aunque la velocidad es continua a través de la interfase, su pendiente *no lo es*. Además, si se consideran los efectos de temperatura, $T_{\text{A}} = T_{\text{B}}$ en la interfase, también puede haber una discontinuidad en la pendiente de temperatura en la interfase.

¿Y qué hay acerca de la presión en la interfase? Si los efectos de tensión superficial son despreciables o si la interfase es casi plana, $P_A = P_B$. Sin embargo, si la interfase tiene una curvatura pronunciada, como en los meniscos de los líquidos que se elevan en un tubo capilar, la presión en un lado de la interfase puede ser considerablemente diferente de la que hay en el otro lado. Debe recordarse del capítulo 2 que el salto de presión a través de una interfase es inversamente proporcional al radio de curvatura de la interfase, como resultado de efectos de tensión superficial.

Una forma degenerada de la condición de frontera de interfase ocurre en la *superficie libre* de un líquido, lo que significa que el fluido *A* es un líquido y el fluido *B* es un gas (usualmente aire). En la figura 9-53 se ilustra un caso simple donde el fluido *A* es agua líquida y el fluido *B* es aire. La interfase es plana, los efectos de tensión superficial son despreciables, pero el agua se desplaza horizontalmente (como el agua que fluye en un río tranquilo). En este caso, las velocidades del aire y el agua deben igualar en la superficie y el esfuerzo de corte que actúa sobre una partícula de agua sobre la superficie del agua debe ser igual a la que actúa sobre una partícula de aire justo sobre la superficie. De acuerdo con la ecuación 9-66:

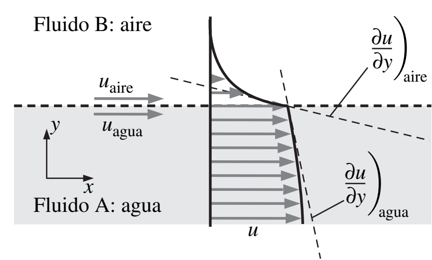


FIGURA 9-53
A lo largo de una *superficie libre* horizontal de agua y aire, las velocidades del agua y el aire deben ser iguales y los esfuerzos de corte deben equipararse. Sin embargo, dado que $\mu_{aire} \ll \mu_{agua}$, una buena aproximación es que el esfuerzo de corte en la superficie del agua es despreciablemente pequeño.

Condiciones de frontera en la interfase agua-aire:

$$u_{agua} = u_{aire} \qquad \text{y} \qquad \tau_{s,\,agua} = \mu_{agua}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{agua} = \tau_{s,\,aire} = \mu_{aire}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{aire} \qquad \textbf{(9-67)}$$

Una mirada rápida a las tablas de propiedad de fluido revela que μ_{agua} es casi 50 veces mayor que μ_{aire}. Con la finalidad de que los esfuerzos de corte sean iguales, la ecuación 9-67 exige que la pendiente $(\partial u/\partial y)_{aire}$ sea más de 50 veces mayor que $(\partial u/\partial y)_{agua}$. Por lo tanto, es razonable aproximar el esfuerzo de corte que actúa en la superficie del agua como despreciablemente pequeño en comparación con los esfuerzos de corte en cualquier otra parte en el agua. Otra manera de decir esto es que el agua en movimiento arrastra aire junto con ella con poca resistencia del aire; en contraste, el aire no frena al agua por una cantidad significativa. En resumen, para el caso de un líquido en contacto con un gas, y con efectos de tensión superficial despreciables, las **condiciones de frontera de superficie libre** son:

Condiciones de frontera de superficie libre: $P_{líquido} = P_{gas} \qquad \text{y} \qquad \tau_{s,\,líquido} \cong 0$ **(9-68)**

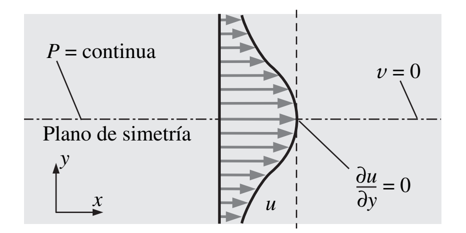


FIGURA 9-54
Las condiciones de frontera a lo largo de un plano de simetría están definidas a modo de garantizar que el campo de flujo en un lado del plano de simetría es una *imagen de reflejo de espejo* de la del otro lado, como se muestra aquí para un plano de simetría horizontal.

De la configuración del problema depende que surjan otras condiciones de frontera. Por ejemplo, con frecuencia es necesario definir **condiciones de frontera** de entrada en una frontera de un dominio de flujo donde el fluido entra al dominio. Del mismo modo, se definen **condiciones de frontera de salida** en un flujo de salida. Las **condiciones de frontera de simetría** son útiles a lo largo de un eje o plano de simetría. Por ejemplo, en la figura 9-54 se muestran las condiciones de frontera de simetría adecuadas a lo largo de un plano horizontal de simetría. Para problemas de flujo no-estacionario también es necesario definir **condiciones iniciales** (en el tiempo de inicio, usualmente $t = 0$).

Desde los ejemplos 9-15 al 9-19 se aplican las condiciones de frontera de las ecuaciones 9-65 a la 9-68 donde son adecuadas. Éstas y otras condiciones de frontera se tratan con más detalle en el capítulo 15, donde se les aplica soluciones CFD.

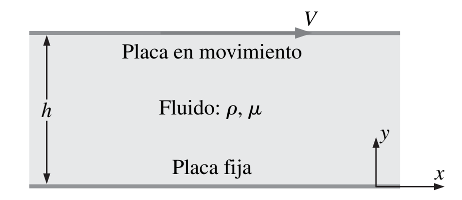


FIGURA 9-55
Geometría del ejemplo 9-15: flujo viscoso entre dos placas infinitas; la placa superior en movimiento y la placa inferior en reposos.

EJEMPLO 9-15 Flujo de Couette totalmente desarrollado

Considere flujo laminar y estacionario de un fluido newtoniano incompresible en la estrecha brecha entre dos placas paralelas infinitas (Fig. 9-55). La placa superior se mueve con velocidad *V*, y la placa inferior está en reposo. La distancia entre estas dos placas es *h* y la gravedad actúa en la dirección *z* negativa (normal hacia el plano de la página en la figura 9-55). No hay otra presión aplicada dis-

tinta a la presión hidrostática debida a la gravedad. Este flujo se llama **flujo de Couette**. Calcule los campos de velocidad y presión y estime la fuerza de corte por unidad de área que actúa sobre la placa inferior.

SOLUCIÓN Deben calcularse los campos de velocidad y de presión para una geometría dada y un conjunto de condiciones de frontera, y luego estimar la fuerza de corte por unidad de área que actúa sobre la placa inferior.
Hipótesis **1** Las placas son infinitas en x y z. **2** El flujo es estacionario; es decir, $\partial/\partial t$ de cualquier variable es cero. **3** Éste es un flujo paralelo a las placas (se supone que la componente y de la velocidad v es cero). **4** El fluido es incompresible y newtoniano con propiedades constantes y el flujo es laminar. **5** La presión P = constante respecto a x. En otras palabras, no existe gradiente de presión aplicado que empuje al flujo en la dirección x; el flujo se establece a sí mismo debido a esfuerzos viscosos que se provocan por el movimiento de la placa superior. **6** El campo de velocidad es meramente bidimensional, lo que aquí significa que $w = 0$ y $\partial/\partial z$ de cualquiera componente de velocidad es cero. **7** La gravedad actúa en la dirección z negativa (hacia el plano de la página en la figura 9-55). Esto se expresa matemáticamente como $\vec{g} = -g\vec{k}$, o $g_x = g_y = 0$ y $g_z = -g$.
Análisis Para obtener los campos de velocidad y de presión se sigue paso a paso el procedimiento subrayado en la figura 9-50.

Paso 1 *Establezca el problema y la geometría*. Véase la figura 9-55.

Paso 2 *Haga una lista de las suposiciones y las condiciones de frontera*. Se han numerado y mencionado siete suposiciones. Las condiciones de frontera vienen de imponer la condición de no-deslizamiento: (1) En la placa inferior ($y = 0$), $u = v = w = 0$. (2) En la placa superior ($y = h$), $u = V$, $v = 0$ y $w = 0$.

V V h y x $x = x_1$ $x = x_2$

FIGURA 9-56
Una región *totalmente desarrollada* de un campo de flujo es una región donde el perfil de velocidad no cambia con la distancia corriente abajo. Los flujos totalmente desarrollados se encuentran en grandes canales y tuberías rectos. Aquí se muestra flujo de Couette totalmente desarrollado: el perfil de velocidad en x_2 es idéntico al de x_1.

Paso 3 *Simplifique las ecuaciones diferenciales*. Se comienza con la ecuación de continuidad de flujo incompresible en coordenadas cartesianas, ecuación 9-61*a*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}}_{\text{suposición 3}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{\text{suposición 6}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

La ecuación 1 indica que u no es función de x. En otras palabras, no importa dónde se coloca el origen: el flujo es el mismo en cualquier posición x. Con frecuencia se usa la expresión **totalmente desarrollado** para describir esta situación (Fig. 9-56). Esto también puede obtenerse directamente a partir de la suposición 1, que señala que no hay nada especial en torno de alguna posición x porque las placas son infinitas en longitud. Más aún, dado que u no es función del tiempo (suposición 2) o z (suposición 6), se concluye que u es cuando mucho una función de y:

$$\textit{Resultado de continuidad:} \qquad u = u(y) \text{ solamente} \qquad \textbf{(2)}$$

Ahora se simplifica la ecuación de cantidad de movimiento x (Ec. 9-61*b*) tanto como sea posible. Una buena práctica es hacer una lista de la razón para cruzar un término, como se hace a continuación:

$$\rho\Bigg(\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{\text{suposición 2}} + \underbrace{u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{\text{continuidad}} + \underbrace{v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}}_{\text{suposición 3}} + \underbrace{w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}}_{\text{suposición 6}}\Bigg) = \underbrace{-\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}}}_{\text{suposición 5}} + \underbrace{\cancel{\rho g_x}}_{\text{suposición 7}}$$

$$+ \mu\Bigg(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}_{\text{continuidad}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}}_{\text{suposición 6}}\Bigg) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Note que la aceleración material (lado izquierdo de la ecuación 3) es cero, lo que implica que las partículas de fluido no aceleran en absoluto en este campo de flujo, ni por aceleración local (no-estacionaria) ni por aceleración convectiva. Dado que los términos de aceleración convectiva hacen que la ecuación de Navier-Stokes sea no-lineal, esto simplifica enormemente el problema. De hecho, todos los otros términos en la ecuación 3 desaparecieron, excepto por un solo término viscoso, que entonces debe ser por sí mismo igual a cero. También note que se cambió de una derivada parcial ($\partial/\partial y$) a una derivada total (d/dy) en la ecuación 3 como resultado directo de la ecuación 2. Aquí no se muestran los detalles, pero se puede mostrar en forma similar que cada término, excepto el término de presión en la componente y de la ecuación de la cantidad de movimiento (Ec. 9-61*c*) va a cero, lo que fuerza a que el término solo también sea cero:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

En otras palabras, P no es función de y. Dado que P tampoco es función del tiempo (suposición 2) o x (suposición 5), P es cuando mucho una función de z:

Resultado de la cantidad de movimiento y: $$P = P(z) \text{ sólo} \tag{5}$$

Para terminar, por la suposición 6, la componente z de la ecuación de Navier-Stokes (Ec. 9-61*d*) se simplifica a:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{6}$$

donde se usó la ecuación 5 para convertir una derivada parcial a una derivada total.

Paso 4 *Resuelva las ecuaciones diferenciales.* La componente de las ecuaciones de continuidad y la cantidad de movimiento ya se "resolvieron", lo que resulta en las ecuaciones 2 y 5, respectivamente. La ecuación 3 (la componente x de la ecuación de cantidad de movimiento) se integra dos veces para obtener:

$$u = C_1 y + C_2 \tag{7}$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. La ecuación 6 (cantidad de movimiento z) se integra una vez, lo que resulta en:

$$P = -\rho g z + C_3 \tag{8}$$

Paso 5 *Aplique condiciones de frontera.* Se comienza con la ecuación 8. Dado que no se especificaron condiciones de frontera para presión, C_3 puede permanecer como constante arbitraria (recuerde que, para flujo incompresible, la presión absoluta se puede especificar sólo si P se conoce en alguna parte en el flujo). Por ejemplo, si se hace $P = P_0$ en $z = 0$, entonces $C_3 = P_0$ y la ecuación 8 se convierte en:

Solución final para campo de presión: $$\mathbf{P = P_0 - \rho g z} \tag{9}$$

El lector alerta notará que la ecuación 9 representa una **distribución de presión hidrostática** simple (la presión disminuye linealmente conforme z aumenta). Se llega a la conclusión que, al menos para este problema, *la presión hidrostática actúa independientemente del flujo*. De manera más general, se hace el siguiente enunciado (véase también la figura 9-57):

Para campos de flujo incompresible sin superficies libres, la presión hidrostática no contribuye a la dinámica del campo de flujo.

De hecho, en el capítulo 10 se muestra cómo la presión hidrostática se puede *remover* de las ecuaciones de movimiento mediante el uso de una presión modificada.

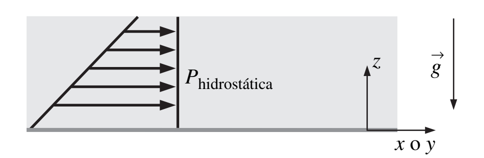


FIGURA 9-57
Para campos de flujo incompresible *sin superficies libres*, la presión hidrostática no contribuye a la dinámica del campo de flujo.

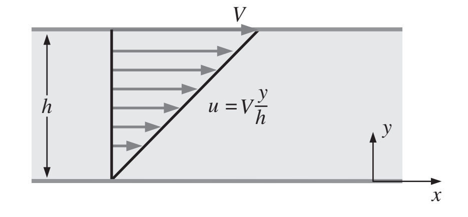


FIGURA 9-58
Perfil de velocidad lineal del ejemplo 9-15: flujo de Couette entre placas paralelas.

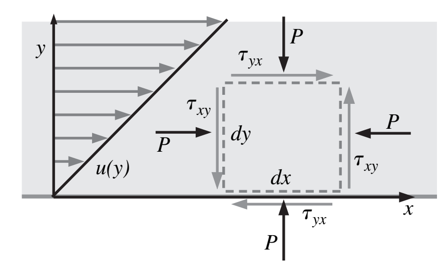


FIGURA 9-59
Esfuerzos que actúan sobre un elemento de fluido rectangular diferencial bidimensional, cuya cara inferior está en contacto con la placa inferior del ejemplo 9-15.

A continuación se aplican las condiciones de frontera (1) y (2) del paso 2 para obtener las constantes C_1 y C_2:

Condición de frontera (1): $u = C_1 \times 0 + C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$

y

Condición de frontera (2): $u = C_1 \times h + 0 = V \quad \rightarrow \quad C_1 = V/h$

Para finalizar, la ecuación 7 se convierte en:

Resultado final para campo de velocidad: $$\boldsymbol{u = V\frac{y}{h}} \qquad \textbf{(10)}$$

El campo de velocidad revela un perfil de velocidad lineal simple de $u = 0$ en la placa inferior a $u = V$ en la placa superior, como se indica en la ecuación 9-58.

Paso 6 *Verifique los resultados.* Con las ecuaciones 9 y 10 puede verificarse que se satisfagan todas las ecuaciones diferenciales y condiciones de frontera.

Para calcular la fuerza de corte por unidad de área que actúa sobre la placa inferior, se considera un elemento de fluido rectangular cuya cara inferior está en contacto con la placa inferior (Fig. 9-59). Se muestran los esfuerzos viscosos matemáticamente positivos. En este caso, dichos esfuerzos están en la dirección apropiada dado que el fluido sobre el elemento diferencial lo jala hacia la derecha, mientras que la pared debajo del elemento lo jala hacia la izquierda. A partir de la ecuación 9-56 se escriben las componentes del tensor de esfuerzo viscoso:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu\frac{V}{h} & 0 \\ \mu\frac{V}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(11)}$$

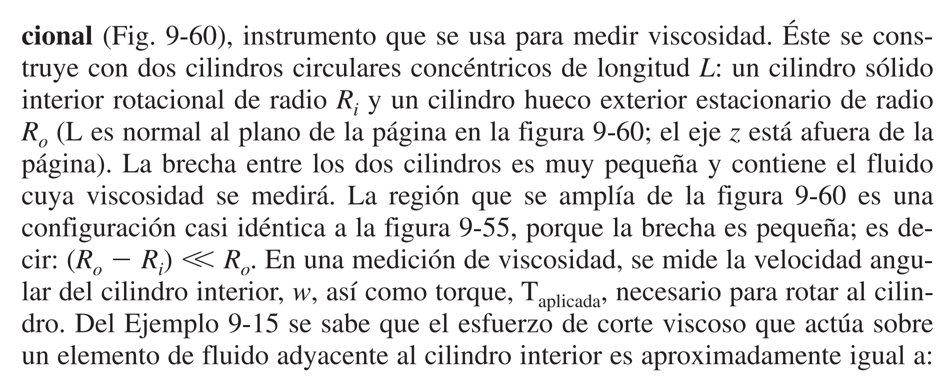
Puesto que, por definición, las dimensiones de los esfuerzos son fuerza por unidad de área, la fuerza por unidad de área que actúa sobre la cara inferior del elemento de fluido es igual a $\tau_{yx} = \mu V/h$ y actúa en la dirección x negativa, como se indica. La fuerza de corte por unidad de área sobre la *pared* es igual y opuesta a ésta (tercera Ley de Newton); en consecuencia:

Fuerza de corte por unidad de área que actúa sobre la pared: $$\boldsymbol{\frac{\vec{F}}{A} = \mu\frac{V}{h}\vec{i}} \qquad \textbf{(12)}$$

La dirección de esta fuerza concuerda con la intuición; es decir, el fluido intenta jalar la pared inferior hacia la derecha, debido a efectos viscosos (fricción).

Discusión La componente z de la ecuación de cantidad de movimiento lineal está *desacoplado* del resto de las ecuaciones; esto explica por qué se obtiene una distribución de presión hidrostática en la dirección z, aun cuando el fluido no sea estático, sino que está en movimiento. La ecuación 11 revela que el tensor de esfuerzo viscoso es constante en *todas partes* en el campo de flujo, no sólo en la pared inferior (note que ninguna de las componentes de τ_{ij} es una función de la posición).

El lector puede preguntarse acerca de la utilidad de los resultados finales del ejemplo 9-15. Después de todo, ¿cuándo se encuentra con dos placas paralelas infinitas, una de las cuales está en movimiento? En realidad, *existen* varios flujos prácticos para los que la solución del flujo de Couette es una muy buena aproximación. Uno de estos flujos ocurre en el interior de un **viscómetro rota-**



cional (Fig. 9-60), instrumento que se usa para medir viscosidad. Éste se construye con dos cilindros circulares concéntricos de longitud L: un cilindro sólido interior rotacional de radio R_i y un cilindro hueco exterior estacionario de radio R_o (L es normal al plano de la página en la figura 9-60; el eje z está afuera de la página). La brecha entre los dos cilindros es muy pequeña y contiene el fluido cuya viscosidad se medirá. La región que se amplía de la figura 9-60 es una configuración casi idéntica a la figura 9-55, porque la brecha es pequeña; es decir: $(R_o - R_i) \ll R_o$. En una medición de viscosidad, se mide la velocidad angular del cilindro interior, w, así como torque, T_{aplicada}, necesario para rotar al cilindro. Del Ejemplo 9-15 se sabe que el esfuerzo de corte viscoso que actúa sobre un elemento de fluido adyacente al cilindro interior es aproximadamente igual a:

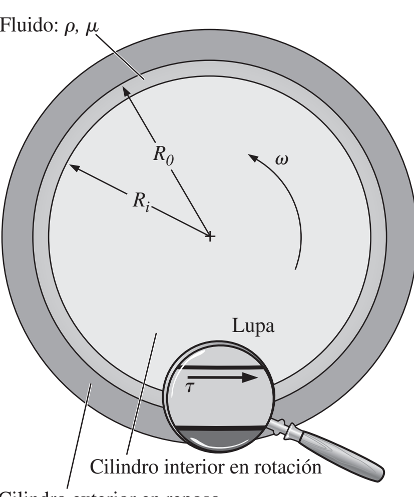


FIGURA 9-60
Viscómetro rotacional; el cilindro interior rota a velocidad angular ω, y se aplica un torque T_{aplicada}, a partir del cual se calcula la viscosidad del fluido.

$$\tau = \tau_{yx} \cong \mu \frac{V}{R_o - R_i} = \mu \frac{\omega R_i}{R_o - R_i} \tag{9-69}$$

donde la velocidad V de la placa superior móvil en la figura 9-55 se sustituye con la velocidad en sentido contrario a las manecillas del reloj ωR_i de la pared rotacional del cilindro interior. En la región que se amplifica en el fondo de la figura 9-60, τ actúa hacia la derecha sobre el elemento de fluido adyacente a la pared del cilindro interior; por lo tanto, la fuerza por unidad de área que actúa sobre el cilindro interior en esta posición actúa hacia la izquierda con una magnitud dada por la ecuación 9-69. El torque total en *sentido de las manecillas del reloj* que actúa sobre la pared del cilindro interior debido a la viscosidad del fluido es, por lo tanto, igual a este esfuerzo de corte por el área de la pared por el brazo de palanca:

$$T_{\text{viscoso}} = \tau A R_i \cong \mu \frac{\omega R_i}{R_o - R_i}\left(2\pi R_i L\right) R_i \tag{9-70}$$

En condiciones estacionarias, el torque en sentido de las manecillas del reloj T_{viscosa} se equilibra con el torque aplicado en sentido contrario a las manecillas del reloj T_{aplicada}. Cuando se igualan éstas y se resuelve la ecuación 9-70 para la viscosidad del fluido se obtiene:

Viscosidad del fluido:
$$\mu = T_{\text{aplicada}} \frac{(R_o - R_i)}{2\pi\omega R_i^3 L}$$

Puede realizarse un análisis similar sobre un cojinete de resbalamiento sin carga, en el cual fluye un aceite viscoso en la pequeña brecha entre el eje rotatorio interior y la carcasa exterior en reposo (cuando el cojinete se carga, los cilindros interior y exterior dejan de ser concéntricos y se necesita un análisis más profundo).

EJEMPLO 9-16 Flujo de Couette con un gradiente de presión aplicado

Considere la misma geometría del ejemplo 9-15, pero, en vez de que la presión sea constante respecto a x, habrá un gradiente de presión aplicado en la dirección x (Fig. 9-61). Específicamente, el gradiente de presión en la dirección x, $\partial P/\partial x$, será algún valor constante dado por:

Gradiente de presión aplicado:
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} = \text{constante} \tag{1}$$

donde x_1 y x_2 son dos posiciones arbitrarias a lo largo del eje x, y P_1 y P_2 son las presiones en estas posiciones. Todo lo demás es igual que para el Ejemplo 9-15. *a*) Calcule los campos de velocidad y presión. *b*) Grafique una familia de perfiles de velocidad en forma adimensional.

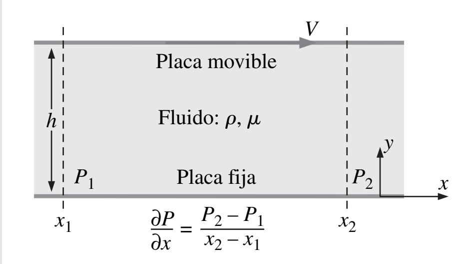


FIGURA 9-61
Geometría del ejemplo 9-16: flujo viscoso entre dos placas infinitas con un gradiente de presión constante aplicado $\partial P/\partial x$; la placa superior se mueve y la placa inferior está en reposo.

SOLUCIÓN Debe calcular los campos de velocidad y de presión para el flujo que se bosqueja en la figura 9-61 y graficar una familia de perfiles de velocidad en forma adimensional.

Hipótesis Las suposiciones son idénticas a las del ejemplo 9-15, excepto la suposición 5, que se sustituye por 5. Se aplica un gradiente de presión constante en la dirección *x*, tal que la presión cambia linealmente respecto a *x* de acuerdo con la ecuación 1.

Análisis *a*) Se sigue el mismo procedimiento que en el ejemplo 9-15. Gran parte de las transformaciones algebraicas es idéntica, de modo que, para ahorrar espacio, sólo se comentan las diferencias.

Paso 1 Vea la figura 9-61.

Paso 2 Igual que el Ejemplo 9-15, excepto por la suposición 5.

Paso 3 La ecuación de continuidad se simplifica en la misma forma que en el ejemplo 9-15:

Resultado de continuidad: $$u = u(y) \text{ solamente} \qquad (2)$$

La ecuación de cantidad de movimiento *x* se simplifica en la misma forma que en el ejemplo 9-15, excepto que permanece el término gradiente de presión. El resultado es:

Resultado de cantidad de movimiento x: $$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (3)$$

Del mismo modo, las componentes *y* y *z* de las ecuaciones de cantidad de movimiento se simplifican como:

Resultado de la componente y *de la ecuación de cantidad de movimiento*:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad (4)$$

y

Resultado de la componente z *de la ecuación de cantidad de movimiento*:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \qquad (5)$$

No puede convertirse una derivada parcial a una derivada total en la ecuación 5, porque, en este problema, *P* es función tanto de *x* como de *z*, a diferencia del ejemplo 9-15, donde *P* fue una función sólo de *z*.

Paso 4 Integre dos veces la ecuación 3 (la componente *x* de la ecuación de cantidad de movimiento) y note que $\partial P/\partial x$ es una constante:

Integración de la componente x *de la ecuación de cantidad de movimiento*:

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}y^2 + C_1 y + C_2 \qquad (6)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. La ecuación 5 (la componente *z* de la ecuación de cantidad de movimiento) se integra una vez, lo que resulta en:

Integración de la componente z de la ecuación de cantidad de movimiento:

$$P = -\rho g z + f(x) \qquad (7)$$

Note que, puesto que *P* ahora es una función tanto de *x* como de *z*, en la ecuación 7 se agrega una función de *x* en lugar de una constante de integración. Ésta es una integración con respecto a la variable *z* y se debe tener cuidado cuando se realizan integracionescon respecto a una variable (Fig. 9-62).

Paso 5 A partir de la ecuación 7 se ve que la presión varía hidrostáticamente en la dirección *z*, y se especificó un cambio lineal en la presión en la dirección *x*. Por lo tanto, la función $f(x)$ debe ser igual a una constante más $\partial P/\partial x$ por *x*. Si se hace $P = P_0$ a lo largo de la línea $x = 0$, $z = 0$ (el eje *y*), la ecuación 7 se convierte en:

Resultado final del campo de presión: $$\boldsymbol{P = P_0 + \frac{\partial P}{\partial x}x - \rho g z} \qquad (8)$$

¡PRECAUCIÓN!
CUANDO REALICE UNA INTEGRACIÓN CON RESPECTO A UNA VARIABLE, AGREGUE UNA FUNCIÓN DE LA(S) OTRA(S) VARIABLE(S)

FIGURA 9-62
Advertencia acerca de la integración con respecto a una variable.

A continuación se aplican las condiciones de frontera de velocidad (1) y (2) del paso 2 del Ejemplo 9-15 para obtener las constantes C_1 y C_2.

Condición de frontera (1):

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \times 0 + C_1 \times 0 + C_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_2 = 0$$

y

Condición de frontera (2):

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} h^2 + C_1 \times h + 0 = V \qquad \rightarrow \qquad C_1 = \frac{V}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} h$$

Para finalizar, la ecuación 6 se convierte en:

$$\boldsymbol{u = \frac{Vy}{h} + \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2 - hy)} \qquad \textbf{(9)}$$

La ecuación 9 indica que el campo de velocidad consiste de la superposición de dos partes: un perfil de velocidad lineal desde $u = 0$ en la placa inferior hasta $u = V$ en la placa superior, y una distribución parabólica que depende de la magnitud del gradiente de presión que se aplicó. Si el gradiente de presión es cero, la porción parabólica de la ecuación 9 desaparece y el perfil es lineal, tal como en el Ejemplo 9-15; esto se bosqueja como la línea a rayas en la figura 9-63. Si el gradiente de presión es negativo (la presión disminuye en la dirección x, lo que provoca que el flujo se empuje de izquierda a derecha), $\partial P/\partial x < 0$ y el perfil de velocidad se parece al que se ilustra en la figura 9-63. Un caso especial es cuando $V = 0$ (placa superior en reposo); la porción lineal de la ecuación 9 desaparece, y el perfil de velocidad es parabólico y simétrico en torno al centro del canal ($y = h/2$); esto se ilustra como la línea punteada en la figura 9-63.

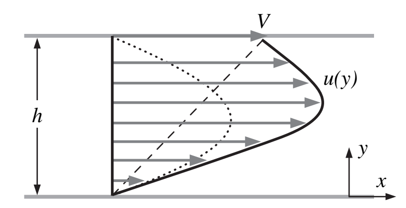


FIGURA 9-63
Perfil de velocidad del ejemplo 9-16: flujo de Couette entre placas paralelas con un gradiente de presión negativa aplicado; la línea a rayas indica el perfil para un gradiente de presión cero, y la línea punteada indica el perfil para un gradiente de presión negativo con la placa superior estacionaria ($V = 0$).

Paso 6 Pueden usarse las ecuaciones 8 y 9 para verificar que se satisfacen todas las ecuaciones diferenciales y condiciones de frontera.

b) Se usa análisis dimensional para generar los grupos adimensionales (grupos π). El problema se establece en términos de la componente de velocidad u como función de y, h, V, μ y $\partial P/\partial x$. Existen seis variables (que incluyen la variable dependiente u) y, puesto que existen tres dimensiones primarias representadas en el problema (masa, longitud y tiempo), se esperan $6 - 3 = 3$ grupos adimensionales. Cuando se escogen h, V y μ como las variables de repetición, se obtiene el siguiente resultado con el uso del método de repetición de variables (los detalles se dejan al lector; éste es un buen repaso del material del capítulo 7):

Resultado del análisis dimensional:
$$\frac{u}{V} = f\left(\frac{y}{h}, \frac{h^2}{\mu V}\frac{\partial P}{\partial x}\right) \qquad \textbf{(10)}$$

Cuando se usan estos tres grupos adimensionales, la ecuación 9 se reescribe como:

Forma adimensional del campo de velocidad:
$$\boldsymbol{u^* = y^* + \frac{1}{2}P^*y^*(y^* - 1)} \qquad \textbf{(11)}$$

donde los parámetros adimensionales son:

$$u^* = \frac{u}{V} \qquad y^* = \frac{y}{h} \qquad P^* = \frac{h^2}{\mu V}\frac{\partial P}{\partial x}$$

En la figura 9-64, u^* se grafica como función de y^* para diversos valores de P^*, con la ecuación 11.

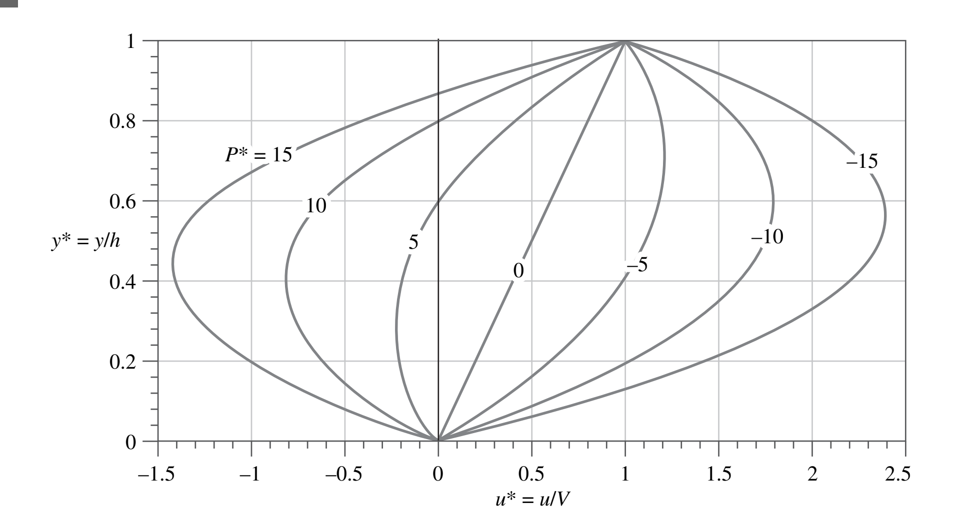


FIGURA 9-64
Perfiles de velocidad adimensionalizada para flujo de Couette con un gradiente de presión aplicado; los perfiles se muestran para diversos valores de gradiente de presión adimensional.

Discusión Cuando el resultado es adimensional, se observa que la ecuación 11 representa una *familia* de perfiles de velocidad. También se ve que cuando el gradiente de presión es *positivo* (el flujo se empujará de derecha a izquierda) y de magnitud suficiente, se puede tener *flujo inverso* en la porción inferior del canal. Para todos los casos, las condiciones de frontera se reducen a $u^* = 0$ en $y^* = 0$ y $u^* = 1$ en $y^* = 1$. Si existe un gradiente de presión, pero ambas paredes están en reposo, el flujo se llama flujo en canal bidimensional o **flujo de Poiseuille plano** (Fig. 9-65). Sin embargo, note que la mayoría de los autores reservan el nombre de flujo de Poiseuille para flujo en tuberías totalmente desarrollado, la analogía axisimétrica de flujo en canal bidimensional (véase el Ejemplo 9-18).

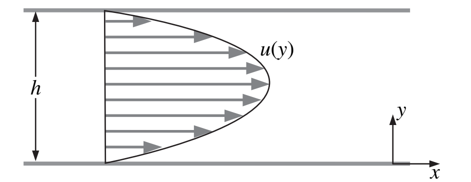


FIGURA 9-65
Perfil de velocidad para flujo en canal bidimensional totalmente desarrollado (flujo de Poiseuille plano).

EJEMPLO 9-17 **Película de aceite que se desliza por una pared vertical debido a la gravedad**

Considere el flujo laminar paralelo a la placa incompresible y estacionario de una película de aceite que se desliza lentamente por una pared vertical infinita (Fig. 9-66). El grosor de la película de aceite es *h* y la gravedad actúa en la dirección *z* negativa (hacia abajo en la figura 9-66). No hay presión aplicada (forzada) que dirija el flujo: la película se desliza debido a la gravedad simplemente. Calcule los campos de velocidad y de presión en la película de aceite y dibuje el perfil de velocidad normalizado. Puede despreciar los cambios en la presión hidrostática del aire circundante.

SOLUCIÓN Para una geometría y conjunto de condiciones de frontera dados, deben calcularse los campos de velocidad y de presión y graficar el perfil de velocidad.

Hipótesis **1** La pared es infinita en el plano *yz* (el eje *y* está dirigido hacia la página para un sistema coordenado de mano derecha). **2** El flujo es estacionario (todas las derivadas parciales respecto al tiempo son cero). **3** El flujo es paralelo a la placa (la componente *x* de la velocidad, *u*, es cero en todas partes). **4** El fluido es incompresible y newtoniano con propiedades constantes, y el flujo es laminar. **5** La presión $P = P_{atm}$ = constante en la superficie libre. En otras palabras, no hay gradiente de presión aplicado que empuje al flujo; el flujo se establece a sí mismo debido a un equilibrio entre fuerzas gravitacionales y fuerzas viscosas. Además, dado que no hay fuerza de gravedad en la dirección horizontal, $P = P_{atm}$ *en todas partes*. **6** El campo de velocidad es simplemente bidimensional, lo que implica que la componente de velocidad $v = 0$ y todas las derivadas parciales

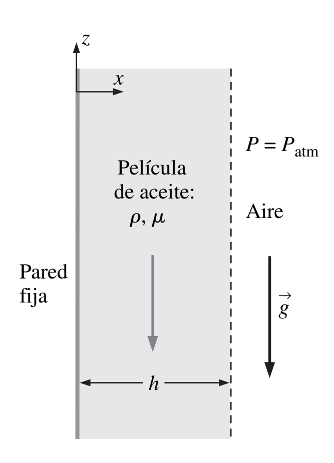


FIGURA 9-66
Geometría del ejemplo 9-17: una película viscosa de aceite se desliza a través de una pared vertical debido al efecto de la gravedad.

respecto a y sean cero. **7** La gravedad actúa en la dirección z negativa. Esto se expresa matemáticamente como $\vec{g} = -g\vec{k}$, o $g_x = g_y = 0$ y $g_z = -g$.

Análisis Los campos de velocidad y presión se obtienen paso a paso mediante el siguiente procedimiento para soluciones diferenciales de flujo de fluido. (Fig. 9-50).

Paso 1 *Configure el problema y la geometría*. Véase la figura 9-66.

Paso 2 *Haga una lista de suposiciones y condiciones de frontera*. Se tiene una lista con siete suposiciones. Las condiciones de frontera son: 1) No hay deslizamiento en la pared; en $x = 0$, $u = v = w = 0$. 2) En la superficie libre ($x = h$) existe corte despreciable (Ec. 9-68), que para una superficie libre vertical en este sistema coordenado significa $\partial w/\partial x = 0$ en $x = h$.

Paso 3 *Escriba y simplifique las ecuaciones diferenciales*. Comience con la ecuación de continuidad incompresible en coordenadas cartesianas:

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{\text{suposición 3}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}}_{\text{suposición 6}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

La ecuación 1 establece que w no es función de z; es decir, no importa dónde se coloque el origen, el flujo es el mismo en *cualquier* posición z. En otras palabras, el flujo está *totalmente desarrollado*. Dado que w no es función del tiempo (suposición 2), z (Ec. 1) o y (suposición 6), se llega a la conclusión que w es, cuando mucho, una función de x:

Resultado de continuidad: $$w = w(x) \text{ sólo} \tag{2}$$

Ahora se simplifica cada componente de la ecuación de Navier-Stokes tanto como sea posible. Dado que $u = v = 0$ en todas partes, y la gravedad no actúa en las direcciones x o y, las ecuaciones de cantidad de movimiento x y y se satisfacen exactamente (de hecho, todos los términos son cero en ambas ecuaciones). La ecuación de cantidad de movimiento z se reduce a:

$$\rho\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}}_{\text{suposición 2}} + \underbrace{u\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}}_{\text{suposición 3}} + \underbrace{v\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}}}_{\text{suposición 6}} + \underbrace{w\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{\text{continuidad}}\right) = \underbrace{-\cancel{\frac{\partial P}{\partial z}}}_{\text{suposición 5}} + \underbrace{\rho g_z}_{-\rho g}$$

$$+ \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}}_{\text{suposición 6}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}}_{\text{continuidad}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\rho g}{\mu} \tag{3}$$

La aceleración material (lado izquierdo de la ecuación 3) es cero, lo que implica que las partículas de fluido no aceleran en este campo de flujo, ni por aceleración local ni por aceleración convectiva. Dado que los términos de aceleración convectiva hacen no-lineal la ecuación de Navier-Stokes, esto simplifica considerablemente el problema. Se cambió de una derivada parcial ($\partial/\partial x$) a una derivada total (d/dx) en la ecuación 3 como resultado directo de la ecuación 2, lo que reduce la ecuación diferencial parcial (EDP, PDE por sus siglas en inglés) a una ecuación diferencial ordinaria (EDO, ODE por sus siglas en inglés). Desde luego, las EDO son mucho más sencillas de resolver que las EDP (Fig. 9-67).

Paso 4 *Resuelva las ecuaciones diferenciales*. Ya se "resolvieron" las componentes x y y de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento. La ecuación 3 (cantidad de movimiento z) se integra dos veces para obtener:

$$w = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 + C_1 x + C_2 \tag{4}$$

AVISO
Si $u = u(x)$ sólo, cambie de EDP a EDO:
$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{du}{dx}$$

FIGURA 9-67
En los ejemplos 9-15 y 9-18, las ecuaciones de movimiento se reducen de *ecuaciones diferenciales parciales* a *ecuaciones diferenciales ordinarias*, lo que las hace más sencillas de resolver.

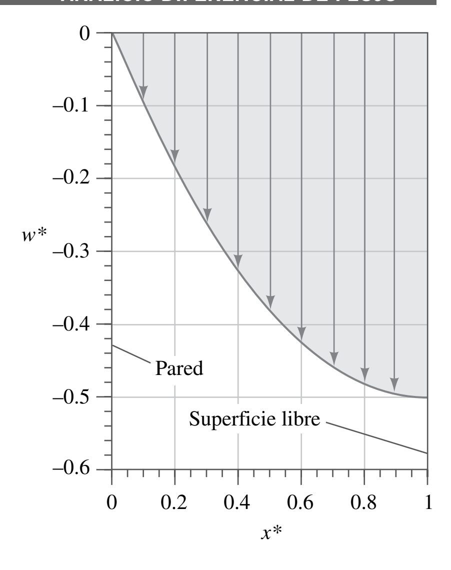


FIGURA 9-68
Perfil de velocidad normalizado del ejemplo 9-17: una película de aceite se desliza por una pared vertical.

Paso 5 *Aplique condiciones de frontera.* Se aplican las condiciones de frontera (1) y (2) del paso 2 para obtener las constantes C_1 y C_2:

$$\textit{Condición de frontera (1):} \quad w = 0 + 0 + C_2 = 0 \qquad C_2 = 0$$

y

$$\textit{Condición de frontera (2):} \quad \left.\frac{dw}{dx}\right)_{x=h} = \frac{\rho g}{\mu} h + C_1 = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{\rho g h}{\mu}$$

Para terminar, la ecuación 4 se convierte en:

$$\textit{Campo de velocidad:} \qquad \boldsymbol{w = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g}{\mu} hx = \frac{\rho g x}{2\mu}(x - 2h)} \qquad \textbf{(5)}$$

Dado que $x < h$ en la película, w es negativa en todas partes, como se esperaba (el flujo es hacia abajo). El campo de presión es trivial; a saber, $\boldsymbol{P = P_{atm}}$ **en todas partes**.

Paso 6 *Verifique los resultados.* Puede verificar que se satisfacen todas las ecuaciones diferenciales y condiciones de frontera.

La ecuación 5 se normaliza por inspección: sea $x^* = x/h$ y $w^* = w\mu/(\rho g h^2)$. La ecuación 5 se convierte en:

$$\textit{Perfil de velocidad normalizado:} \qquad w^* = \frac{x^*}{2}(x^* - 2) \qquad \textbf{(6)}$$

En la figura 9-68 se grafica el campo de velocidad normalizado.

Discusión El perfil de velocidad tiene una gran pendiente cerca de la pared debida a la condición de no-deslizamiento ahí ($w = 0$ en $x = 0$), pero pendiente cero en la superficie libre, donde la condición de frontera es cero esfuerzo de corte ($\partial w/\partial x = 0$ en $x = h$). En la definición de w^* pudo haberse introducido un factor de -2 de modo que w^* sería igual 1 en vez de $-\frac{1}{2}$ en la superficie libre.

El procedimiento de solución que se usó en los ejemplos 9-15 al 9-17 en coordenadas cartesianas, también puede usarse en cualquier otro sistema coordenado. En el Ejemplo 9-18 se presenta el problema clásico de flujo totalmente desarrollado en una tubería redonda, para el que se usan coordenadas cilíndricas.

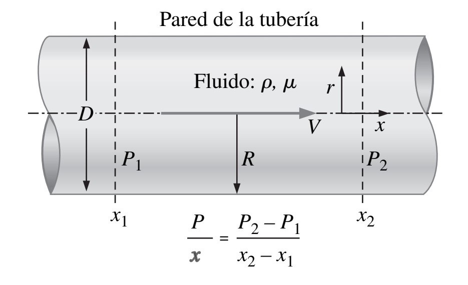


FIGURA 9-69
Geometría del ejemplo 9-18: flujo laminar estacionario en una larga tubería redonda con un gradiente de presión aplicado $\partial P/\partial x$ que empuja el fluido a través de la tubería. El gradiente de presión, de manera usual lo causa una bomba o la fuerza de gravedad.

EJEMPLO 9-18 Flujo totalmente desarrollado en una tubería redonda: flujo de Poiseuille

Considere flujo laminar y estacionario de un fluido incompresible newtoniano en una tubería redonda infinitamente larga de diámetro D o radio $R = D/2$ (Fig. 9-69). Se ignoran los efectos de la gravedad. En la dirección x se aplica un gradiente de presión constante $\partial P/\partial x$:

$$\textit{Gradiente de presión aplicado:} \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} = \text{constante} \qquad \textbf{(1)}$$

donde x_1 y x_2 son dos posiciones arbitrarias a lo largo del eje x, y P_1 y P_2 son las presiones en esas dos posiciones. Note que aquí se adopta un sistema coordenado cilíndrico modificado con x en vez de z para la componente axial, a saber: (r, θ, x) y (u_r, u_θ, u). Derive una expresión para el campo de velocidad adentro de la tubería y estime la fuerza de corte viscosa por unidad de área superficial que actúa sobre la pared de la tubería.

SOLUCIÓN Para flujo adentro de una tubería redonda debe calcularse el campo de velocidad y luego estimar el esfuerzo de corte viscoso que actúa sobre la pared de la tubería.

Hipótesis **1** La tubería es infinitamente larga en la dirección x. **2** El flujo es estacionario (todas las derivadas parciales respecto al tiempo son cero). **3** Éste es un flujo paralelo a las paredes de la tubería (la componente r de velocidad, u_r, es cero). **4** El fluido es incompresible y newtoniano con propiedades constantes, y el flujo es laminar. **5** En la dirección x se aplica un gradiente de presión constante, tal que la presión cambia linealmente respecto a x de acuerdo con la ecuación 1. **6** El campo de velocidad es axisimétrico, sin remolinos, lo que implica que $u_\theta = 0$ y todas las derivadas parciales respecto a θ son cero. **7** Se ignoran los efectos de la gravedad.

Análisis Para obtener el campo de velocidad, se sigue el procedimiento paso a paso que se indica en la figura 9-50.

Paso 1 *Plantee el problema y la geometría*. Véase la figura 9-69.

Paso 2 *Haga una lista de suposiciones y condiciones de frontera*. Se tiene una lista de siete suposiciones. La primera condición de frontera viene de imponer la condición de no-deslizamiento a la pared de la tubería: (1) en $r = R$, $\vec{V} = 0$. La segunda condición de frontera viene del hecho de que la línea central de la tubería es un eje de simetría: (2) en $r = 0$, $du/dr = 0$.

Paso 3 *Escriba y simplifique las ecuaciones diferenciales*. Se comienza con la ecuación de continuidad de flujo incompresible en coordenadas cilíndricas, una versión modificada de la ecuación 9-62a:

$$\underbrace{\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial(r u_r)}{\partial r}}}_{\text{suposición 3}} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta}}}_{\text{suposición 6}} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

La ecuación 2 establece que u no es función de x. En otras palabras, no importa dónde se coloque el origen, el flujo es el mismo en cualquier posición x. Esto también se puede inferir directamente de la suposición 1, que dice que no hay nada especial acerca de alguna posición x porque la tubería es infinita en longitud: el flujo está totalmente desarrollado. Más aún, dado que u no es función del tiempo (suposición 2) o θ (suposición 6), se llega a la conclusión que u es, cuando mucho, función de r:

$$\textit{Resultado de continuidad:} \qquad u = u(r) \text{ solamente} \tag{3}$$

Ahora se simplifica la ecuación de cantidad de movimiento axial (una versión modificada de la ecuación 9-62d) tanto como sea posible:

$$\rho\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{\text{suposición 2}} + \underbrace{\cancel{u_r\frac{\partial u}{\partial r}}}_{\text{suposición 3}} + \underbrace{\cancel{\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}}}_{\text{suposición 6}} + \underbrace{\cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}}}_{\text{continuidad}}\right)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \underbrace{\cancel{\rho g_x}}_{\text{suposición 7}} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \underbrace{\cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}}_{\text{suposición 6}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}_{\text{continuidad}}\right)$$

o

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{4}$$

Como en los ejemplos 9-15 al 9-17, la aceleración material (todo el lado izquierdo de la ecuación de cantidad de movimiento x) es cero, lo que implica

Ecuación de Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\boxed{(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}}\right)=-\vec{\nabla}P+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{V}$$

Término no lineal

FIGURA 9-70
Para soluciones de flujo incompresible en los que los términos convectivos en la ecuación de Navier-Stokes sean cero, la ecuación se vuelve *lineal* porque el término convectivo es el único término no-lineal en la ecuación.

que las partículas de fluido no acelera en absoluto en este campo de flujo y vuelve lineal la ecuación de Navier-Stokes (Fig. 9-70). Los operadores de derivada parcial se sustituyeron por las derivadas u con operadores de derivada total debido a la ecuación 3.

En forma similar, todo término en la componente r de la ecuación de cantidad de movimiento r (Ec. 9-62*b*), excepto el término de gradiente de presión, es cero, lo que fuerza al término a que también sea cero:

Cantidad de movimiento r:
$$\frac{\partial P}{\partial r}=0 \tag{5}$$

En otras palabras, P no es función de r. Dado que P tampoco es función del tiempo (suposición 2) o de θ (suposición 6), P puede ser, cuando mucho, una función de x:

Resultado de la componente r *de la ecuación de cantidad de movimiento*:
$$P=P(x)\text{ sólo} \tag{6}$$

En consecuencia, se puede sustituir el operador de derivada parcial para el gradiente de presión en la ecuación 4 con el operador de derivada total porque P sólo varía con x. Para finalizar, todos los términos de la componente θ de la ecuación de Navier-Stokes (Ec. 9-62*c*) van a cero.

Paso 4 *Resuelva las ecuaciones diferenciales*. Ya se resolvieron las componentes r de la ecuación de continuidad y cantidad de movimiento r, lo que resulta en las ecuaciones 3 y 6, respectivamente. La componente θ de la ecuación de cantidad de movimiento desaparece y por lo tanto queda la ecuación 4 (cantidad de movimiento x). Después de multiplicar ambos lados por r, se integra una vez para obtener:

$$r\frac{du}{dr}=\frac{r^2}{2\mu}\frac{dP}{dx}+C_1 \tag{7}$$

donde C_1 es una constante de integración. Note que aquí el gradiente de presión dP/dx es una constante. Cuando se dividen ambos lados de la ecuación 7 entre r, se integra una segunda vez para obtener:

$$u=\frac{r^2}{4\mu}\frac{dP}{dx}+C_1\ln r+C_2 \tag{8}$$

donde C_2 es una segunda constante de integración.

Paso 5 *Aplique condiciones de frontera*. Primero se aplica la condición de frontera (2) a la ecuación 7:

Condición de frontera (2): $0=0+C_1 \quad\rightarrow\quad C_1=0$

Otra manera de interpretar esta condición de frontera es que u debe permanecer finito en la línea central de la tubería. Esto sólo es posible si la constante C_1 es igual a 0, puesto que ln (0) no está definido en la ecuación 8. Ahora se aplica la condición de frontera (1):

Condición de frontera (1): $u=\frac{R^2}{4\mu}\frac{dP}{dx}+0+C_2=0 \quad\rightarrow\quad C_2=-\frac{R^2}{4\mu}\frac{dP}{dx}$

Para terminar, la ecuación 7 se convierte en:

Velocidad axial:
$$\boldsymbol{u=\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}(r^2-R^2)} \tag{9}$$

Por lo tanto, el perfil de velocidad axial tiene la forma de un paraboloide, como se bosqueja en la figura 9-71.

Paso 6 *Verifique los resultados*. Verifique que se satisfacen todas las ecuaciones diferenciales y condiciones de frontera.

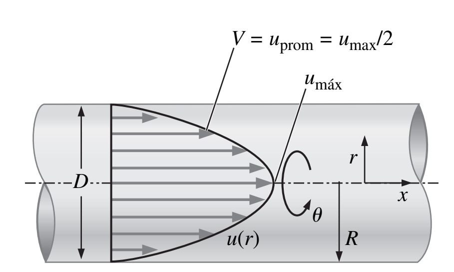


FIGURA 9-71
Perfil de velocidad axial del ejemplo 9-18: flujo laminar estacionario en una larga tubería redonda con un gradiente de presión constante dP/dx aplicado que empuja al fluido a través de la tubería.

También se calculan algunas otras propiedades de flujo laminar en tubería totalmente desarrollado. Por ejemplo, la máxima velocidad axial obviamente ocurre en la línea central de la tubería (Fig. 9-71). Al hacer $r = 0$ en la ecuación 9 se produce:

Máxima velocidad axial:
$$u_{\text{máx}} = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dP}{dx} \tag{10}$$

La razón de flujo volumétrico a través de la tubería se encuentra cuando se integra la ecuación 9 a través de toda el área transversal de la tubería:

$$\dot{V} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} ur\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{4\mu}\frac{dP}{dx}\int_{r=0}^{R}(r^2 - R^2)r\,dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{dP}{dx} \tag{11}$$

Dado que la razón de flujo volumétrico también es igual a la velocidad axial promedio por el área transversal, se puede determinar fácilmente la velocidad axial promedio V:

Velocidad axial promedio:
$$V = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{(-\pi R^4/8\mu)\,(dP/dx)}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu}\frac{dP}{dx} \tag{12}$$

Cuando se comparan las ecuaciones 10 y 12 se observa que, para flujo laminar en tubería completamente desarrollado, la velocidad axial promedio es igual a exactamente la mitad de la máxima velocidad axial.

Para calcular la fuerza de corte viscosa por unidad de área superficial que actúa sobre la pared de la tubería, se considera un elemento de fluido diferencial adyacente a la porción inferior de la pared de la tubería (Fig. 9-72). Se muestran los esfuerzos de presión y los esfuerzos viscosos matemáticamente positivos. A partir de la ecuación 9-63 (modificada para el sistema coordenado), se escribe el tensor esfuerzo viscoso como:

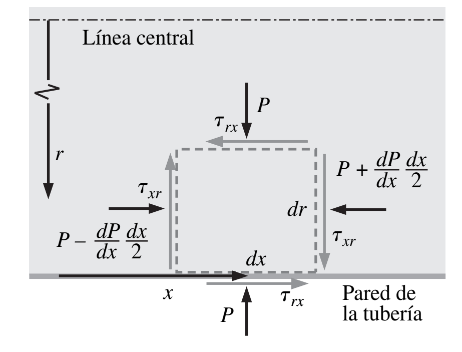


FIGURA 9-72
Presión y esfuerzos de corte viscoso actúan sobre un elemento de fluido diferencial cuya cara inferior está en contacto con la pared de la tubería.

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rx} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta x} \\ \tau_{xr} & \tau_{x\theta} & \tau_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu\dfrac{\partial u}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Se usa la ecuación 9 para u y se hace $r = R$ en la pared de la tubería; la componente τ_{rx} de la ecuación 13 se reduce a:

Esfuerzo de corte viscoso en la pared de la tubería:
$$\tau_{rx} = \mu\frac{du}{dr} = \frac{R}{2}\frac{dP}{dx} \tag{14}$$

Para flujo de izquierda a derecha, dP/dx es negativa, de modo que el esfuerzo de corte viscoso sobre el fondo del elemento de fluido en la pared está en la dirección opuesta a la indicada en la figura 9-72 (esto concuerda con la intuición porque la pared de la tubería ejerce una fuerza retardadora sobre el fluido). La fuerza de corte por unidad de área sobre la pared es igual y opuesta a esta; por lo tanto:

Fuerza de corte viscosa por unidad de área que actúa sobre la pared:

$$\frac{\vec{F}}{A} = -\frac{R}{2}\frac{dP}{dx}\vec{i} \tag{15}$$

La dirección de esta fuerza de nuevo concuerda con la intuición; es decir, el fluido intenta jalar la pared inferior hacia la derecha, debido a la fricción, cuando dP/dx es negativa.

Discusión Dado que $du/dr = 0$ en la línea central de la tubería, ahí $\tau_{rx} = 0$. Se recomienda al lector que obtenga la ecuación 15 mediante el procedimiento de volumen de control y considere su volumen de control como el fluido en la tube-

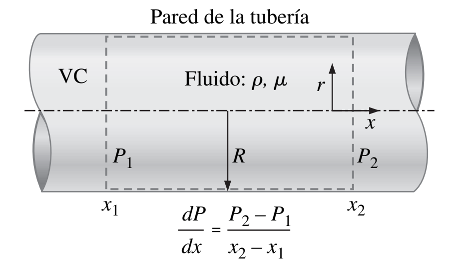


FIGURA 9-73
Volumen de control que se empleó para obtener la ecuación 15 del ejemplo 9-18 mediante otro método .

ría entre cualquiera de dos posiciones x, x_1 y x_2 (Fig. 9-73). Debe obtener la misma respuesta (sugerencia: dado que el flujo está totalmente desarrollado, el perfil de velocidad axial en la posición 1 es idéntico al de la posición 2). Note que, cuando la razón de flujo volumétrico a través de la tubería supera un valor crítico, ocurren inestabilidades en el flujo, y la solución que se presenta aquí ya no es válida. Específicamente, el flujo en la tubería se vuelve *turbulento* en vez de laminar; el flujo en tubería turbulento se trata con más detalle en el capítulo 8. Este problema también se resuelve en el capítulo 8 con otro método.

Hasta el momento, las soluciones de Navier-Stokes han sido para flujo estacionario. Se puede imaginar cuánto más complicadas se deben volver las soluciones si al flujo se le permite ser no estacionario, y el término de derivada respecto al tiempo en la ecuación de Navier-Stokes no desaparece. No obstante, existen ciertos problemas de flujo no-estacionario que pueden resolverse de forma analítica. En el Ejemplo 9-19 se presenta una de ellas.

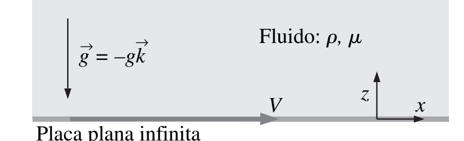


FIGURA 9-74
Geometría y configuración para el ejemplo 9-19; la coordenada y es normal hacia el plano de la página.

EJEMPLO 9-19 Movimiento súbito de una placa plana infinita

Considere un fluido newtoniano viscoso sobre la parte superior de una placa plana infinita que yace en el plano xy en $z = 0$ (Fig. 9-74). El fluido está en reposo hasta el tiempo $t = 0$, cuando la placa comienza a moverse súbitamente con velocidad V en la dirección x. La gravedad actúa en la dirección $-z$. Determine los campos de presión y de velocidad.

SOLUCIÓN Deben calcularse los campos de velocidad y de presión para el caso de fluido sobre la parte superior de una placa plana infinita que comienza a moverse súbitamente.

Hipótesis **1** La pared es infinita en las direcciones x y y; por lo tanto, nada es especial en torno a cualquier posición particular x o y. **2** El flujo es paralelo a la placa en todas partes ($w = 0$). **3** La presión P = constante respecto a x. En otras palabras, no hay gradiente de presión aplicado que empuje el flujo en la dirección x; el flujo ocurre debido a esfuerzos viscosos provocados por la placa en movimiento. **4** El fluido es incompresible y newtoniano con propiedades constantes, y el flujo es laminar. **5** El campo de velocidad es bidimensional en el plano xz; por lo tanto, $v = 0$, y todas las derivadas parciales respecto a y son cero. **6** La gravedad actúa en la dirección $-z$.

Análisis Para obtener los campos de velocidad y de presión, se sigue paso a paso el procedimiento que se muestra en la figura 9-50.

Paso 1 *Plantee el problema y la geometría* (vea la figura 9-74).

Paso 2 *Haga una lista de suposiciones y condiciones de frontera*. Se tiene una lista de seis suposiciones. Las condiciones de frontera son: (1) En $t = 0$, $u = 0$ en todas partes (no hay flujo hasta que la placa empieza a moverse); (2) en $z = 0$, $u = V$ para todos los valores de x y y (condición de no-deslizamiento en la placa); (3) conforme $z \to \infty$, $u = 0$ (lejos de la placa, el efecto de la placa en movimiento no se siente), y (4) en $z = 0$, $P = P_{\text{pared}}$ (la presión en la pared es constante en cualquier posición x o y a lo largo de la placa).

Paso 3 *Escriba y simplifique las ecuaciones diferenciales.* Se comienza con la ecuación de continuidad de flujo incompresible en coordenadas cartesianas (Ec. 9-61a):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}}_{\text{suposición 5}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{\text{suposición 2}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

La ecuación 1 señala que u no es función de x. Más aún, dado que u no es función de y (suposición 5), se llega a la conclusión que u es, cuando mucho, una función de z y t:

Resultado de continuidad: $u = u(z, t)$ solamente **(2)**

La componente y de la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \textbf{(3)}$$

por las suposiciones 5 y 6 (todos los términos con v, la componente *y* de velocidad desaparece y la gravedad no actúa en la dirección *y*). La ecuación 3 simplemente dice que la presión no es función de *y*; por lo tanto:

Resultado de la componente y *de la ecuación de cantidad de movimiento*:

$$P = P(z, t) \text{ solamente} \quad \textbf{(4)}$$

De manera similar, la ecuación de cantidad de movimiento *z* se reduce a:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \textbf{(5)}$$

Ahora se simplifica la ecuación de cantidad de movimiento *x* (Ec. 9-61*b*), tanto como sea posible:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{continuidad}} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{suposición 5}} + \underbrace{w\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{suposición 2}}\right) = \underbrace{-\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{suposición 3}} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{suposición 6}}$$

$$+ \mu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{continuidad}} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{suposición 5}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \rightarrow \rho\frac{\partial u}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \textbf{(6)}$$

Es conveniente combinar la viscosidad dinámica y la densidad en la viscosidad cinemática, que se define como $\nu = \mu/\rho$. La ecuación 6 se reduce a la bien conocida **ecuación de difusión unidimensional** (Fig. 9-75):

Resultado de la componente x *de la ecuación de cantidad de movimiento*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \textbf{(7)}$$

Paso 4 *Resuelva las ecuaciones diferenciales.* Ya se "resolvieron" la continuidad y la cantidad de movimiento, lo que resultó en las ecuaciones 2 y 4, respectivamente. La ecuación 5 (cantidad de movimiento *z*) se integra una vez, lo que resulta en:

$$P = -\rho g z + f(t) \quad \textbf{(8)}$$

donde se ha agregado una función del tiempo en vez de una constante de integración pues *P* es una función de dos variables, *z* y *t* (véase la Ec. 4). La ecuación 7 (la componente *x* de la ecuación de cantidad de movimiento) es una ecuación diferencial parcial lineal cuya solución se obtiene cuando se combinan las dos variables independientes *z* y *t* en una variable independiente. El resultado se llama **solución de semejanza**, cuyos detalles están fuera de los objetivos de este texto. Note que la ecuación de difusión unidimensional ocurre en muchos otros campos de la ingeniería, como la difusión de especies (difusión de masa) y la difusión de calor (conducción); los detalles acerca de la solución pueden encontrarse en libros de esta materia. La solución de la ecuación 7 está estrechamente ligada a la condición de frontera de que la placa empieza a moverse súbitamente, y el resultado es:

Integración de la componente x *de la ecuación de cantidad de movimiento*:

$$u = C_1\left[1 - \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right] \quad \textbf{(9)}$$

donde **erf** (por sus siglas en inglés) en la ecuación 9 es la **función de error** (Çengel, 2003), que se define como:

Función de error: $$\text{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta \quad \textbf{(10)}$$



FIGURA 9-75
La ecuación de difusión unidimensional es *lineal*, pero es una *ecuación diferencial parcial* (EDP, PDE por sus siglas en inglés). Ocurre en muchos campos de la ciencia y la ingeniería.

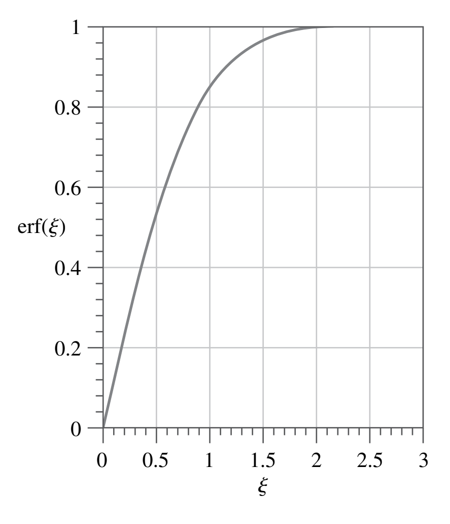


FIGURA 9-76
La función de error varía desde 0 en $\xi = 0$ hasta 1 conforme $\xi \rightarrow \infty$.

La función de error se usa comúnmente en la teoría de probabilidad y se grafica en la figura 9-76. Las tablas de la función de error pueden encontrarse en muchos manuales, algunas calculadoras y hojas de cálculo pueden calcular directamente la función de error. También se proporciona como una función en el Software EES que viene con este libro.

Paso 5 *Aplique condiciones de frontera.* Se empieza con la ecuación 8 para la presión. La condición de frontera (4) requiere que $P = P_{pared}$ en $z = 0$ para todos los tiempos, y la ecuación 8 se convierte en:

Condición de frontera (4): $P = 0 + f(t) = P_{pared} \quad \rightarrow \quad f(t) = P_{pared}$

En otras palabras, la función arbitraria de tiempo, $f(t)$, señala que no es una función del tiempo en absoluto, sino una constante. Por lo tanto:

Resultado final para campo de presión: $$\boldsymbol{P = P_{pared} - \rho g z} \tag{11}$$

que es simplemente presión hidrostática. Se llega a la conclusión que *la presión hidrostática actúa independientemente del flujo*. Ya se aplicaron las condiciones de frontera (1) y (3) del paso 2 con la finalidad de obtener la solución de la componente x de la ecuación de cantidad de movimiento en el paso 4. Dado que erf (0) = 0, la segunda condición de frontera produce:

Condición de frontera (2): $u = C_1(1 - 0) = V \quad \rightarrow \quad C_1 = V$

y la ecuación 9 se convierte en:

Resultado final para campo de velocidad: $$\boldsymbol{u = V\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right]} \tag{12}$$

En la figura 9-77 se grafican varios perfiles de velocidad para el caso específico de agua a temperatura ambiente ($\nu = 1.004 \times 10^{-6}$ m^2/s) con $V = 1.0$ m/s. En $t = 0$, no hay flujo. Conforme el tiempo pasa, el movimiento de la placa se siente cada vez más en el fluido, como se espera. Note cuánto tarda que la difusión viscosa penetre en el fluido: después de 15 minutos de flujo, ¡el efecto de la placa en movimiento no se siente más allá de aproximadamente 10 cm sobre la placa!

Las variables u^* y z^* se definen como:

Variables normalizadas: $u^* = \frac{u}{V}$ y $z^* = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}$

Entonces se reescribe la ecuación 12 en términos de parámetros adimensionales:

Campo de velocidad normalizado: $$\boldsymbol{u^* = 1 - \mathrm{erf}(z^*)} \tag{13}$$

La combinación de unidad menos la función de error ocurre con frecuencia en la ingeniería y se le da el nombre especial de **función de error complementaria** y la abreviatura **erfc** (por sus siglas en inglés). En consecuencia, la ecuación 13 también se puede escribir como:

Forma alternativa del campo de velocidad: $$u^* = \mathrm{erfc}(z^*) \tag{14}$$

¡La belleza de la normalización es que esta única ecuación para u^* como función de z^* es válida para *cualquier* fluido (con viscosidad cinemática ν) sobre una placa que se mueve a *cualquier* velocidad V y en cualquier posición z en el fluido en *cualquier* tiempo t! En la figura 9-78 se bosqueja el perfil de velocidad normalizado de la ecuación 13. Todos los perfiles de la figura 9-77 colapsan hacia el perfil único de la figura 9-78; a tal perfil se le llama **perfil de semejanza**.

Paso 6 *Verifique los resultados.* Se puede verificar que se satisfacen todas las ecuaciones diferenciales y condiciones de frontera.

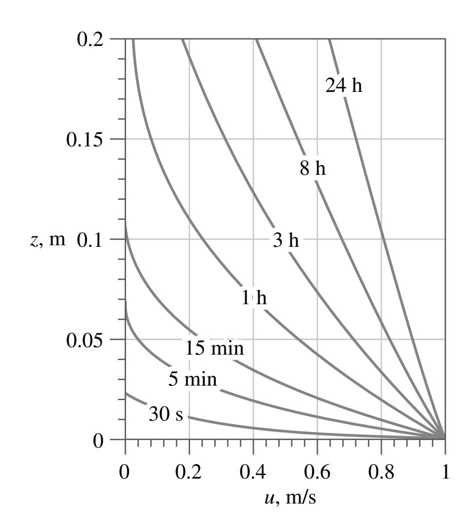


FIGURA 9-77
Perfiles de velocidad del ejemplo 9-19: flujo de agua sobre una placa infinita que empieza a moverse súbitamente; $\nu = 1.004 \times 10^{-6}$ m^2/s y $V = 1.0$ m/s.

Discusión El tiempo necesario para que la cantidad de movimiento se difunda en el fluido parece mucho más largo del que se esperaría con base en la intuición. Esto se debe a que la solución que aquí se presenta es válida sólo para flujo laminar. Se hace evidente que, si la velocidad de la placa es lo suficientemente alta, o si existen vibraciones significativas en la placa o perturbaciones en el fluido, el flujo se volverá turbulento. En un flujo turbulento, los grandes remolinos mezclan el fluido que se mueve rápidamente cerca de la pared con el fluido que se mueve lentamente lejos de la pared. Este proceso de mezcla ocurre de manera más bien rápida, de modo que la difusión turbulenta usualmente es de órdenes de magnitud más rápida que la difusión laminar.

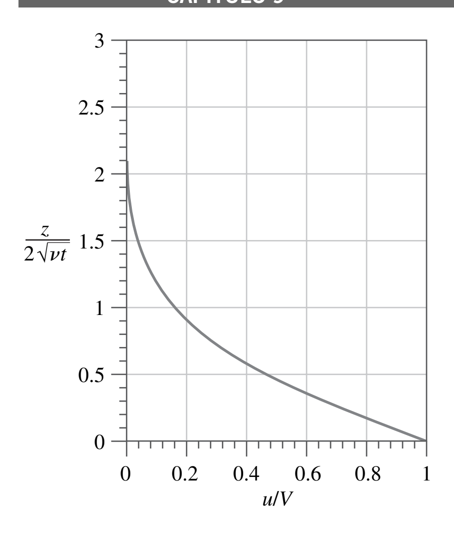


FIGURA 9-78
Perfil de velocidad normalizado del ejemplo 9-19: flujo laminar de un fluido viscoso sobre una placa infinita que empieza a moverse súbitamente.

Los ejemplos 9-15 y 9-19 son para flujo laminar incompresible. El mismo conjunto de ecuaciones diferenciales (la ecuación de continuidad de flujo incompresible y Navier-Stokes) es válido para flujo *turbulento* incompresible. Sin embargo, las soluciones de flujo turbulento son mucho más complicadas porque el flujo contiene remolinos tridimensionales no estacionarios aleatorios que mezclan el fluido. Más aún, dichos remolinos pueden variar en tamaño sobre varios órdenes de magnitud. En un campo de flujo turbulento, ninguno de los términos en las ecuaciones se puede ignorar (excepto el término de gravedad en algunos casos) y por lo tanto la única esperanza de obtener una solución es a través de cálculos numéricos en una computadora. La dinámica de fluidos computacional (CFD, por sus siglas en inglés) se estudia en el capítulo 15.

RESUMEN

En este capítulo se dedujeron las formas diferenciales de conservación de masa (la *ecuación de continuidad*) y conservación de cantidad de movimiento lineal (la *ecuación de Navier-Stokes*). Para flujo incompresible de un fluido newtoniano con propiedades constantes, la ecuación de continuidad es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

y la ecuación de Navier-Stokes es:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V}$$

Para flujo bidimensional incompresible, también se define la función de corriente ψ. En coordenadas cartesianas:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Se demuestra que la diferencia en el valor de ψ de una línea de corriente a otra es igual a la razón de flujo volumétrico por unidad de ancho entre las dos líneas de corriente y que las curvas de ψ constante son líneas de corriente del flujo.

Se ofrecen varios ejemplos que muestran cómo se usan las ecuaciones diferenciales de movimiento de fluido para generar una expresión para el campo de presión para un campo de velocidad dado y para generar expresiones para campos de velocidad y presión para un flujo con geometría y condiciones de frontera específicos. El procedimiento de solución que se aprendió aquí se puede extender a flujos mucho más complicados cuyas soluciones implican el auxilio de una computadora.

La ecuación de Navier-Stokes es la base de la mecánica de fluidos. Aunque se tienen las ecuaciones diferenciales necesarias que describen el flujo de fluido (la ecuación de continuidad y la ecuación de Navier-Stokes), otra cosa es *resolverlas*. Para algunas geometrías simples (usualmente infinitas), las ecuaciones se reducen a ecuaciones que se pueden resolver de manera analítica. Para geometrías más complicadas, las ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales no-lineales, acopladas, de segundo orden que no se pueden resolver con lápiz y papel. Entonces se debe acudir a soluciones *aproximadas* (capítulo 10) o a soluciones *numéricas* (capítulo 15).

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. R. W. Fox y A. T. McDonald. *Introducción to Fluid Mechanics*, 5a. ed. Nueva York: Wiley, 1998.
2. P. M. Gerhart, R. J. Gross y J. I. Hochstein. *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 2a. ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1992.
3. R. J. Heinsohn y J. M. Cimbala. *Indoor Air Quality Engineering*. Nueva York: Marcel-Dekker, 2003.
4. Y. A. Çengel. *Heat Transfer: A Practical Approach*, 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2003.
5. P. K. Kundu. *Fluid Mechanics*. San Diego, CA: Academic Press, 1990.
6. R. L. Panton. *Incompressible Flow*, 2a. ed., Nueva York: Wiley, 1996.
7. M. R. Spiegel. *Vector Analysis, Schaum's Outline Series, Theory and Problems*. Nueva York: McGraw-Hill Trade, 1968.
8. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.

PROBLEMAS*

Problemas generales y de trasfondo matemático

9-1C Explique las diferencias fundamentales entre un *dominio de flujo* y un *volumen de control*.

9-2C ¿Qué significa cuando se dice que dos o más ecuaciones diferenciales están *acopladas*?

9-3C Para un campo de flujo tridimensional no-estacionario incompresible en el que las variaciones de temperatura son insignificantes, ¿cuántas incógnitas existen? Haga una lista de las ecuaciones necesarias para resolver estas incógnitas.

9-4C Para un campo de flujo tridimensional no-estacionario compresible en el que las variaciones de temperatura y densidad *son* significativas, ¿cuántas incógnitas existen? Haga una lista de las ecuaciones necesarias para resolver estas incógnitas. (Sugerencia: suponga que otras propiedades de flujo como viscosidad y conductividad térmica pueden tratarse como constantes.)

9-5C El *teorema de divergencia* se expresa como:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G}\, dV = \oint_A \vec{G} \cdot \vec{n}\, dA$$

donde $\vec{G}$ es un vector, V un volumen y A es el área superficial que encierra y define al volumen. Exprese el teorema de divergencia en palabras.

9-6 Transforme la posición $\vec{x} = (4, 3, -4)$ de coordenadas cartesianas (x, y, z) a coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e incluya unidades. Los valores de $\vec{x}$ están en unidades de metros.

9-7 Una *expansión en serie de Taylor* de la función $f(x)$ en torno a cierta posición x_0 sobre x está dada como:

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} dx + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} dx^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_{x=x_0} dx^3 + \cdots$$

Considere la función $f(x) = \exp(x) = e^x$. Suponga que se conoce el valor de $f(x)$ en $x = x_0$; es decir, se conoce el valor de $f(x_0)$ y se quiere estimar el valor de esta función en cierta posición x cerca de x_0. Genere los primeros cuatro términos de la serie de Taylor para la función dada (hasta un orden dx^3, como en la ecuación anterior). Para $x_0 = 0$ y $dx = -0.1$, use su serie de Taylor truncada para estimar $f(x_0 + dx)$. Compare su resultado con el valor exacto de $e^{-0.1}$. ¿Cuántos dígitos de precisión se logran con la serie de Taylor truncada?

9-8 Sea el vector $\vec{G}$ dado por $\vec{G} = 2xz\vec{i} - \frac{1}{2}x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$. Calcule la divergencia de $\vec{G}$ y simplifique tanto como sea posible. ¿Hay algo especial acerca de su resultado? *Respuesta:* 0

9-9 Sea el vector $\vec{G}$ dado por $\vec{G} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ y sea V el volumen de un cubo de longitud unitaria con su esquina en el origen, acotada por $x = 0$ a 1, $y = 0$ a 1 y $z = 0$ a 1 (Fig. P9-

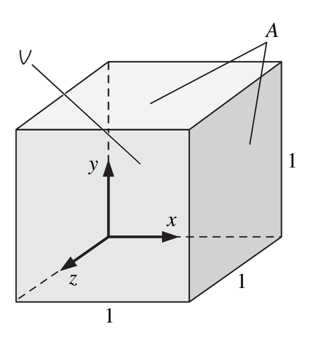


FIGURA P9-9

* Los problemas designados por una "C" son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

9). El área A es el área superficial del cubo. Realice ambas integrales del teorema de divergencia y verifique que son iguales. Muestre el procedimiento.

9-10 La *regla del producto puede aplicarse* a la divergencia del escalar f por el vector $\vec{G}$ como $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{G}) = \vec{G} \cdot \vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$. Expanda ambos lados de esta ecuación en coordenadas cartesianas y verifique que es correcta.

9-11 El producto exterior de dos vectores es un tensor de segundo orden con nueve componentes. En coordenadas cartesianas, es:

$$\vec{F}\vec{G} = \begin{bmatrix} F_xG_x & F_xG_y & F_xG_z \\ F_yG_x & F_yG_y & F_yG_z \\ F_zG_x & F_zG_y & F_zG_z \end{bmatrix}$$

La *regla del producto* que se aplica a la divergencia del producto de dos vectores $\vec{F}$ y $\vec{G}$ se puede escribir como $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F}\vec{G}) = \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G}$. Expanda ambos lados de esta ecuación en coordenadas cartesianas y verifique que es correcta.

9-12 Use la regla del producto del problema 9-11 para demostrar que $\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{V}\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) + \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$.

9-13 En muchas ocasiones es necesario transformar una velocidad de coordenadas cartesianas (x, y, z) a coordenadas cilíndricas (r, θ, z) (o viceversa). Use la figura P9-13 como guía, transforme componentes de velocidad cilíndrica (u_r, u_θ, u_z) en componentes de velocidad cartesianas (u, v, w). (Sugerencia: dado que la componente z de velocidad permanece igual en esta transformación, sólo es necesario considerar el plano xy, como en la figura P9-13.)

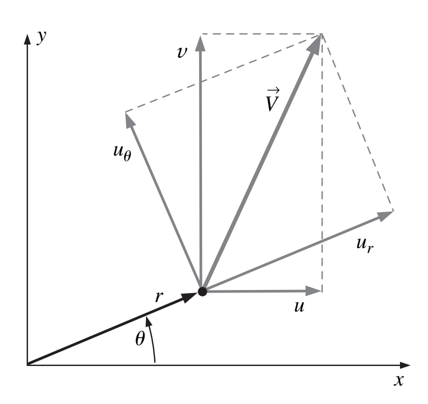


FIGURA P9-13

9-14 Use la figura 9-13 como guía y transforme componentes de velocidad cartesiana (u, v, w) en componentes de velocidad cilíndrica (u_r, u_θ, u_z). (Sugerencia: dado que la componente z de velocidad permanece igual en esta transformación, sólo es necesario considerar el plano xy.)

9-15 Beth estudia un flujo rotacional en un túnel de viento. Ella mide las componentes u y v de velocidad con un anemómetro de alambre caliente. En $x = 0.50$ m y $y = 0.20$ m, $u = 10.3$ m/s y $v = -5.6$ m/s. Por desgracia, el programa de análisis de datos exige entrada en coordenadas cilíndricas (r, θ) y (u_r, u_θ). Ayúdela a transformar sus datos a coordenadas cilíndricas. Específicamente, calcule r, θ, u_r y u_θ en el punto de datos dado.

9-16 Un campo de velocidad estacionario bidimensional incompresible tiene componentes de velocidad cartesiana $u = Cy/(x^2 + y^2)$ y $v = -Cx/(x^2 + y^2)$, donde C es una constante. Transforme estas componentes de velocidad cartesianas en componentes de velocidad cilíndricas u_r y u_θ, y simplifique tanto como sea posible. Debe reconocer este flujo. ¿Qué tipo es éste? *Respuesta:* 0, $-C/r$, torbellino lineal

9-17 Considere un torbellino lineal/sumidero en espiral en el plano xy o $r\theta$ como se ilustra en la figura P9-17. Las componentes de velocidad cilíndricas bidimensionales (u_r, u_θ) para este campo de flujo son $u_r = C/2\pi r$ y $u_\theta = \Gamma/2\pi r$, donde C y Γ son constantes (m es negativo y Γ es positivo). Transforme estas componentes de velocidad cilíndricas bidimensionales en componentes de velocidad cartesianas bidimensionales (u, v). Su respuesta final no debe contener r o θ, sólo x y y. Como comprobación de sus transformaciones algebraicas, calcule V^2 con coordenadas cartesianas y compare con la V^2 que se obtuvo de las componentes de velocidad dadas en componentes cilíndricas.

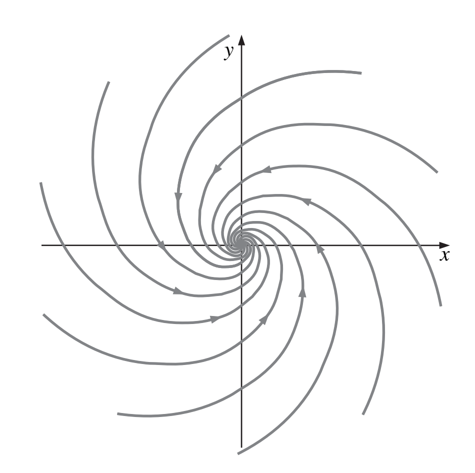


FIGURA P9-17

9-18I Alex mide las componentes de velocidad promediadas en el tiempo en una bomba con un velocímetro láser a base de efecto Doppler (LDV, por sus siglas en inglés). Puesto que los haces de láser están alineados con las direcciones radial y tangencial de la bomba, mide las componentes de velocidad u_r y u_θ. En $r = 6.20$ in y $\theta = 30.0°$, $u_r = 1.37$ ft/s y $u_\theta = 3.82$ ft/s. Por desgracia, el programa de análisis de datos exige entrada en coordenadas cartesianas (x, y) en pies y (u, v) en ft/s. Ayúdelo a transformar sus datos a coordenadas cartesianas. Específicamente, calcule x, y, u y v en el punto de datos dado.

Ecuación de continuidad

9-19C Si un campo de flujo es compresible, ¿qué puede decirse acerca de la *derivada material* de la densidad? ¿Y qué si el campo de flujo es incompresible?

9-20C En este capítulo se deduce la ecuación de continuidad en dos formas: con el uso del teorema de divergencia y cuando se suman las razones de flujo a través de cada cara de un volumen de control infinitesimal. Explique por qué el primero está menos complicado que el último.

9-21 Se diseñará un ducto divergente bidimensional para difundir el aire de alta velocidad que sale de un túnel de viento. El eje x es la línea central del ducto (es simétrico alrededor del eje x) y las paredes superior e inferior se curvarán en tal forma que la velocidad de viento axial u disminuirá aproximadamente de manera lineal desde u_1 = 300 m/s en la sección 1 a u_2 = 100 m/s en la sección 2 (Fig. P9-21). Mientras tanto, la densidad del aire r aumentará aproximadamente de manera lineal desde ρ_1 = 0.85 kg/m^3 en la sección 1 hasta ρ_2 = 1.2 kg/m^3 en la sección 2. El ducto divergente tendrá 2.0 m de largo y 1.60 m de alto en la sección 1 (en la figura 9-21 sólo se bosqueja la mitad superior; la mitad de la altura en la sección 1 es de 0.80 m). *a*) Prediga la componente y de velocidad, $v(x, y)$, en el ducto. *b*) Grafique la forma aproximada del ducto e ignore la fricción en las paredes. *c*) ¿Cuál debe ser la mitad de la altura del ducto en la sección 2?

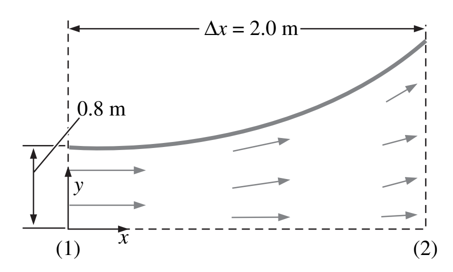


FIGURA P9-21

9-22 Repita el ejemplo 9-1 (gas comprimido en un cilindro por medio de un émbolo), pero sin usar la ecuación de continuidad. En vez de ello, considere la definición fundamental de densidad como masa dividida por volumen. Verifique que es correcta la ecuación 5 del Ejemplo 9-1.

9-23 La forma compresible de la ecuación de continuidad es $(\partial\rho/\partial t) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) = 0$. Expanda esta ecuación, tanto como sea posible, en coordenadas cartesianas (x, y, z) y (u, v, w).

9-24 En el Ejemplo 9-6 se derivó la ecuación para razón de deformación volumétrica, $(1/V)(DV/Dt) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$. Escriba ésta como una ecuación en palabras y explique lo que ocurre al volumen de un elemento de fluido conforme se mueve en torno de un campo de flujo de fluido compresible (Fig. P9-24).

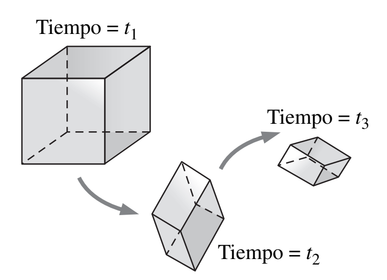


FIGURA P9-24

9-25 Verifique que el torbellino lineal/sumidero en espiral en el plano $r\theta$ del problema 9-17 satisface la ecuación bidimensional de continuidad incompresible. ¿Qué le ocurre a la conservación de la masa en el origen? Explique.

9-26 Verifique que el campo de velocidad bidimensional estacionario incompresible del problema 9-16 satisface la ecuación de continuidad. Establezca en coordenadas cartesianas y muestre todo su trabajo.

9-27 Considere el campo de velocidad bidimensional estacionario dado por $\vec{V} = (u, v) = (1.3 + 2.8x)\vec{i} + (1.5 - 2.8y)\vec{j}$. Verifique que este campo de flujo es incompresible.

9-28 Imagine un flujo bidimensional estacionario incompresible que sea *meramente radial* en el plano xy o el $r\theta$. En otras palabras, la componente de velocidad u_r es distinto de cero, pero u_θ es cero en todas partes (Fig. P9-28). ¿Cuál es la forma más general de la componente de velocidad u_r que no viola la conservación de la masa?

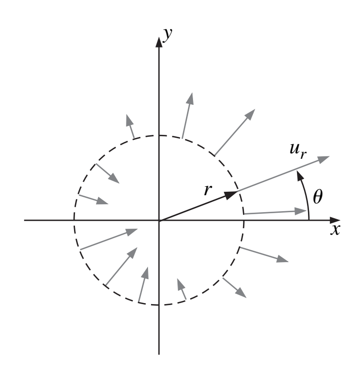


FIGURA P9-28

9-29 Considere el siguiente campo de velocidad tridimensional estacionario en coordenadas cartesianas: $\vec{V} = (u, v, w) = (axy^2 - b)\vec{i} + cy^3\vec{j} + dxy\vec{k}$, donde a, b, c y d son constantes. ¿En qué condiciones es incompresible este flujo? *Respuesta:* $a = -3c$

9-30 La componente de velocidad u de un campo de flujo bidimensional estacionario incompresible es $u = ax + b$, donde a y b son constantes. Se desconoce la componente de velocidad v. Genere una expresión para v como función de x y y.

9-31 Imagine un flujo bidimensional estacionario incompresible que es *circular* en el plano xy o en el $r\theta$. En otras palabras, la componente de velocidad u_q es distinta de cero, pero u_r es cero en todas partes (Fig. P9-31). ¿Cuál es la forma más general de la componente de velocidad u_θ que no viola la conservación de la masa?

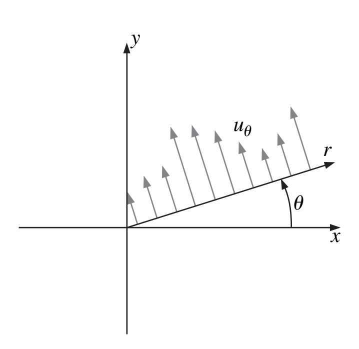


FIGURA P9-31

9-32 La componente de velocidad v de un campo de flujo bidimensional estacionario incompresible es $v = ax + by$, donde a y b son constantes. Se desconoce la componente de velocidad v. Genere una expresión para v como función de x y y. *Respuesta:* $-ay + f(x)$

9-33 La componente de velocidad u de un campo de flujo bidimensional estacionario incomprensible es $u = ax^2 - bxy$, donde a y b son constantes. Se desconoce la componente de velocidad v. Genere una expresión para v como función de x y y.

9-34 Considere flujo estacionario de agua a través de la boquilla de una manguera de jardín axisimétrica (Fig. P9-34). La componente axial de velocidad aumenta linealmente de $u_{z,\text{entrada}}$ a $u_{z,\text{salida}}$, como se ilustra. Entre $z = 0$ y $z = L$, la componente de velocidad axial está dado por $u_z = u_{z,\text{entrada}} + [(u_{z,\text{salida}} - u_{z,\text{entrada}})/L]z$. Genere una expresión para la componente de velocidad *radial* u_r entre $z = 0$ y $z = L$. Se puede ignorar los efectos de fricción sobre las paredes.

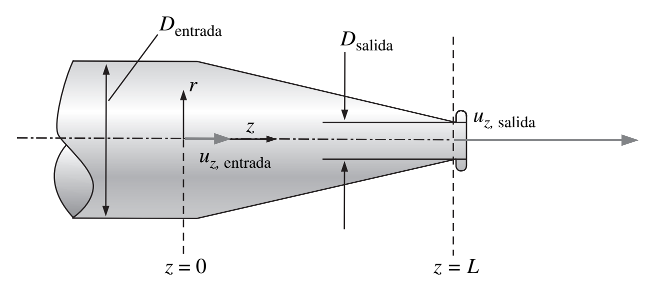


FIGURA P9-34

9-35 Se conocen dos componentes de velocidad de un campo de flujo estacionario incompresible: $u = ax + bxy + cy^2$ y $v = axz - byz^2$, donde a, b y c son constantes. La componente de velocidad w está perdida. Genere una expresión para w como función de x, y y z.

Función de corriente

9-36C ¿Qué es significativo en torno a las curvas de la función de corriente constante? Explique por qué la función de corriente es útil en mecánica de fluidos.

9-37C ¿Qué restricciones o condiciones se imponen sobre la función de corriente ψ de modo que por definición satisfaga exactamente la ecuación de continuidad de flujo bidimensional incompresible? ¿Por qué son necesarias estas restricciones?

9-38C Considere flujo bidimensional en el plano xy. ¿Cuál es la importancia de la diferencia en valor de la función de corriente ψ de una línea de corriente a otra?

9-39 Existen numerosas ocasiones en las que un flujo libre bastante uniforme de velocidad V en la dirección x encuentra un gran cilindro circular de radio a alineado normal al flujo (Fig. P9-39). Los ejemplos incluyen aire que fluye alrededor de la antena de un automóvil, el viento que sopla contra el asta de una bandera o un poste de teléfono, el viento que golpea los cables de electricidad y las corrientes oceánicas que inciden sobre las vigas redondeadas sumergidas que sostienen las plataformas petroleras. En todos estos casos, el flujo en la parte posterior del cilindro se separa y es no estacionario y usualmente turbulento. Sin embargo, el flujo en la mitad frontal del cilindro es mucho más estacionario y predecible. De hecho, excepto por una muy delgada capa de frontera cerca de la superficie del cilindro, el campo de flujo se puede aproximar mediante la siguiente función de corriente bidimensional estacionaria en el plano xy o en el $r\theta$, con el cilindro centrado en el origen: $\psi = V \text{ sen } \theta(r - a^2/r)$. Genere expresiones para las componentes de velocidad radial y tangencial.

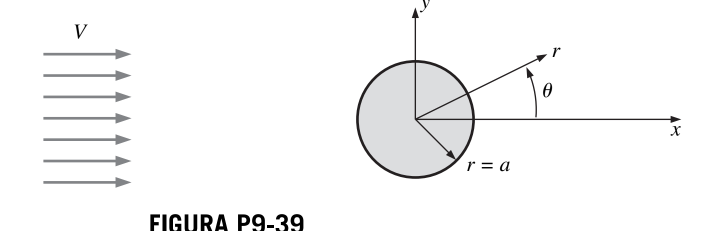


FIGURA P9-39

9-40 Considere *flujo de Couette* totalmente desarrollado: el flujo entre dos placas paralelas infinitas separadas una distancia h, con la placa superior en movimiento y la placa inferior en reposo, como se ilustra en la figura P9-40. El flujo es estacionario, incompresible y bidimensional en el plano xy. El campo de

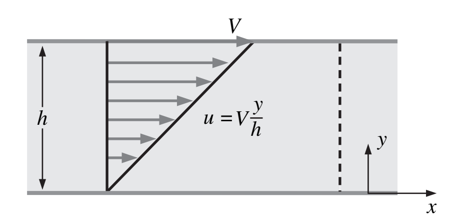


FIGURA P9-40

velocidad está dado por: $\vec{V} = (u, v) = (Vy/h)\vec{i} + 0\vec{j}$. Genere una expresión para la función de corriente ψ a lo largo de la rayada vertical de la figura P9-40. Por conveniencia, sea $\psi = 0$ a lo largo de la pared inferior del canal. ¿Cuál es el valor de ψ a lo largo de la pared superior? *Respuestas:* $Vy^2/2h$, $Vh/2$

9-41 Como continuidad del problema 9-40, calcule la razón de flujo volumétrico por unidad de ancho normal al plano de la página de la figura P9-40 a partir de la integración del campo de velocidad. Compare su resultado con el que se obtuvo directamente a partir de la función de corriente. Explíquelo.

9-42I Considere el flujo de Couette de la figura P9-40. Para el caso en el que $V = 10.0$ ft/s y $h = 1.20$ in, grafique varias líneas de corriente usando valores igualmente espaciados de la función de corriente. ¿Las líneas de corriente por sí mismas están igualmente espaciadas? Explique por qué sí o por qué no.

9-43 Considere flujo en canal bidimensional totalmente desarrollado: flujo entre dos placas paralelas infinitas separadas por una distancia h, con ambas placas en reposo y un gradiente de presión forzado dP/dx que conduce el flujo como se ilustra en la figura P9-43 (dP/dx es constante y negativo). El flujo es estacionario, incompresible y bidimensional en el plano xy. Las componentes de velocidad están dadas por $u = 1/2\mu)\ (dP/dx)\ (y^2 - hy)$ y $v = 0$, donde μ es la viscosidad del fluido. Genere una expresión para la función de corriente ψ a lo largo de la línea rayada vertical de la figura P9-43. Por conveniencia, sea $\psi = 0$ a lo largo de la pared inferior del canal. ¿Cuál es el valor de ψ a lo largo de la pared superior?

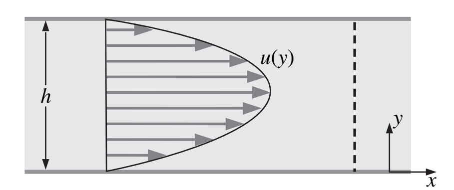


FIGURA P9-43

9-44 Como continuidad al problema 9-43, calcule la razón de flujo volumétrico por unidad de ancho normal al plano de la página de la figura P9-43 a partir de la integración del campo de velocidad. Compare su resultado con el que se obtuvo directamente a partir de la función de corriente. Explíquelo.

9-45 Considere el flujo en canal de la figura P9-43. El fluido es agua a 20°C. Para el caso en el que $dP/dx = -20\,000$ N/m^3 y $h = 1.20$ mm, grafique varias líneas de corriente usando valores igualmente espaciados de la función de corriente. Las líneas de corriente por sí mismas ¿están igualmente espaciadas? Explique por qué sí o por qué no.

9-46 En el campo del control de la contaminación del aire, con frecuencia se necesitan muestras de la calidad de un flujo de aire en movimiento. En estas mediciones, una sonda de muestreo se alinea con el flujo como se bosqueja en la figura P9-46. Una bomba de succión extrae aire a través de la sonda a una razón de flujo volumétrico $\dot{V}$, como se bosqueja. Para muestreo preciso, la velocidad del aire a través de la sonda debe ser la misma que la de la corriente de aire (*muestreo isocinético*). Sin embargo, si la succión aplicada es muy grande, como se ilustra en la figura P9-46, la velocidad del aire a través de la sonda es *mayor* que la de la corriente de aire (*muestreo superisocinético*). Por simplicidad, considere un caso bidimensional en el que la altura de la sonda de muestreo es $h = 4.5$ mm y su ancho (normal al plano de la página de la figura P9-46) es $W = 52$ mm. Los valores de la función de corriente que corresponden a las líneas de corriente divisoras inferior y superior son $\psi_i = 0.105$ m^2/s y $\psi_s = 0.150$ m^2/s, respectivamente. Calcule la razón de flujo volumétrico a través de la sonda (en unidades de m^3/s) y la velocidad promedio del aire succionado a través de la sonda. *Respuestas:* 0.00234 m^3/s, 10.0 m/s

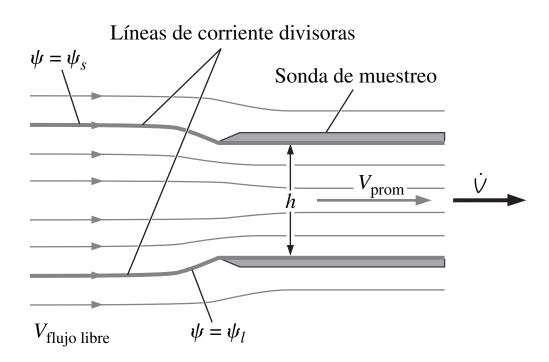


FIGURA P9-46

9-47 Suponga que la succión que se aplica a la sonda de muestreo del problema 9-46 fuera demasiado débil en vez de demasiado fuerte. Ilustre a qué se parecerían las líneas de corriente en este caso. ¿Cómo llamaría a este tipo de muestreo? Etiquete las líneas de corriente divisorias inferior y superior.

9-48 Considere la sonda de muestreo del problema 9-46. Si las líneas de corriente superior e inferior están separadas 5.8 mm en el flujo de aire corriente arriba suficientemente de la sonda, estime la velocidad de flujo libre $V_{\text{flujo libre}}$.

9-49 Considere un campo de flujo estacionario bidimensional incompresible llamado **corriente uniforme**. La velocidad del fluido es V en todas partes, y el flujo se alinea con el eje x (Fig. P9-49). Las componentes de velocidad cartesianas son $u = V$ y $v = 0$. Genere una expresión para la función de corriente para

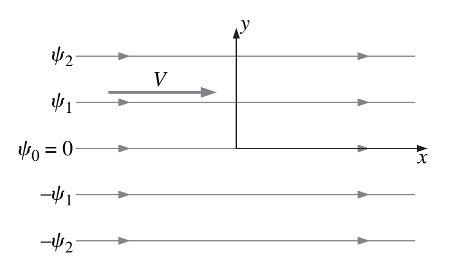


FIGURA P9-49

este flujo. Suponga $V = 8.9$ m/s. Si ψ_2 es una línea horizontal en $y = 0.5$ m y el valor de ψ a lo largo del eje x es cero, calcule la razón de flujo volumétrico por unidad de ancho (normal al plano de la página de la figura P9-49) entre estas dos líneas de corriente.

9-50I Considere el campo de flujo bidimensional estacionario incompresible del problema 9-33 donde la componente de velocidad u es $u = ax^2 - bxy$, donde $a = 0.45$ (ft · s)$^{-1}$, y $b = 0.75$ (ft · s)$^{-1}$. Sea $v = 0$ para todos los valores de x cuando $y = 0$ (esto es: $v = 0$ a lo largo del eje x). Genere una expresión para la función de corriente y grafique algunas líneas de corriente del flujo. Por uniformidad, sea $\psi = 0$ a lo largo del eje x y grafique en el rango $0 < x < 3$ ft y $0 < y < 4$ ft.

9-51 Una corriente uniforme de velocidad V se inclina un ángulo a del eje x (Fig. P9-51). El flujo es estacionario, bidimensional e incompresible. Las componentes de velocidad cartesiana son $u = V \cos \alpha$ y $v = V$ sen α. Genere una expresión para la función de corriente para este flujo.

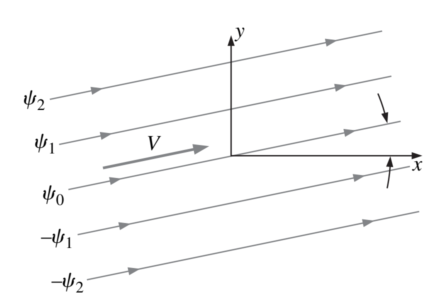


FIGURA P9-51

9-52 Un campo de flujo bidimensional estacionario incompresible en el plano xy tiene la siguiente función de corriente: $\psi = ax^2 + bxy + cy^2$, donde a, b y c son constantes. a) Obtenga expresiones para las componentes de velocidad u y v. b) Verifique que el campo de flujo satisface la ecuación de continuidad de flujo incompresible.

9-53 Para el campo de velocidad del problema 9-52, grafique las líneas de corriente $\psi = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 m^2/s. Las constantes a, b y c tienen los siguientes valores: $a = 0.50$ s^{-1}, $b = -1.3$ s^{-1} y $c = 0.50$ s^{-1}. Por uniformidad, grafique líneas de corriente entre $x = -2$ y 2 m y $y = -4$ y 4 m. Indique la dirección del flujo con flechas.

9-54 Un campo de flujo bidimensional estacionario incompresible en el plano xy tiene una función de corriente dada por $\psi = ax^2 - by^2 + cx + dcxy$, donde a, b, c y d son constantes. a) Obtenga expresiones para las componentes de velocidad u y v. b) Verifique que el campo de flujo satisface la ecuación de flujo incompresible.

9-55 Repita el problema 9-54, excepto que ahora configure su propia función de corriente. Puede crear cualquier función $\psi(x, y)$ que desee, en tanto contenga al menos tres términos y no sea la misma de algún ejemplo o problema en este texto. Explíquelo.

9-56 Un cálculo CFD bidimensional estacionario incompresible del flujo a través de un ducto ramificado bidimensional asimétrico revela el patrón de línea de corriente que se ilustra en la figura P9-56, donde los valores de ψ están en unidades de m^2/s y W es el ancho del ducto normal al plano de la página. Se muestran los valores de la función de corriente ψ en las paredes del ducto. ¿Qué porcentaje del flujo pasa a través de la rama *superior* del ducto? *Respuesta:* 63.7%

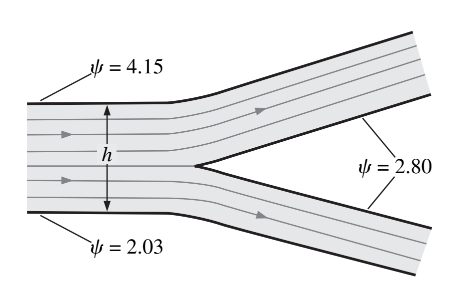


FIGURA P9-56

9-57 Si la velocidad promedio en la rama principal del ducto del problema 9-56 es de 11.4 m/s, calcule la altura del ducto h en unidades de cm. Obtenga su resultado en dos formas y muestre todo su trabajo. Puede usar los resultados del problema 9-56 sólo en uno de los métodos.

9-58 Considere flujo *axisimétrico* estacionario incompresible (r, z) y (u_r, u_z) para el que la función de corriente se define como $u_r = -(1/r)(\partial\psi/\partial z)$ y $u_z = (1/r)(\partial\psi/\partial r)$. Verifique que la ψ así definida satisface la ecuación de continuidad. ¿Qué condiciones o restricciones se necesitan sobre ψ?

9-59 Considere flujo bidimensional estacionario incompresible debido a una *fuente lineal* en el origen (Fig. P9-59). El fluido se crea en el origen y se dispersa radialmente en todas direcciones en el plano xy. La razón de flujo volumétrico neta del fluido creado por unidad de ancho normal al plano de la página de la figura P9-59 es $\dot{V}/L$, donde L es el ancho de la fuente lineal hacia dentro de la página en la figura P9-59. Puesto que la

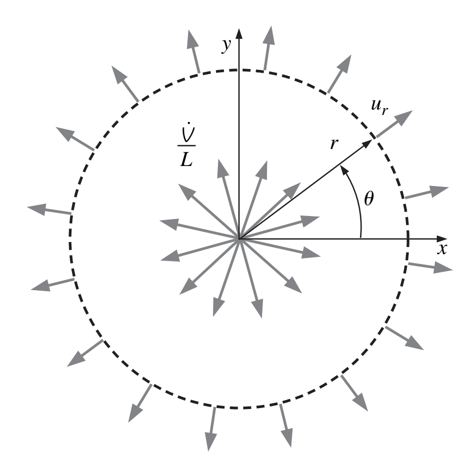


FIGURA P9-59

masa se debe conservar en todas partes excepto en el origen (un punto de singularidad), la razón de flujo volumétrico por unidad de ancho a través de un círculo de cualquier radio r también debe ser $\dot{V}/L$. Si (arbitrariamente) la función de corriente ψ se hace cero a lo largo del eje x positivo ($\theta = 0$), ¿cuál es el valor de ψ a lo largo del eje y positivo ($\theta = 90°$)? ¿Cuál es el valor de ψ a lo largo del eje x negativo ($\theta = 180°$)?

9-60 Repita el problema 9-59 para el caso de un sumidero lineal en vez de una fuente lineal. Sea $\dot{V}/L$ un valor positivo, pero el flujo en todas partes está en la dirección opuesta.

9-61 Considere la boquilla de manguera de jardín del problema 9-34. Genere una expresión para la función de corriente que corresponde a este campo de flujo.

9-62I Considere la boquilla de manguera de jardín de los problemas 9-34 y 9-61. Sean los diámetros de entrada y salida de la boquilla 0.50 y 0.14 in, respectivamente, y sea la longitud de la boquilla 2.0 in. La razón de flujo volumétrico a través de la boquilla es de 2.0 gal/min. *a*) Calcule las velocidades axiales (ft/s) en la entrada y la salida de la boquilla. *b*) Grafique varias líneas de corriente en el plano rz adentro de la boquilla y diseñe la forma de boquilla adecuada.

9-63 Un flujo se separa en una esquina aguda a lo largo de una pared y forma una **burbuja de separación** de recirculación como se bosqueja en la figura P9-63 (se muestran las líneas de la función de corriente). El valor de la función de corriente en la pared es cero y el de la línea de corriente superior que se muestra es algún valor positivo $\psi_{superior}$. Explique el valor de la función de corriente en el interior de la burbuja de separación. En particular, ¿es positiva o negativa? ¿Por qué? ¿Dónde en el flujo ψ tiene un mínimo?

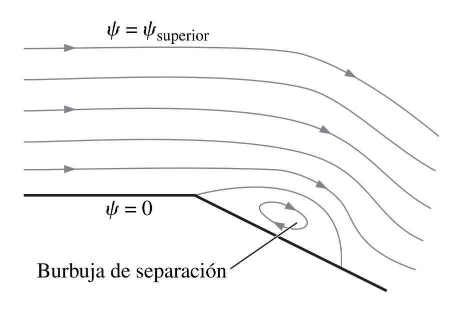


FIGURA P9-63

9-64 Un estudiante graduado corre un paquete computacional CFD para su proyecto de investigación de maestría y genera una gráfica de líneas de corriente de flujo (contornos de función de corriente constante). Los contornos son de valores de función de corriente igualmente espaciados La profesora I. C. Flows observa la gráfica e inmediatamente señala una región del flujo y dice: "¡Mira qué rápido se desplaza el flujo aquí!". ¿Qué notó la profesora Flows acerca de las líneas de corriente en dicha región?, ¿y cómo supo que el flujo era rápido en dicha región?

9-65 En la figura P9-65 se muestran líneas de traza para flujo de agua sobre la porción frontal de un cilindro obtuso axisimétrico alineado con el flujo. Las líneas de traza se generan cuando se introducen burbujas de aire en puntos igualmente espaciados corriente arriba del campo de visión. Sólo se muestra la mitad superior pues el flujo es simétrico en torno al eje horizontal. Dado que el flujo es estacionario, las líneas de traza son coincidentes con las líneas de corriente. Explique cómo puede decir, a partir del patrón de líneas de corriente, si la velocidad del flujo en una región particular del campo de flujo es (relativamente) grande o pequeña.

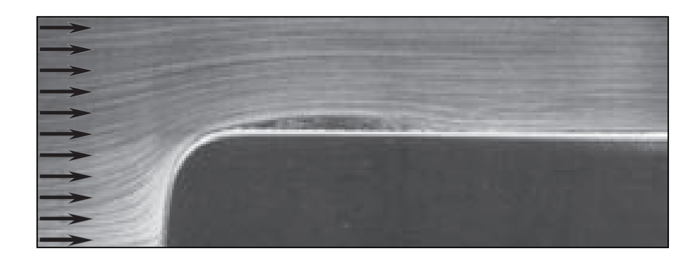


FIGURA P9-65

Cortesía de ONERA. Fotografía de Werlé.

9-66I En la figura P9-66I se muestra un bosquejo de líneas de corriente de flujo (contornos de función de corriente constante) para flujo de aire bidimensional estacionario incompresible en un ducto curvo. *a*) Dibuje flechas sobre las líneas de corriente para indicar la dirección del flujo. *b*) Si h = 2.0 in, ¿cuál es la velocidad aproximada del aire en el punto P? *c*) Repita la parte *b* si el fluido fuera agua en vez de aire. Explíquelo. *Respuestas: b*) 0.78 ft/s, *c*) 0.78 ft/s

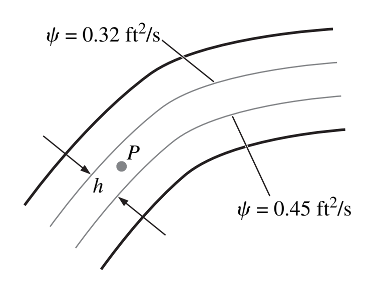


FIGURA P9-66I

9-67 En este capítulo se mencionó de manera breve *la función de corriente de flujo compresible* ψ_ρ, que se definió en coordenadas cartesianas como $\rho u = (\partial\psi_\rho/\partial y)$ y $\rho v = -(\partial\psi_\rho/\partial x)$. ¿Cuáles son las dimensiones primarias de ψ_ρ? Escriba las unidades de ψ_ρ en unidades SI primarias y en unidades inglesas primarias.

9-68 En el Ejemplo 9-2 se ofrecieron expresiones para u, v y ρ para flujo compresible en un ducto convergente. Genere una expresión para la función de corriente de flujo compresible ψ_ρ que describa este campo de flujo. Por consistencia, haga $\psi_\rho = 0$ a lo largo del eje x.

9-69 En el problema 9-21 se desarrollaron las expresiones para u, v y ρ para flujo a través del ducto divergente compresible bidimensional en un túnel de viento de alta velocidad. Genere una expresión para la función de corriente de flujo compresible ψ_ρ que describe este campo de flujo. Por uniformidad, haga $\psi_\rho = 0$ a lo largo del eje x. Grafique varias líneas de corriente y verifique que concuerden con las graficadas en el problema 9-21. ¿Cuál es el valor de ψ_ρ en la pared superior del ducto divergente?

9-70 El flujo bidimensional estacionario incompresible sobre una pequeña ala recientemente diseñada, con longitud de cuerda $c = 9.0$ mm, se modela con un paquete comercial de dinámica de fluido computacional (CFD). En la figura P9-70 se muestra una vista de acercamiento de las líneas de corriente de flujo (contornos de función de corriente constante). Los valores de la función de corriente están en unidades de m²/s. El fluido es agua a temperatura ambiente. *a*) Dibuje una flecha sobre la gráfica para indicar la dirección y magnitud relativa de la velocidad en el punto *A*. Repita para el punto *B*. Explique cómo pueden usarse sus resultados para explicar cómo tal cuerpo crea sustentación. *b*) ¿Cuál es la velocidad aproximada del aire en el punto *A*? (El punto *A* está entre las líneas de corriente 1.65 y 1.66 en la Fig. P9-70.)

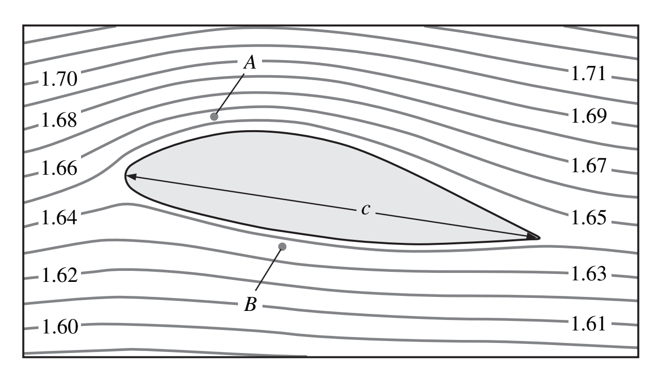


FIGURA P9-70

9-71 El flujo bidimensional incompresible turbulento que se promedia en el tiempo sobre un bloque cuadrado de dimensión $h = 1$ m se modela con un paquete comercial de dinámica de fluido computacional (CFD). En la figura P9-71 se muestra una vista de acercamiento de las líneas de corriente del flujo (contornos de función de corriente constante). El fluido es aire a temperatura ambiente. Note que en la figura P9-71 se grafican los contornos de *la función de corriente de flujo compresible* constante, aun cuando el flujo mismo se aproxima como incompresible. Los valores de ψ_ρ están en unidades de kg/m · s. *a*) Dibuje una flecha sobre la gráfica para indicar la dirección y magnitud relativa de la velocidad en el punto *A*. Repita para el punto *B*. *b*) ¿Cuál es la velocidad aproximada del aire en el punto *B*? (El punto *B* está entre las líneas de corriente 5 y 6 en la Fig. P9-71.)

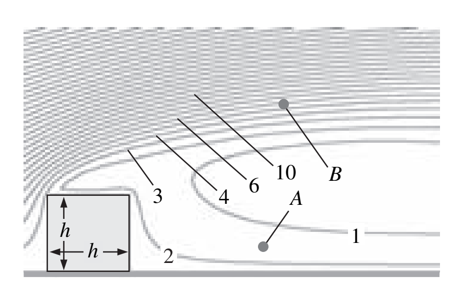


FIGURA P9-71

Ecuaciones de cantidad de movimiento lineal, condiciones de frontera y aplicaciones

9-72C La ecuación general de volumen de control para conservación de cantidad de movimiento lineal es:

$$\underbrace{\int_{VC} \rho \vec{g}\, dV}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{SC} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA}_{\text{II}} = \underbrace{\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \vec{V}\right) dV}_{\text{III}} + \underbrace{\int_{SC} \left(\rho \vec{V}\right) \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA}_{\text{IV}}$$

Explique el significado de cada término en esta ecuación. Los términos se etiquetan por conveniencia. Escriba la ecuación como una ecuación oral.

9-73C Un avión vuela a velocidad constante $\vec{V}_{\text{avión}}$ (Fig. P9-73C). Explique las condiciones de frontera para la velocidad de aire adyacente a la superficie del avión desde dos marcos de referencia: *a*) fijado sobre el suelo y *b*) en movimiento con el avión. Del mismo modo, en ambos marcos de referencia ¿cuáles son las condiciones de frontera para la velocidad del aire en la parte de la frontera alejada (del avión)?



FIGURA P9-73C

9-74C ¿Qué son las *ecuaciones constitutivas* y a qué ecuación de mecánica de fluidos se aplican?

9-75C ¿Qué es *presión mecánica* P_m y cómo se usa en una solución de flujo incompresible?

9-76C ¿Cuál es la principal diferencia entre un fluido newtoniano y un fluido no-newtoniano? Mencione al menos tres fluidos newtonianos y tres fluidos no-newtonianos.

9-77C Defina o describa cada tipo de fluido: *a*) fluido viscoelástico, *b*) fluido seudoplástico, *c*) fluido dilatante, *d*) fluido plástico de Bingham.

9-78 Una batidora mezcla químicos líquidos en un gran tanque (Fig. P9-78). La superficie libre del líquido se expone a aire ambiente. Los efectos de tensión superficial son despreciables. Explique las condiciones de frontera necesarias para resolver este

problema. Específicamente, ¿cuáles son las condiciones de frontera de velocidad en términos de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y componentes de velocidad (u_r, u_θ, u_z) en todas las superficies, inclusive las aspas y la superficie libre? ¿Cuáles condiciones de frontera son adecuadas para este campo de flujo? Escriba ecuaciones matemáticas para cada condición de frontera y explique.

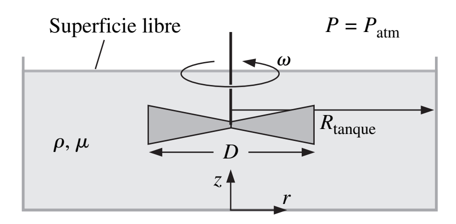


FIGURA P9-78

9-79 Repita el problema 9-78, pero desde un marco de referencia que rote con las aspas de la batidora a velocidad angular ω.

9-80 Considere líquido en un tanque cilíndrico. Tanto el tanque como el líquido rotan como un cuerpo rígido (Fig. P9-80). La superficie libre del líquido está expuesta a aire ambiente. Los efectos de tensión superficial son despreciables. Explique las condiciones de frontera necesarias para resolver este problema. Específicamente, ¿cuáles son las condiciones de frontera para la velocidad en términos de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y componentes de velocidad (u_r, u_θ, u_z) en todas las superficies, inclusive en las paredes del tanque y la superficie libre? ¿Cuáles condiciones de frontera para presión son adecuadas para este campo de flujo? Escriba ecuaciones matemáticas para cada condición de frontera y explique.

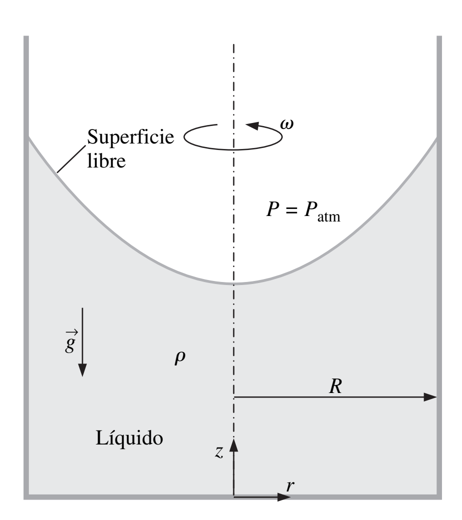


FIGURA P9-80

9-81 La componente $r\theta$ del tensor de esfuerzo viscoso en coordenadas cilíndricas está dada por:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] \quad \textbf{(1)}$$

En lugar de ello, algunos autores escriben esta componente como:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right] \quad \textbf{(2)}$$

¿Son iguales? En otras palabras, ¿la ecuación 2 equivale a la ecuación 1, o estos otros autores definen su tensor de esfuerzo viscoso de manera diferente? Muestre todo su trabajo.

9-82 Aceite de motor a $T = 60°C$ se fuerza entre dos placas planas paralelas muy grandes y en reposo, separadas por una delgada brecha de altura $h = 2.5$ mm (Fig. P9-82). Las dimensiones de las placas son $L = 1.5$ m y $W = 0.75$ m. La presión de salida es atmosférica y la presión de entrada es 1 atm de presión manométrica. Estime la razón de flujo volumétrico del aceite. También calcule el número de Reynolds del flujo de aceite, con base en la brecha de altura h y velocidad promedio V. El flujo ¿es laminar o turbulento? *Respuestas:* 9.10×10^{-4} m³/s, 14.5, laminar

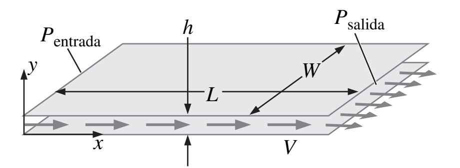


FIGURA P9-82

9-83 Considere el siguiente campo de velocidad bidimensional estacionario incompresible: $\vec{V} = (u, v) = (ax + b)\vec{i} + (-ay + cx^2)\vec{j}$, donde a, b y c son constantes. Calcule la presión como función de x y y. *Respuesta:* no puede ser encontrada

9-84 Considere el siguiente campo de velocidad bidimensional estacionario incompresible: $\vec{V} = (u, v) = (-ax^2)\vec{i} + (2axy)\vec{j}$, donde a es una constante. Calcule la presión como función de x y y.

9-85 Considere flujo bidimensional estacionario incompresible debido a un torbellino lineal/sumidero en espiral con centro

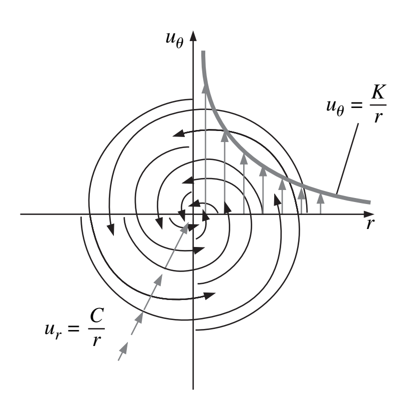


FIGURA P9-85

en el eje z. En la figura P9-85 se muestran las líneas de corriente y los vectores de velocidad. El campo de velocidad es $u_r = C/r$ y $u_\theta = K/r$, donde C y K son constantes. Calcule la presión como función de r y θ.

9-86 Considere el campo de velocidad bidimensional estacionario incompresible $\vec{V} = (u, v) = (ax + b)\vec{i} + (-ay + c)\vec{j}$, donde a, b y c son constantes. Calcule la presión como función de x y y.

9-87 Considere el flujo estacionario incompresible paralelo laminar de un fluido viscoso que se desliza entre dos paredes verticales infinitas (Fig. P9-87). La distancia entre las paredes es h y la gravedad actúa en la dirección z negativa (hacia abajo en la figura). No hay gradiente de presión aplicado (forzado) que conduzca al flujo: el fluido se desliza sólo por la gravedad. La presión es constante en todas partes en el campo de flujo. Calcule el campo de velocidad y dibuje el perfil de velocidad con el uso de las variables adimensionales adecuadas.

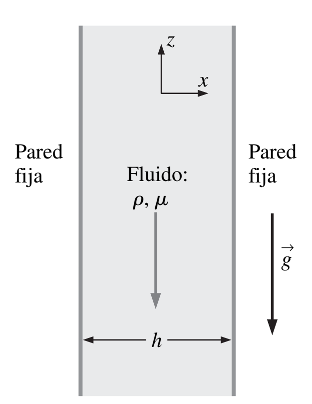


FIGURA P9-87

9-88 Para el fluido que se desliza entre dos paredes verticales paralelas (problema 9-87) genere una expresión para la razón de flujo volumétrico por unidad de ancho ($\dot{V}/L$) como función de ρ, μ, h y g. Compare su resultado con el del mismo fluido que se desliza a lo largo de *una* pared vertical con una superficie libre en sustitución de la segunda pared (Ejemplo 9-17); todo lo demás sigue igual. Comente las diferencias y ofrezca una explicación física. *Respuesta:* $\rho g h^3/12\mu$ hacia abajo

9-89 Repita el ejemplo 9-17, excepto para el caso en el que la pared está inclinada un ángulo α (Fig. P9-89). Genere expresiones para los campos de presión y de velocidad. Como comprobación, verifique que su resultado concuerda con el del ejemplo 9-17 cuando $\alpha = 90°$. (Sugerencia: es más conveniente usar el sistema coordenado $[s, y, n]$ con componentes de velocidad $[u_s, v, u_n]$, donde y está normal hacia el plano a la página en la figura P9-89. Grafique el perfil de velocidad adimensional u_s^* contra n^* para el caso en el que $\alpha = 60°$.)

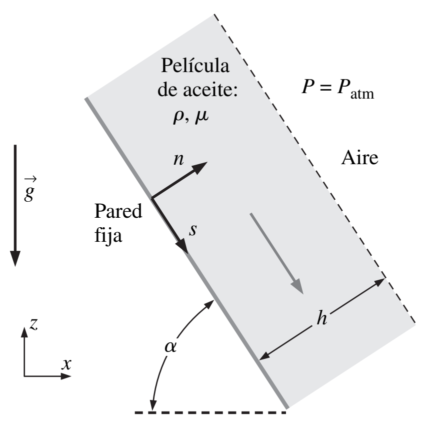


FIGURA P9-89

9-90 Para la película de aceite en el problema 9-89, genere una expresión para la razón de flujo volumétrico de aceite que se desliza por la pared por unidad de ancho ($\dot{V}/L$) como función de ρ, μ, h y g. Calcule ($\dot{V}/L$) para una película de aceite de 5.0 μm de grosor con $\rho = 888$ kg/m^3 y $\mu = 0.80$ kg/m · s.

9-91 Los primeros dos términos viscosos en la componente θ de la ecuación de Navier-Stokes (ecuación 9-62*c*) son $\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) - \frac{u_\theta}{r^2}\right]$. Expanda esta expresión, tanto como sea posible, con el uso de la regla del producto, y produzca tres términos. Ahora combine los tres términos en uno solo. (Sugerencia: use la regla del producto a la inversa; es posible que implique algo de ensayo y error.)

9-92 Un líquido newtoniano incompresible está confinado entre dos cilindros circulares un cilindro sólido interior de radio R_i

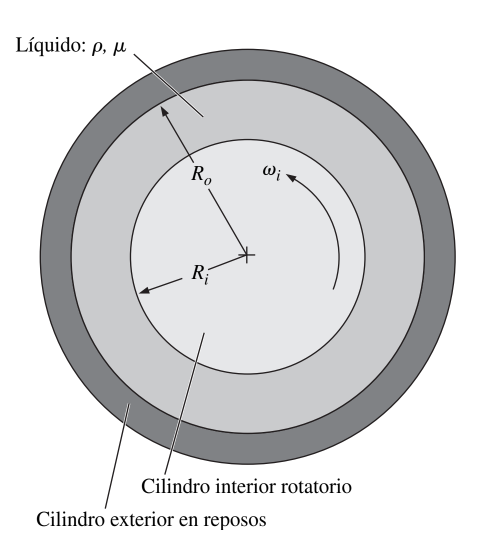


FIGURA P9-92

y un cilindro exterior en reposo hueco de radio R_o (figura P9-92; el eje z está normal hacia fuera del plano de la página). El cilindro interior rota a velocidad angular ω_i. El flujo es estacionario, laminar y bidimensional en el plano $r\theta$. El flujo también es *simétrico rotacionalmente*, lo que significa que nada es función de la coordenada θ (u_θ y P son funciones sólo del radio r). El flujo también es circular, lo que significa que la componente de velocidad $u_r = 0$ en todas partes. Genere una expresión exacta para la componente de velocidad u_θ como función de radio r y los otros parámetros en el problema. Puede ignorar la gravedad. (Sugerencia: el resultado del problema 9-91 es útil.)

9-93 Analice y comente dos casos límite del problema 9-92: *a*) La brecha es muy pequeña. Demuestre que el perfil de velocidad se aproxima a lo lineal desde la pared del cilindro exterior hasta la pared del cilindro interior. En otras palabras, para una brecha muy pequeña el perfil de velocidad se reduce al del flujo de Couette bidimensional simple. (Sugerencia: defina $y = R_o - r$, h = grosor de la brecha = $R_o - R_i$, y V = velocidad de la "placa superior" = $R_i\omega_i$. *b*) El radio del cilindro exterior se vuelve infinito, mientras que el radio del cilindro interior se vuelve muy pequeño. ¿A qué tipo de flujo se aproxima?

9-94 Repita el problema 9-92 para el caso más general. A saber, el cilindro interior rota a velocidad angular ω_i y el cilindro exterior rota a velocidad angular ω_o. Todo lo demás es igual que en el problema 9-92. Genere una expresión exacta para la componente de velocidad u_θ como función del radio r y los otros parámetros en el problema. Verifique que, cuando $\omega_o = 0$, su resultado se simplifica al del problema 9-92.

9-95 Analice y comente un caso límite del problema 9-94 en el que no existe cilindro interior ($R_i = \omega_i = 0$). Genere una expresión para u_θ como función de r. ¿Qué tipo de flujo es éste? Describa cómo podría establecerse este flujo de manera experimental. *Respuesta:* $\omega_o r$

9-96 Considere flujo laminar estacionario incompresible de un fluido newtoniano en un anillo de tubería redonda de largo infinito con radio interior R_i y radio exterior R_o (Fig. P9-96). Ignore los efectos de la gravedad. En la dirección x se aplica un gradiente de presión negativo constante $\partial P/\partial x$, $(\partial P/dx) = (P_2 - P_1)/(x_2 - x_1)$, donde x_1 y x_2 son dos posiciones arbitrarias a lo largo del eje x, y P_1 y P_2 son las presiones en estas dos posiciones. El gradiente de presión se puede provocar por una bomba y/o gravedad. Note que aquí se adopta un sistema coordenado cilíndrico modificado con x en vez de z para la componente axial, a saber, (r, θ, x) y (u_r, u_θ, u). Derive una expresión para el campo de velocidad en el espacio anular en la tubería.

9-97 Considere de nuevo el anillo de tubería que se bosquejó en la figura P9-96. Suponga que la presión es constante en todas partes (no hay gradiente de presión forzado que dirija el flujo). Sin embargo, la pared interior se mueve con velocidad estacionaria V hacia la derecha. La pared exterior no obstante está en reposo (éste es un tipo de flujo de Couette axisimétrico). Genere una expresión para la componente x de velocidad u como función de r y los otros parámetros en el problema.

9-98 Repita el problema 9-97, excepto que se intercambian las paredes en reposo y en movimiento. En especial, considere que la pared interior está en reposo y la pared de la tubería exterior se mueve con velocidad estable V hacia la derecha, y todo lo demás sigue igual. Genere una expresión para la componente x de velocidad u como función de r y los otros parámetros en el problema.

9-99 Considere una forma modificada del flujo de Couette en el que existen dos fluidos colocados entre dos placas planas paralelas de largo y ancho infinito (Fig. P9-99). El flujo es estacionario, incompresible, paralelo y laminar. La placa superior se mueve con velocidad V hacia la derecha, y la placa inferior esta en reposo. La gravedad actúa en la dirección $-z$ (hacia abajo en la figura). No hay gradiente de presión forzado que empuje al fluido a través del canal: el flujo se establece solamente por los efectos viscosos creados por la placa superior en movimiento. Puede ignorar los efectos de tensión superficial y suponga que la interfase es horizontal. La presión en el fondo del flujo ($z = 0$) es igual a P_0. *a*) Haga una lista con todas las condiciones de frontera adecuadas tanto para velocidad como para presión (sugerencia: existen seis condiciones de frontera necesarias). *b*) Resuelva para el campo de velocidad (sugerencia: divida la solución en dos porciones, una para cada fluido. Genere expresiones para u_1 como función de z y u_2 como función de z). *c*) Resuelva para el campo de presión (sugerencia: de nuevo divida la solución. Resuelva para P_1 y P_2). *d*) Sea el fluido 1 y el fluido 2 aceite de motor no usado, ambos a 80°C. También sea h_1 = 5.0 mm, h_2 = 8.0 mm y V = 10.0 m/s. Grafique u como función de z a través de todo el canal. Comente los resultados.

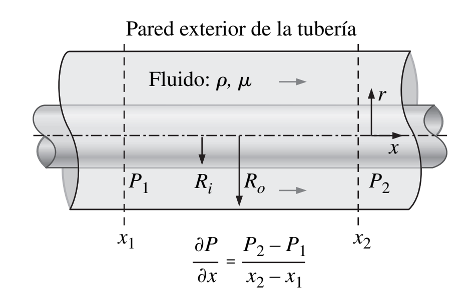


FIGURA P9-96

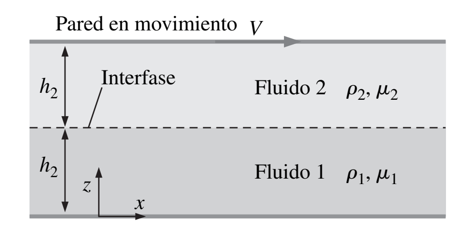


FIGURA P9-99

9-100 Considere flujo laminar estacionario incompresible de un fluido newtoniano en una tubería redonda de longitud infinita y diámetro D o radio $R = D/2$ inclinado un ángulo α (Fig. P9-100). No hay gradiente de presión aplicado ($\partial P/\partial x = 0$). En vez de ello, el fluido fluye por la tubería debido sólo a la gravedad. Se adopta el sistema coordenado que se muestra, con x como el eje de la tubería. Deduzca una expresión para la componente x de velocidad u como función del radio r y los otros parámetros del problema. Calcule la razón de flujo volumétrico y la velocidad axial promedio en la tubería. *Respuestas:* ρg (sen α)$(R^2 - r^2)/4\mu$, ρg (sen α)$\pi R^4/8\mu$, ρg (sen α)$R^2/8\mu$

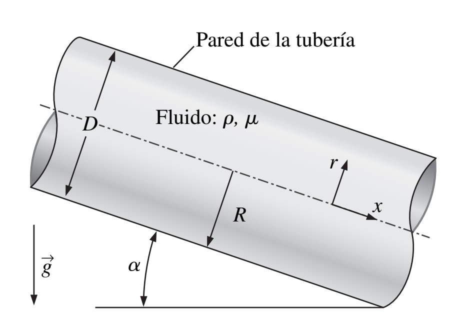


FIGURA P9-100

Problemas de repaso

9-101C Explique por qué la aproximación de flujo incompresible y la aproximación de temperatura constante usualmente van de la mano.

9-102C Para cada parte, escriba el nombre oficial para la ecuación diferencial, explique sus restricciones y describa qué representa la ecuación físicamente.

a) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

b) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}\vec{V}) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}$$

c) $$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

9-103C Haga una lista de los seis pasos que se siguieron para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad para flujo incompresible con propiedades de fluido constante (debe ser capaz de hacer esto sin revisar el capítulo).

9-104C Para cada enunciado, elija si el enunciado es verdadero o falso y explique su respuesta con brevedad. Para cada enunciado se supone que se conocen las condiciones de frontera adecuadas y las propiedades del fluido.

a) Un problema general de flujo incompresible con propiedades de fluido constante tiene cuatro incógnitas.

b) Un problema general de flujo compresible tiene cinco incógnitas.

c) Para un problema de mecánica de fluido incompresible, la ecuación de continuidad y la ecuación de Cauchy ofrecen suficientes ecuaciones para igualar el número de incógnitas.

d) Para un problema de mecánica de fluido incompresible que implica un fluido newtoniano con propiedades constantes, las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes ofrecen suficientes ecuaciones para igualar el número de incógnitas.

9-105C Comente la relación entre la razón de deformación volumétrica y la ecuación de continuidad. Base su comentario en definiciones fundamentales.

9-106 Repita el Ejemplo 9-17, excepto para el caso en el que la pared se mueve hacia arriba con velocidad V. Como comprobación, cerciórese de que su resultado concuerda con el del Ejemplo 9-17 cuando $V = 0$. Elimine las dimensiones de su ecuación de perfil de velocidad con el uso de la misma normalización que la del Ejemplo 9-17 y demuestre que surgen un número de Froude y un número de Reynolds. Grafique el perfil w^* contra x^* para casos en los que Fr = 0.5 y Re = 0.5, 1.0 y 5.0. Discútalo.

9-107 Para la película de aceite en el problema 9-106, calcule la razón de flujo volumétrico de aceite que se desliza por la pared por unidad de ancho $\dot{V}/L$ como función de la velocidad de pared V y los otros parámetros en el problema. Calcule la velocidad de pared necesaria para que no exista flujo de volumen de aceite hacia arriba o abajo. Proporcione su respuesta para V en términos de los otros parámetros en el problema, a saber, ρ, μ, h y g. Calcule V para la razón de flujo volumétrico cero para una película de aceite de 5.0 mm de grosor con $\rho = 888$ kg/m^3 y $\mu = 0.80$ kg/m · s. *Respuesta* 0.091 m/s

9-108 Considere flujo bidimensional estacionario incompresible en el plano xz en vez del plano xy. En la figura P9-108 se muestran curvas de función de corriente constante. Las componentes de velocidad distintas de cero son (u, w). Defina una función de corriente tal que el flujo sea de derecha a izquierda en el plano xz cuando ψ aumenta en la dirección z.

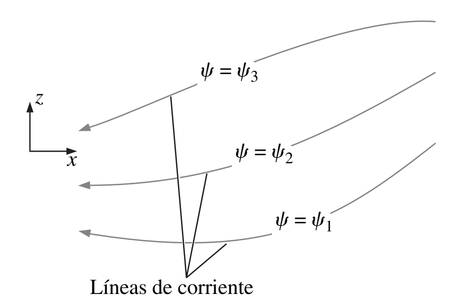


FIGURA P9-108

9-109 Considere el siguiente campo de velocidad tridimensional estacionario en coordenadas cartesianas: $\vec{V} = (u, v, w) = (axz^2 - by)\vec{i} + cxyz\vec{j} + (dz^3 + exz^2)\vec{k}$, donde a, b, c, d y e son constantes. ¿En qué condiciones este campo de flujo es incompresible? ¿Cuáles son las dimensiones primarias de las constantes a, b, c, d y e?

9-110 Simplifique la ecuación de Navier-Stokes, tanto como sea posible, para el caso de un líquido incompresible que se *acelera como un cuerpo rígido* en una dirección arbitraria (Fig. P9-110). La gravedad actúa en la dirección $-z$. Comience con la forma de vector incompresible de la ecuación de Navier-Stokes, y explique cómo y por qué algunos términos pueden simplificarse y proporcione su resultado final como una ecuación vectorial.

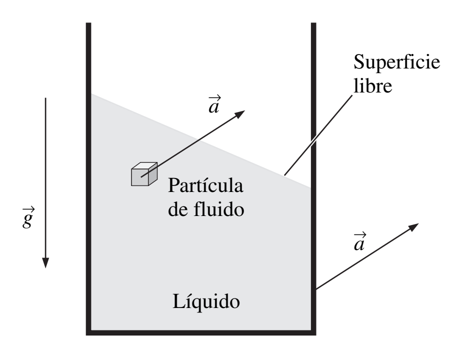


FIGURA P9-110

9-111 Simplifique la ecuación de Navier-Stokes, tanto como sea posible, para el caso de *hidrostática* incompresible, con la gravedad que actúa en la dirección z negativa. Comience con la forma vectorial de flujo incompresible de la ecuación de Navier-Stokes y explique cómo y por qué algunos términos pueden simplificarse, y proporcione su resultado final como una ecuación vectorial. *Respuesta:* $\vec{\nabla}P = -\rho g\vec{k}$

9-112 Roberto usará un paquete de dinámica de fluido computacional para modelar flujo estacionario de un fluido incompresible a través de una contracción bidimensional súbita como se ilustra en la figura P9-112. La altura del canal cambia desde H_1 = 12.0 cm hasta H_2 = 4.6 cm. Se debe especificar la velocidad uniforme $\vec{V}_1 = 18.5\vec{i}$ m/s en la frontera izquierda del dominio de problema. El paquete CFD usa un método numérico en el que la función de corriente debe especificarse a lo largo de todas las fronteras del dominio de problema. Como se muestra en la figura P9-112, ψ se especifica como cero a lo largo de toda la pared inferior del canal. *a*) ¿Qué valor de ψ debe especificar Roberto en la pared superior del canal? *b*) ¿Cómo debe Roberto especificar ψ en el lado izquierdo del dominio de problema? *c*) Comente cómo Roberto puede especificar ψ en el lado derecho del dominio de problema.

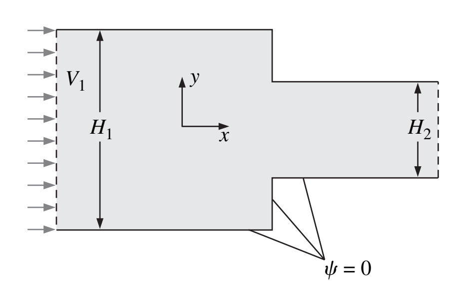


FIGURA P9-112

9-113 Para cada una de las ecuaciones mencionadas, escriba la ecuación en forma vectorial y decida si es lineal o no-lineal. Si es no-lineal, ¿qué término(s) la hacen así?: *a*) ecuación de continuidad de flujo incompresible, *b*) ecuación de continuidad de flujo compresible y *c*) ecuación de Navier-Stokes de flujo incompresible.

9-114 Una **capa límite** es una delgada región cerca de una pared en la que las fuerzas viscosas (de fricción) son muy importantes debido a la condición de frontera de no-deslizamiento. En la figura P9-114 se ilustra la capa límite bidimensional de flujo estacionario incompresible que se forma a lo largo de una placa plana alineada con el flujo libre. El flujo corriente arriba de la placa es uniforme, pero el grosor δ de la capa límite crece con x a lo largo de la placa debido a efectos viscosos. Se ilustran algunas líneas de corriente, tanto dentro de la capa limite como arriba de ella. ¿$\delta(x)$ es una línea de corriente? (Sugerencia: ponga particular atención al hecho de que, para flujo bidimensional estacionario incompresible, la razón de flujo volumétrico por unidad de ancho entre cualesquiera dos líneas de corriente es constante.)

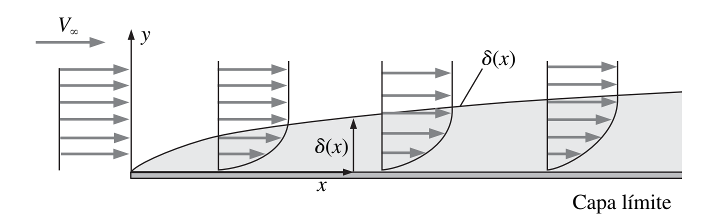


FIGURA P9-114

9-115I Un grupo de estudiantes diseña un pequeño túnel de viento redondo (axisimétrico) de baja velocidad para su proyecto de diseño (Fig. P9-115I). Su diseño exige que la componente axial de velocidad aumente linealmente en la sección de contracción de $u_{z,0}$ a $u_{z,L}$. La velocidad del aire a través de la sección de prueba será $u_{z,L}$ = 120 ft/s. La longitud de la contracción es L = 3.0 ft, y los diámetros de entrada y salida de la contracción son D_0 = 5.0 ft y D_L = 1.5 ft, respectivamente. El aire está a temperatura y presión estándar. *a*) Verifique que el flujo puede aproximarse como incompresible. *b*) Genere una expresión para la componente de velocidad *radial* u_r entre z = 0 y z = L, usando letras para las variables no sus valores numéricos. Pueden ignorarse los efectos de fricción (ca-

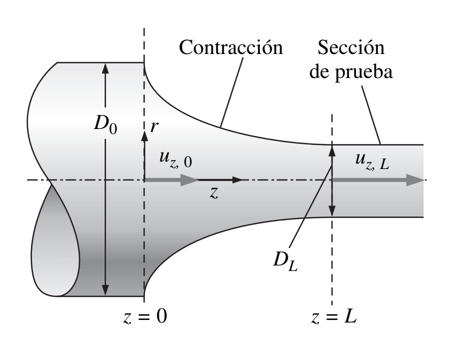


FIGURA P9-115I

pas límite) sobre las paredes. *c*) Genere una expresión para la función de corriente ψ = función de r y z. *d*) Grafique algunas líneas de corriente y diseñe la forma de la contracción, si supone que los efectos de fricción a lo largo de las paredes de la contracción del túnel de viento son despreciables.

9-116 Aproxime el flujo del aire en el accesorio de piso de una aspiradora mediante la función de corriente

$$\psi = \frac{-\dot{V}}{2\pi L}\arctan\frac{\text{sen }2\theta}{\cos 2\theta + b^2/r^2}$$ en el plano central (el plano xy) en coordenadas cilíndricas, donde L es la longitud del dispositivo, b es la altura del dispositivo sobre el piso y $\dot{V}$ es la razón de flujo volumétrico del aire que se succiona hacia la manguera. En la figura P9-116 se presenta una vista tridimensional con el suelo en el plano xz; se modela una sección bidimensional del flujo en el plano xy que pasa a través de la línea central del accesorio. Note que (arbitrariamente) se hizo $\psi = 0$ a lo largo del eje x positivo ($\theta = 0$). *a*) ¿Cuáles son las dimensiones primarias de la función de corriente dada? *b*) Elimine las dimensiones de la función de corriente cuando se defina $\psi^* = (2\pi L/\dot{V})\psi$ y $r^* = r/b$. *c*) Resuelva su ecuación adimensional para r^* como función de ψ^* y θ. Use esta ecuación para graficar varias líneas de corriente adimensional del flujo. Por consistencia, grafique en el rango $-2 < x^* < 2$ y $0 < y^* < 4$, donde $x^* = x/b$ y $y^* = y/b$. (Sugerencia: ψ^* debe ser *negativa* para producir la dirección de flujo adecuada.)

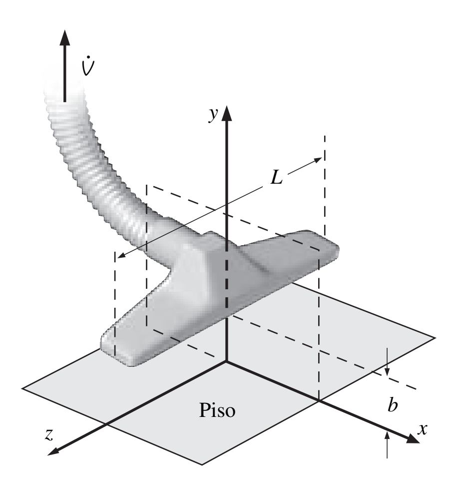


FIGURA P9-116

9-117 Busque la definición de la *ecuación de Poisson* en algún libro de matemáticas o en la Internet. Escriba la ecuación de Poisson en forma estándar. ¿En qué se parece la ecuación de Poisson a la de Laplace? ¿En qué difieren ?

9-118 Fluye agua por una larga tubería inclinada recta de diámetro D y longitud L (Fig. P9-118). No hay gradiente de presión forzado entre los puntos 1 y 2; en otras palabras, el agua fluye a través de la tubería sólo por la gravedad, y $P_1 = P_2 = P_{atm}$. El flujo es estacionario, totalmente desarrollado y laminar. Se adopta un sistema coordenado en el que x sigue el eje de la tubería. *a*) Use la técnica de volumen de control del capítulo 8 para generar una expresión para la velocidad promedio V como función de los parámetros dados ρ, g, D, Δz, μ y L. *b*) Use análisis diferencial para generar una expresión para V como función de los parámetros dados. Compare con su resultado de la parte *a* y comente. *c*) Use análisis dimensional para generar una expresión adimensional para V como función de los parámetros dados. Construya una relación entre sus P equivalente a la expresión analítica exacta.

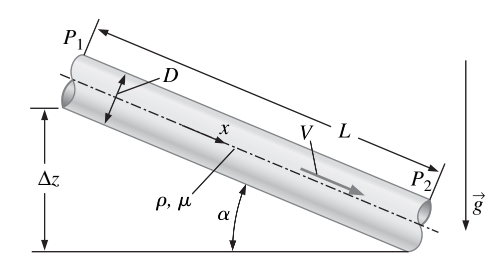


FIGURA P9-118

9-119 Un bloque se desliza por una larga pared inclinada recta con la velocidad V, montado sobre una delgada película de aceite de un grosor h (Fig. P9-119). El peso del bloque es W y su área superficial en contacto con la película de aceite es A. Suponga que V se mide y que también se conocen W, A, el ángulo a y la viscosidad μ. El grosor h de la película de aceite es desconocido. *a*) Genere una expresión analítica exacta para h como función de los parámetros conocidos V, A, W, α y μ. *b*) Use análisis dimensional para generar una expresión adimensional para h como función de los parámetros dados. Construya una relación entre sus P equivalente a la expresión analítica exacta de la parte *a*.

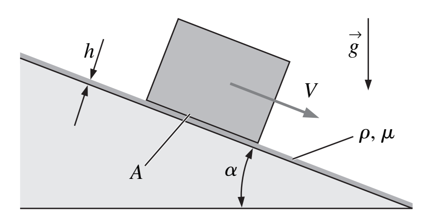


FIGURA P9-119

CAPÍTULO

10

SOLUCIONES APROXIMADAS DE LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES

En este capítulo se analizan varias aproximaciones que eliminan términos, lo que reduce la ecuación de Navier-Stokes a una forma simplificada más fácil de resolver. En ocasiones, estas aproximaciones son apropiadas en un campo de flujo completo, pero, en la mayoría de los casos, sólo son adecuadas en ciertas *regiones* del campo de flujo. Primero se considera el *flujo de Stokes (también conocido con los nombres de flujo de movimiento progresivo y flujo de Stokes)*, donde el número de Reynolds es tan bajo que los términos viscosos dominan (y eliminan) a los términos inerciales. Después, se tratan dos aproximaciones que son apropiadas en regiones de flujo lejanas de las paredes y estelas: *flujo no viscoso* y *flujo irrotacional* (también llamado *flujo potencial*). En estas regiones, se afirma lo contrario; es decir: los términos inerciales dominan a los términos viscosos. Para finalizar, se comenta la *aproximación de capa límite*, en la que continúan tanto los términos inerciales como los viscosos, pero algunos de los términos viscosos son despreciables. Esta última aproximación es apropiada a números de Reynolds *muy altos* (lo contrario del flujo de Stokes) y cerca de las paredes, lo contrario al flujo potencial.

OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Apreciar por qué son necesarias las aproximaciones para resolver numerosos problemas de flujo de fluidos y saber cuándo y dónde son apropiadas.
- Comprender los efectos de la falta de términos inerciales en la aproximación de flujo de Stokes, inclusive la desaparición de la densidad de las ecuaciones.
- Atender la superposición como un método para resolver problemas potenciales de flujo.
- Predecir el espesor de capa límite y otras propiedades de la capa límite.

10-1 ▪ INTRODUCCIÓN

En el capítulo 9 se dedujo la ecuación diferencial de conservación de cantidad de movimiento lineal para un fluido newtoniano incompresible con propiedades constantes: la *ecuación de Navier-Stokes*. Se mostraron algunos ejemplos de soluciones analíticas a esta ecuación para geometrías simples (por lo general infinitas), en donde la mayoría de los términos en las ecuaciones componentes se eliminan y las ecuaciones diferenciales resultantes son solucionables de manera analítica. Por desgracia, en la literatura no existen muchas soluciones analíticas conocidas y que estén disponibles; de hecho, puede contarse el número de estas soluciones con los dedos de pocos estudiantes. La mayoría de los problemas prácticos de la mecánica de fluidos *no puede* resolverse de manera analítica y demanda o 1) mayores aproximaciones o 2) ayuda de computadora. Aquí se considera la opción 1, mientras que la opción 2 se trata en el capítulo 15. Por sencillez, en este capítulo sólo se considera flujo incompresible de fluidos newtonianos.

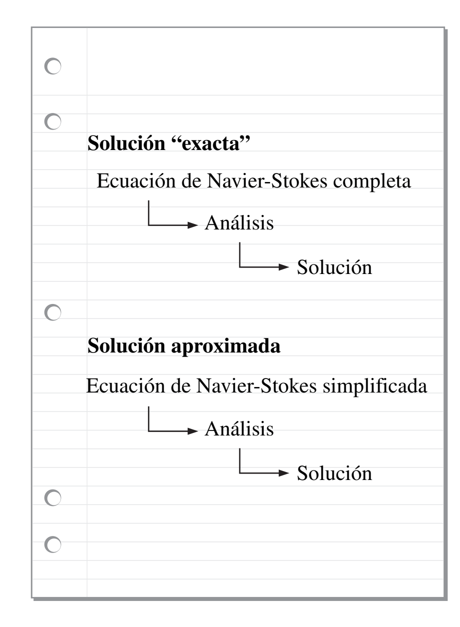


FIGURA 10-1
Las soluciones "exactas" comienzan con la ecuación de Navier-Stokes completa, mientras que las soluciones aproximadas comienzan con una forma simplificada de la ecuación de Navier-Stokes justo desde el principio.

Primero se enfatiza que la ecuación de Navier-Stokes no es *exacta* por sí misma, sino que se trata de un *modelo* de flujo de fluidos que incluye varias aproximaciones inherentes (fluido newtoniano, propiedades termodinámicas y de transporte constantes, etcétera). No obstante, es un *excelente* modelo y fundamento de la mecánica de fluidos moderna. En este capítulo se distingue entre soluciones "exactas" y soluciones aproximadas (Fig. 10-1). El término *exacta* se usa cuando la solución comienza con la ecuación de Navier-Stokes *completa*. Las soluciones que se tratan en el capítulo 9 son soluciones exactas porque cada una comienza, con la forma completa de la ecuación. Algunos términos se eliminan en un problema determinado debido a la geometría especificada u otras hipótesis de simplificación en el problema. En una solución diferente, los términos que se eliminan pueden no ser los mismos, sino que dependan de la geometría y las hipótesis de este problema particular. Por otra parte, una **solución aproximada** se define como aquella donde la ecuación de Navier-Stokes se *simplifica* en alguna región del flujo *antes de inclusive comenzar la solución*. En otras palabras, el (los) término(s) se eliminan *a priori* dependiendo de la clase de problema, el cual puede diferir de una región del flujo a otra.

Por ejemplo, ya se comentó una aproximación, a saber, el *fluido estático* (capítulo 3). Ésta puede considerarse como una aproximación de la ecuación de Navier-Stokes en una región del campo de flujo donde la velocidad del fluido no necesariamente es cero, sino que el fluido está casi estancado y se ignoran todos los términos que implican velocidad. En esta aproximación, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a sólo dos términos, presión y gravedad; es decir: $\vec{\nabla} P = \rho\vec{g}$. La aproximación es que los términos inercial y viscoso en la ecuación de Navier-Stokes son despreciablemente pequeños en comparación con los términos de presión y gravedad.

Aunque las aproximaciones vuelven el problema más tratable, existe un peligro implícito con cualquier solución aproximada. A saber: si la aproximación es inadecuada para comenzar con ella, la solución será incorrecta, inclusive si se realiza todo el planteamiento matemático de manera correcta. ¿Por qué? Porque se comienza con ecuaciones que no se aplican al problema a la mano. Por ejemplo, puede resolverse un problema con el uso de la aproximación de flujo de Stokes y obtener una solución que satisfaga todas las hipótesis y condiciones de frontera. Sin embargo, si el número de Reynolds del flujo es demasiado alto, la aproximación de flujo de Stokes es inadecuada desde el principio y la solución (sin importar qué tanto orgullo pueda tenerse de ella) no será físicamente correcta. Otro error común es suponer flujo irrotacional en regiones del flujo donde la suposición de irrotacionalidad es inadecuada. *La recomendación general es que se debe ser muy cuidadoso con las aproximaciones que se aplican, y siempre debe verificarse y justificarse las aproximaciones cuando es posible.*

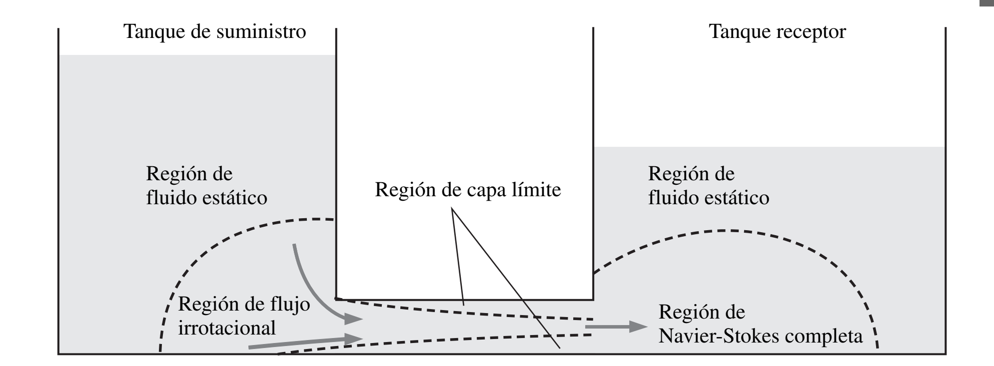


FIGURA 10-2
Una aproximación particular de la ecuación de Navier-Stokes es adecuada sólo en ciertas *regiones* del campo de flujo; otras aproximaciones pueden no ser adecuadas en otras regiones del campo de flujo.

Para finalizar, se subraya que, en la mayoría de los problemas prácticos de flujo de fluidos, una aproximación en particular puede ser adecuada en cierta *región* del campo de flujo, pero no en otras regiones, donde una aproximación diferente puede ser quizá más apropiada. La figura 10-2 ilustra este punto cualitativamente para flujo de un líquido de un tanque a otro. La aproximación de fluido estático es adecuada en una región del tanque de suministro lejana de la tubería de conexión, y en menor medida en el tanque receptor. La aproximación de flujo irrotacional es adecuada cerca de la entrada a la tubería de conexión y a través de la porción media de la tubería, donde están ausentes los efectos viscosos intensos. Cerca de las paredes es adecuada la aproximación de capa límite. El flujo en algunas regiones no satisface los criterios para *todas* las aproximaciones, y ahí debe resolverse la ecuación de Navier-Stokes completa (por ejemplo, cerca de la salida de la tubería en el tanque receptor). ¿Cómo se determina si una aproximación es adecuada? Esto se hace cuando se comparan los órdenes de magnitud de los diversos términos en las ecuaciones de movimiento, para verificar si todos los términos son despreciablemente pequeños en comparación con otros términos.

10-2 ▪ ECUACIONES DE MOVIMIENTO SIN DIMENSIONES

El objetivo en esta sección es eliminar las dimensiones de las ecuaciones de movimiento de modo que puedan compararse de manera adecuada los órdenes de magnitud de los diversos términos en las ecuaciones. Se comienza con la ecuación de continuidad de flujo incompresible:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{10-1}$$

y la forma vectorial de la ecuación de Navier-Stokes, válida para flujo incompresible de un fluido newtoniano con propiedades constantes:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{V}\right] = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V} \tag{10-2}$$

En la tabla 10-1 se introducen algunos *parámetros de escalamiento* característicos (de referencia) que se usan para eliminar las dimensiones de las ecuaciones de movimiento.

TABLA 10-1

Parámetros de escalamiento que se usan para eliminar las dimensiones de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, junto con sus dimensiones primarias

Parámetro de escalamiento	Descripción	Dimensiones primarias
L	Longitud característica	$\{L\}$
V	Velocidad característica	$\{Lt^{-1}\}$
f	Frecuencia característica	$\{t^{-1}\}$
$P_0 - P_\infty$	Diferencia de presión de referencia	$\{mL^{-1}t^{-2}\}$
g	Aceleración gravitacional	$\{Lt^{-2}\}$

Coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{L\partial\left(\frac{x}{L}\right)}, \frac{\partial}{L\partial\left(\frac{y}{L}\right)}, \frac{\partial}{L\partial\left(\frac{z}{L}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{1}{\partial y^*} \frac{\partial}{\partial z^*}\right) = \frac{1}{L}\vec{\nabla}^*$$

Coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{L\partial\left(\frac{r}{L}\right)}, \frac{1}{L\left(\frac{r}{L}\right)} \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{L\partial\left(\frac{z}{L}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{\partial}{\partial r^*}, \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z^*}\right) = \frac{1}{L}\vec{\nabla}^*$$

FIGURA 10-3
El operador gradiente queda sin dimensiones por la ecuación 10-3, sin importar la elección del sistema coordenado.

Luego se definen algunas *variables adimensionales* y un *operador adimensional* con base en los parámetros de escalamiento de la tabla 10-1:

$$t^* = ft \qquad \vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L} \qquad \vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{V}$$
$$P^* = \frac{P - P_\infty}{P_0 - P_\infty} \qquad \vec{g}^* = \frac{\vec{g}}{g} \qquad \vec{\nabla}^* = L\vec{\nabla} \tag{10-3}$$

Note que la variable de presión adimensional se define en términos de una *diferencia* de presión, con base en el comentario acerca de la presión contra las diferencias de presión del capítulo 9. Cada una de las cantidades con asterisco en la ecuación 10-3 es adimensional. Por ejemplo, aunque cada componente del operador gradiente $\vec{\nabla}$ tiene dimensiones de $\{L^{-1}\}$, cada componente de $\vec{\nabla}^*$ tiene dimensiones de $\{1\}$ (Fig. 10-3). La ecuación 10-3 se sustituye en las ecuaciones 10-1 y 10-2, y cada término se trata con cuidado. Por ejemplo, $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^*/L$ y $\vec{V} = V\vec{V}^*$, de modo que el término aceleración convectiva de la ecuación 10-2 se convierte en:

$$\rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \rho\left(V\vec{V}^* \cdot \frac{\vec{\nabla}^*}{L}\right)V\vec{V}^* = \frac{\rho V^2}{L}\left(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*\right)\vec{V}^*$$

Se realizan algunas transformaciones algebraicas similares sobre cada término de las ecuaciones 10-1 y 10-2. La ecuación 10-1 se reescribe en los términos de variables adimensionales como:

$$\frac{V}{L}\vec{\nabla}^* \cdot \vec{V}^* = 0$$

Después de dividir ambos lados entre V/L para hacer la ecuación adimensional, se obtiene:

Ecuación de continuidad adimensional:
$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{V}^* = 0 \tag{10-4}$$

De manera similar, la ecuación 10-2 se reescribe como:

$$\rho V f \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho V^2}{L}\left(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*\right)\vec{V}^* = -\frac{P_0 - P_\infty}{L}\vec{\nabla}^* P^* + \rho g \vec{g}^* + \frac{\mu V}{L^2}\nabla^{*2}\vec{V}^*$$

que luego de la multiplicación por la combinación de constantes $L/(\rho V^2)$ para hacer todos los términos adimensionales, se convierte en:

$$\left[\frac{fL}{V}\right]\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \left(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*\right)\vec{V}^* = -\left[\frac{P_0 - P_\infty}{\rho V^2}\right]\vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{gL}{V^2}\right]\vec{g}^* + \left[\frac{\mu}{\rho V L}\right]\nabla^{*2}\vec{V}^* \tag{10-5}$$

Cada término entre corchetes en la ecuación 10-5 es una agrupación adimensional de parámetros: un *grupo Pi* (capítulo 7). Con la ayuda de la tabla 7-5, se nombra cada uno de estos parámetros adimensionales: el de la izquierda es el *número de Strouhal*, St = fL/V; el primero a la derecha es el *número de Euler*,

$\text{Eu} = (P_0 - P_\infty)/\rho V^2$; el segundo a la derecha es el recíproco del cuadrado del *número de Froude*, $\text{Fr}^2 = V^2/gL$; y el último es el recíproco del *número de Reynolds*, $\text{Re} = \rho VL/\mu$. Por lo tanto, la ecuación 10-5 se convierte en:

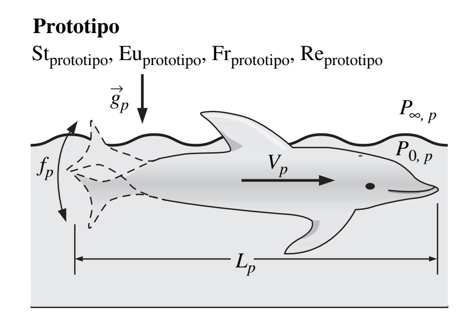
Ecuación de Navier-Stokes adimensional:

$$[\text{St}]\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*)\vec{V}^* = -[\text{Eu}]\vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{1}{\text{Fr}^2}\right]\vec{g}^* + \left[\frac{1}{\text{Re}}\right]\nabla^{*2}\vec{V}^* \qquad \textbf{(10-6)}$$

Antes de comentar aproximaciones específicas a detalle, hay mucho que comentar acerca del conjunto de ecuaciones adimensionales que consiste de las ecuaciones 10-4 y 10-6:

- La ecuación de continuidad adimensional *no* contiene parámetros adimensionales adicionales. Por tanto, la ecuación 10-4 debe satisfacerse como está: no se puede simplificar más la continuidad, porque todos los términos son del mismo orden de magnitud.
- El orden de magnitud de las variables adimensionales es la unidad si se les eliminan las dimensiones con el uso de una longitud, velocidad, frecuencia, etcétera, que sean características del campo de flujo. Por lo tanto, $t^* \sim 1$, $\vec{x}^* \sim 1$, $\vec{V}^* \sim 1$, etcétera, donde se usa la notación ~ para denotar orden de magnitud. En consecuencia, los términos como $(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*)\vec{V}^*$ y $\vec{\nabla}^* P^*$ en la ecuación 10-6 también son de orden de magnitud unidad y son del mismo orden de magnitud mutuamente. Por lo tanto, *la importancia relativa de los términos en la ecuación 10-6 sólo depende de las magnitudes relativas de los parámetros adimensionales* St, Eu, Fr y Re. Por ejemplo, si St y Eu son de orden 1, pero Fr y Re son muy grandes, se puede ignorar los términos gravitacional y viscoso en la ecuación de Navier-Stokes.
- Dado que existen cuatro parámetros adimensionales en la ecuación 10-6, la *similitud dinámica* entre un modelo y un prototipo exige que los cuatro sean iguales para el modelo y el prototipo ($\text{St}_{\text{modelo}} = \text{St}_{\text{prototipo}}$, $\text{Eu}_{\text{modelo}} = \text{Eu}_{\text{prototipo}}$, $\text{Fr}_{\text{modelo}} = \text{Fr}_{\text{prototipo}}$ y $\text{Re}_{\text{modelo}} = \text{Re}_{\text{prototipo}}$), como se ilustra en la figura 10-4.
- Si el flujo es *estacionario*, entonces $f = 0$ y el número de Strouhal sale de la lista de parámetros adimensionales ($\text{St} = 0$). Entonces, desaparece el primer término en el lado izquierdo de la ecuación 10-6, como su correspondiente término no-estacionario $\partial\vec{V}/\partial t$ en la ecuación 10-2. Si la frecuencia característica f es *muy pequeña*, tal que $\text{St} \ll 1$, el flujo se llama **cuasi-estacionario**. Esto significa que, en cualquier momento de tiempo (o en cualquier fase de un ciclo periódico lento), el problema puede resolverse como si el flujo fuera estacionario, y el término no-estacionario en la ecuación 10-6 sale de nuevo.
- El efecto de la gravedad sólo es importante en los flujos con *efectos de superficie libre* (por ejemplo, ondas, movimiento de barcos, derrames de presas hidroeléctricas, flujo de ríos). Para numerosos problemas de ingeniería *no* existen superficies libres (flujo en tuberías, flujo alrededor de un submarino o torpedo totalmente sumergidos, movimiento de automóviles, vuelo de aeronaves, aves, insectos, etcétera). En estos casos, el único efecto de gravedad sobre la dinámica de flujo es una *distribución de presión hidrostática* en la dirección vertical superpuesta sobre el campo de presión debida al flujo de fluidos. En otras palabras:

> Para flujos sin efectos de superficie libre, la gravedad no afecta la dinámica del flujo; su único efecto es superponer una presión hidrostática sobre el campo de presión dinámico.



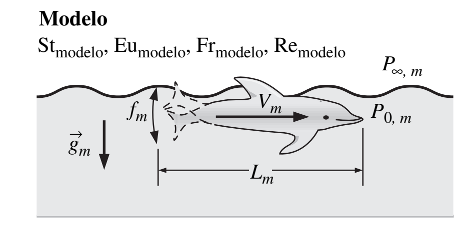
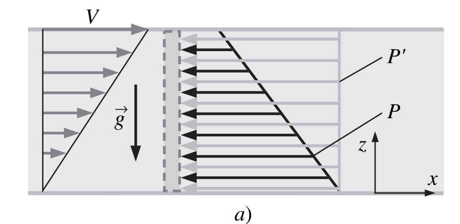


FIGURA 10-4
Para similitud dinámica completa entre prototipo (subíndice *p*) y modelo (subíndice *m*), el modelo debe ser geométricamente similar al prototipo y (en general) los cuatro parámetros adimensionales (St, Eu, Fr y Re) deben ser iguales.



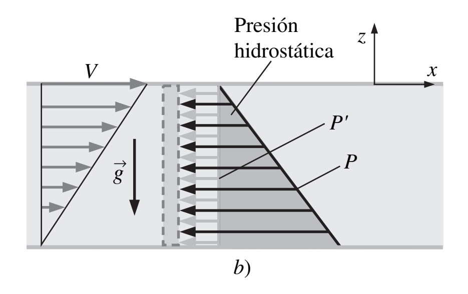


FIGURA 10-5
Distribución de presión y presión modificada en la cara derecha de un elemento de fluido en flujo de Couette entre dos placas horizontales infinitas paralelas: *a*) $z = 0$ en la placa inferior y *b*) $z = 0$ en la placa superior. La *presión modificada P'* es constante, pero la *presión real P no* es constante en ningún caso. El área sombreada en *b*) representa la componente de presión hidrostática.

- Se define una **presión modificada** *P'* que absorbe el efecto de presión hidrostática. Para el caso en el que z se define verticalmente hacia arriba (opuesta a la dirección del vector de gravedad) y en la que se define algún plano de referencia arbitrario en $z = 0$:

Presión modificada: $$P' = P + \rho g z \tag{10-7}$$

La idea es sustituir los dos términos $-\vec{\nabla}P + \rho\vec{g}$ en la ecuación 10-2 con *un* término $-\vec{\nabla}P'$ que usa la presión modificada de la ecuación 10-7. La ecuación de Navier-Stokes (Ec. 10-2) se escribe en forma modificada como:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right] = -\vec{\nabla}P' + \mu\nabla^2\vec{V} \tag{10-8}$$

Con P' en sustitución de P, y con el término gravedad que ha sido eliminado de la ecuación 10-2, el número de Froude sale de la lista de parámetros adimensionales. La ventaja es que puede resolverse una forma de la ecuación de Navier-Stokes que *no tenga término gravedad*. Después de resolver la ecuación de Navier-Stokes en términos de la presión modificada P', es sencillo agregar de nuevo la distribución de presión hidrostática con la ecuación 10-7. En la figura 10-5 se muestra un ejemplo para el caso de flujo de Couette bidimensional. Con frecuencia, la presión modificada se usa en paquetes de dinámica de fluido computacional (CFD) para separar efectos gravitacionales (presión hidrostática en la dirección vertical) de los efectos de flujo de fluidos (dinámico). Note que la presión modificada *no* debe usarse en flujos con efectos de superficie libre.

Ahora el lector está listo para realizar algunas aproximaciones en donde se elimine uno o más de los términos de la ecuación 10-2 cuando compare las magnitudes relativas de los parámetros adimensionales asociados con los correspondientes términos en la ecuación 10-6.

10-3 ▪ APROXIMACIÓN DE FLUJO DE STOKES

La primera aproximación es la clase de flujo de fluido llamado **flujo de Stokes.** Otros nombres para esta clase de flujo incluyen **flujo de movimiento progresivo, flujo de Stokes** y **flujo de número de Reynolds bajo**. Como el último nombre implica, se trata de flujos en los que el número de Reynolds es muy pequeño (Re $\ll$ 1). Cuando se inspecciona la definición del número de Reynolds, $\text{Re} = \rho VL/\mu$, se ve que el flujo de Stokes se encuentra cuando ρ, V o L es muy pequeño o la viscosidad es muy grande (o alguna combinación de ellos). El flujo de Stokes se encuentra cuando se vierte miel de maple (un líquido muy viscoso) sobre algunos panecillos o cuando se mete una cuchara en un frasco de miel de abeja (también muy viscosa) para añadir a un té (Fig. 10-6).



FIGURA 10-6
El lento flujo de un líquido muy viscoso, en este caso la miel, se clasifica como flujo de Stokes.

Otro ejemplo de flujo de Stokes es todo lo que está alrededor y dentro del lector, aunque éste no pueda verlo, a saber: el flujo alrededor de los organismos microscópicos. Los microorganismos viven toda su vida en al régimen de flujo de Stokes porque son muy pequeños, su tamaño es del orden de una micra (1 μm = 10^{-6} m) y se desplazan muy lentamente, aun cuando puedan desplazarse en el aire o nadar en agua con una viscosidad que difícilmente puede clasificarse como "grande" ($\mu_{\text{aire}} \cong 1.8 \times 10^{-5}$ N · s/m^2 y $\mu_{\text{agua}} \cong 1.0 \times 10^{-3}$ N · s/m^2 a temperatura ambiente). La figura 10-7 muestra una bacteria *Salmonella* que nada en agua. El cuerpo de la bacteria sólo mide 1 μm de largo; sus *flagelos* (sondas capilares) se extienden varias micras detrás del cuerpo y funcionan como su mecanismo de propulsión. El número de Reynolds asociado con su movimiento es mucho más pequeño que 1.

El flujo de Stokes también ocurre en el flujo de aceite lubricante en separaciones y canales muy pequeños de un cojinete lubricado. En este caso, las velocidades pueden no ser pequeñas, sino que el tamaño de separación sea muy pequeña (en el orden de decenas de micras), y la viscosidad es relativamente grande ($\mu_{\text{aceite}} \sim 1 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ a temperatura ambiente).

Por sencillez, se supone que los efectos gravitacionales son despreciables, o que sólo contribuyen a una componente de presión hidrostática, como ya se indicó. También se supone o flujo estacionario o flujo en oscilación, con un número de Strouhal de orden unitario (St $\sim$ 1) o más pequeño, de modo que el término de aceleración no-estacionario $[\text{St}]\,\partial\vec{V}^*/\partial t^*$ es de órdenes de magnitud más pequeño que el término viscoso $[1/\text{Re}]\vec{\nabla}^{*2}\vec{V}^*$ (el número de Reynolds es muy pequeño). El término convectivo en la ecuación 10-6 es de orden 1, $(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*)\vec{V}^* \sim 1$, así que este término también se elimina. Por lo tanto, se ignora todo el lado izquierdo de la ecuación 10-6, que se reduce a:

Aproximación de flujo de Stokes:
$$[\text{Eu}]\vec{\nabla}^*P^* \cong \left[\frac{1}{\text{Re}}\right]\nabla^{*2}\vec{V}^* \qquad \textbf{(10-9)}$$

En palabras, las fuerzas de presión en el flujo (lado izquierdo) deben ser lo suficientemente grandes para equilibrar las (relativamente) grandes fuerzas viscosas en el lado derecho. Sin embargo, dado que las variables adimensionales en la ecuación 10-9 son de orden 1, la única manera para que los dos lados se equilibren es si Eu es del mismo orden de magnitud que 1/Re. Cuando se iguala esto:

$$[\text{Eu}] = \frac{P_0 - P_\infty}{\rho V^2} \sim \left[\frac{1}{\text{Re}}\right] = \frac{\mu}{\rho V L}$$

Después de algo de álgebra:

Escala de presión para flujo de Stokes:
$$P_0 - P_\infty \sim \frac{\mu V}{L} \qquad \textbf{(10-10)}$$

La ecuación 10-10 muestra dos propiedades interesantes del flujo de Stokes. Primero, se está acostumbrado a flujos *inercialmente* dominados, en que las diferencias de presión se escalan como ρV^2 (por ejemplo, la ecuación de Bernoulli). Sin embargo, aquí, en vez de ello, las diferencias de presión se escalan como $\mu V/L$, dado que el flujo de Stokes es un flujo *viscosamente* dominado. De hecho, *en el flujo de Stokes desaparecen todos los términos inerciales de la ecuación de Navier-Stokes*. En segundo lugar, *en la ecuación de Navier-Stokes, la densidad se ha eliminado totalmente como parámetro* (Fig. 10-8). Esto se ve más claramente cuando se escribe la forma *dimensional* de la ecuación 10-9:

Ecuación de Navier-Stokes aproximada para flujo de Stokes:
$$\vec{\nabla}P \cong \mu\nabla^2\vec{V} \qquad \textbf{(10-11)}$$

El lector cuidadoso puede observar que la densidad todavía tiene un papel *menor* en el flujo de Stokes. A saber, es necesaria en el cálculo del número de Reynolds. Sin embargo, ya determinado que Re es muy pequeño, la densidad ya no se necesita más porque no aparece en la ecuación 10-11. La densidad también aparece en el término de presión hidrostática, pero usualmente este efecto es despreciable en el flujo de Stokes, ya que las distancias verticales implícitas con frecuencia se miden en milímetros o micrómetros. Además, si no hay efectos de superficie libre, en la ecuación 10-11 puede usarse presión modificada en vez de presión física.

Ahora se trata la falta de términos de inercia en la ecuación 10-11 con un poco más de detalle. Cuando se nada existe un apoyo en la inercia (Fig. 10-9). Por ejemplo, cuando se da una brazada, luego puede uno avanzar durante cierta distancia antes de que necesite dar otra brazada. Cuando el lector nada, los términos inerciales en la ecuación de Navier-Stokes son mucho más grandes que los términos viscosos porque el número de Reynolds es muy grande (créalo o no,

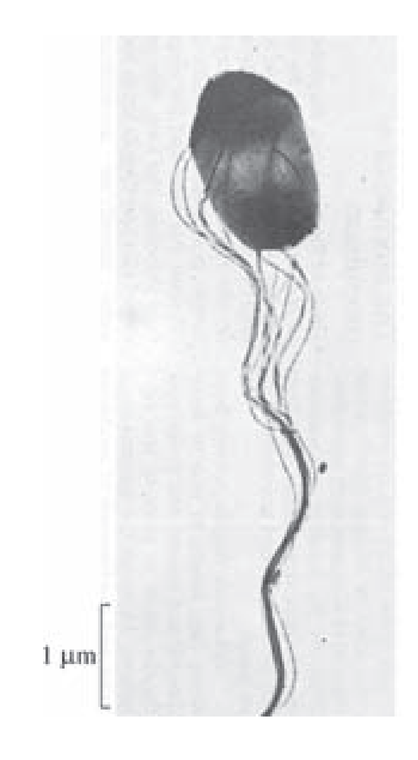


FIGURA 10-7
Bacteria *Salmonella abortusequi* nadando en agua.
Tomado de Comparative Physiology Functional Aspects of Structural Materials: Proceedings of the International Conference on Comparative Physiology, *Ascona, 1974, publicado por North-Holland Pub. Co., 1975.*

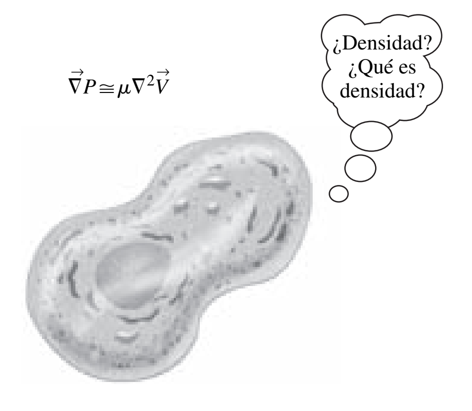


FIGURA 10-8
En la aproximación de flujo de Stokes, la densidad no aparece en la ecuación de cantidad de movimiento.

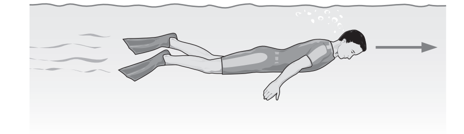


FIGURA 10-9
Una persona nada a un número de Reynolds muy alto, y los términos inerciales son grandes; por lo tanto, puede avanzar grandes distancias sin moverse.

¡inclusive los nadadores extremadamente *lentos* se mueven a números de Reynolds muy *grandes*!)

Sin embargo, para microorganismos que nadan en el régimen de flujo de Stokes, existe inercia despreciable y por lo tanto no es posible el deslizamiento. De hecho, la falta de términos inerciales en la ecuación 10-11 tiene un impacto considerable en cómo están diseñados los microorganismos para nadar. Una cola batiente, como la de los delfines, no los llevaría a sitio alguno. En vez de ello, sus largas y estrechas ondas (*flagelos*) ondulan en un movimiento sinusoidal para impulsarlos hacia adelante, como se ilustra en la figura 10-10, para el caso de un espermatozoide. Debido a la ausencia de los efectos de inercia, el espermatozoide no se mueve a menos que su cola se mueva. El instante en que su cola se detiene, el espermatozoide deja de moverse. Si el lector ha visto alguna vez un video del nado de un espermatozoide u otro microorganismo, puede haber notado cuánto deben trabajar sólo para recorrer una corta distancia. Ésta es la naturaleza del flujo de Stokes, y se debe a la falta de inercia. El estudio cuidadoso de la figura 10-10 revela que la cola del espermatozoide ha completado casi dos ciclos de ondulación completos, aunque la cabeza del espermatozoide se haya movido hacia la izquierda solamente aproximadamente dos longitudes de cabeza.

Es muy difícil para los humanos imaginar el movimiento en condiciones de flujo de Stokes porque están tan acostumbrados a los efectos de la inercia. Algunos autores han sugerido imaginar intentar nadar en una tina con miel. Los autores de este texto recomiendan, en vez de lo anterior, que se vaya a un restaurante de comida rápida donde haya área de juegos para niños y se observe a uno jugar en una alberca de esferas de plástico (Fig. 10-11). Cuando el niño intenta “nadar” entre las pelotas (sin tocar las paredes o el fondo), sólo puede avanzar hacia adelante con ciertos movimientos serpenteantes de su cuerpo. El instante en que el niño suspende su serpenteo, todos los movimientos se detienen porque hay inercia despreciable. El niño debe realizar un gran esfuerzo para moverse hacia adelante a una corta distancia. Hay una sutil analogía entre un niño “que nada” en este tipo de situación y un microorganismo que nada en condiciones de flujo de Stokes.

Ahora se comenta la falta de densidad en la ecuación 10-11. A números de Reynolds altos, la fuerza de arrastre aerodinámica sobre un objeto aumenta proporcionalmente con ρ (los fluidos más densos ejercen más fuerza de presión sobre el cuerpo conforme el fluido impacta al cuerpo). Sin embargo, esto es en realidad un efecto inercial, y la inercia es despreciable en el flujo de Stokes. De hecho, la fuerza de arrastre no puede, inclusive, ser una *función* de la densidad porque la densidad ha desaparecido de la ecuación de Navier-Stokes. El ejemplo 10-1 ilustra esta situación mediante el uso de análisis dimensional.

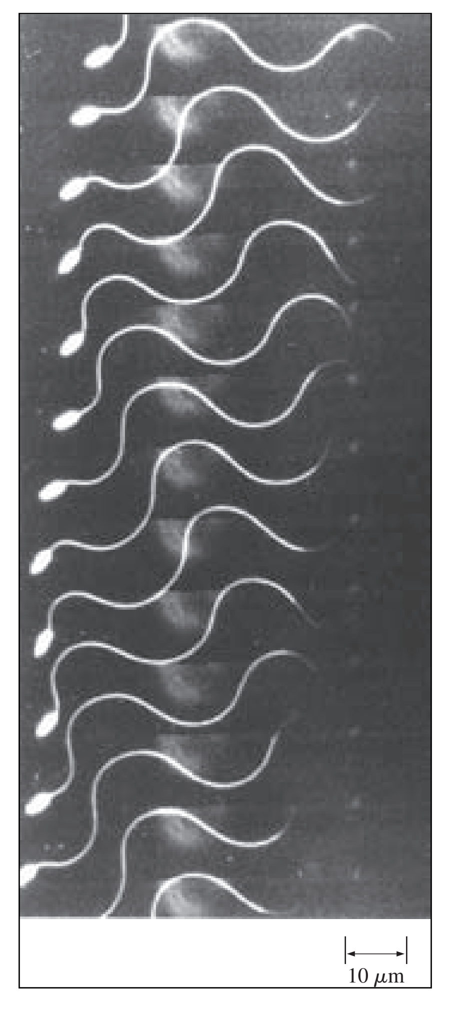
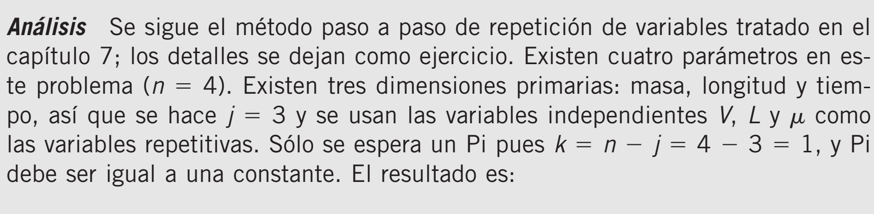


FIGURA 10-10
Espermatozoide de la ascidia *Ciona* nadando en agua de mar; fotografías estroboscópicas a 200 cuadros por segundo.
Cortesía de Charlotte Omoto y Charles J. Brokaw. Reproducido con autorización.

EJEMPLO 10-1 **Fuerza de arrastre sobre un objeto en flujo de Stokes**

Después que la densidad ha desaparecido de la ecuación de Navier-Stokes, la fuerza de arrastre sobre un objeto en flujo de Stokes sólo es función de su velocidad V, alguna longitud característica L del objeto y la viscosidad del fluido μ (Fig. 10-12). Use el análisis dimensional para generar una relación para F_D como función de estas variables independientes.

SOLUCIÓN Debe usar análisis dimensional para generar una relación funcional entre F_D y las variables V, L y μ.
Hipótesis **1** Se supone que Re $\ll$ 1 de modo que se aplica la aproximación de flujo de Stokes. **2** Los efectos gravitacionales son irrelevantes. **3** Ningún otro parámetro mencionado en el enunciado del problema es relevante para su solución.



Análisis Se sigue el método paso a paso de repetición de variables tratado en el capítulo 7; los detalles se dejan como ejercicio. Existen cuatro parámetros en este problema ($n = 4$). Existen tres dimensiones primarias: masa, longitud y tiempo, así que se hace $j = 3$ y se usan las variables independientes V, L y μ como las variables repetitivas. Sólo se espera un Pi pues $k = n - j = 4 - 3 = 1$, y Pi debe ser igual a una constante. El resultado es:

$$F_D = \text{constante} \cdot \mu V L$$

Por lo tanto, se ha demostrado que, para flujo de Stokes alrededor de cualquier objeto tridimensional, la fuerza de arrastre es simplemente una constante multiplicada por μVL.

Discusión Este resultado es significativo porque todo lo que se deja por hacer es encontrar la constante, que sólo es una función de la forma del objeto.

FIGURA 10-11
Un niño que intenta moverse en una alberca de pelotas de plástico es análogo a un microorganismo que intenta impulsarse a sí mismo sin el beneficio de la inercia.

Fuerza de arrastre sobre una esfera en flujo de Stokes

Como se muestra en el ejemplo 10-1, la fuerza de arrastre F_D sobre un objeto tridimensional de dimensión característica L, que se mueve en condiciones de flujo de Stokes a velocidad V a través de un fluido con viscosidad μ es F_D = constante · μVL. El análisis dimensional no puede predecir el valor de la constante porque depende de la forma y la orientación del cuerpo en el campo de flujo.

Para el caso específico de una *esfera*, la ecuación 10-11 puede resolverse de manera analítica. Los detalles están fuera de los objetivos de este texto, pero pueden encontrarse en libros de mecánica de fluidos para licenciatura (White, 1991; Panton, 1996). Resulta que la constante en la ecuación de la fuerza de arrastre es igual a 3π si L se toma como el diámetro de la esfera D (Fig. 10-13).

Fuerza de arrastre sobre una esfera en flujo de Stokes:

$$F_D = 3\pi\mu VD \tag{10-12}$$

Como nota marginal, dos tercios de esta fuerza de arrastre se deben a las fuerzas viscosas y el otro tercio se debe a fuerzas de presión. Esto confirma que los términos viscosos y los términos de presión en la ecuación 10-11 son del mismo orden de magnitud, como se mencionó.

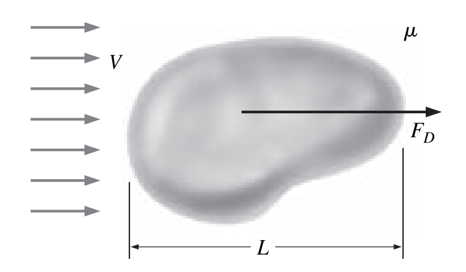


FIGURA 10-12
Para flujo de Stokes sobre un objeto tridimensional la fuerza de arrastre sobre el objeto no depende de la densidad, sino sólo de la velocidad V, alguna longitud característica del objeto L y la viscosidad del fluido μ.

EJEMPLO 10-2 Velocidad terminal de una partícula de un volcán

Un volcán hace erupción, arroja piedras, vapor y cenizas a varios pies en la atmósfera (Fig. 10-14). Después de cierto tiempo, las partículas comienzan a asentarse en el suelo. Considere una partícula de ceniza casi esférica de 50 μm de diámetro, que cae en el aire cuya temperatura es de −50°C y cuya presión es de 55 kPa. Su densidad es de 1 240 kg/m^3. Estime su velocidad terminal a esta altitud.

SOLUCIÓN Debe estimar la velocidad terminal de una partícula de ceniza que cae.

Hipótesis **1** El número de Reynolds es muy pequeño (necesitará verificar esta suposición después de obtener la solución). **2** La partícula es esférica.

Propiedades A la temperatura y presión dadas, la ley del gas ideal produce $\rho = 0.8588$ kg/m^3. Puesto que la viscosidad es una función muy débil de la presión, se usa el valor a −50°C y presión atmosférica, $\mu = 1.474 \times 10^{-5}$ kg/m · s.

Análisis Trate el problema como aproximadamente estacionario. Cuando la partícula que cae alcanza su velocidad terminal, la fuerza descendente neta (peso)

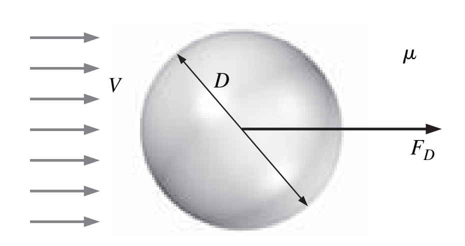


FIGURA 10-13
La fuerza de arrastre sobre una esfera de diámetro D en flujo de Stokes es igual a $3\pi\mu VD$.

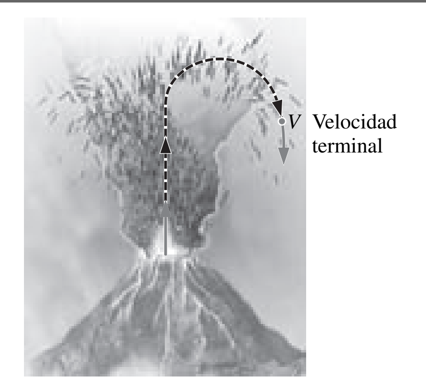


FIGURA 10-14
Las partículas de ceniza que arroja una erupción volcánica se asientan lentamente en el suelo; la aproximación de flujo de Stokes es razonable para ese tipo de campo de flujo.

equilibra la fuerza ascendente neta (fuerza de arrastre aerodinámica + flotabilidad), como se ilustra en la figura 10-15.

Fuerza descendente: $$F_{abajo} = W = \pi\frac{D^3}{6}\rho_{partícula}g \quad (1)$$

La fuerza de arrastre aerodinámica que actúa sobre la partícula se obtiene de la ecuación 10-12, y la fuerza de flotabilidad es el peso del aire desplazado. En consecuencia:

Fuerza ascendente: $$F_{arriba} = F_D + F_{flotabilidad} = 3\pi\mu VD + \pi\frac{D^3}{6}\rho_{aire}g \quad (2)$$

Se igualan las ecuaciones 1 y 2 y se resuelve para la velocidad terminal V,

$$V = \frac{D^2}{18\mu}(\rho_{partícula} - \rho_{aire})g$$
$$= \frac{(50 \times 10^{-6}\ \text{m})^2}{18(1.474 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s})}[(1\,240 - 0.8588)\ \text{kg/m}^3](9.81\ \text{m/s}^2)$$
$$= \mathbf{0.115\ m/s}$$

Para finalizar, se verifica que el número de Reynolds sea lo suficientemente pequeño como para que el flujo de Stokes sea una aproximación adecuada:

$$\text{Re} = \frac{\rho_{aire}VD}{\mu} = \frac{(0.8588\ \text{kg/m}^3)(0.115\ \text{m/s})(50 \times 10^{-6}\ \text{m})}{1.474 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}} = 0.335$$

Por lo tanto, el número de Reynolds es menor que 1, pero en realidad no *mucho* menor que 1.

Discusión Aunque la ecuación para la fuerza de arrastre del flujo de Stokes sobre una esfera (Ec. 10-12) se dedujo para un caso con Re << 1, es evidente que la aproximación es razonable hasta Re ≅ 1. Un cálculo más complicado, que incluye una corrección al número de Reynolds y una corrección con base en la trayectoria libre media de las moléculas de aire, produce una velocidad terminal de 0.110 m/s (Heinsohn y Cimbala, 2003); el error de la aproximación de flujo de Stokes es menor de 5 por ciento.

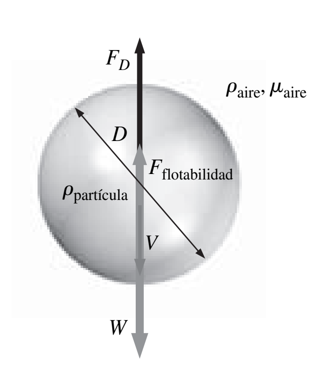


FIGURA 10-15
Una partícula que cae a una velocidad terminal estacionaria no tiene aceleración; en consecuencia, su peso se equilibra mediante la fuerza de arrastre aerodinámica y la de flotabilidad que actúa sobre la partícula.

En el ejemplo 10-2 se ve claramente una consecuencia de la desaparición de la densidad en las ecuaciones de movimiento para flujo de Stokes. A saber, la densidad del aire no es importante en todos los cálculos, excepto para verificar que el número de Reynolds es pequeño (note que, puesto que ρ_{aire} es tan pequeño en comparación con $\rho_{partícula}$, podría haberse ignorado la fuerza de flotabilidad con pérdida despreciable de precisión). En vez de ello, suponga que la densidad del aire fuera la mitad de la densidad real en el ejemplo 10.2, pero que todas las otras propiedades permanecieran invariables. La velocidad terminal sería la misma (a tres cifras significativas), excepto que el número de Reynolds sería más pequeño por un factor de 2. Por lo tanto:

> La velocidad terminal de una densa partícula pequeña en condiciones de flujo de Stokes es independiente de la densidad del fluido, pero considerablemente dependiente de la viscosidad del fluido.

Dado que la viscosidad del aire varía con la altitud en sólo casi 25 por ciento, una partícula se asienta a velocidad casi constante sin importar la elevación, aun cuando la densidad del aire aumente por más de un factor de 10 conforme la partícula cae desde una altitud de 50 000 ft (15 000 m) a nivel del mar.

Para objetos tridimensionales no-esféricos, la fuerza de arrastre de flujo de Stokes todavía está dada por F_D = constante · μVL; sin embargo, la constante no es 3π, pero depende de la forma y de la orientación del cuerpo. La constante puede considerarse como un tipo de **coeficiente de arrastre** para flujo de Stokes.

10-4 ▪ APROXIMACIÓN PARA REGIONES INVÍSCIDAS DE FLUJO

Existe confusión en la literatura de mecánica de fluidos acerca de la palabra **invíscida** y la expresión **flujo invíscido**. El significado aparente de invíscido es *no viscoso*. Por lo tanto, flujo invíscido parecería referirse a flujo de un fluido sin viscosidad. Sin embargo, ¡eso *no* es lo que se entiende por "flujo invíscido"! Todos los fluidos de importancia ingenieril tienen viscosidad, sin importar el campo de flujo. Los autores que usan la frase flujo invíscido en realidad se refieren al flujo de un *fluido viscoso* en una *región* del flujo donde *las fuerzas viscosas netas son despreciables en comparación con la presión y/o las fuerzas inerciales* (Fig. 10-16). Algunos autores usan la frase "flujo sin fricción" como sinónimo de flujo invíscido. Esto provoca más confusión, porque inclusive en regiones del flujo donde las fuerzas viscosas netas son despreciables, *la fricción no obstante actúa sobre elementos de fluido* y allí sin embargo pueden ser *esfuerzos viscosos* significativos. Es sólo que dichos esfuerzos se cancelan mutuamente, lo que no deja fuerza viscosa significativa *neta* sobre elementos de fluido. Puede demostrarse que en estas regiones, también hay *disipación viscosa* significativa. Como se comentó en la sección 10-5, los elementos de fluido en una región *irrotacional* del flujo también tienen fuerzas viscosas netas despreciables, no porque no exista fricción, sino porque los esfuerzos de fricción (viscosos) se cancelan mutuamente. Debido a la confusión causada por la terminología, los autores de este texto no recomiendan emplear las expresiones "flujo invíscido" y "flujo sin fricción". En vez de ello, recomiendan emplear las expresiones *regiones invíscidas de flujo* o *regiones de flujo con fuerzas viscosas netas despreciables*.

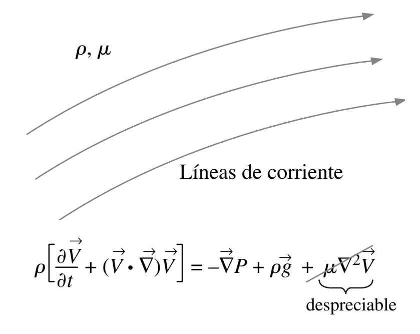


FIGURA 10-16
Una región invíscida de flujo es una región donde las fuerzas viscosas netas son despreciables en comparación con las fuerzas inerciales y/o de presión porque el número de Reynolds es grande; el fluido en sí, no obstante, es un fluido viscoso.

Sin importar la terminología empleada, si las fuerzas netas viscosas son muy pequeñas en comparación con las fuerzas inerciales y/o de presión, el último término en el lado derecho de la ecuación 10-6 es despreciable. Esto sólo es cierto si 1/Re es pequeño. Por lo tanto, las regiones invíscidas de flujo son regiones de *números de Reynolds altos*: lo contrario a regiones de flujo de Stokes. En estas regiones, la ecuación de Navier-Stokes (Ec. 10-2) pierde su término viscoso y se reduce a la **ecuación de Euler**:

Ecuación de Euler:
$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right]=-\vec{\nabla}P+\rho\vec{g} \qquad \textbf{(10-13)}$$

La ecuación de Euler simplemente es la ecuación de Navier-Stokes con la eliminación del término viscoso; es una *aproximación* de la ecuación de Navier-Stokes.

Debido a la condición de no-deslizamiento en las paredes sólidas, las fuerzas de fricción *no* son despreciables en una región de flujo muy cercana a una pared sólida. En esta región, llamada **capa límite**, los gradientes de velocidad normales a la pared son lo suficientemente grandes como para contrarrestar el pequeño valor de 1/Re. Otra explicación es que la longitud característica del cuerpo (L) ya no es la longitud más adecuada dentro de una capa límite y debe sustituirse por una longitud mucho más pequeña asociada con la distancia desde la pared. Cuando se define el número de Reynolds con esta longitud más pequeña, Re ya no es grande y el término viscoso en la ecuación de Navier-Stokes no puede despreciarse.

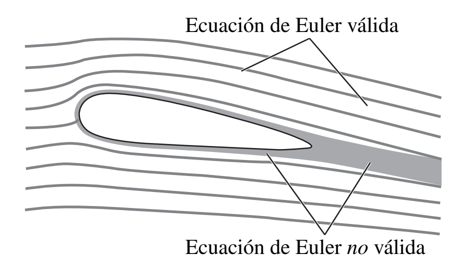


FIGURA 10-17
La ecuación de Euler es una aproximación de la ecuación de Navier-Stokes, apropiada sólo en regiones del flujo donde el número de Reynolds es grande y donde las fuerzas viscosas netas son despreciables en comparación con las fuerzas inerciales y/o de presión.

Un razonamiento similar puede hacerse para la *estela* de un cuerpo, donde los gradientes de velocidad son relativamente grandes y los términos viscosos no son despreciables en comparación con los términos inerciales (Fig. 10-17). En la práctica, por lo tanto, se pone en evidencia que:

> La aproximación de la ecuación de Euler es adecuada en regiones del flujo con número de Reynolds alto, donde las fuerzas viscosas netas son despreciables lejos de paredes y estelas.

El término que se desprecia en la aproximación de Euler de la ecuación de Navier-Stokes ($\mu\nabla^2\vec{V}$) es aquel que contiene las derivadas de velocidad de mayor orden. De manera matemática, la pérdida de este término reduce el número de condiciones de frontera que pueden especificarse. Note que cuando se usa la aproximación de ecuación de Euler, *no puede* especificarse la condición de frontera de no-deslizamiento en las paredes sólidas, aunque todavía se especifique que el fluido no puede fluir *a través* de la pared (la pared es *impermeable*). Por lo tanto, las soluciones de la ecuación de Euler no son físicamente significativas cerca de paredes sólidas porque al flujo se le permite deslizarse ahí. No obstante, como se muestra en la Sección 10-6, con frecuencia se usa la ecuación de Euler como el *primer paso* en una aproximación de capa límite. A saber, la ecuación de Euler se aplica sobre todo el campo de flujo, inclusive en regiones cerca de las paredes y estelas, donde se sabe que la aproximación es inapropiada. Entonces se inserta una delgada capa límite en dichas regiones como una corrección para explicar los efectos viscosos.

Derivación de la ecuación de Bernoulli en regiones invíscidas de flujo

En el capítulo 5 se dedujo la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente. Aquí se muestra otra derivación con base en la ecuación de Euler. Por sencillez, se supone flujo incompresible estacionario. El término convectivo en la ecuación 10-13 se puede reescribir con el uso de una identidad vectorial:

Identidad vectorial:
$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) \tag{10-14}$$

donde V es la magnitud del vector $\vec{V}$. El segundo término entre paréntesis en el lado derecho se reconoce como el *vector de vorticidad* $\vec{\zeta}$ (vea el capítulo 4); por lo tanto,

$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times\vec{\zeta}$$

y una forma opcional de la ecuación de Euler estacionaria se escribe como:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times\vec{\zeta} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{g} = \vec{\nabla}\left(-\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g} \tag{10-15}$$

donde se dividió cada término entre la densidad y se movió ρ bajo el operador gradiente, dado que la densidad es constante en un flujo incompresible.

Se hace la suposición ulterior de que la gravedad actúa sólo en la dirección $-z$ (Fig. 10-18), de modo que:

$$\vec{g} = -g\vec{k} = -g\vec{\nabla}z = \vec{\nabla}(-gz) \tag{10-16}$$

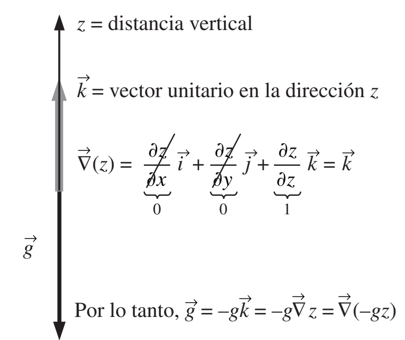


FIGURA 10-18
Cuando la gravedad actúa en la dirección $-z$, el vector gravedad $\vec{g}$ puede escribirse como $\vec{\nabla}(-gz)$.

donde se dijo que el gradiente de la coordenada z es un vector unitario $\vec{k}$ en la dirección z. Note también que g es una constante, lo que permite moverla (y el signo negativo) dentro del operador gradiente. La ecuación 10-16 se sustituye en

la ecuación 10-15 y se reordena cuando se combinan tres términos dentro de un operador gradiente:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz\right)=\vec{V}\times\vec{\zeta} \qquad \textbf{(10-17)}$$

A partir de la definición del producto cruz de dos vectores, $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, el vector $\vec{C}$ es perpendicular tanto a $\vec{A}$ como a $\vec{B}$. El lado izquierdo de la ecuación 10-17 debe ser por lo tanto un vector perpendicular en todas partes al vector de velocidad local $\vec{V}$, porque $\vec{V}$ aparece en el producto cruz en el lado derecho de la ecuación 10-17. Ahora, considere flujo a lo largo de una línea de corriente tridimensional (Fig. 10-19), que por definición en todas partes es *paralela* al vector de velocidad local. En todo punto a lo largo de la línea de corriente, $\vec{\nabla}(P/\rho + V^2/2 + gz)$ debe ser perpendicular a la línea de corriente. Ahora, desempolve el libro de álgebra vectorial y recuerde que el gradiente de un escalar apunta en la dirección de *máximo aumento* del escalar. Más aún, el gradiente de un escalar es un vector que apunta perpendicular a una superficie imaginaria sobre la que el escalar es constante. Por lo tanto, se afirma que el escalar $(P/\rho + V^2/2 + gz)$ debe ser *constante a lo largo de una línea de corriente*. Esto es cierto inclusive si el flujo es *rotacional* ($\vec{\zeta} \neq 0$). En consecuencia, se dedujo una versión de la ecuación de Bernoulli de flujo incompresible estacionario, apropiada en regiones de flujo con fuerzas viscosas netas despreciables; es decir: en las llamadas regiones invíscidas de flujo.

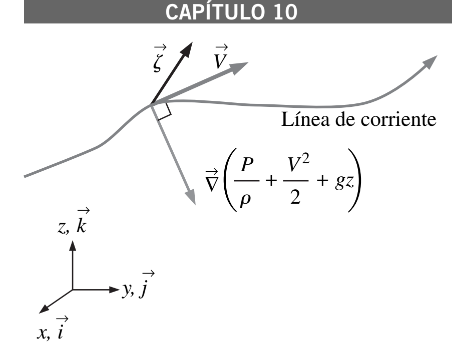


FIGURA 10-19
A lo largo de una línea de corriente, $\vec{\nabla}(P/\rho + V^2/2 + gz)$ es un vector perpendicular en todas partes a la línea de corriente; por lo tanto, $P/\rho + V^2/2 + gz$ es constante a lo largo de la línea de corriente.

Ecuación de Bernoulli de flujo incompresible estacionario en regiones invíscidas de flujo:

$$\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=C=\text{constante a lo largo de líneas de corriente} \qquad \textbf{(10-18)}$$

Note que la "constante" C de Bernoulli de la ecuación 10-18 es constante sólo a lo largo de una línea de corriente; la constante puede cambiar de línea de corriente a línea de corriente.

Es posible que el lector se pregunte si es físicamente posible tener una región rotacional de flujo que también es no viscosa, porque la rotacionalidad por lo general es *provocada* por la viscosidad. Sí, *es* posible, y se ofrece un ejemplo simple: flujo en *rotación de cuerpo sólido* (Fig. 10-20). Aunque la rotación pudo haberse *generado* por fuerzas viscosas, una región de flujo en rotación de cuerpo sólido *no tiene corte ni fuerza viscosa neta*; es una región invíscida de flujo, aunque también es rotacional. En consecuencia de la naturaleza rotacional de este campo de flujo, la ecuación 10-18 se aplica a cada línea de corriente en el flujo, pero la constante de Bernoulli C difiere de línea de corriente a línea de corriente, como se ilustra en la figura 10-20.

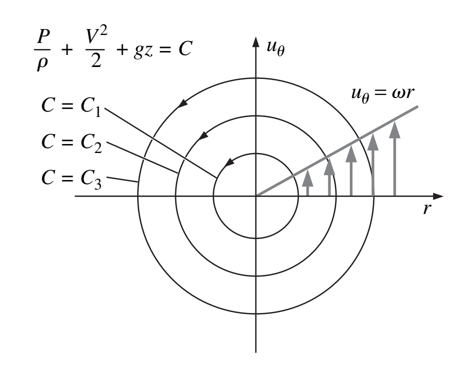


FIGURA 10-20
La rotación de cuerpo sólido es un ejemplo de una región no viscosa de flujo que también es rotacional. La constante de Bernoulli C difiere de línea de corriente a línea de corriente, pero es constante a lo largo de cualquier línea de corriente particular.

EJEMPLO 10-3 **Campo de presión de flujo en rotación de cuerpo sólido**

Un fluido rota como cuerpo rígido (rotación de cuerpo sólido) en torno al eje z como se ilustra en la figura 10-20. El campo de velocidad estacionario de fluido incompresible está dado por $u_r = 0$, $u_\theta = \omega r$, y $u_z = 0$. La presión en el origen es igual a P_0. Calcule el campo de presión en todas partes en el flujo y determine la constante de Bernoulli a lo largo de cada línea de corriente.

SOLUCIÓN Para un campo de velocidad dado, se debe calcular el campo de presión y la constante de Bernoulli a lo largo de cada línea de corriente.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Dado que no existe flujo en la dirección z (vertical), en la dirección vertical existe una distribución de presión hidrostática. **3** Todo el campo de flujo se aproxima como una región invíscida de flujo porque las fuerzas viscosas son cero. **4** No hay variación de cualquier variable de flujo en la dirección θ.

Análisis La ecuación 10-18 puede aplicarse directamente debido a la suposición 3:

Ecuación de Bernoulli:
$$P = \rho C - \frac{1}{2}\rho V^2 - \rho g z \qquad \textbf{(1)}$$

donde C es la constante de Bernoulli que varía con el radio como se ilustra en la figura 10-20. En cualquier posición radial r, $V^2 = \omega^2 r^2$, y la ecuación 1 se convierte en:

$$P = \rho C - \rho\frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho g z \qquad \textbf{(2)}$$

En el origen ($r = 0$, $z = 0$), la presión es igual a P_0 (a partir de la condición de frontera dada). Por lo tanto se calcula $C = C_0$ en el origen ($r = 0$):

Condición de frontera en el origen:
$$P_0 = \rho C_0 \qquad \rightarrow \qquad C_0 = \frac{P_0}{\rho}$$

Pero, ¿cómo puede encontrarse C en una posición radial arbitraria r? La ecuación 2 sola es insuficiente porque C y P son incógnitas. La respuesta es que se debe usar la ecuación de Euler. Dado que no existe superficie libre, se emplea la presión modificada de la ecuación 10-7. La componente r de la ecuación de Euler en coordenadas cilíndricas se reduce a:

Componente r de la ecuación de Euler:
$$\frac{\partial P'}{\partial r} = \rho\frac{u_\theta^2}{r} = \rho\omega^2 r \qquad \textbf{(3)}$$

donde se sustituyó el valor dado de u_θ. Dado que la presión hidrostática ya se incluyó en la presión modificada, P' no es función de z. Por las *hipótesis* 1 y 4, respectivamente, P' tampoco es función de t o θ. En consecuencia, P' es función *sólo* de r y se sustituye la derivada parcial en la ecuación 3 con una derivada total. La integración produce:

Campo de presión modificada:
$$P' = \rho\frac{\omega^2 r^2}{2} + B_1 \qquad \textbf{(4)}$$

donde B_1 es una constante de integración. En el origen, la presión modificada P' es igual a la presión real P, porque allí $z = 0$. Por lo tanto, la constante B_1 se encuentra al aplicar la condición de frontera de presión conocida en el origen. Se evidencia que B_1 es igual a P_0. Ahora la ecuación 4 se convierte de vuelta a la presión real con el uso de la ecuación 10-7, $P = P' - \rho g z$:

Campo de presión real:
$$\boldsymbol{P = \rho\frac{\omega^2 r^2}{2} + P_0 - \rho g z} \qquad \textbf{(5)}$$

En el plano de referencia ($z = 0$), se grafica la presión adimensional como función de radio adimensional, donde se elige alguna posición radial arbitraria $r = R$ como una escala de longitud característica en el flujo (Fig. 10-21). La distribución de presión es parabólica respecto a r.

Para finalizar, se igualan las ecuaciones 2 y 5 para resolver C:

Constante de Bernoulli como función de r:
$$\boldsymbol{C = \frac{P_0}{\rho} + \omega^2 r^2} \qquad \textbf{(6)}$$

En el origen, $C = C_0 = P_0/\rho$, que concuerda con el cálculo previo.

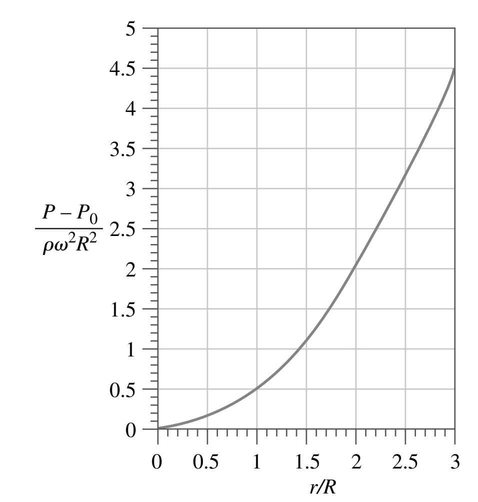


FIGURA 10-21
Presión adimensional como función de posición radial adimensional en elevación cero para un fluido en rotación de cuerpo sólido.

Discusión Para un fluido en rotación de cuerpo sólido, la constante de Bernoulli aumenta como r^2. Esto no es sorprendente, porque las partículas de fluido se mueven más rápido a valores más grandes de r, y por lo tanto poseen más energía. De hecho, la ecuación 5 revela que la presión misma aumenta como r^2. De manera física, el gradiente de presión en la dirección radial ofrece la fuerza centrípeta necesaria para mantener las partículas de fluido dando vueltas alrededor del origen.

10-5 ▪ LA APROXIMACIÓN DE FLUJO IRROTACIONAL

Como se indicó en el capítulo 4, existen regiones de flujo en donde las partículas de fluido *no tienen rotación neta*; estas regiones se llaman **irrotacionales**. Se debe tener en la mente que la suposición de irrotacionalidad es una *aproximación*, que puede ser apropiada en algunas regiones de un campo de flujo, pero no en otras (Fig. 10-22). En general, las regiones invíscidas de flujo lejanas de paredes sólidas y estelas de cuerpos son también irrotacionales, aunque, como ya se indicó, existen situaciones en las que una región invíscida de flujo puede *no* ser irrotacional (por ejemplo, flujo en rotación de cuerpo sólido). Las soluciones obtenidas para la clase de flujo definido por irrotacionalidad son por lo tanto *aproximaciones* de soluciones de ecuación de Navier-Stokes completa. De forma matemática, la aproximación es que la vorticidad es despreciablemente pequeña:

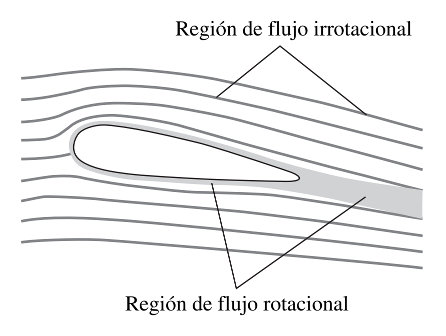


FIGURA 10-22
La aproximación de flujo irrotacional es adecuada sólo en ciertas regiones del flujo donde la vorticidad es despreciable.

Aproximación irrotacional: $$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \cong 0 \quad \textbf{(10-19)}$$

Ahora se examinará el efecto de esta aproximación en las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento.

Ecuación de continuidad

Si el lector sacude un poco más el polvo de su libro de álgebra, encontrará una identidad vectorial concerniente al rotacional del gradiente de cualquier función escalar ϕ, y por lo tanto el rotacional de cualquier vector $\vec{V}$

Identidad vectorial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0 \qquad \text{Por lo tanto, si } \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0, \text{ entonces } \vec{V} = \vec{\nabla}\phi. \quad \textbf{(10-20)}$$

Esto puede probarse con facilidad en coordenadas cartesianas (Fig. 10-23), pero se aplica a cualquier sistema coordenado ortogonal en tanto ϕ sea una función suave. En palabras, si el rotacional de un vector es cero, el vector puede expresarse como el gradiente de una función escalar ϕ, llamada **función potencial**. En mecánica de fluidos, el vector $\vec{V}$ es el vector velocidad, cuyo rotacional es el vector de vorticidad $\vec{\zeta}$, y por lo tanto a ϕ se le llama **función potencial de velocidad**. Se escribe:

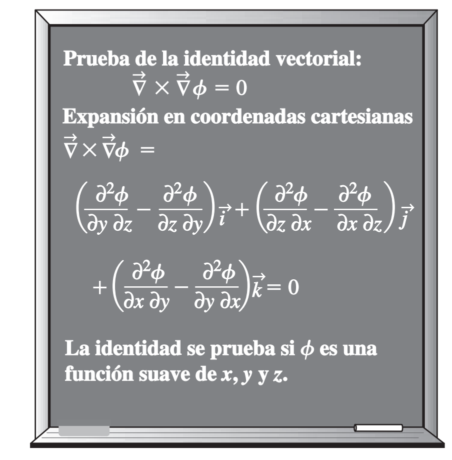


FIGURA 10-23
La identidad vectorial de la ecuación 10-20 se prueba con facilidad cuando se expanden los términos en coordenadas cartesianas.

Para regiones irrotacionales de flujo: $$\vec{V} = \vec{\nabla}\phi \quad \textbf{(10-21)}$$

Se debe subrayar que la convención de signos en la ecuación 10-21 no es universal: en algunos libros de mecánica de fluidos se inserta un signo negativo en la definición de la función potencial velocidad. En cualquier caso la ecuación 10-21 se establece como:

> En una región irrotacional de flujo, el vector velocidad puede expresarse como el gradiente de una función escalar llamada *función potencial de velocidad.*

Por lo tanto, las regiones de flujo irrotacional se llaman **regiones de flujo potencial**. Note que no ha habido restricción a flujos bidimensionales; la ecuación

10-21 es válida para campos de flujo totalmente tridimensionales, si la aproximación de irrotacionalidad es adecuada en la región de flujo en estudio. En coordenadas cartesianas:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{10-22}$$

y en coordenadas cilíndricas:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \qquad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{10-23}$$

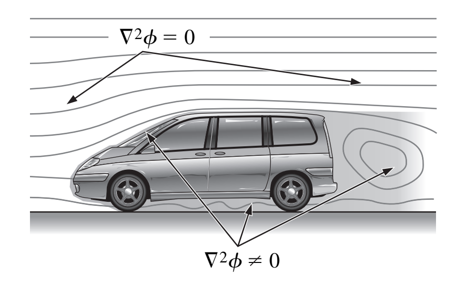


FIGURA 10-24
La ecuación de Laplace para función potencial de velocidad ϕ es válida tanto en dos como en tres dimensiones y en cualquier sistema coordenado, pero sólo en regiones irrotacionales de flujo (por lo general alejadas de paredes y estelas).

La utilidad de la ecuación 10-21 se vuelve evidente cuando se sustituye en la ecuación 10-1, la ecuación de continuidad de flujo incompresible: $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0$, o

Para regiones irrotacionales de flujo:
$$\nabla^2\phi = 0 \tag{10-24}$$

donde el **operador laplaciano** ∇^2 es un operador escalar definido como $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ y la ecuación 10-24 se llama **ecuación de Laplace**. Se subraya que la ecuación 10-24 es válida sólo en regiones donde la aproximación de flujo irrotacional es razonable (Fig. 10-24). En coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

y en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

La belleza de esta aproximación es que se combinaron tres componentes de velocidad desconocidas (u, v, y w, o u_r, u_θ, y u_z, dependiendo de la elección de sistema coordenado) en *una* variable escalar desconocida ϕ, con lo que se eliminan dos de las ecuaciones necesarias para una solución (Fig. 10-25). Después que se obtiene una solución de la ecuación 10-24 para ϕ, se pueden calcular las tres componentes del campo de velocidad con el uso de la ecuación 10-22 o de la 10-23.

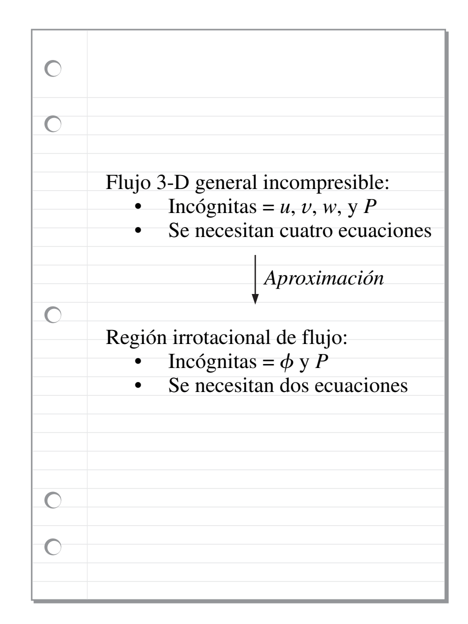


FIGURA 10-25
En regiones irrotacionales de flujo, tres componentes escalares desconocidas del vector de velocidad se combinan en *una* función escalar desconocida: la función potencial de velocidad.

La ecuación de Laplace es muy conocida dado que se muestra en varios campos de la física, las matemáticas aplicadas y la ingeniería. En la literatura están disponibles diversas técnicas de solución, tanto analíticas como numéricas. Las soluciones de la ecuación de Laplace están dominadas por la *geometría* (es decir, *condiciones de frontera*). Aunque la ecuación 10-24 viene de la conservación de masa, la masa en sí (o la densidad, que es masa por unidad de volumen) ha salido de la ecuación. Con un conjunto dado de condiciones de frontera que rodean toda la región irrotacional del campo de flujo, por tanto puede resolverse la ecuación 10-24 para ϕ, sin importar las propiedades del fluido. Después de que se calculó ϕ, puede entonces calcularse $\vec{V}$ en todas partes en esta región del campo de flujo (con el uso de la ecuación 10-21), inclusive,sin tener que resolver la ecuación de Navier-Stokes. La solución es válida para cualquier fluido incompresible, sin importar su densidad o su viscosidad, en regiones del flujo en las que la aproximación irrotacional es adecuada.

La solución es inclusive válida instantáneamente para un flujo *no-estacionario* porque el tiempo no aparece en la ecuación de continuidad de flujo incompresible. En otras palabras, en cualquier momento de tiempo, el campo de flujo incompresible instantáneamente se ajusta a sí mismo de modo que satisface la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera que existen en este momento de tiempo.

Ecuación de cantidad de movimiento

Ahora se vuelve la atención hacia la ecuación diferencial de conservación de cantidad de movimiento lineal: la ecuación de Navier-Stokes (Ec. 10-2). Se acaba de demostrar que, en una región irrotacional de flujo, puede obtenerse el campo de velocidad sin la aplicación de la ecuación de Navier-Stokes. ¿Por qué entonces se le necesita? La respuesta es que, ya establecido el campo de velocidad por medio del uso de la función potencial de velocidad, *la ecuación de Navier-Stokes se usa para resolver el campo de presión*. La ecuación de Navier-Stokes es la segunda ecuación necesaria que se mencionó en la figura 10-25 para solucionar dos incógnitas, ϕ y P, en una región irrotacional de flujo.

El análisis comienza con la aplicación de la aproximación de flujo irrotacional (Ec. 10-21) al término viscoso de la ecuación de Navier-Stokes (Ec. 10-2). Puesto que ϕ es una función suave, dicho término se convierte en:

$$\mu \nabla^2 \vec{V} = \mu \nabla^2 (\vec{\nabla} \phi) = \mu \vec{\nabla} (\underbrace{\cancel{\nabla^2 \phi}}_{0}) = 0$$

donde se aplicó la ecuación 10-24. En consecuencia, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la *ecuación de Euler* en regiones irrotacionales del flujo:

Para regiones irrotacionales de flujo:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} \qquad \textbf{(10-25)}$$

Se hace énfasis que, aunque se obtiene la misma ecuación de Euler como se hizo para la región invíscida de flujo (Ec. 10-13), el término viscoso desaparece aquí por una *razón diferente*, a saber, que el flujo en esta región se supone irrotacional en lugar de invíscido (Fig. 10-26).

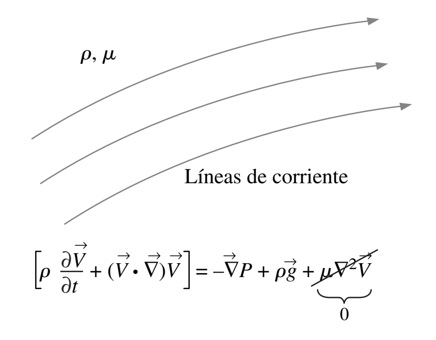


FIGURA 10-26
Una región irrotacional de flujo es una región donde las fuerzas viscosas netas son despreciables en comparación con las fuerzas inerciales y/o de presión debido a la aproximación irrotacional. Por lo tanto, todas las regiones irrotacionales de flujo son invíscidas, pero no todas las regiones invíscidas de flujo son irrotacionales. El fluido en sí todavía es un fluido viscoso en cualquier caso.

Deducción de la ecuación de Bernoulli en regiones irrotacionales de flujo

En la sección 10-4 se dedujo la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente para regiones invíscidas de flujo, con base en la ecuación de Euler. Ahora se hace una deducción similar comenzando con la ecuación 10-25 para regiones irrotacionales de flujo. Por sencillez, de nuevo se supone flujo estacionario incompresible. Se usa la misma identidad vectorial empleada anteriormente (Ec. 10-14), lo que conduce a la forma alternativa de la ecuación de Euler de la ecuación 10-15. Sin embargo, aquí el vector de vorticidad $\vec{\zeta}$ es despreciablemente pequeño, porque se considera una región irrotacional de flujo (Ec. 10-19). Por lo tanto, para gravedad que actúa en la dirección z negativa, la ecuación 10-17 se reduce a:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right) = 0 \qquad \textbf{(10-26)}$$

Entonces, se demuestra que, si el gradiente de cierta cantidad escalar (la cantidad entre paréntesis en la ecuación 10-26) es cero en todas partes, la cantidad escalar misma debe ser una constante. Por lo tanto, se genera la ecuación de Bernoulli para regiones irrotacionales de flujo:

Ecuación de Bernoulli de flujo incompresible estacionario en regiones irrotacionales de flujo:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C = \text{constante en todas partes} \qquad \textbf{(10-27)}$$

Es útil comparar las ecuaciones 10-18 y 10-27. En una región invíscida de flujo, la ecuación de Bernoulli se sostiene a lo largo de líneas de corriente, y la constante de Bernoulli puede cambiar de línea de corriente a línea de corriente.

Calcule ϕ a partir de continuidad: $\nabla^2\phi = 0$

↓

Calcule $\vec{V}$ a partir de irrotacionalidad: $\vec{V} = \vec{\nabla}$

↓

Calcule P a partir de Bernoulli:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C$$

FIGURA 10-27
Diagrama de flujo para obtener soluciones en una región irrotacional de flujo. El campo de velocidad se obtiene a partir de continuidad e irrotacionalidad, y luego la presión se obtiene a partir de la ecuación de Bernoulli.

En una región irrotacional de flujo, la constante de Bernoulli es la misma en todas partes, de modo que la ecuación de Bernoulli se sostiene en todas partes en la región irrotacional de flujo, incluso, a través de líneas de corriente. En consecuencia, *la aproximación irrotacional es más restrictiva que la aproximación invíscida*.

En la figura 10-27 se presenta un resumen de las ecuaciones y procedimientos de solución relevantes para regiones irrotacionales de flujo. En una región de flujo irrotacional, el campo de velocidad se obtiene primero cuando se resuelve la ecuación de Laplace para función potencial de velocidad ϕ (Ec. 10-24), seguido por la aplicación de la ecuación 10-21 para obtener el campo de velocidad. Para resolver la ecuación de Laplace, deben ofrecerse condiciones de frontera para ϕ en todas partes a lo largo de la frontera del campo de flujo de interés. Ya que se conoce el campo de velocidad, se usa la ecuación de Bernoulli (Ec. 10-27) para obtener el campo de presión, donde la constante de Bernoulli C se obtiene a partir de una condición de frontera sobre P en alguna parte del flujo.

El ejemplo 10-4 ilustra una situación en la que el campo de flujo consiste de dos regiones separadas: una región rotacional invíscida y una región irrotacional invíscida.

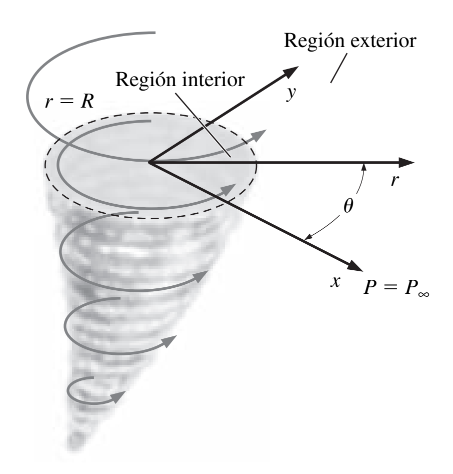


FIGURA 10-28
Una sección horizontal de un tornado puede modelarse mediante dos regiones: una región interior invíscida pero rotacional de flujo ($r < R$) y una región exterior irrotacional de flujo ($r > R$).

EJEMPLO 10-4 Modelo de dos regiones para un tornado

Un corte horizontal de un tornado (Fig. 10-28) se modela mediante dos regiones distintas. La *región interior* ($0 < r < R$) se modela por rotación de cuerpo sólido: una región rotacional pero invíscida de flujo, como ya se comentó. La *región exterior* ($r > R$) se modela como una región irrotacional de flujo. El flujo es bidimensional en el plano $r\theta$, y las componentes del campo de velocidad $\vec{V} = (u_r, u_\theta)$ están dadas por:

$$\textit{Componentes de velocidad:} \qquad u_r = 0 \qquad u_\theta = \begin{cases} \omega r & 0 < r < R \\ \dfrac{\omega R^2}{r} & r > R \end{cases} \tag{1}$$

donde ω es la magnitud de la velocidad angular en la región interior. La presión ambiental (lejos del tornado) es igual a P_∞. Calcule el campo de presión en una sección horizontal del tornado para $0 < r < \infty$. ¿Cuál es la presión en $r = 0$? Grafique los campos de presión y de velocidad.

SOLUCIÓN Se debe calcular el campo de presión $P(r)$ en una sección horizontal radial de un tornado para el que las componentes de velocidad se aproximan mediante la ecuación 1. También debe calcularse la presión en esta sección horizontal en $r = 0$.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Aunque R aumenta y ω disminuye con elevación creciente z, R y ω se suponen constantes cuando se considera una sección horizontal particular. **3** El flujo en el corte horizontal es bidimensional en el plano $r\theta$ (no hay dependencia de z y no hay componente w de velocidad). **4** Los efectos de la gravedad son despreciables dentro de un corte horizontal particular (desde luego, en la dirección z existe un campo de presión hidrostática adicional, pero éste no afecta la dinámica del flujo, como ya se comentó).

Análisis En la región interior, la ecuación de Euler es una aproximación adecuada de la ecuación de Navier-Stokes, y el campo de presión se encuentra mediante integración. En el ejemplo 10-3 se demostró que, para el flujo en rotación de cuerpo sólido:

$$\textit{Campo de presión en región interior } (r < R): \qquad P = \rho\frac{\omega^2 r^2}{2} + P_0 \tag{2}$$

donde P_0 es la presión (desconocida) en $r = 0$ y se despreció el término de gravedad. Dado que la región exterior es una región de flujo irrotacional, la ecuación de Bernoulli es adecuada y la constante de Bernoulli es la misma en todas partes desde $r = R$ hacia afuera hasta $r \to \infty$. La constante de Bernoulli se encuentra cuando se aplica la condición de frontera lejos del tornado, a saber, conforme $r \to \infty$, $u_\theta \to 0$ y $P \to P_\infty$ (Fig. 10-29). La ecuación 10-27 produce:

Conforme $r \to \infty$: $$\underbrace{\frac{P}{\rho}}_{P_\infty/\rho} + \underbrace{\cancel{\frac{V^2}{2}}}_{V \to 0 \text{ conforme } r \to \infty} + \underbrace{\cancel{gz}}_{\text{suposición 4}} = C \quad \to \quad C = \frac{P_\infty}{\rho} \qquad (3)$$

El campo de presión en cualquier parte en la región exterior se obtiene cuando se sustituye el valor de la constante C de la ecuación 3 en la ecuación de Bernoulli (Ec. 10-27). Cuando se desprecia la gravedad:

En la región exterior $(r > R)$: $$P = \rho C - \frac{1}{2}\rho V^2 = P_\infty - \frac{1}{2}\rho V^2 \qquad (4)$$

Note que $V^2 = u_\theta^2$. Después de sustituir la ecuación 1 por u_θ, la ecuación 4 se reduce a:

Campo de presión en la región exterior $(r > R)$: $$\boldsymbol{P = P_\infty - \frac{\rho}{2}\frac{\omega^2 R^4}{r^2}} \qquad (5)$$

En $r = R$, la interfase entre las regiones interior y exterior, la presión debe ser continua (no deben existir los saltos súbitos en P), como se ilustra en la figura 10-30. Cuando se igualan las ecuaciones 2 y 5 en esta interfase se produce:

Presión en $r = R$: $$P_{r=R} = \rho\frac{\omega^2 R^2}{2} + P_0 = P_\infty - \frac{\rho}{2}\frac{\omega^2 R^4}{R^2} \qquad (6)$$

a partir de la cual se encuentra P_0 en $r = 0$:

Presión en $r = 0$: $$\boldsymbol{P_0 = P_\infty - \rho\omega^2 R^2} \qquad (7)$$

La ecuación 7 ofrece el valor de la presión en medio del tornado: el ojo de la tormenta. Ésta es la presión más baja en el campo de flujo. La sustitución de la ecuación 7 en la ecuación 2 permite reescribir la ecuación 2 en términos de la presión ambiente de campo lejano dada P_∞,

En la región interior $(r < R)$: $$\boldsymbol{P = P_\infty - \rho\omega^2\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right)} \qquad (8)$$

En lugar de graficar P como función de r en esta sección horizontal, se grafica una distribución de presión *adimensional*, de modo que la gráfica es válida para *cualquier* sección horizontal. En términos de variables adimensionales:

Región interior $(r < R)$: $$\frac{u_\theta}{\omega R} = \frac{r}{R} \qquad \frac{P - P_\infty}{\rho\omega^2 R^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1$$

Región exterior $(r > R)$: $$\frac{u_\theta}{\omega R} = \frac{R}{r} \qquad \frac{P - P_\infty}{\rho\omega^2 R^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \qquad (9)$$

La figura 10-31 muestra la velocidad tangencial adimensional y la presión adimensional como funciones de la posición radial adimensional.

Discusión En la región exterior, la presión aumenta conforme la velocidad disminuye: un resultado directo de la ecuación de Bernoulli, que se aplica con la *mis-*

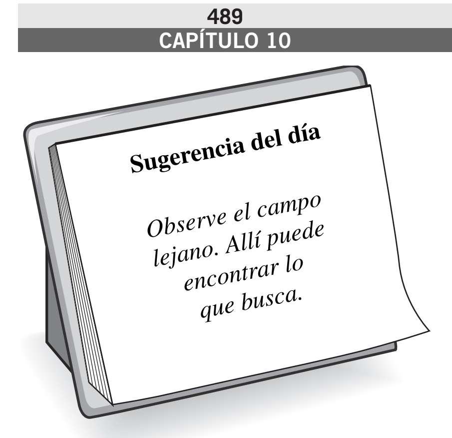
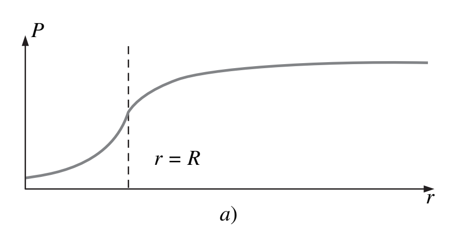


FIGURA 10-29
Un lugar adecuado para obtener las condiciones de frontera para este problema es el campo lejano; esto es cierto para muchos problemas de mecánica de fluidos.



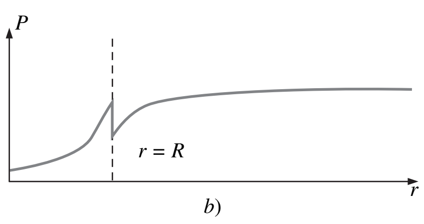


FIGURA 10-30
Para que el modelo del tornado sea válido, la presión puede tener una discontinuidad en la *pendiente* en $r = R$, pero ahí no puede tener un salto súbito de valor; *a*) es válida, pero *b*) no lo es.

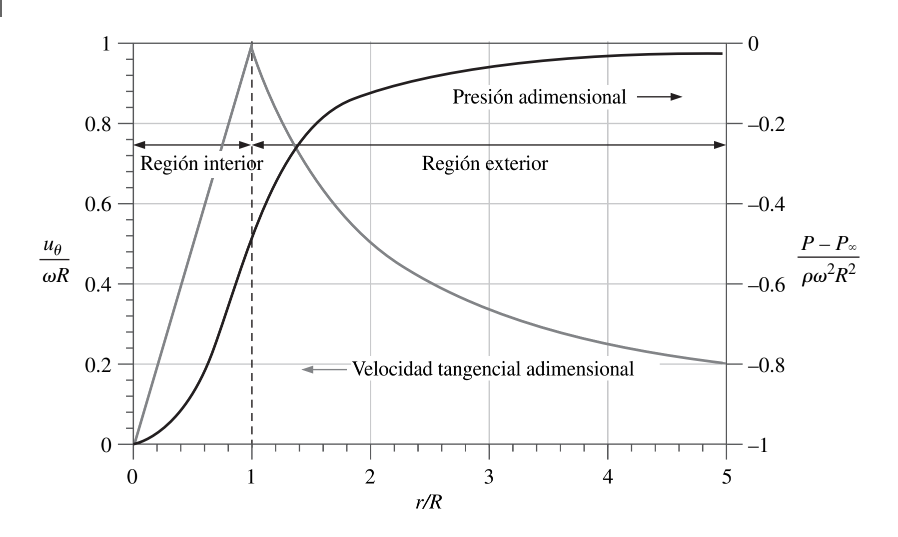


FIGURA 10-31
Distribución de velocidad tangencial adimensional (curva gris) y distribución de presión adimensional (curva negra) a lo largo de una sección horizontal radial de un tornado. Se marcan las regiones interior y exterior del flujo.

ma constante de Bernoulli en todas partes en la región exterior. Se le aconseja calcular P en la región exterior por otro método: integración directa de la ecuación de Euler sin usar la ecuación de Bernoulli; debe obtenerse el mismo resultado. En la región interior, P aumenta parabólicamente con r aun cuando la velocidad también aumenta; esto se debe a que la constante de Bernoulli cambia de línea de corriente a línea de corriente (como también se puntualizó en el ejemplo 10-3). Note que, aun cuando exista discontinuidad en la pendiente de la velocidad tangencial en $r/R = 1$, la presión tiene una transición bastante suave entre las regiones interior y exterior. La presión es más baja en el centro del tornado y se eleva a presión atmosférica en el campo lejano (Fig. 10-32). Para finalizar, el flujo en la región interior es *rotacional* pero *invíscido*, porque la viscosidad no interviene en dicha región del flujo. El flujo en la región exterior es *irrotacional* e *invíscido*. Sin embargo, note que la viscosidad todavía actúa sobre las partículas de fluido en la región exterior (la viscosidad provoca que las partículas de fluido se deformen y distorsionen, aun cuando la *fuerza viscosa neta* sobre cualquier partícula de fluido en la región exterior es cero).

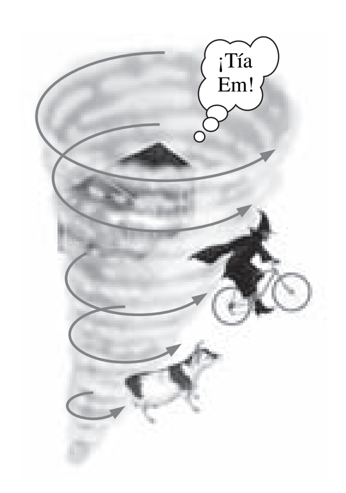


FIGURA 10-32
La presión más baja ocurre en el centro del tornado, y el flujo en esta región se puede aproximar por medio de flujo en rotación de cuerpo sólido.

Regiones irrotacionales bidimensionales de flujo

En regiones irrotacionales de flujo, las ecuaciones 10-24 y 10-21 se aplican tanto para campos de flujo bidimensional como tridimensional, y se resuelven para el campo de velocidad en dichas regiones cuando se resuelve la ecuación de Laplace para función potencial de velocidad ϕ. Si el flujo también es *bidimensional*, es posible usar la *función de corriente* (Fig. 10-33). La aproximación bidimensional no se limita a flujo en el plano xy, ni se limita a coordenadas cartesianas. De hecho, se puede suponer bidimensionalidad en cualquier región del flujo donde sólo son importantes *dos* direcciones de movimiento y donde no exista variación significativa en la tercera dirección. Los dos ejemplos más comunes son el **flujo planar** (flujo en un plano con variación despreciable en la dirección normal al plano) y el **flujo axisimétrico** (flujo en el que existe simetría rotacional en torno a algún eje). También puede elegirse trabajar en coordenadas cartesianas, coordenadas cilíndricas o coordenadas esféricas, dependiendo de la geometría del problema.

Regiones de flujo planar irrotacional

Primero se considerará flujo planar irrotacional porque es el más simple. Para una región de flujo estacionario, planar e irrotacional de fluido incompresible, la ecuación de Laplace para ϕ, en el plano xy en coordenadas cartesianas (Fig. 10-34), es:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad \textbf{(10-28)}$$

Para flujo planar de fluido incompresible en el plano xy, la función de corriente ψ se define como (capítulo 9):

Función de corriente:
$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \textbf{(10-29)}$$

Note que la ecuación 10-29 se sostiene ya sea que la región de flujo sea rotacional o irrotacional. De hecho, la función de corriente se *define* de tal modo que siempre satisface la ecuación de continuidad, sin importar la rotacionalidad. Si la aproximación se restringe a regiones *irrotacionales* de flujo, la ecuación 10-19 también debe sostenerse; a saber: la vorticidad es cero o despreciablemente pequeña. Para flujo bidimensional general en el plano xy, la componente z de vorticidad es la única componente distinta de cero. Por lo tanto, en una región irrotacional de flujo:,

$$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

La sustitución de la ecuación 10-29 en esta ecuación produce:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

En esta última ecuación se reconoce el operador laplaciano. Por lo tanto:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \quad \textbf{(10-30)}$$

Se llega a la conclusión de que la ecuación de Laplace es aplicable, no sólo para ϕ (Ec. 10-28), sino también para ψ (Ec. 10-30) en regiones de flujo planar, estacionario e irrotacional de fluido incompresible.

Las curvas de valores constantes de ψ definen *líneas de corriente* del flujo, mientras que las curvas de valores constantes de ϕ definen **líneas equipotenciales** (note que algunos autores usan la frase *líneas equipotenciales* para referirse tanto a líneas de corriente *como* a líneas de ϕ constante en vez de exclusivamente para líneas de ϕ constante. En regiones planares e irrotacionales de flujo, las líneas de corriente intersecan líneas equipotenciales en ángulos rectos, una condición conocida como **ortogonalidad mutua** (Fig. 10-35). Además, las funciones potenciales ψ y ϕ están estrechamente relacionadas una con otra: ambas satisfacen la ecuación de Laplace, y a partir o de ψ o de ϕ puede determinarse el campo de velocidad. Los matemáticos llaman a las soluciones de ψ y ϕ **funciones armónicas**, y a ψ y ϕ las llaman **funciones armónicas conjugadas** una de otra. Aunque ψ y ϕ están relacionadas, sus orígenes son un tanto opuestos; a lo mejor es preferible decir que ψ y ϕ son *complementarias* una de otra:

- *La función de corriente se define por continuidad; la ecuación de Laplace para ψ resulta de irrotacionalidad.*
- *El potencial de velocidad se define por irrotacionalidad; la ecuación de Laplace para ϕ resulta de continuidad.*

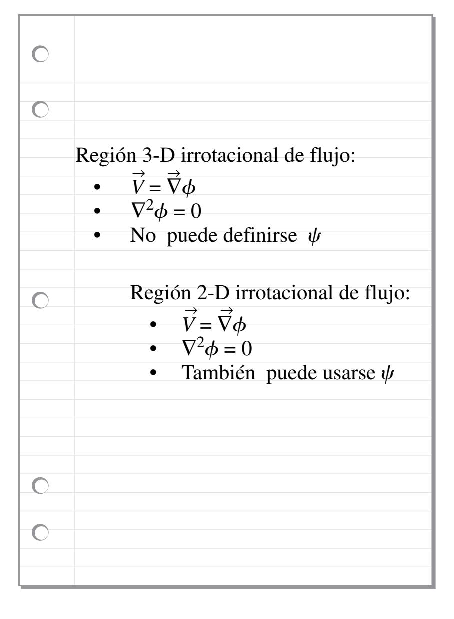


FIGURA 10-33
El flujo bidimensional es un *subconjunto* de flujo tridimensional; en regiones bidimensionales de flujo se puede definir una función de corriente, pero no puede hacerse así en flujo tridimensional. Sin embargo, la función potencial de velocidad se puede definir para cualquier región *irrotacional* de flujo.

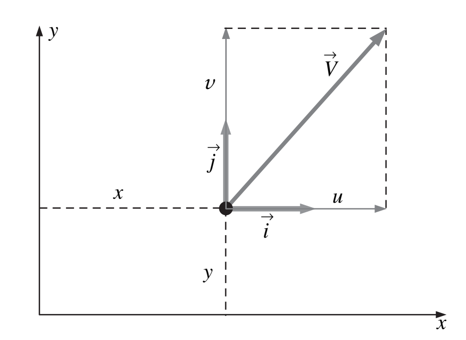


FIGURA 10-34
Componentes de velocidad y vectores unitarios en coordenadas cartesianas para flujo planar bidimensional en el plano xy. No hay variación normal a este plano.

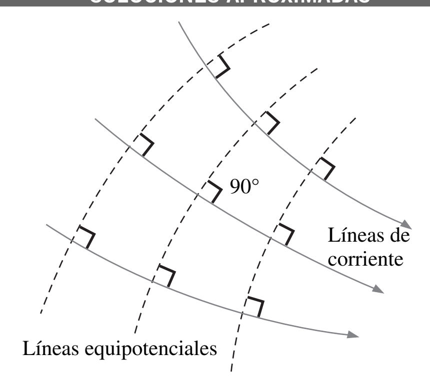


FIGURA 10-35
En regiones de flujo planar e irrotacional, las curvas de ϕ constante (líneas equipotenciales) y las curvas de ψ constante (líneas de corriente) son mutuamente ortogonales, lo que significa que en todas partes se intersecan en ángulos de 90°.

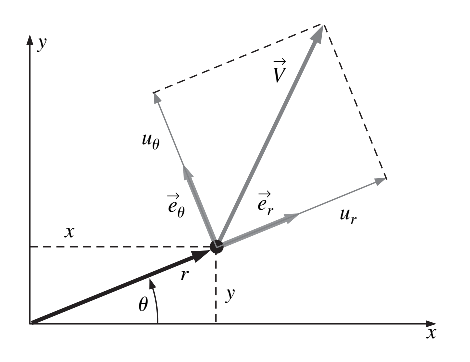


FIGURA 10-36
Componentes de velocidad y vectores unitarios en coordenadas cilíndricas para flujo planar en el plano $r\theta$. No hay variación normal a este plano.

En la práctica, puede realizarse un análisis de flujo potencial con ψ o con ϕ, y deben lograrse los mismos resultados de cualquier manera. Sin embargo, con frecuencia es más conveniente usar ψ porque las condiciones de frontera sobre ψ por lo general son más fáciles de especificar.

El flujo planar en el plano xy también puede describirse en coordenadas cilíndricas (r, θ) y (u_r, u_θ), como se muestra en la figura 10-36. De nuevo, no hay componente z de velocidad, y la velocidad no varía en la dirección z. En coordenadas cilíndricas:

Ecuación de Laplace en (r, θ), flujo planar:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}=0 \qquad \textbf{(10-31)}$$

La función de corriente ψ para flujo planar en coordenadas cartesianas se define mediante la ecuación 10-29, y la condición de irrotacionalidad provoca que ψ también satisfaga la ecuación de Laplace. En coordenadas cilíndricas se realiza un análisis similar. Recuerde del capítulo 9:

Función de corriente:

$$u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad u_\theta=-\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad \textbf{(10-32)}$$

Se deja como ejercicio que el lector demuestre que la función de corriente definida por la ecuación 10-32 también satisface la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para regiones de flujo bidimensional planar e irrotacional (verifique sus resultados al sustituir ϕ por ψ en la ecuación 10-31 para obtener la ecuación de Laplace para la función de corriente).

Regiones irrotacionales de flujo axisimétrico

El *flujo axisimétrico* es un caso especial de flujo bidimensional que puede describirse en coordenadas cilíndricas o en coordenadas esféricas. En coordenadas cilíndricas, r y z son las variables espaciales relevantes, y u_r y u_z son las componentes de velocidad distintas de cero (Fig. 10-37). No hay dependencia del ángulo θ porque la simetría rotacional se define alrededor del eje z. Éste es un tipo de flujo bidimensional porque sólo existen dos variables espaciales independientes, r y z (imagine rotar la componente radial r en la figura 10-37 en la dirección θ alrededor del eje z sin cambiar la magnitud de r). Debido a la simetría rotacional alrededor del eje z, las magnitudes de las componentes de velocidad u_r y u_z permanecen invariables después de tal rotación. La ecuación de Laplace para la función potencial de velocidad ϕ para el caso de regiones irrotacionales de flujo axisimétrico en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0$$

Con la finalidad de obtener expresiones para la función de corriente para flujo axisimétrico, se comienza con la ecuación de continuidad de fluido incompresible en coordenadas r y z:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \qquad \textbf{(10-33)}$$

Después de algo de transformaciones algebraicas, se define una función de corriente que idénticamente satisface la ecuación 10-33:

Función de corriente:

$$u_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad u_z=\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Cuando se sigue el mismo procedimiento que para el flujo planar, se genera una ecuación para ψ para regiones irrotacionales de flujo axisimétrico al forzar que la vorticidad sea cero. En este caso, sólo es relevante la componente θ de vorticidad porque el vector de velocidad siempre yace en el plano rz. Por lo tanto, en una región de flujo irrotacional:

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0$$

Después de sacar r de la derivada z (porque r no es función de z), se obtiene:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \qquad \textbf{(10-34)}$$

Note que la ecuación 10-34 *no* es la misma que la ecuación de Laplace para ψ. No puede usarse la ecuación de Laplace para la función de corriente en regiones irrotacionales de flujo axisimétrico (Fig. 10-38).

> Para regiones irrotacionales de flujo planar, la ecuación de Laplace es válida tanto para ϕ como para ψ; pero para regiones irrotacionales de flujo axisimétrico, la ecuación de Laplace es válida para ϕ, pero no para ψ.

Una consecuencia directa de este enunciado es que las curvas de ψ constante y las curvas de ϕ constante en regiones irrotacionales de flujo axisimétrico *no* son mutuamente ortogonales. Ésta es una diferencia fundamental entre los flujos planar y axisimétrico. Para finalizar, aun cuando la ecuación 10-34 no sea la misma que la ecuación de Laplace, no obstante es una ecuación diferencial parcial *lineal*. Esto permite usar la técnica de superposición o con ψ o con ϕ cuando se resuelve el campo de flujo en regiones irrotacionales de flujo axisimétrico. La superposición se trata más adelante.

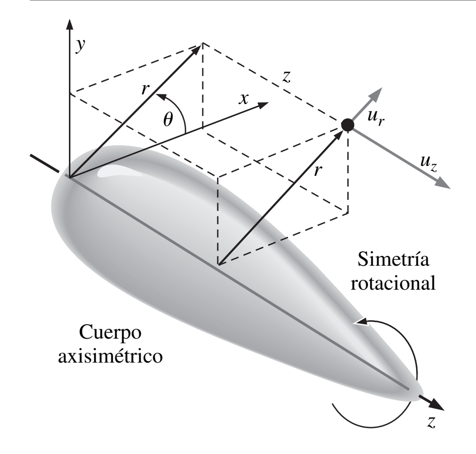


FIGURA 10-37
Flujo sobre un cuerpo axisimétrico en coordenadas cilíndricas con simetría rotacional alrededor del eje z. Ni la geometría ni el campo de velocidad dependen de θ; y $u_\theta = 0$.

Resumen de regiones irrotacionales de flujo bidimensional

En la tabla 10-2 se resumen las ecuaciones para las componentes de velocidad tanto para regiones irrotacionales de flujo planar como axisimétrico.

TABLA 10-2

Componentes de velocidad para regiones irrotacionales de flujo bidimensional y estacionario de fluido incompresible en términos de función potencial de velocidad y función de corriente en varios sistemas coordenados

Descripción y sistema coordenado	Componente de velocidad 1	Componente de velocidad 2
Planar; coordenadas cartesianas	$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$	$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$
Planar; coordenadas cilíndricas	$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$	$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$
Axisimétrico; coordenadas cilíndricas	$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}$	$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}$



FIGURA 10-38
La ecuación para la función de corriente en flujo axisimétrico e irrotacional (Ec. 10-34) *no* es la ecuación de Laplace.

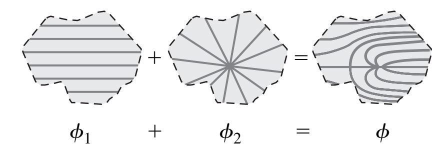


FIGURA 10-39
La superposición es el proceso de sumar dos o más soluciones de flujo irrotacional para generar una tercera solución (más complicada).

Superposición de flujo en regiones irrotacionales

Puesto que la ecuación de Laplace es una ecuación diferencial homogénea *lineal*, la combinación lineal de dos o más soluciones de la ecuación también debe ser una solución. Por ejemplo, si ϕ_1 y ϕ_2 son cada una soluciones de la ecuación de Laplace, entonces $A\phi_1$, $(A + \phi_1)$, $(\phi_1 + \phi_2)$, y $(A\phi_1 + B\phi_2)$ también son soluciones, donde A y B son constantes arbitrarias. Por extensión, pueden combinarse *varias* soluciones de la ecuación de Laplace, y está garantizado que la combinación también es una solución. Si una región de flujo irrotacional se modela mediante la suma de dos o más campos separados de flujo irrotacional, por ejemplo, una fuente ubicada en un flujo libre, se puede simplemente sumar las funciones potenciales de velocidad de cada flujo individual para describir el campo de flujo combinado. Este proceso de sumar dos o más soluciones conocidas para crear una tercera solución más complicada se conoce como **superposición** (Fig. 10-39).

Para el caso de regiones irrotacionales de flujo bidimensional, se puede realizar un análisis similar con el uso de la *función de corriente* en vez de la función potencial de velocidad. Se subraya que el concepto de superposición es útil, pero sólo es válido para campos de flujo *irrotacional,* donde las ecuaciones para ϕ y ψ son *lineales*. Debe tenerse cuidado de garantizar que los dos campos de flujo que se desea sumar vectorialmente sean ambos irrotacionales. Por ejemplo, el campo de flujo para un chorro nunca se sumará al campo de flujo para una entrada o para un flujo libre, porque el campo de velocidad asociado con un chorro es sumamente afectado por la viscosidad, no es irrotacional y no puede describirse mediante funciones potenciales.

También resulta que, puesto que la función potencial del campo compuesto es la suma de las funciones potenciales de los campos de flujo individuales, la velocidad en cualquier punto en el campo compuesto es la *suma vectorial* de las velocidades de los campos de flujo individuales. Esto se prueba en coordenadas cartesianas cuando se considera un campo irrotacional de flujo planar que es la superposición de dos campos irrotacionales de flujos planares independientes denotados con los subíndices 1 y 2. La función potencial de velocidad compuesta está dada por:

Superposición de dos campos de flujo irrotacional: $\phi = \phi_1 + \phi_2$

Cuando se usan las ecuaciones para flujo irrotacional planar en coordenadas cartesianas de la tabla 10-2, la componente x de velocidad del flujo compuesto es:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = u_1 + u_2$$

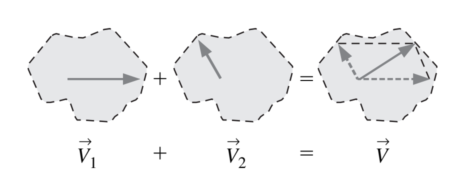


FIGURA 10-40
En la superposición de dos soluciones de flujo irrotacional, los dos vectores de velocidad en cualquier punto en la región del flujo se suman vectorialmente para producir la velocidad compuesta en este punto.

Es posible generar una expresión análoga para v. En consecuencia, la superposición permite sumar vectorialmente las velocidades individuales en cualquier posición en la región del flujo, para obtener la velocidad del campo de flujo compuesto en esta posición (Fig. 10-40).

Campo de velocidad compuesto a partir de superposición: $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ **(10-35)**

Flujos planares irrotacionales elementales

La superposición permite sumar dos o más soluciones simples de flujo irrotacional para crear un campo de flujo más complejo (y con la esperanza de ser más significativo físicamente). Por lo tanto, es útil establecer una colección de flujos irrotacionales que sirvan como *bloques de construcción* elementales con los que se pueda construir una diversidad de flujos más prácticos (Fig. 10-41). Los flu-

jos planares irrotacionales elementales se describen en coordenadas xy y/o $r\theta$, dependiendo de cuál par sea más útil en un problema particular.

Bloque de construcción 1: corriente uniforme

El flujo de bloque de construcción más simple en el que se puede pensar es la **corriente uniforme** de flujo que se mueve con velocidad constante V en la dirección x (de izquierda a derecha). En términos del potencial de velocidad y la función de corriente (Tabla 10-2):

Corriente uniforme: $$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Cuando se integra la primera de éstas respecto a x y luego se diferencia el resultado respecto a y, se genera una expresión para la función potencial de velocidad para una corriente uniforme:

$$\phi = Vx + f(y) \qquad \rightarrow \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = f'(y) = 0 \qquad \rightarrow \qquad f(y) = \text{constante}$$

La constante es arbitraria, porque las componentes de velocidad siempre son derivadas de ϕ. La constante se hace igual a cero, cuando se conoce que siempre se puede sumar una constante arbitraria más tarde si así se desea. Por lo tanto:

Función potencial de velocidad para una corriente uniforme: $$\phi = Vx \tag{10-36}$$

En forma similar se genera una expresión para la función de corriente para este flujo irrotacional planar elemental:

Función de corriente para un flujo uniforme: $$\psi = Vy \tag{10-37}$$

En la figura 10-42 se muestran varias líneas de corriente y líneas equipotenciales para flujo uniforme. Note la ortogonalidad mutua.

Con frecuencia es conveniente expresar la función de corriente y la función potencial de velocidad en coordenadas cilíndricas en vez de coordenadas rectangulares, en particular cuando se superpone una corriente uniforme con algún otro flujo irrotacional plano. Las relaciones de conversión se obtienen a partir de la geometría de la figura 10-36:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{10-38}$$

A partir de la ecuación 10-38 y un poco de trigonometría, se deducen relaciones para u y v en términos de coordenadas cilíndricas:

Transformación: $$u = u_r\cos\theta - u_\theta\,\text{sen}\,\theta \qquad v = u_r\,\text{sen}\theta + u_\theta\cos\theta \tag{10-39}$$

En coordenadas cilíndricas, las ecuaciones 10-36 y 10-37 para ϕ y ψ se convierten en:

Flujo uniforme: $$\phi = Vr\cos\theta \qquad \psi = Vr\,\text{sen}\,\theta \tag{10-40}$$

El flujo uniforme puede modificarse de modo que el flujo fluya uniformemente con la velocidad V en un ángulo de inclinación α respecto al eje x. Para esta situación, $u = V\cos\alpha$ y $v = V\,\text{sen}\,\alpha$ como se muestra en la figura 10-43. Se deja como ejercicio demostrar que la función potencial de velocidad y la función de corriente para un flujo uniforme inclinado un ángulo α son:

Flujo uniforme inclinado un ángulo α: $$\phi = V(x\cos\quad + y\,\text{sen}\,\alpha) \qquad \psi = V(y\cos\quad - x\,\text{sen}\,\alpha) \tag{10-41}$$

Cuando es necesario, la ecuación 10-41 puede convertirse fácilmente a coordenadas cilíndricas mediante la ecuación 10-38.

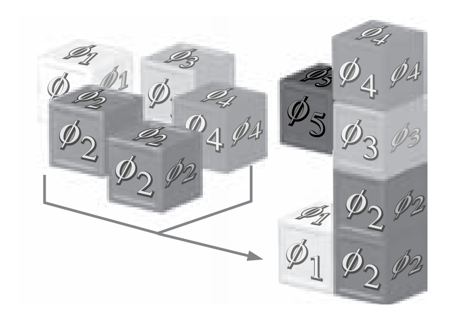


FIGURA 10-41
Con la superposición se puede construir un complicado campo de flujo irrotacional al sumar campos elementales de flujo irrotacional como "bloques de construcción".

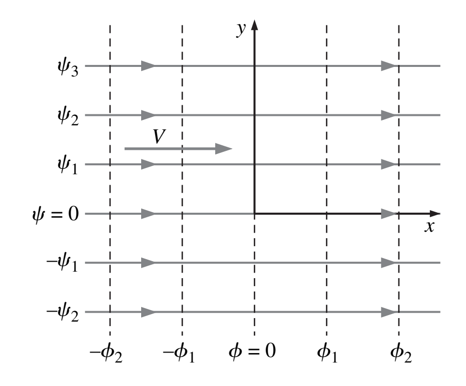


FIGURA 10-42
Líneas de corriente (sólidas) y líneas equipotenciales (a rayas) para un flujo uniforme en la dirección x.

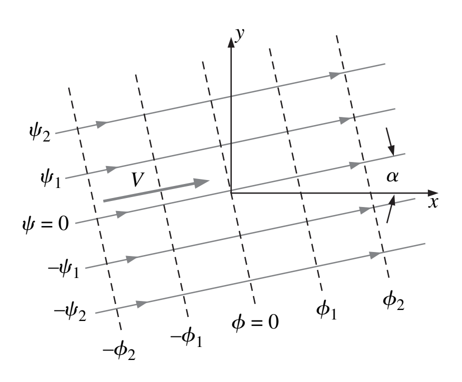


FIGURA 10-43
Líneas de corriente (sólidas) y líneas equipotenciales (a rayas) para un flujo uniforme inclinado un ángulo α.

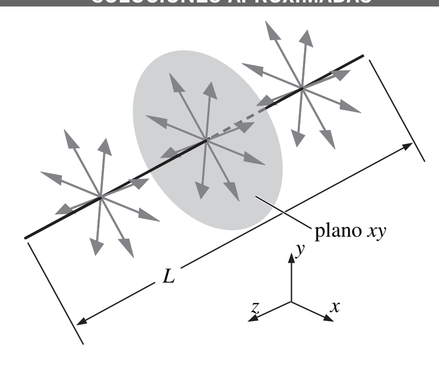


FIGURA 10-44
Fluido que emerge de manera uniforme de un segmento finito de longitud L. Conforme L tiende a infinito, el flujo se vuelve una fuente lineal y el plano xy se toma como normal al eje de la fuente.

Bloque de construcción 2: fuente o sumidero lineal

El segundo bloque de construcción es una fuente lineal. Imagine un segmento de longitud L paralelo al eje z, a lo largo del cual el fluido emerge y fluye de manera uniforme hacia afuera en todas direcciones normal al segmento (Fig. 10-44). El flujo volumétrico total es igual a $\dot{V}$. Conforme la longitud L tiende a infinito, el flujo se vuelve bidimensional en planos perpendiculares a la línea y la línea de la cual emerge el fluido se llama **fuente lineal**. Para una línea infinita, $\dot{V}$ también tiende a infinito; por lo tanto, es más conveniente considerar el *flujo volumétrico por unidad de profundidad*, $\dot{V}/L$, llamado **intensidad de fuente lineal** (que por lo general se le da el símbolo m).

Un **sumidero lineal** es lo opuesto a una fuente lineal; el fluido fluye *hacia* la línea desde todas direcciones en planos normales al eje del sumidero lineal. Por regla, $\dot{V}/L$ positivo significa una fuente lineal y $\dot{V}/L$ negativo significa un sumidero lineal.

El caso más simple ocurre cuando la fuente lineal se ubica en el origen del plano xy, con la línea misma sobre el eje z. En el plano xy, la fuente lineal parece un punto en el origen desde el cual el fluido se dispersa hacia afuera en todas direcciones en el plano (Fig. 10-45). A cualquier distancia radial r desde la fuente lineal, la componente de velocidad radial u_r se encuentra al aplicar la ley de conservación de masa. A saber, todo el flujo volumétrico por unidad de profundidad que emerge de la fuente lineal debe pasar a través del círculo definido por el radio r. En consecuencia:

$$\frac{\dot{V}}{L} = 2\pi r u_r \qquad u_r = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} \tag{10-42}$$

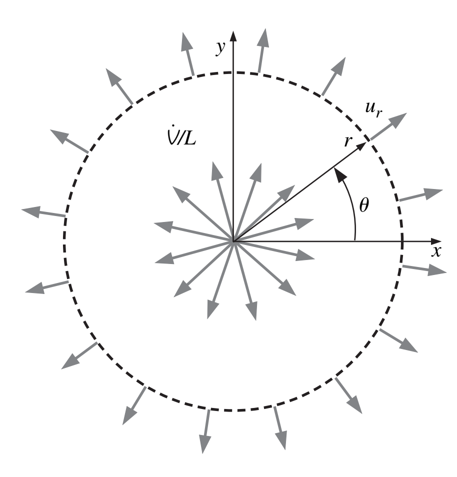


FIGURA 10-45
Fuente lineal de intensidad $\dot{V}/L$ que se ubica en el origen en el plano xy; el flujo volumétrico total por unidad de profundidad a través de un círculo de cualquier radio r debe ser igual a $\dot{V}/L$ sin importar el valor de r.

Evidentemente, u_r disminuye con r creciente, como se esperaría. Note también que u_r es infinito en el origen pues r es cero en el denominador de la ecuación 10-42. A esto se le llama **punto singular** o **singularidad**; en realidad carece de sentido físico, pero se debe tener en la mente que el flujo irrotacional planar es puramente una *aproximación* y la fuente lineal no obstante es útil como bloque de construcción para superposición de flujos irrotacionales. En tanto se esté lejos de la vecindad inmediata del centro de la fuente lineal, el resto del campo de flujo producido por la superposición de una fuente lineal y otro(s) bloque(s) de construcción no obstante puede ser una buena representación de una región irrotacional de flujo en un campo de flujo físicamente real.

Ahora, se generan expresiones para la función potencial de velocidad y la función de corriente para una fuente lineal de intensidad $\dot{V}/L$. Se usan coordenadas cilíndricas y se comienza con la ecuación 10-42 para u_r, y también se reconoce que u_θ es cero en todas partes. Cuando se usa la Tabla 10-2, las componentes de velocidad son:

Fuente lineal:
$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

Para generar la función de corriente, se elige (arbitrariamente) una de estas ecuaciones (aquí se elige la segunda), se integra respecto a r y luego se diferencia respecto a la otra variable, θ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -u_\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \psi = f(\theta) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = f'(\theta) = r u_r = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}$$

a partir de la cual se integra para obtener:

$$f(\theta) = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta + \text{constante}$$

De nuevo la constante arbitraria de integración se hace igual a cero, ya que puede sumarse de vuelta una constante como se desee en cualquier momento sin

cambiar al flujo. Después de un análisis similar para ϕ, se obtienen las siguientes expresiones para una fuente lineal en el origen:

Fuente lineal en el origen: $$\phi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\ln r \quad \text{y} \quad \psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta \tag{10-43}$$

En la figura 10-46 se bosquejan varias líneas de corriente y líneas equipotenciales para una fuente lineal. Como se esperaba, las líneas de corriente son *rayos* (líneas de θ constante), y las líneas equipotenciales son *círculos* (líneas de r constante). Las líneas de corriente y líneas equipotenciales son mutuamente ortogonales en todas partes, excepto en el origen, un punto de singularidad.

En situaciones donde se quiera colocar una fuente lineal en alguna otra parte distinta al origen, debe transformarse cuidadosamente la ecuación 10-43. En la figura 10-47 se bosqueja una fuente ubicada en algún punto arbitrario (a, b) en el plano xy. r_1 se define como la distancia desde la fuente hasta algún punto P en el flujo, donde P se ubica en (x, y) o (r, θ). De manera similar, θ_1 se define como el ángulo desde la fuente hasta el punto P, medido desde una línea paralela hasta el eje x. El flujo se analiza como si la fuente estuviera en un nuevo origen en la ubicación (a, b). Por lo tanto, son útiles las ecuaciones 10-43 para ϕ y ψ, pero r y θ deben sustituirse por r_1 y θ_1. Se necesita algo de trigonometría para convertir r_1 y θ_1 de vuelta a (x, y) o (r, θ). Por ejemplo, en coordenadas cartesianas:

Fuente lineal en el punto (a, b):
$$\phi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\ln r_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$
$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\arctan\frac{y-b}{x-a} \tag{10-44}$$

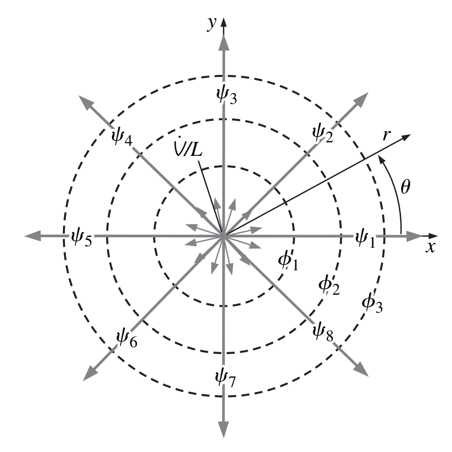


FIGURA 10-46
Líneas de corriente (continuas) y líneas equipotenciales (rayas) para una fuente lineal de intensidad $\dot{V}/L$ que se ubica en el origen en el plano xy.

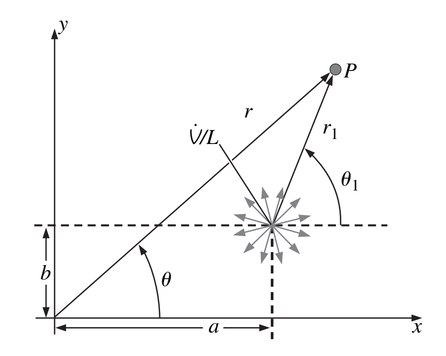


FIGURA 10-47
Fuente lineal de intensidad $\dot{V}/L$ que se ubica en algún punto arbitrario (a, b) en el plano xy.

EJEMPLO 10-5 **Superposición de una fuente y un sumidero de igual intensidad**

Considere una región irrotacional de flujo formado por una fuente lineal de intensidad $\dot{V}/L$ en la posición ($-a$, 0) y un sumidero lineal de la misma intensidad (pero de signo opuesto) en (a, 0), como se bosqueja en la figura 10-48. Genere una expresión para la función de corriente tanto en coordenadas cartesianas como cilíndricas.

SOLUCIÓN Debe superponerse una fuente y un sumidero, y generar una expresión para ψ tanto en coordenadas cartesianas como cilíndricas.
Hipótesis La región de flujo se considera incompresible e irrotacional.
Análisis Use la ecuación 10-44 para obtener ψ para la fuente

Fuente lineal en (−a, 0): $$\psi_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta_1 \quad \text{donde} \quad \theta_1 = \arctan\frac{y}{x+a} \tag{1}$$

De manera similar para el sumidero:

Sumidero lineal en (a, 0): $$\psi_2 = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi}\theta_2 \quad \text{donde} \quad \theta_2 = \arctan\frac{y}{x-a} \tag{2}$$

La superposición permite simplemente sumar las dos funciones de corriente, las ecuaciones 1 y 2, para obtener la función de corriente compuesta:

Función de corriente compuesta: $$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \tag{3}$$

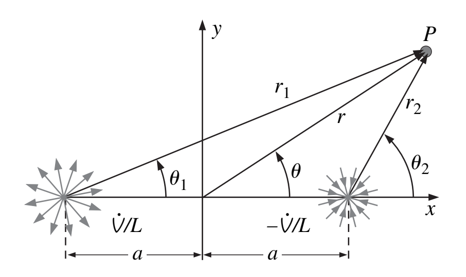


FIGURA 10-48
Superposición de una fuente lineal de intensidad $\dot{V}/L$ en ($-a$, 0) y un sumidero lineal (fuente de intensidad $-\dot{V}/L$) en (a, 0).

Identidades trigonométricas útiles

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\beta\cot\alpha - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

FIGURA 10-49
Algunas identidades trigonométricas útiles.

Reordene la ecuación 3 y saque la tangente de ambos lados para obtener:

$$\tan\frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \tan(\theta_1-\theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} \tag{4}$$

donde se usó una identidad trigonométrica (Fig. 10-49).

Se sustituyen las ecuaciones 1 y 2 para θ_1 y θ_2 y se realizan unas transformaciones algebraicas para obtener una expresión para la función de corriente:

$$\tan\frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \frac{\dfrac{y}{x+a} - \dfrac{y}{x-a}}{1+\dfrac{y}{x+a}\dfrac{y}{x-a}} = \frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

o, cuando se saca el arcotangente de ambos lados:

Resultado final, coordenadas cartesianas: $$\boldsymbol{\psi = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi}\arctan\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}} \tag{5}$$

Se traslada a coordenadas cilíndricas con la ecuación 10-38:

Resultado final, coordenadas cilíndricas: $$\boldsymbol{\psi = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi}\arctan\frac{2ar\,\text{sen}\,\theta}{r^2-a^2}} \tag{6}$$

Discusión Si la fuente y el sumidero intercambiasen lugares, el resultado sería el mismo, excepto que el signo negativo en la intensidad de la fuente $\dot{V}/L$ desaparecería.

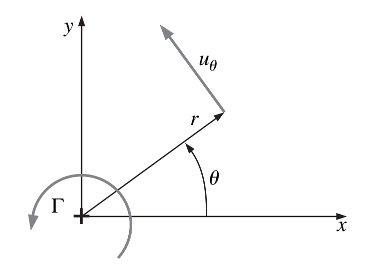


FIGURA 10-50
Vórtice lineal de intensidad Γ que se ubica en el origen en el plano *xy*.

Bloque de construcción 3: vórtice lineal

El flujo del tercer bloque de construcción es un **vórtice lineal** paralelo al eje *z*. Como con el bloque de construcción previo, se comienza con el caso simple en el que el vórtice lineal se ubica en el origen (Fig. 10-50). De nuevo se usan coordenadas cilíndricas por conveniencia. Las componentes de velocidad son:

Vórtice lineal: $$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{10-45}$$

donde Γ se llama la **circulación** o la **intensidad del vórtice**. De acuerdo con la convención habitual en matemáticas, la Γ positiva representa un vórtice en sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que la Γ negativa representa un vórtice en sentido de las manecillas del reloj. Se deja como ejercicio integrar la ecuación 10-45 para obtener expresiones para la función de corriente y la función potencial de velocidad:

Vórtice lineal en el origen: $$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \qquad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{10-46}$$

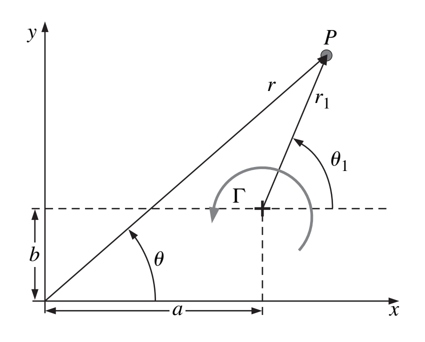


FIGURA 10-51
Vórtice lineal de intensidad Γ que se ubica en algún punto arbitrario (*a*, *b*) en el plano *xy*.

Cuando se comparan las ecuaciones 10-43 y 10-46 se ve que una fuente lineal y un vórtice lineal son un tanto complementarios en el sentido en que las expresiones para ϕ y ψ se invierten.

En situaciones donde se quisiera colocar el vórtice en alguna otra parte distinta al origen, debe transformarse la ecuación 10-46 como se hizo para una fuente lineal. En la figura 10-51 se bosqueja un vórtice lineal en algún punto arbitrario (*a*, *b*) en el plano *xy*. r_1 y θ_1 se definen como ya se mostró (Fig. 10-47). Para ob-

tener expresiones para ϕ and ψ, se sustituyen r y θ con r_1 y θ_1 en las ecuaciones 10-46 y luego se transforman a coordenadas regulares, o cartesianas o cilíndricas. En coordenadas cartesianas:

Vórtice lineal en el punto (a, b):

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta_1 = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y-b}{x-a} \qquad \textbf{(10-47)}$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

EJEMPLO 10-6 Velocidad en un flujo compuesto por tres flujos más simples

Una región irrotacional de flujo se forma con la superposición de una fuente lineal de intensidad $(\dot{V}/L)_1 = 2.00$ m²/s en $(x, y) = (0, -1)$, una fuente lineal de intensidad $(\dot{V}/L)_2 = -1.00$ m²/s en $(x, y) = (1, -1)$, y un vórtice lineal de intensidad $\Gamma = 1.50$ m²/s en $(x, y) = (1, 1)$, donde todas las coordenadas espaciales están en metros [la fuente número 2 es en realidad un sumidero, porque $(\dot{V}/L)_2$ es negativo]. En la figura 10-52 se muestran las posiciones de los tres bloques de construcción. Calcule la velocidad del fluido en el punto $(x, y) = (1, 0)$.

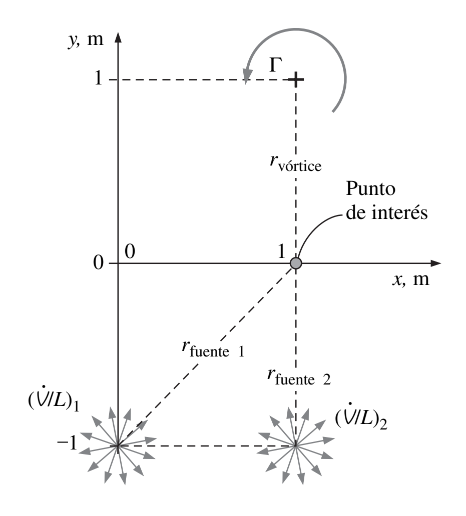


FIGURA 10-52
Superposición de dos fuentes lineales y un vórtice lineal en el plano *xy* (Ejemplo 10-6).

SOLUCIÓN Para la superposición dada de dos fuentes lineales y un vórtice, debe calcularse la velocidad en el punto $(x, y) = (1, 0)$.

Hipótesis **1** El flujo de la región por modelar es estacionario, incompresible e irrotacional. **2** La velocidad en el centro de cada uno de los tres flujos de bloques de construcción es infinita (sus centros son singularidades) y el flujo en la vecindad inmediata de cada una de estas singularidades carece de significado físico; sin embargo, estas regiones se ignoran en este análisis.

Análisis Existen varias maneras de resolver este problema. Podrían sumarse las tres funciones de corriente con las ecuaciones 10-44 y 10-47, y luego tomar derivadas de la función de corriente compuesta para calcular las componentes de velocidad. Como otra solución, podría hacerse lo mismo para la función potencial de velocidad. Un enfoque más sencillo es reconocer que la velocidad *en sí* puede superponerse; simplemente se suman los vectores de velocidad inducidos por cada uno de los tres flujos individuales para formar la velocidad compuesta en el punto dado. Esto se ilustra en la figura 10-53. Ya que el vórtice se ubica 1 m arriba del punto (1, 0), la velocidad inducida por el vórtice es hacia la derecha y su magnitud es de:

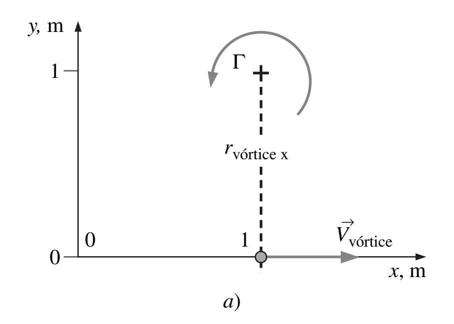
$$V_{\text{vórtice}} = \frac{\Gamma}{2\pi r_{\text{vórtice}}} = \frac{1.50 \text{ m}^2/\text{s}}{2\pi(1.00 \text{ m})} = 0.239 \text{ m/s} \qquad \textbf{(1)}$$

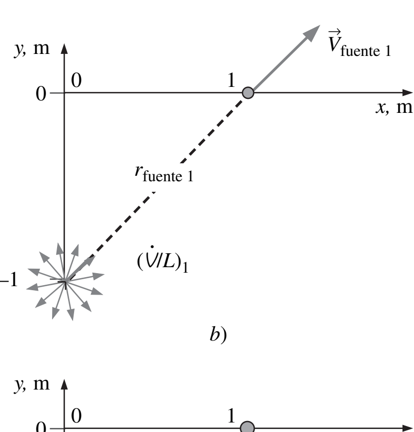
De manera similar, la primera fuente induce una velocidad en el punto (1, 0) en un ángulo de 45° desde el eje *x*, como se muestra en la figura 10-53. Su magnitud es:

$$V_{\text{fuente 1}} = \frac{|(\dot{V}/L)_1|}{2\pi r_{\text{fuente 1}}} = \frac{2.00 \text{ m}^2/\text{s}}{2\pi(\sqrt{2} \text{ m})} = 0.225 \text{ m/s} \qquad \textbf{(2)}$$

Para finalizar, la segunda fuente (el sumidero) induce una velocidad recta hacia abajo con magnitud:

$$V_{\text{fuente 2}} = \frac{|(\dot{V}/L)_2|}{2\pi r_{\text{fuente 2}}} = \frac{|-1.00 \text{ m}^2/\text{s}|}{2\pi(1.00 \text{ m})} = 0.159 \text{ m/s} \qquad \textbf{(3)}$$





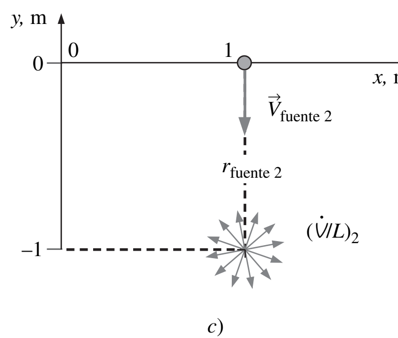


FIGURA 10-53
Velocidad inducida debida a *a*) el vórtice, *b*) la fuente 1 y *c*) la fuente 2 (note que la fuente 2 es *negativa*) (Ejemplo 10-6).

Estas velocidades se suman vectorialmente cuando se completan los paralelogramos, como se ilustra en la figura 10-54. Al usar la ecuación 10-35, la velocidad resultante es:

$$\vec{V} = \underbrace{\vec{V}_{\text{vórtice}}}_{0.239\vec{i}\ \text{m/s}} + \underbrace{\vec{V}_{\text{fuente 1}}}_{\left(\frac{0.225}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{0.225}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)\text{m/s}} + \underbrace{\vec{V}_{\text{fuente 2}}}_{-0.159\vec{j}\ \text{m/s}} = (0.398\vec{i} + 0\vec{j})\ \text{m/s} \quad \textbf{(4)}$$

La velocidad superpuesta en el punto (1, 0) es 0.398 m/s hacia la derecha.
Discusión Este ejemplo demuestra que la velocidad puede superponerse justo como se superponen la función de corriente o la función potencial de velocidad. La superposición de la velocidad es válida en regiones irrotacionales de flujo porque las ecuaciones diferenciales para ϕ y ψ son *lineales*; la linealidad se extiende también a sus derivadas.

Bloque de construcción 4: doblete

El flujo del cuarto y último bloque de construcción se llama **doblete**. Aunque se le trata como bloque de construcción para usar en la superposición, el doblete en sí se genera por superposición de dos bloques de construcción anteriores, a saber, una fuente lineal y un sumidero lineal de igual magnitud, como se comentó en el ejemplo 10-5. En este problema de ejemplo se obtuvo la función de corriente compuesta y el resultado se repite aquí:

Función de corriente compuesta:
$$\psi = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi}\arctan\frac{2ar\,\text{sen}\,\theta}{r^2 - a^2} \quad \textbf{(10-48)}$$

Ahora imagine que la distancia a desde el origen hasta la fuente y desde el origen hasta el sumidero tiende a cero (Fig. 10-55). Debe recordarse que arctan β tiende a β para valores muy pequeños de β. Por lo tanto, conforme la distancia a tienda a cero, la ecuación 10-48 se reduce a:

Función de corriente conforme $a \rightarrow 0$:
$$\psi \rightarrow \frac{-a(\dot{V}/L)r\,\text{sen}\,\theta}{\pi(r^2 - a^2)} \quad \textbf{(10-49)}$$

Si a se encoge mientras se mantienen las mismas intensidades de fuente y sumidero ($\dot{V}/L$ y $-\dot{V}/L$), la fuente y el sumidero se cancelan mutuamente cuando $a = 0$, lo que deja sin flujo en absoluto. Sin embargo, imagine que, conforme la fuente y el sumidero tienden uno hacia el otro, sus intensidades $\dot{V}/L$ aumentan inversamente con la distancia a de modo que *el producto* $a(\dot{V}/L)$ *permanece constante*. En este caso, $r \gg a$ en cualquier punto P excepto muy cerca del origen, y la ecuación 10-49 se reduce a:

Doblete a lo largo del eje x :
$$\psi = \frac{-a(\dot{V}/L)}{\pi}\frac{\text{sen}\,\theta}{r} = -K\frac{\text{sen}\,\theta}{r} \quad \textbf{(10-50)}$$

donde, por conveniencia, se definió la **intensidad del doblete** $K = a(\dot{V}/L)/\pi$. La función potencial de velocidad se obtiene de manera similar:

Doblete a lo largo del eje x:
$$\phi = K\frac{\cos\,\theta}{r} \quad \textbf{(10-51)}$$

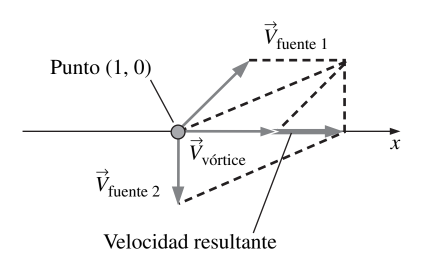


FIGURA 10-54
Suma vectorial de las tres velocidades inducidas del ejemplo 10-6.

En la figura 10-56 se grafican varias líneas de corriente y líneas equipotenciales para un doblete. Es evidente que las líneas de corriente son círculos tangentes al eje x, y las líneas equipotenciales son círculos tangentes al eje y. Los círculos se intersecan en ángulos de 90° en todas partes excepto en el origen, que es un punto de singularidad.

Si K es negativa, el doblete es "hacia atrás", con el sumidero que se ubica en $x = 0^-$ (infinitesimalmente hacia la izquierda del origen) y la fuente ubicada en $x = 0^+$ (infinitesimalmente hacia la derecha del origen). En este caso, todas las líneas de corriente en la figura 10-56 serían idénticas en forma, pero el flujo estaría en la dirección opuesta. Se deja como ejercicio construir expresiones para un doblete que esté alineado en cierto ángulo α del eje x.

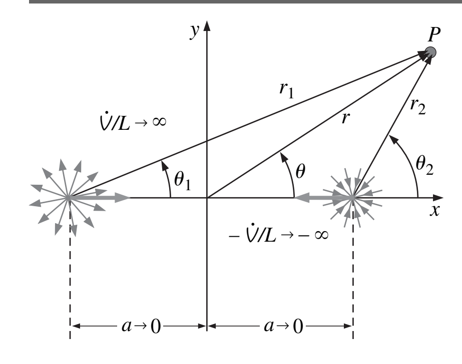


FIGURA 10-55
Un doblete se forma con la superposición de una fuente lineal en $(-a, 0)$ y un sumidero lineal en $(a, 0)$; a disminuye a cero mientras que $\dot{V}/L$ aumenta al infinito de modo que el producto $a\dot{V}/L$ permanece constante.

Flujos irrotacionales formados por superposición

Ahora se tiene un conjunto de flujos irrotacionales de bloques de construcción, y se está listo para construir algunos campos de flujo irrotacionales más interesantes mediante la técnica de superposición. Los ejemplos se limitarán a flujos planares en el plano xy; ejemplos de superposición con flujos axisimétricos pueden encontrarse en libros de texto más avanzados (por ejemplo, Kundu, 1990; Panton, 1996; Heinsohn y Cimbala, 2003). Note que, aun cuando ψ para flujo irrotacional axisimétrico no satisfaga la ecuación de Laplace, la ecuación diferencial para ψ (Ec. 10-34) no obstante es *lineal*, y por lo tanto la superposición sin embargo es válida.

Superposición de un sumidero lineal y un vórtice lineal

El primer ejemplo es la superposición de una fuente lineal de intensidad $\dot{V}/L$ (en este ejemplo, $\dot{V}/L$ es una cantidad negativa) y un vórtice lineal de intensidad Γ, ambos ubicados en el origen (Fig. 10-57). Esto representa una región de flujo en un drenaje en un sumidero o bañera donde el fluido forma espirales hacia el drenaje. Se pueden superponer o ψ o ϕ. Se elige ψ y se genera la función de corriente compuesta cuando se suma ψ para una fuente (Ec. 10-43) y ψ para un vórtice lineal (Ec. 10-46):

Superposición:
$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \qquad \textbf{(10-52)}$$

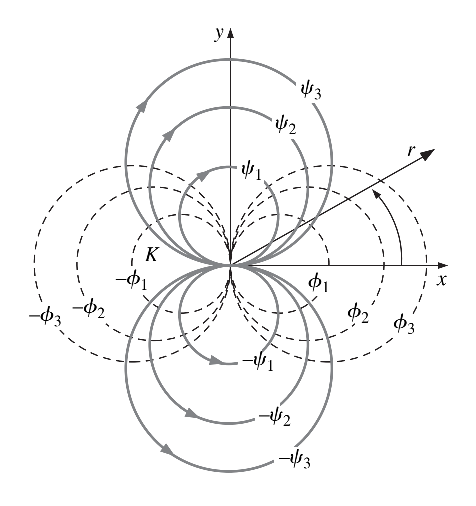


FIGURA 10-56
Líneas de corriente (sólidas) y líneas equipotenciales (a rayas) para un doblete de intensidad K que se ubica en el origen en el plano xy y se alinea con el eje x.

Para graficar líneas de corriente del flujo se escoge un valor de ψ y luego se resuelve para r como función de θ o para θ como función de r. Se elige lo primero; después de aplicar algo de álgebra se obtiene:

Líneas de corriente:
$$r = \exp\left(\frac{(\dot{V}/L)\theta - 2\pi\psi}{\Gamma}\right) \qquad \textbf{(10-53)}$$

Se eligen algunos valores arbitrarios para $\dot{V}/L$ y Γ de modo que se pueda generar una gráfica; a saber, se hace $\dot{V}/L = -1.00$ m^2/s y $\Gamma = 1.50$ m^2/s. Note que $\dot{V}/L$ es negativa para un sumidero. También note que las unidades para $\dot{V}/L$ y Γ se pueden obtener con facilidad, ya que se sabe que las dimensiones de la función de corriente en flujo planar son {longitud^2/tiempo}. Las líneas de corriente se calculan para varios valores de ψ con el uso de la ecuación 10-53 y se grafican en la figura 10-58.

Las componentes de velocidad en cualquier punto en la región irrotacional de flujo se obtienen mediante diferenciación de la ecuación 10-52:

Componentes de velocidad:
$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Note que en este ejemplo simple la componente radial de velocidad se debe por completo al sumidero porque no hay aportación a la velocidad radial a partir del vórtice. De manera similar, la componente de velocidad tangencial se debe por completo al vórtice. La velocidad compuesta en cualquier punto en el flujo es la suma vectorial de estas dos componentes, como se bosqueja en la figura 10-57.

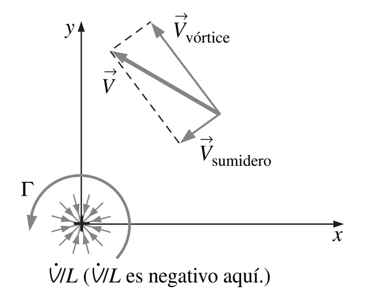


FIGURA 10-57
Superposición de una fuente lineal de intensidad $\dot{V}/L$ y un vórtice lineal de intensidad Γ que se ubican en el origen. Se muestra la suma vectorial de velocidad en alguna posición arbitraria en el plano xy.

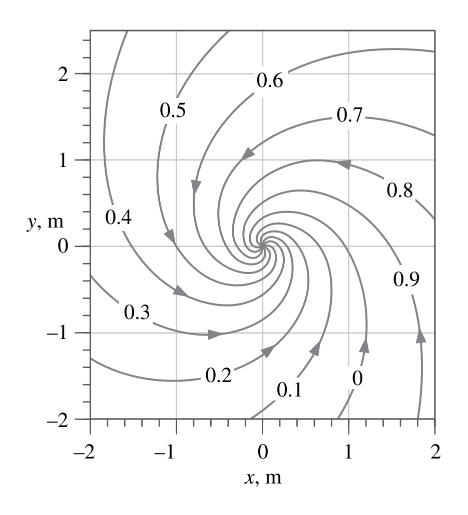


FIGURA 10-58
Líneas de corriente creadas por superposición de un sumidero lineal y un vórtice lineal en el origen. Los valores de ψ están en unidades de m^2/s.

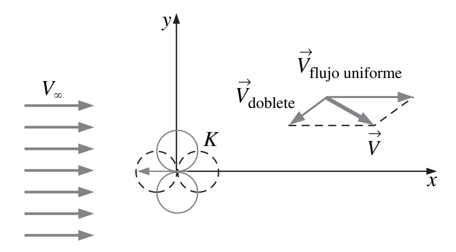


FIGURA 10-59
Superposición de un flujo uniforme y un doblete; se muestra la suma vectorial de velocidad en alguna posición arbitraria en el plano xy.

Superposición de un flujo uniforme y un doblete: flujo sobre un cilindro circular

El siguiente ejemplo es un clásico en el campo de la mecánica de fluidos: la superposición de un flujo uniforme de velocidad V_∞ y un doblete de intensidad K que se ubica en el origen (Fig. 10-59). La función de corriente se superpone cuando se suma la ecuación 10-37 para un flujo uniforme y la ecuación 10-50 para un doblete en el origen. Por lo tanto, la función de corriente compuesta es:

Superposición:
$$\psi = V_\infty r \operatorname{sen}\theta - K\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \tag{10-54}$$

Por conveniencia, se hace $\psi = 0$ cuando $r = a$ (la razón para esto pronto será evidente). Entonces puede resolverse la ecuación 10-54 para la intensidad de doblete K:

Intensidad de doblete:
$$K = V_\infty a^2$$

y la ecuación 10-54 se convierte en:

Forma alterna de función de corriente:
$$\psi = V_\infty \operatorname{sen}\theta\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \tag{10-55}$$

A partir de la ecuación 10-55 es claro que una de las líneas de corriente ($\psi = 0$) es un círculo de radio a (Fig. 10-60). Ésta y otras líneas de corriente se pueden graficar cuando se resuelve la ecuación 10-55 para r como función de θ, o viceversa. Sin embargo, el lector debe estar consciente de que, por lo general, es mejor presentar los resultados en términos de parámetros *adimensionales*. Por inspección, se definen tres parámetros adimensionales:

$$\psi^* = \frac{\psi}{V_\infty a} \qquad r^* = \frac{r}{a} \qquad \theta$$

donde el ángulo θ ya es adimensional. En términos de estos parámetros, la ecuación 10-55 se escribe como:

$$\psi^* = \operatorname{sen}\theta\left(r^* - \frac{1}{r^*}\right) \tag{10-56}$$

La ecuación 10-56 se resuelve para r^* como función de θ por medio del uso de la regla cuadrática:

Líneas de corriente adimensionales:
$$r^* = \frac{\psi^* \pm \sqrt{(\psi^*)^2 + 4\operatorname{sen}^2\theta}}{2\operatorname{sen}\theta} \tag{10-57}$$

En la figura 10-61, con el uso de la ecuación 10-57, se grafican varias líneas de corriente adimensionales. Ahora puede observarse por qué se elige el círculo $r = a$ (o $r^* = 1$) como la línea de corriente cero: esta línea de corriente se puede considerar como una pared sólida, y este flujo representa *flujo potencial sobre un cilindro circular*. No se muestran las líneas de corriente *adentro* del círculo: existen, pero no son motivo de preocupación.

Existen dos puntos de estancamiento en este campo de flujo, uno en la nariz del cilindro y uno en la cola. Las líneas de corriente cerca de los puntos de estancamiento están alejadas, ya que el flujo aquí es muy lento. En contraste, las líneas de corriente cerca a las partes superior e inferior del cilindro están juntas, lo que indica las regiones de flujo rápido. Físicamente, el fluido debe acelerar alrededor del cilindro porque éste actúa como una obstrucción al flujo.

Note también que el flujo es simétrico alrededor tanto del eje x como del y. Aunque la simetría superior-inferior no es sorprendente, la simetría adelante-

atrás tal vez no se espera porque se sabe que el flujo real alrededor de un cilindro genera una región de estela detrás del cilindro, y las líneas de corriente *no* son simétricas. Sin embargo, debe tener en la mente que los resultados aquí sólo son *aproximaciones* de un flujo real. Se supone irrotacionalidad en todas partes en el campo de flujo, y se sabe que esta aproximación no es cierta cerca de paredes y en región de estela.

Las componentes de velocidad en todas partes en el campo de flujo se calculan cuando se diferencia la ecuación 10-55:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = V_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -V_\infty \operatorname{sen}\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{10-58}$$

Un caso especial está sobre la superficie del cilindro mismo ($r = a$), donde las ecuaciones 10-58 se reducen a:

En la superficie del cilindro: $$u_r = 0 \qquad u_\theta = -2V_\infty \operatorname{sen}\theta \tag{10-59}$$

Dado que la condición de no-deslizamiento en superficies sólidas no puede satisfacerse cuando se hace la aproximación irrotacional, existe deslizamiento en la superficie del cilindro. De hecho, en la parte superior del cilindro ($\theta = 90°$), la velocidad del fluido en la superficie es el *doble* de la del flujo libre.

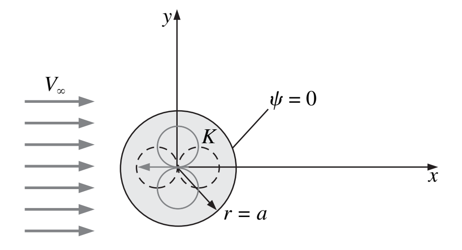


FIGURA 10-60
La superposición de un flujo uniforme y un doblete produce una línea de corriente que es un círculo.

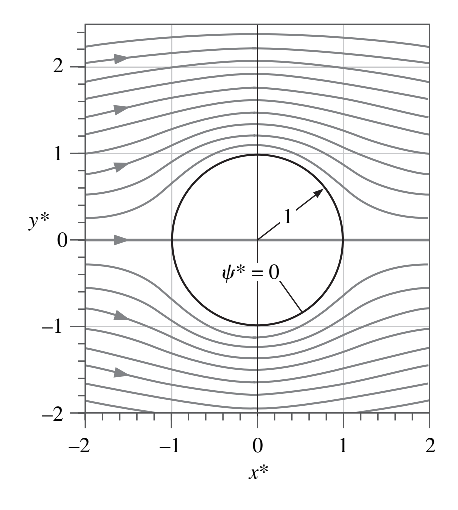


FIGURA 10-61
Líneas de corriente adimensionales creadas por superposición de un flujo uniforme y un doblete en el origen $\psi^* = \psi/(V_\infty a)$, $\Delta\psi^* = 0.2$, $x^* = x/a$, y $y^* = y/a$, donde a es el radio del cilindro.

EJEMPLO 10-7 Distribución de presión sobre un cilindro circular

Utilice la aproximación de flujo irrotacional, calcule y grafique la distribución de presión estática adimensional sobre la superficie de un cilindro circular de radio a en un flujo uniforme de velocidad V_∞ (Fig. 10-62). Comente los resultados. La presión lejos del cilindro es P_∞.

SOLUCIÓN Debe calcularse y graficarse la distribución de presión estática adimensional a lo largo de la superficie de un cilindro circular en un flujo libre.

Hipótesis **1** El flujo de la región que se modelará es estacionario, incompresible e irrotacional. **2** El campo de flujo es bidimensional en el plano *xy*.

Análisis Antes que todo, la presión estática es la presión que se mediría con una sonda de presión que se mueve con el fluido. De manera experimental, esta presión sobre una superficie se mide con una **toma de presión estática**, que básicamente es un pequeño agujero que se perfora normal a la superficie (Fig. 10-63). Al otro extremo del agujero se conecta un instrumento de medición de presión. En la literatura hay datos experimentales disponibles de la distribución de presión estática a lo largo de la superficie de un cilindro; los resultados de este ejemplo se comparan con un conjunto de estos datos experimentales.

Del capítulo 7 se sabe que la presión adimensional es el **coeficiente de presión**:

Coeficiente de presión: $$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} \tag{1}$$

Dado que el flujo en la región de interés es irrotacional, se usa la ecuación de Bernoulli (Ec. 10-27) para calcular la presión en cualquier parte en el campo de flujo. Cuando se ignoran los efectos de la gravedad:

Ecuación de Bernoulli: $$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{constante} = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} \tag{2}$$

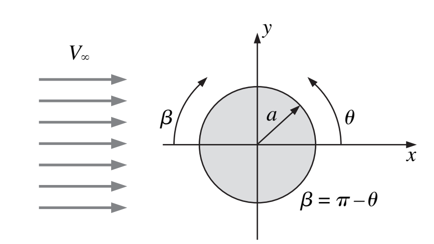


FIGURA 10-62
Flujo planar sobre un cilindro circular de radio a que está sumergido en un flujo uniforme de velocidad V_∞ en el plano *xy*. Por costumbre, el ángulo β se define desde el frente del cilindro.

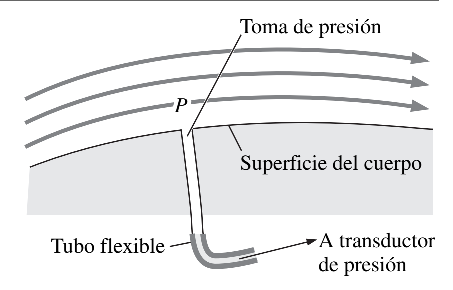


FIGURA 10-63
La presión estática sobre una superficie se mide con una toma de presión estática conectada a un manómetro de presión o transductor de presión electrónico.

Cuando se reordena la ecuación 2 en la forma de la ecuación 1 se obtiene:

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Se sustituye la expresión para velocidad tangencial sobre la superficie del cilindro, ecuación 10-59, porque a lo largo de la superficie $V^2 = u_\theta^2$; la ecuación 3 se convierte en:

Coeficiente de presión superficial: $$C_p = 1 - \frac{(-2V_\infty \operatorname{sen}\theta)^2}{V_\infty^2} = 1 - 4\operatorname{sen}^2\theta$$

En términos del ángulo β, definido desde el frente del cuerpo (Fig. 10-62), se usa la transformación $\beta = \pi - \theta$ para obtener:

C_p en términos del ángulo β: $$\mathbf{C_p = 1 - 4\,sen^2\beta} \qquad \textbf{(4)}$$

En la figura 10-64 se grafica el coeficiente de presión sobre la mitad superior del cilindro como función del ángulo β, curva sólida. (Debido a la simetría superior-inferior, no hay necesidad, también, de graficar la distribución de presión sobre la mitad inferior del cilindro.) Lo primero que se aprecia es que la distribución de presión es simétrica adelante y atrás. Esto no es sorprendente porque ya se sabe que las *líneas de corriente* también son simétricas atrás y adelante (Fig. 10-61).

En la figura 10-64 se marcan los puntos de estancamiento delantero y posterior (en $\beta = 0°$ y 180°, respectivamente). El coeficiente de presión es unitario ahí y estos dos puntos tienen la presión más alta en todo el campo de flujo. En variables físicas, la presión estática P en los puntos de estancamiento es igual a $P_\infty + \rho V_\infty^2/2$. En otras palabras, la **presión dinámica total** (también llamada **presión de impacto**) del fluido entrante se siente como una presión estática sobre la nariz del cuerpo conforme el fluido desacelera a velocidad cero en el punto de estancamiento. En la misma parte superior del cilindro ($\beta = 90°$), la velocidad a lo largo de la superficie es el doble de la velocidad de corriente libre ($V = 2V_\infty$) y el coeficiente de presión es más bajo ahí ($C_p = -3$). En la figura 10-64 también están marcadas las dos posiciones donde $C_p = 0$, a saber: en $\beta = 30°$ y 150°. En estas posiciones, la presión estática a lo largo de la superficie es igual a la del flujo libre ($P = P_\infty$).

Discusión En la figura 10-64 se indican con círculos azules y grises, respectivamente, los datos experimentales típicos para flujo laminar y turbulento sobre la superficie de un cilindro circular. Es evidente que, cerca del frente del cilindro, la aproximación de flujo irrotacional es excelente. Sin embargo, para β mayor que aproximadamente 60°, y especialmente cerca de la porción posterior del cilindro (lado derecho de la gráfica), los resultados del flujo irrotacional no se equiparan adecuadamente en absoluto con los datos experimentales. De hecho, es evidente que, para flujo sobre cuerpos con formas romas como éste, la aproximación de flujo irrotacional, de manera general, realiza un trabajo bastante bueno sobre la mitad frontal del cuerpo, pero malo sobre la mitad posterior del cuerpo. La aproximación de flujo irrotacional concuerda mejor con los datos experimentales turbulentos que con los datos experimentales laminares; esto se debe a que la separación del flujo ocurre más lejos corriente abajo para el caso con una capa límite turbulenta, como se trata con más detalle en la Sección 10-6.

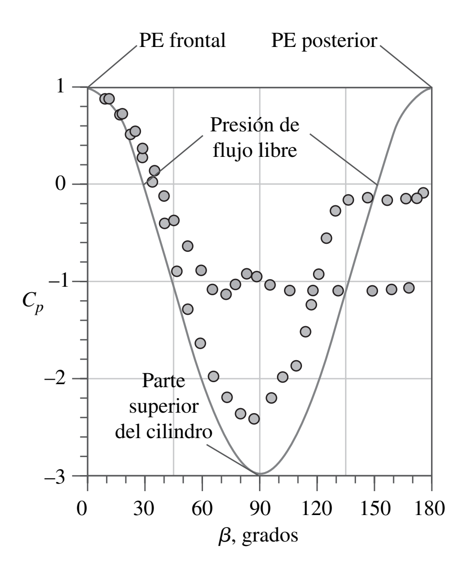


FIGURA 10-64
Coeficiente de presión como función del ángulo β a lo largo de la superficie de un cilindro circular; la curva sólida es la aproximación de flujo irrotacional, los círculos corresponden a los datos experimentales a Re $= 2 \times 10^5$, valor al cual ocurre la separación de la capa límite laminar; los círculos grises corresponden a los datos experimentales típicos a Re $= 7 \times 10^5$, valor al cual ocurre la separación de la capa límite turbulenta.
Datos tomados de Kundu, 1990.

Una consecuencia inmediata de la simetría de la distribución de presión de la figura 10-64 es que *no hay fuerza neta de arrastre debido a presión* sobre el cilindro (las fuerzas de presión en la mitad frontal del cuerpo se equilibran exactamente con las de la mitad posterior del cuerpo). En esta aproximación de flujo irrotacional, la presión se recupera por completo en el punto de estancamiento posterior, de modo que la presión es la misma que la del punto de estancamien-

to frontal. También se predice que no existe fuerza neta de arrastre viscoso sobre el cuerpo, dado que no puede satisfacerse la condición de no-deslizamiento sobre la superficie del cuerpo cuando se hace la aproximación irrotacional. En consecuencia, la fuerza de arrastre neta sobre el cilindro en flujo irrotacional es idénticamente cero. Éste es un ejemplo de un enunciado más general que se aplica a cuerpos de *cualquier* forma (inclusive formas asimétricas) cuando se realiza la aproximación de flujo irrotacional, a saber, la famosa paradoja enunciada por primera vez por Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783) en 1752:

> **Paradoja de d'Alembert:** Con la aproximación de flujo irrotacional, la fuerza de arrastre sobre cualquier cuerpo sin sustentación de cualquier forma sumergido en un flujo uniforme es cero.

D'Alembert reconoció la paradoja de este enunciado, desde luego, cuando supo que *existe* una fuerza de arrastre sobre los cuerpos reales que están sumergidos en fluidos reales. En un flujo real, la presión sobre la superficie posterior del cuerpo es considerablemente *menor* que la de la superficie frontal, lo que conduce a una fuerza de arrastre debido a presión distinta de cero sobre el cuerpo. Esta diferencia de presión se aumenta si el cuerpo es romo y existe separación de flujo, como se bosqueja en la figura 10-65. Sin embargo, inclusive para cuerpos currentilíneos (como las alas de los aviones en ángulos de ataque bajos), la presión cerca de la parte posterior del cuerpo nunca se recupera por completo. Además, la condición de no-deslizamiento sobre la superficie del cuerpo conduce también a una fuerza de arrastre viscosa distinta de cero. Por lo tanto, la aproximación de flujo irrotacional queda corta en su predicción del arrastre aerodinámico por dos razones: no predice fuerza de arrastre debido a presión y no predice fuerza de arrastre debido a fricción.

Aproximación de flujo irrotacional

V

Fuerza de arrastre = 0

a)

Campo de flujo real (rotacional)

V

$\vec{F}_D$

Fuerza de arrastre $\neq 0$

b)

FIGURA 10-65
a) La paradoja de d'Alembert predice que la fuerza de arrastre sobre *cualquier* cuerpo sin sustentación de *cualquier* manera es cero cuando se invoca la aproximación de flujo irrotacional; *b*) en los flujos reales existe una fuerza de arrastre distinta de cero sobre los cuerpos sumergidos en un flujo uniforme.

La distribución de presión en el extremo frontal de cualquier cuerpo con forma redondeada es cualitativamente similar a la que se grafica en la figura 10-64. A saber, la presión en el punto de estancamiento frontal (PE) es la presión más alta sobre el cuerpo: $P_{PE} = P_\infty + \rho V^2/2$, donde V es la velocidad de flujo libre (se eliminó el subíndice ∞) y $C_p = 1$ allí. Cuando se mueve corriente abajo a lo largo de la superficie del cuerpo, la presión cae en algún valor mínimo para el que P es menor que P_∞ ($C_p < 0$). Este punto, donde la velocidad justo sobre la superficie del cuerpo es mayor y la presión es menor, con frecuencia se llama **punto de mínima presión**. Más allá del punto de mínima presión, la presión aumenta lentamente. Con la aproximación de flujo irrotacional, la presión siempre aumenta de regreso a la presión dinámica en el punto de estancamiento posterior, donde $C_p = 1$. No obstante, en un flujo real, la presión nunca se recupera por completo, lo que conduce a fuerza de arrastre debido a presión, como ya se comentó.

En algún lugar entre el punto de estancamiento frontal y el punto de mínima presión hay un punto sobre la superficie del cuerpo donde la velocidad justo sobre el cuerpo es igual a V, la presión P es igual a P_∞ y $C_p = 0$. Este punto se llama **punto de presión cero**, la expresión obviamente se basa en la presión *manométrica*, no en la presión absoluta. En este punto, la presión que actúa normal a la superficie del cuerpo es la *misma* ($P = P_\infty$), sin importar qué tan rápido se mueva el cuerpo a través del fluido. Este hecho se aprecia en la ubicación de los ojos de los peces (Fig. 10-66). Si el ojo de un pez estuviera ubicado más cerca de su nariz experimentaría un aumento en la presión del agua conforme el pez nadara: cuanto más rápido nadara, mayor sería la presión del agua sobre su ojo. Esto provocaría que el globo ocular se distorsionara, lo que afectaría la visión del pez. Del mismo modo, si el ojo estuviera ubicado más atrás, cerca del punto de mínima presión, el ojo experimentaría una presión de *succión* relativa cuando el pez nadara, lo que de nuevo distorsionaría su globo ocular y haría borrosa su visión. Los experimentos han revelado que los ojos de los peces, más bien, están ubicados muy cerca del punto de presión cero, donde $P = P_\infty$, y el pez puede nadar a cualquier velocidad sin distorsionar su visión. De manera incidental, la

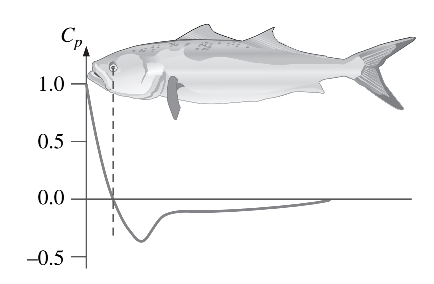


FIGURA 10-66
El cuerpo de un pez está diseñado de tal manera que su ojo se ubica cerca del punto de presión cero, de modo que su visión no se distorsiona mientras nada. Los datos que se muestran están a lo largo del lado de una anjova.

Adaptado de American Scientist, *vol. 76, p. 32, 1988.*

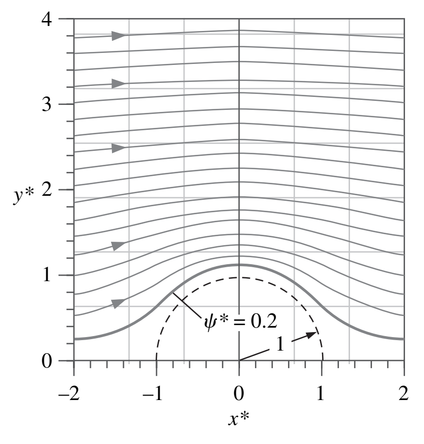


FIGURA 10-67
Mismas líneas de corriente adimensionales de la figura 10-61, excepto que la línea de corriente $\psi^* = 0.2$ se modela como una pared sólida. Este flujo representa flujo de aire sobre una colina simétrica.

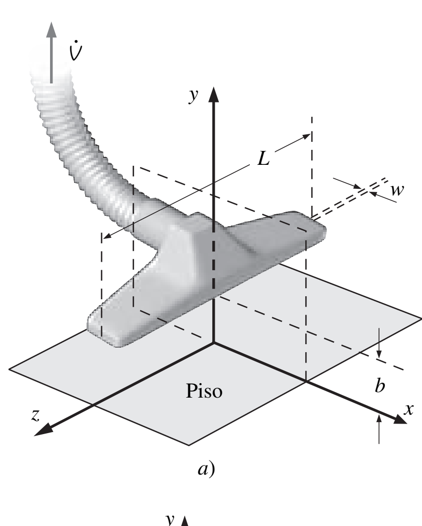
parte trasera de las branquias se ubica cerca del punto de mínima presión, de modo que la presión de succión que se encuentra allí ayuda al pez a "exhalar". El corazón también está cerca de este punto de presión más baja para aumentar el volumen desplazado por el golpe cardiaco durante el nado rápido.

Si se piensa acerca de la aproximación de flujo irrotacional un poco más detalladamente, se observa que el círculo que se modeló como un cilindro sólido en el ejemplo 10-7 realmente no es una pared sólida en absoluto: es sólo una línea de corriente en el campo de flujo que *se modela* como una pared sólida. La línea de corriente particular que se modeló como pared sólida resulta que es un círculo. Igual de fácil pudo haberse escogido alguna *otra* línea de corriente en el flujo para modelarla como una pared sólida. Dado que, por definición, el flujo no puede cruzar una línea de corriente, y puesto que no puede satisfacerse la condición de no-deslizamiento en una pared, se afirma lo siguiente:

Con la aproximación de flujo irrotacional, cualquier línea de corriente puede considerarse como una pared sólida.

Por ejemplo, se puede modelar *cualquier* línea de corriente en la figura 10-61 como una pared sólida. Considere la primera línea de corriente sobre el círculo y modélelo como una pared (esta línea de corriente tiene un valor adimensional de $\psi^* = 0.2$). En la figura 10-67 se grafican varias líneas de corriente; no se muestran líneas de corriente por abajo de la línea de corriente $\psi^* = 0.2$; todavía están allí, sólo es que ya no hay preocupación por ellas. ¿Qué tipo de flujo representa esto? Bueno, imagine viento que fluye sobre una colina; la aproximación irrotacional que se muestra en la figura 10-67 es representativa de este flujo. Se puede esperar inconsistencias muy cerca del suelo, y acaso en el lado corriente abajo de la colina, pero la aproximación quizá es muy buena en el lado frontal de la colina.

Es posible que haya notado un problema con este tipo de superposición. A saber, *primero* se realiza la superposición y luego se intentan definir algunos problemas físicos que puedan modelarse mediante el flujo generado. Aunque es útil como una herramienta de aprendizaje, esta técnica no siempre es práctica en la ingeniería de la vida real. Por ejemplo, no es probable encontrar una colina con la forma exacta de la modelada en la figura 10-67. En vez de ello, por lo general ya se *tiene* una geometría y se quiere modelar el flujo sobre esta geometría o a través de ella. Existen técnicas de superposición más sofisticadas que están mejor adaptadas al diseño y análisis de ingeniería. A saber, existen técnicas en las que varias fuentes y sumideros se colocan en posiciones adecuadas como para modelar flujo sobre una geometría predeterminada. Estas técnicas, inclusive, pueden extenderse a campos de flujo tridimensional totalmente irrotacional, pero debe utilizarse computadora debido a la cantidad de cálculos implícitos (Kundu, 1990). En este texto no se comentan estas técnicas.



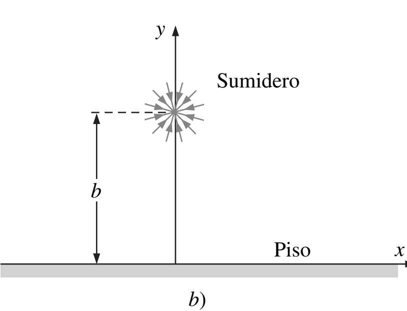


FIGURA 10-68
Manguera de aspiradora con aditamento para piso; *a*) vista tridimensional con el piso en el plano *xz* y *b*) vista de una sección en el plano *xy* con la succión modelada mediante un sumidero lineal.

EJEMPLO 10-8 Flujo hacia el interior de un aditamento de aspiradora

Considere el flujo de aire hacia el aditamento de piso de una aspiradora doméstica común (Fig. 10-68*a*). El ancho de la ranura de entrada de la nariz es $w = 2.0$ mm y su longitud es $L = 35.0$ cm. La ranura se mantiene a una distancia $b = 2.0$ cm sobre el piso, como se muestra. El flujo volumétrico total a través de la manguera de la aspiradora es $\dot{V} = 0.110\ \text{m}^3/\text{s}$. Prediga el campo de flujo en el plano central del aditamento (el plano *xy* en la figura 10-68*a*). Específicamente, grafique varias líneas de corriente y calcule la velocidad y la distribución de presión a lo largo del eje *x*. ¿Cuál es la máxima velocidad a lo largo del piso y dónde ocurre? ¿Dónde, a lo largo del piso, la aspiradora es más eficiente?

SOLUCIÓN Debe predecirse el campo de flujo en el plano central de un aditamento de aspiradora, graficar velocidad y presión a lo largo del piso (eje *x*), predecir la posición y valor de la máxima velocidad a lo largo del piso y predecir dónde a lo largo del piso es más eficiente la aspiradora.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** El flujo en el plano *xy* es bidimensional (planar). **3** La mayor parte del campo de flujo es irrotacional. **4** La habitación es infinitamente grande y libre de flujos de aire que pueden influir el flujo por considerar.

Análisis La ranura del aditamento de la aspiradora se semeja a un sumidero lineal (una fuente lineal con intensidad de fuente negativa), que se ubica a una distancia *b* sobre el eje *x*, como se bosqueja en la figura 10-68*b*. Con esta aproximación se ignora el ancho finito de la ranura (*w*); en vez de ello el flujo hacia la ranura se modela como flujo hacia el sumidero lineal, que es simplemente un punto en el plano *xy* (0, *b*). También se ignora cualquier efecto de la manguera o del cuerpo del aditamento. La intensidad de la fuente lineal se obtiene cuando se divide la razón de flujo volumétrico total entre la longitud *L* de la rendija:

$$\textit{Intensidad de la fuente lineal}: \quad \frac{\dot{V}}{L} = \frac{-0.110\ \text{m}^3/\text{s}}{0.35\ \text{m}} = -0.314\ \text{m}^2/\text{s} \qquad \textbf{(1)}$$

donde se incluyó un signo negativo porque éste es un sumidero en vez de una fuente.

Evidentemente, este sumidero lineal por sí mismo (Fig. 10-68*b*) no es suficiente para modelar el flujo, porque el aire fluiría hacia el sumidero desde todas direcciones, inclusive hasta *a través del piso*. Para evitar este problema se agrega otro flujo irrotacional elemental (bloque de construcción) para modelar el efecto del piso. Una manera inteligente de hacer esto es mediante el **método de imágenes**. Con esta técnica, se coloca un *segundo* sumidero idéntico *abajo* del piso en el punto (0, $-b$). A este segundo sumidero se le llama **sumidero imagen**. Puesto que el eje *x* ahora es una línea de simetría, el eje *x* es en sí una línea de corriente del flujo y por lo tanto puede considerarse como el piso. El campo de flujo irrotacional por analizar se bosqueja en la figura 10-69. Se muestran dos fuentes de intensidad $\dot{V}/L$. La superior se llama fuente de flujo y representa succión hacia el aditamento de la aspiradora. La inferior es la fuente imagen. Debe recordarse que en este problema la intensidad de fuente $\dot{V}/L$ es negativa (Ec. 1), de modo que ambas fuentes en realidad son sumideros.

Use la superposición para generar la función de corriente para la aproximación irrotacional de este campo de flujo. Las transformaciones algebraicas aquí son similares a las del ejemplo 10-5; en ese caso se tenía una fuente y un sumidero en el eje *x*, mientras que aquí se tienen dos fuentes sobre el eje *y*. Se usa la ecuación 10-44 para obtener ψ para la fuente de flujo:

$$\textit{Fuente lineal en } (0, b): \quad \psi_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\,\theta_1 \qquad \text{donde} \quad \theta_1 = \arctan\frac{y-b}{x} \qquad \textbf{(2)}$$

De manera similar, para la fuente imagen,

$$\textit{Fuente lineal en } (0, -b): \quad \psi_2 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\,\theta_2 \qquad \text{donde} \quad \theta_2 = \arctan\frac{y+b}{x} \qquad \textbf{(3)}$$

La superposición permite simplemente sumar las dos funciones de corriente, ecuaciones 2 y 3, para obtener la función de corriente compuesta:

$$\textit{Función de corriente compuesta}: \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}(\theta_1 + \theta_2) \qquad \textbf{(4)}$$

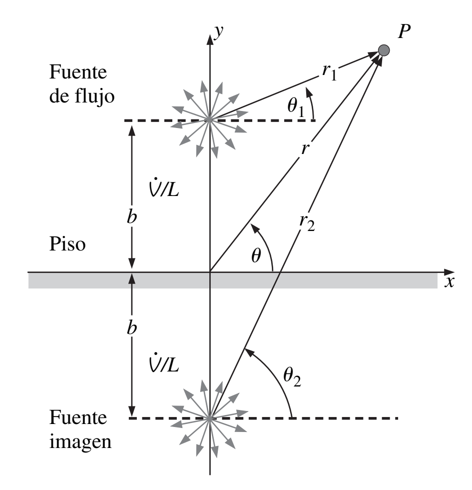


FIGURA 10-69
Superposición de una fuente lineal de intensidad $\dot{V}/L$ en (0, *b*) y una fuente lineal de la misma intensidad en (0, $-b$). La fuente inferior es una imagen especular de la fuente superior, lo que hace al eje *x* una línea de corriente.

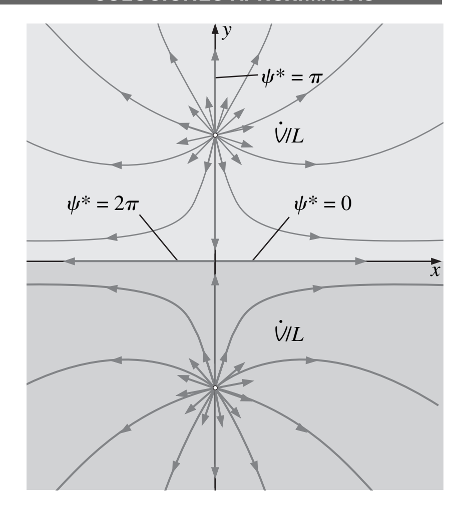


FIGURA 10-70
El eje x es la línea de corriente divisora que separa el aire producido por la fuente superior (azul) del aire producido por la fuente inferior (gris).

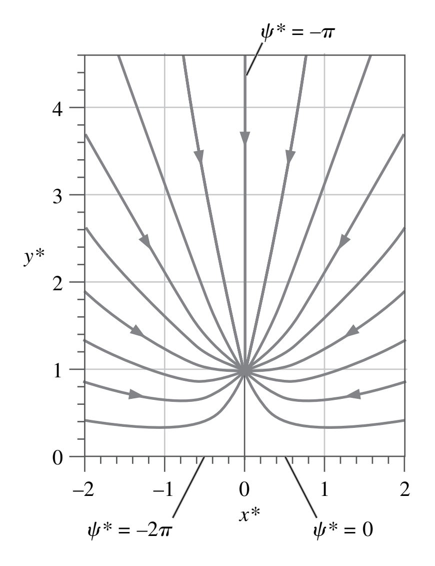


FIGURA 10-71
Líneas de corriente adimensionales para las dos fuentes de la figura 10-69 para el caso en que las intensidades de fuente son *negativas* (son *sumideros*). ψ^* aumenta uniformemente desde -2π (eje x negativo) hasta 0 (eje x positivo), y sólo se muestra la mitad superior del flujo. El flujo es *hacia* el sumidero en la posición (0, 1).

La ecuación 4 se reordena y se toma la tangente de ambos lados para obtener:

$$\tan\frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} \quad \textbf{(5)}$$

donde de nuevo se usó una identidad trigonométrica (Fig. 10-49).

Las ecuaciones 2 y 3 se sustituyen por θ_1 and θ_2 y se usa algo de álgebra para obtener la expresión final para la función de corriente en coordenadas cartesianas:

$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\arctan\frac{2xy}{x^2 - y^2 + b^2} \quad \textbf{(6)}$$

Con la ecuación 10-38 se traslada a coordenadas cilíndricas y se quitan las dimensiones. Después de algo de transformaciones algebraicas:

Función de corriente adimensional:
$$\psi^* = \arctan\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta + 1/r^{*2}} \quad \textbf{(7)}$$

donde $\psi^* = 2\pi\psi/(\dot{V}/L)$, $r^* = r/b$ y se usaron identidades trigonométricas de la figura 10-49.

Debido a la simetría alrededor del eje x, todo el aire que produce la fuente lineal superior debe permanecer *arriba* del eje x. Del mismo modo, todo el aire que produce la fuente imagen lineal inferior debe permanecer *abajo* del eje x. Si se coloreara el aire de la fuente superior (norte) con color azul, y el aire de la fuente inferior (sur) con gris (Fig. 10-70), todo el aire azul permanecería arriba del eje x y todo el aire gris permanecería abajo del eje x. Por lo tanto, el eje x actúa como una **línea de corriente divisora** que separa el aire azul del gris. Más aún, recuerde del capítulo 9 que la diferencia en valor de ψ de una línea de corriente a la siguiente en flujo planar es igual a la razón de flujo volumétrico por unidad de ancho que fluye entre las dos líneas de corriente. Se hace ψ igual a cero a lo largo del eje x positivo. Cuando se sigue la *regla del lado izquierdo*, tratada en el capítulo 9, se sabe que ψ en el eje x *negativo* debe ser igual al flujo volumétrico total por unidad de ancho producido por la fuente lineal superior; es decir: $\dot{V}/L$. A saber:

$$\psi_{\text{eje }-x} - \underbrace{\psi_{\text{eje }+x}}_{0} = \dot{V}/L \qquad \rightarrow \qquad \psi^*_{\text{eje }-x} = 2\pi \quad \textbf{(8)}$$

En la figura 10-70 se etiquetan estas líneas de corriente. Además, también se etiqueta la línea de corriente adimensional $\psi^* = \pi$. Ella coincide con el eje y ya que también existe simetría en torno a este eje. El origen (0, 0) es un punto de estancamiento porque la velocidad inducida por la fuente inferior cancela exactamente la inducida por la fuente superior.

Para el caso de la aspiradora que se modela aquí, las intensidades de fuente son *negativas* (son *sumideros*). En consecuencia, la dirección del flujo se invierte y los valores de ψ^* son de signo opuesto a los de la figura 10-70. Cuando se aplica de nuevo la regla del lado izquierdo, se grafica la función de corriente adimensional para $-2\pi < \psi^* < 0$ (Fig. 10-71). Para hacer esto, se resuelve la ecuación 7 para r^* como función de θ para varios valores de ψ^*:

Líneas de corriente adimensionales:
$$r^* = \pm\sqrt{\frac{\tan\psi^*}{\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta \tan\psi^*}} \quad \textbf{(9)}$$

Sólo se grafica la mitad superior porque la mitad inferior es simétrica y es simplemente la imagen especular de la mitad superior. Para el caso de $\dot{V}/L$ negativa, la aspiradora succiona el aire en todas direcciones, como se indica mediante las flechas sobre las líneas de corriente.

Para calcular la distribución de velocidad en el piso (el eje x), puede diferenciarse la ecuación 6 y aplicar la definición de función de corriente para flujo pla-

nar (Ec. 10-29), o puede realizarse una suma vectorial. Lo último es más simple y se ilustra en la figura 10-72 para una posición arbitraria a lo largo del eje x. La velocidad inducida a partir de la fuente superior (o sumidero) tiene magnitud $(\dot{V}/L)/(2\pi r_1)$ y su dirección está en línea con r_1, como se muestra. Debido a la simetría, la velocidad inducida a partir de la fuente imagen tiene magnitud idéntica, pero su dirección está en línea con r_2. La suma vectorial de estas dos velocidades inducidas se encuentra a lo largo del eje x pues las dos componentes horizontales se suman, pero las dos componentes verticales se cancelan mutuamente. Después de aplicar un poco de trigonometría, se llega a la conclusión de que:

Velocidad axial a lo largo del eje x:
$$u = V = \frac{(\dot{V}/L)x}{\pi(x^2 + b^2)} \quad \textbf{(10)}$$

donde V es la magnitud del vector de velocidad resultante a lo largo del piso, como se bosqueja en la figura 10-72. Dado que se hizo la aproximación de flujo irrotacional, puede usarse la ecuación de Bernoulli para generar el campo de presión. Cuando se ignora la gravedad:

Ecuación de Bernoulli:
$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{constante} = \frac{P_\infty}{\rho} + \underbrace{\frac{V_\infty^2}{2}}_{0} \quad \textbf{(11)}$$

Para generar un coeficiente de presión, es necesaria una velocidad de referencia para el denominador. Cuando no se tiene ninguna, se genera una a partir de los parámetros conocidos, a saber $V_{\text{ref}} = -(\dot{V}/L)/b$, donde se inserta el signo negativo para hacer V_{ref} positiva (porque $\dot{V}/L$ es negativo para el modelo de la aspiradora). Entonces C_p se define como:

Coeficiente de presión:
$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_{\text{ref}}^2} = -\frac{V^2}{V_{\text{ref}}^2} = -\frac{b^2V^2}{(\dot{V}/L)^2} \quad \textbf{(12)}$$

donde también se aplicó la ecuación 11. Cuando se sustituye la ecuación 10 para V se obtiene

$$C_p = -\frac{b^2x^2}{\pi^2(x^2 + b^2)^2} \quad \textbf{(13)}$$

Se introducen variables adimensionales para velocidad axial y distancia:

Variables adimensionales:
$$u^* = \frac{u}{V_{\text{ref}}} = -\frac{ub}{\dot{V}/L} \qquad x^* = \frac{x}{b} \quad \textbf{(14)}$$

Note que C_p ya es adimensional. En forma adimensional, las ecuaciones 10 y 13 se convierten en:

A lo largo del piso:
$$u^* = -\frac{1}{\pi}\frac{x^*}{1 + x^{*2}} \qquad C_p = -\left(\frac{1}{\pi}\frac{x^*}{1 + x^{*2}}\right)^2 = -u^{*2} \quad \textbf{(15)}$$

En la figura 10-73 se grafican curvas que muestran a u^* y C_p como funciones de x^*.

A partir de la figura 10-73 se ve que u^* aumenta lentamente desde 0 en $x^* = -\infty$ hasta un valor máximo de más o menos 0.159 en $x^* = -1$. La velocidad es positiva (hacia la derecha) para valores negativos de x^* como se esperaba, pues la aspiradora succiona el aire. Conforme la velocidad aumenta, la presión disminuye; C_p es 0 en $x = -\infty$ y disminuye a su valor mínimo de aproximadamente -0.0253 en $x^* = -1$. Entre $x^* = -1$ y $x^* = 0$ la velocidad disminuye a cero mientras la presión aumenta a cero en el punto de estancamiento directamente abajo de la boquilla de la aspiradora. Hacia la derecha de la boquilla (valores positivos de x^*), la velocidad es antisimétrica, mientras que la presión es simétrica.

La velocidad máxima (presión mínima) a lo largo del piso ocurre en $x^* = \pm 1$, que es la misma distancia que la altura de la boquilla sobre el piso (Fig. 10-74).

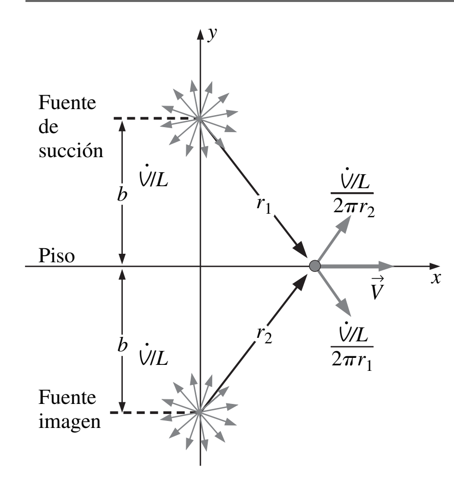


FIGURA 10-72
Suma vectorial de las velocidades inducidas por las dos fuentes; la velocidad resultante es horizontal en cualquier ubicación sobre el eje x debido a simetría.

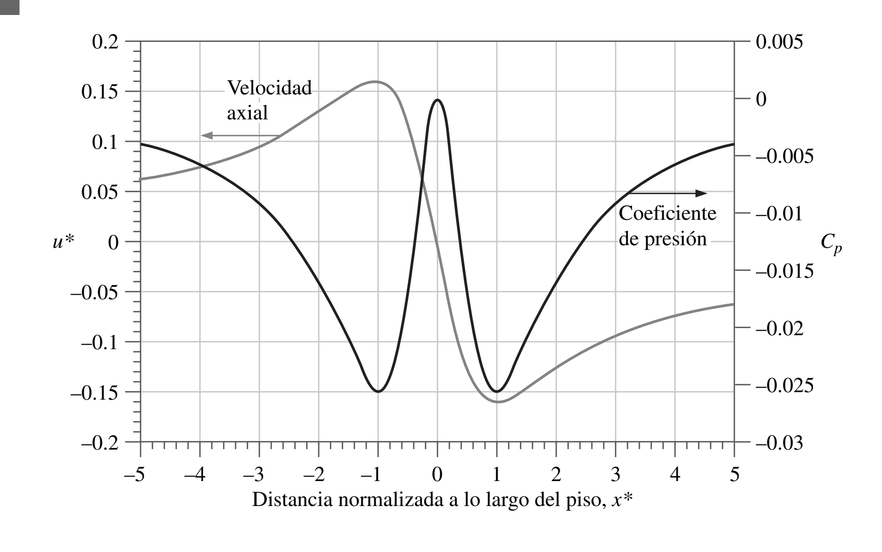




FIGURA 10-73
Velocidad axial adimensional (curva azul) y coeficiente de presión (curva negra) a lo largo del piso debajo de una aspiradora modelada como una región irrotacional de flujo.

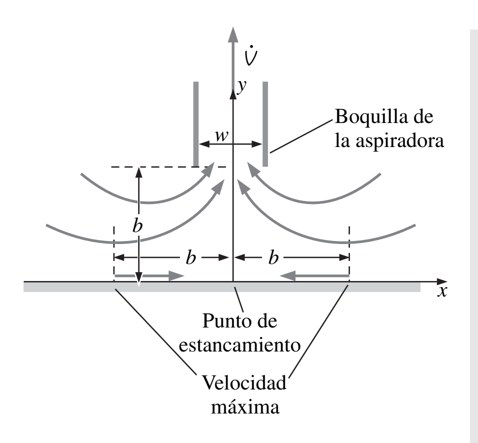


FIGURA 10-74
Con base en una aproximación de flujo irrotacional, la velocidad máxima a lo largo del piso por debajo de la boquilla de una aspiradora ocurre en $x = \pm b$. Directamente abajo de la boquilla ocurre un punto de estancamiento.

En términos dimensionales, **la velocidad máxima a lo largo del piso ocurre en $x = \pm b$**, y la velocidad que está allí es

Velocidad máxima a lo largo del piso:

$$|u|_{\text{máx}} = -|u^*|_{\text{máx}}\frac{\dot{V}/L}{b} = -0.159\left(\frac{-0.314 \text{ m}^2/\text{s}}{0.020 \text{ m}}\right) = \mathbf{2.50 \text{ m/s}} \quad \textbf{(16)}$$

Se espera que la aspiradora sea más eficiente al succionar polvo del piso cuando la velocidad, a lo largo del piso, es mayor y la presión, a lo largo del piso es menor. Por lo tanto, contrario a lo que podía haberse pensado, *el mejor funcionamiento* no *está directamente abajo de la entrada de succión, sino más bien en* x = ±b, como se ilustra en la figura 10-74.

Discusión Note que en el análisis nunca se usó la anchura w de la boquilla de la aspiradora, ya que un sumidero lineal no tiene parámetro de longitud. El lector puede convencerse personalmente de que una aspiradora funciona mejor en $x \cong \pm b$ cuando realice un simple experimento con una y algún material granular pequeño (como azúcar o sal) sobre un piso duro. Se observa que la aproximación irrotacional es bastante realista para flujo en la entrada de una aspiradora en todas partes excepto muy cerca del suelo, porque allí el flujo es rotacional.

Antes de terminar esta sección se enfatiza que, aunque la aproximación de flujo irrotacional es de manera matemática simple, y que los campos de velocidad y presión son fáciles de obtener, debe tenerse mucho cuidado en dónde aplicarla. La aproximación de flujo irrotacional no es aplicable en regiones de vorticidad no despreciables en especial cerca de paredes sólidas, donde las partículas de fluido rotan debido a los esfuerzos viscosos provocados por la condición de no-deslizamiento en la pared. Esto conduce a la sección final de este capítulo (Sección 10-6) en la que se trata la aproximación de capa límite.

10-6 ▪ LA APROXIMACIÓN DE CAPA LÍMITE

Como se comentó en las secciones 10-4 y 10-5, existen por lo menos dos situaciones de flujo en donde los términos viscosos en la ecuación de Navier-Stokes pueden despreciarse. La primera ocurre en regiones de flujo con número de Reynolds alto, donde se sabe que las fuerzas viscosas netas son despreciables en

comparación con las inerciales y/o de presión; a éstas se les llama *regiones invíscidas de flujo*. La segunda situación ocurre cuando la vorticidad es despreciablemente pequeña; a éstas se les llama *regiones irrotacionales* o *potenciales de flujo*. En cualquier caso, la eliminación de los términos viscosos de la ecuación de Navier-Stokes produce la ecuación de Euler (ecuación 10-13 y ecuación 10-25). Aunque la matemática se simplifica enormemente cuando se eliminan los términos viscosos, existen algunas deficiencias serias relacionadas con la aplicación de la ecuación de Euler a problemas prácticos de ingeniería. En la parte superior, en la lista de deficiencias está la incapacidad de especificar la condición de no-deslizamiento en paredes sólidas. Esto conduce a resultados que carecen de significado físico, como fuerzas de fricción nulas sobre paredes sólidas y fuerza de arrastre cero sobre cuerpos sumergidos en un flujo libre. Por lo tanto, puede considerarse que las ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes son dos montañas separadas por un profundo abismo (Fig. 10-75*a*). Se hace la siguiente afirmación acerca de la aproximación de capa límite:

> La aproximación de la capa límite tiende un puente entre el espacio que separa las ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes, y entre la condición de deslizamiento y la condición de no-deslizamiento en paredes sólidas (Fig. 10-75*b*).

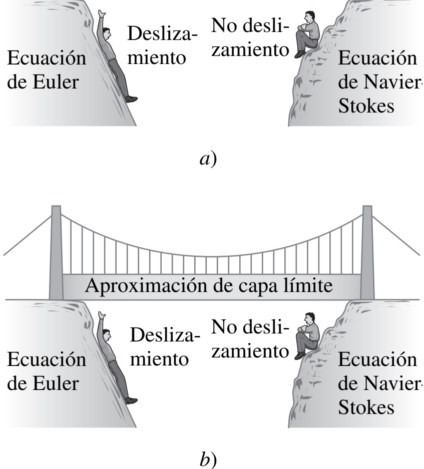


FIGURA 10-75
a) Entre la ecuación de Euler (que permite el deslizamiento en las paredes) y la ecuación de Navier-Stokes (que apoya la condición de no deslizamiento) existe un gran vacío; *b*) la aproximación de capa límite tiende un puente entre ese vacío.

Desde una perspectiva histórica, aproximadamente a mediados de la década de 1800, se conocía la ecuación de Navier-Stokes, pero no podía resolverse excepto para flujos de geometrías muy simples. Mientras tanto, los matemáticos fueron capaces de obtener hermosas soluciones analíticas de la ecuación de Euler y de las ecuaciones de flujo potencial para flujos de geometría compleja, pero sus resultados con frecuencia carecían de significado físico. Por lo tanto, la única manera confiable de estudiar flujos de fluido era empírica; es decir: con experimentos. En 1904 ocurrió un notable descubrimiento en la mecánica de fluidos, cuando Ludwig Prandtl (1875-1953) introdujo la **aproximación de capa límite**. La idea de Prandtl era dividir el flujo en dos regiones: una **región de flujo exterior** que es invíscido y/o irrotacional, y una región de flujo interior llamada **capa límite**: una región de flujo muy delgada cerca de una pared sólida donde las fuerzas viscosas y la rotacionalidad no pueden ignorarse (Fig. 10-76). En la región de flujo exterior se usa la continuidad y las ecuaciones de Euler para obtener el campo de velocidad de flujo exterior, y la ecuación de Bernoulli para obtener el campo de presión. De manera alternativa, si la región de flujo exterior es irrotacional, pueden usarse las técnicas de flujo potencial comentadas en la sección 10-5 (por ejemplo, la superposición) para obtener el campo de velocidad de flujo exterior. En cualquier caso, se resuelve *primero* para la región de flujo exterior, y luego se ajusta en una delgada capa límite en regiones donde la rotacionalidad y las fuerzas viscosas no pueden despreciarse. Dentro de la capa límite se resuelven las **ecuaciones de capa límite** que se tratan más adelante (note que las ecuaciones de capa límite son en sí aproximaciones de la ecuación de Navier-Stokes completa, como se verá).

La aproximación de capa límite corrige algunas de las grandes deficiencias de la ecuación de Euler al ofrecer una manera para reforzar la condición de no-deslizamiento en paredes sólidas. Por lo tanto, pueden existir fuerzas viscosas de corte a lo largo de paredes, los cuerpos sumergidos en un flujo libre pueden experimentar arrastre y puede predecirse con más precisión la separación de flujo en regiones de gradiente de presión adversa. En consecuencia, el concepto de capa límite se convirtió en el caballo de batalla de la ingeniería de mecánica de fluidos en el transcurso de la mayor parte de los noventa. Sin embargo, la llegada de las veloces computadoras baratas y los paquetes de dinámica de fluidos computacional en la última parte del siglo XX permitió soluciones numéricas de la ecuación de Navier-Stokes para flujos de geometría compleja. Por lo tanto, en la actualidad, ya no es necesario dividir el flujo en regiones de flujo exterior y regiones de capa límite; puede usarse CFD para resolver el conjunto completo

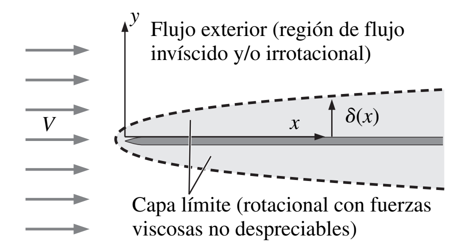


FIGURA 10-76
El concepto de capa límite de Prandtl divide el flujo en una región de flujo exterior y una delgada región de capa límite (no está a escala).

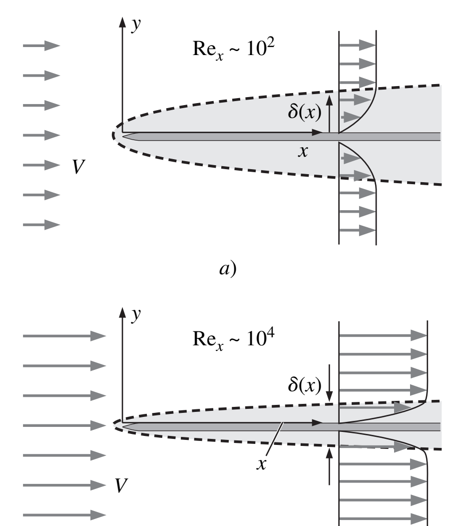


FIGURA 10-77
Flujo de un flujo uniforme paralelo a una placa plana (dibujos no a escala): *a*) $Re_x \sim 10^2$, *b*) $Re_x \sim 10^4$. Cuanto más grande sea el número de Reynolds, más delgada es la capa límite a lo largo de la placa en una posición *x* dada.

de ecuaciones de movimiento (continuidad más Navier-Stokes) a lo largo de todo el campo de flujo. No obstante, la teoría de capa límite todavía es útil en algunas aplicaciones de ingeniería, ya que toma menor tiempo llegar a una solución. Además, existen numerosos aspectos que pueden aprenderse acerca del comportamiento de los fluidos que fluyen al estudiar las capas límite. De nuevo se subraya que las soluciones de capa límite sólo son *aproximaciones* de solución de la ecuación de Navier-Stokes completa, y debe tenerse cuidado al aplicar ésta o cualquier aproximación.

La clave para la aplicación exitosa de la aproximación de capa límite es la suposición de que ésta es muy *delgada*. El ejemplo clásico es un flujo uniforme que fluye paralelo a una larga placa plana que está alineada con el eje *x*. En la figura 10-77 se bosqueja el **espesor de la capa** límite δ en alguna ubicación *x* a lo largo de la placa. Por costumbre, δ usualmente se define como la distancia de la pared a la cual la componente de velocidad paralela a la pared es 99 por ciento de la velocidad del fluido afuera de la capa límite. Se evidencia que, para un fluido y placa dados, cuanto mayor sea la velocidad *V* del flujo libre, más delgada será la capa límite (Fig. 10-77). En términos adimensionales, el número de Reynolds se define con base en la distancia *x* a lo largo de la placa:

Número de Reynolds a lo largo de una placa plana:

$$Re_x = \frac{\rho V x}{\mu} = \frac{Vx}{\nu} \qquad \textbf{(10-60)}$$

Por lo tanto:

> En una posición *x* dada, cuanto mayor sea el número de Reynolds, más delgada será la capa límite.

En otras palabras, cuanto mayor sea el número de Reynolds, más delgada será la capa límite, todo lo demás queda igual, y más confiable es la aproximación de capa límite. Se confía en que la capa límite es delgada cuando $\delta \ll x$ (o, expresado en forma adimensional, $\delta/x \ll 1$).

La forma del perfil de capa límite puede obtenerse de manera experimental mediante la visualización de flujo. En la figura 10-78 se muestra un ejemplo para una capa límite laminar sobre una placa plana. Tomada hace más de 50 años por F. X. Wortmann, ahora ésta se considera una fotografía clásica de un perfil de capa límite laminar de placa plana. La condición de no-deslizamiento clara-

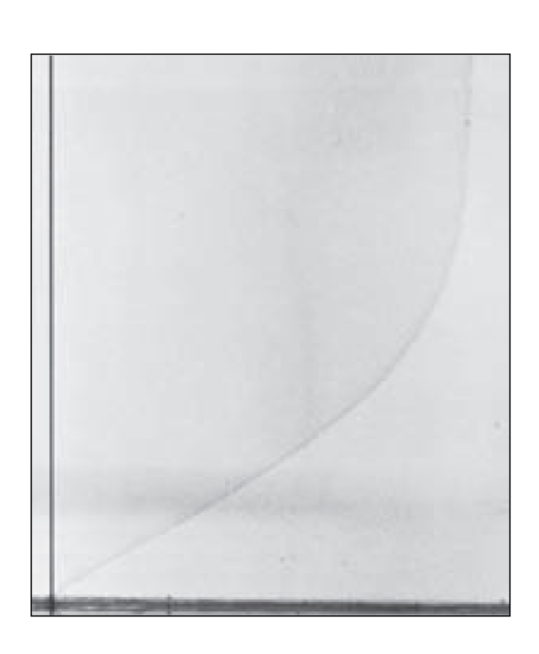


FIGURA 10-78
Visualización de flujo de un perfil de capa límite de una placa plana laminar. Fotografía tomada por F. X. Wortmann en 1953 al visualizar con el método de telurio. El flujo es de izquierda a derecha, y el borde de entrada de la placa plana está muy a la izquierda del campo de visión.
Wortmann, F. X. 1977 AGARD Conf. Proc. núm. 224, *ponencia 12.*

mente se verifica en la superficie de la placa, y el aumento suave en la velocidad del flujo con el aumento de la distancia de la placa verifica que el flujo, de hecho, es laminar.

Note que, aunque se habla de capas límite en contexto de la región delgada cercana a una pared sólida, la aproximación de capa límite *no* se limita a regiones de flujo acotadas por pared. Las mismas ecuaciones pueden aplicarse a **capas viscosas libres** como chorros, estelas y capas de mezcla (Fig. 10-79), siempre que el número de Reynolds sea suficientemente alto como para que dichas regiones sean *delgadas*. Las regiones de estos campos de flujo con fuerzas viscosas no-despreciables y vorticidad finita también pueden considerarse como capas límite, aun cuando una frontera de pared sólida pueda inclusive no estar presente. El espesor de capa límite $\delta(x)$ se etiqueta en cada uno de los bosquejos de la figura 10-79. Como puede verse, por costumbre, δ usualmente se define con base en la *mitad* del espesor total de la capa viscosa libre. δ se define como la distancia desde la línea central hasta el borde de la capa límite donde el cambio en velocidad es 99 por ciento del cambio máximo en velocidad desde la línea central hacia el flujo exterior. El espesor de la capa límite no es una constante, sino que varía con la distancia x corriente abajo. En los ejemplos que se comentan aquí (placa plana, chorro, estela y capa de mezcla), $\delta(x)$ *aumenta* con x. Sin embargo, existen situaciones de flujo, como el flujo exterior que acelera con velocidad a lo largo de una superficie sólida, en el que $\delta(x)$ *disminuye* con x.

Una error común, entre los estudiantes principiantes de mecánica de fluidos, es que la curva que representa δ como función de x es una *línea de corriente* del flujo: ¡*no lo es*! En la figura 10-80 se bosquejan las líneas de corriente como $\delta(x)$ para la capa límite que crece sobre una placa plana. Conforme el espesor de la capa límite crece corriente abajo, las líneas de corriente que pasan a través de la capa límite deben divergir ligeramente hacia arriba con la finalidad de satisfacer la ley de conservación de masa. La cantidad de ese desplazamiento hacia arriba es más pequeña que el crecimiento de $\delta(x)$. Dado que las líneas de corriente *cruzan* la curva $\delta(x)$, claramente $\delta(x)$ *no* es una línea de corriente (las líneas de corriente no pueden cruzarse unas a otras o de otro modo la masa no se conservaría).

Para una capa límite laminar que crece sobre una placa plana, como en la figura 10-80, el espesor de la capa límite δ es cuando mucho una función de V, x y las propiedades del fluido ρ y μ. Un ejercicio simple en análisis dimensional es demostrar que δ/x es una función de Re_x. De hecho, es evidente que δ es proporcional a la *raíz cuadrada* de Re_x. Sin embargo, el lector debe notar que estos resultados sólo son válidos para una capa límite *laminar* sobre una placa plana. Conforme se desplaza por la placa hacia valores cada vez más grandes de x, Re_x aumenta linealmente con x. En algún punto, las perturbaciones infinitesimales en el flujo comienzan a crecer y la capa límite no puede permanecer laminar: comienza un proceso de **transición** hacia flujo turbulento. Para una placa plana lisa con flujo libre uniforme, el proceso de transición comienza en un **número de Reynolds crítico**, $\text{Re}_{x,\text{ crítico}} \cong 1 \times 10^5$, y continúa hasta $\text{Re}_{x,\text{ transición}} \cong 3 \times 10^6$ (Fig. 10-81). El proceso de transición es bastante complicado y sus detalles están fuera del ámbito de este libro.

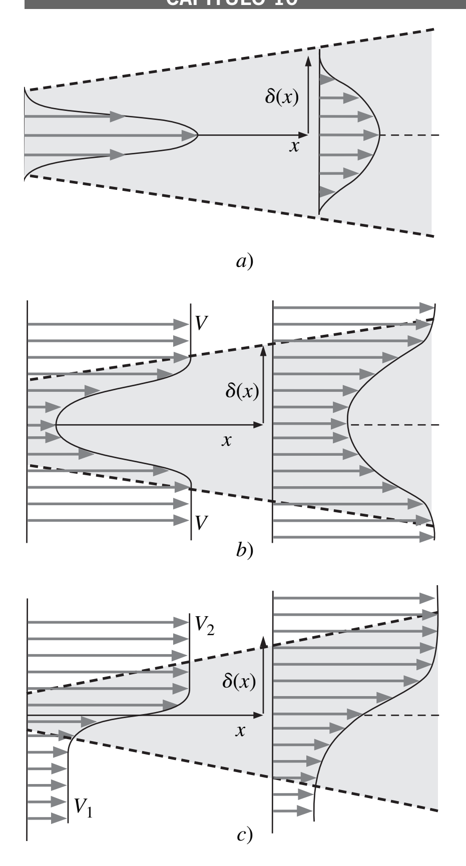


FIGURA 10-79
Tres regiones de flujo adicional donde la aproximación de capa límite puede ser adecuada: *a*) chorros, *b*) estelas y *c*) capas de mezcla.

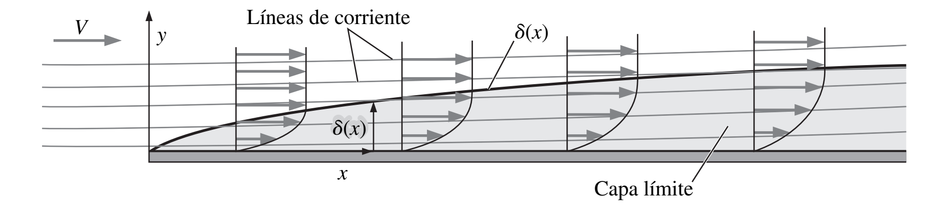


FIGURA 10-80
Comparación de líneas de corriente y la curva que representa δ como función de x para una capa límite de placa plana. Dado que las líneas de corriente cruzan la curva $\delta(x)$, $\delta(x)$ no puede por sí misma ser una línea de corriente del flujo.

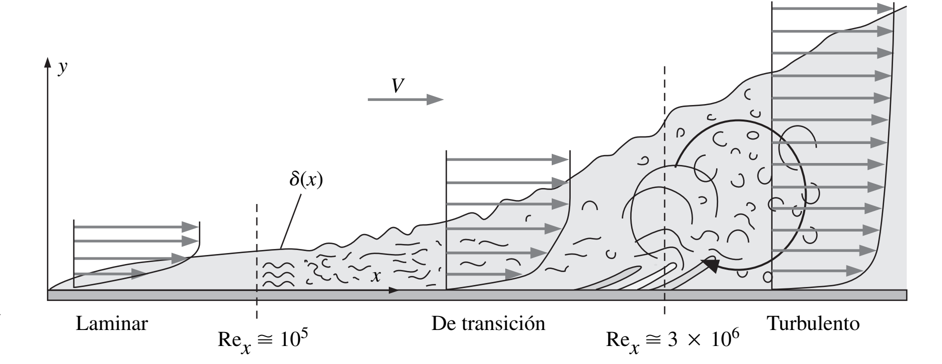


FIGURA 10-81
Transición de la capa límite laminar sobre una placa plana hacia una capa límite totalmente turbulenta (no está a escala).

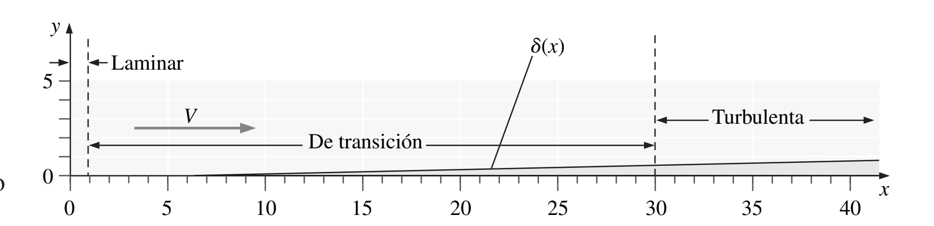


FIGURA 10-82
Espesor de la capa límite sobre una placa plana, dibujada a escala. Se indican las regiones laminar, de transición y turbulenta para el caso de una placa lisa con condiciones de flujo libre sin perturbaciones.

Note que en la figura 10-81 la escala vertical se exageró, y que la escala horizontal se acortó (en realidad, dado que $Re_{x,\text{transición}} \cong 30$ veces $Re_{x,\text{crítico}}$, la región de transición es mucho más larga que la indicada en la figura). Para dar al lector una mejor idea de qué tan delgada es en realidad una capa límite, en la figura 10-82 δ se graficó como una función de *x a escala*. Para generar la gráfica, se eligieron cuidadosamente los parámetros de modo que $Re_x = 100\ 000x$ sin importar las unidades de x. En consecuencia, en la gráfica, $Re_{x,\text{transición}}$ ocurre en $x \cong 1$ y $Re_{x,\text{crítico}}$ ocurre en $x \cong 30$. Note qué tan delgada es la capa límite y qué tan grande es la región de transición cuando se grafican a escala.

En los flujos de interés ingenieril en la vida real, la transición hacia flujo turbulento por lo general ocurre de manera más abrupta y mucho antes (en un valor más bajo de Re_x) que los valores dados para una placa plana lisa con un flujo libre sin perturbaciones. Factores como la rugosidad de la superficie, las perturbaciones de flujo libre, el ruido acústico, el hecho que el flujo no es estacionario, las vibraciones y la curvatura de la superficie sólida contribuyen a una posición de transición más anticipada. Debido a esto, con frecuencia se usa un *número de Reynolds crítico ingenieril* de $Re_{x,\text{ cr}} = 5 \times 10^5$ para determinar si una capa límite tiene más probabilidad de ser laminar ($Re_x < Re_{x,\text{cr}}$) o más probabilidad de ser turbulenta ($Re_x > Re_{x,\text{cr}}$). También es más común usar en transferencia de calor este valor como el Re crítico; de hecho, las relaciones para el coeficiente de fricción promedio y coeficiente de transferencia de calor se deducen al suponer que el flujo es laminar para Re_x más bajo que $Re_{x,\text{cr}}$, y de otro modo es turbulento. La lógica aquí es ignorar la transición al tratar la primera parte de la transición como laminar y la parte restante como turbulenta. Esta costumbre se sigue en el resto del libro a menos que se anote de otro modo.

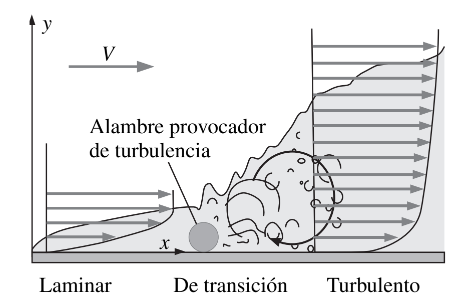


FIGURA 10-83
Con frecuencia se usa un alambre provocador de turbulencia para iniciar la transición previa a turbulencia en una capa límite (no está a escala).

El proceso de transición usualmente también es *no-estacionario* y difícil de predecir, inclusive con modernos paquetes de CFD. En algunos casos, los ingenieros ponen papel de lija áspera o alambres llamados **provocadores de turbulencia** a lo largo de la superficie, con la finalidad de forzar la transición en una posición deseada (Fig. 10-83). Los remolinos provenientes del alambre provocador de turbulencia originan mezcla local aumentada y crean perturbaciones que

muy rápidamente conducen a una capa límite turbulenta. De nuevo, la escala vertical en la figura 10-83 está exagerada con propósitos ilustrativos.



FIGURA 10-84
Capa límite que crece a lo largo del fondo plano de una canoa. El espesor de la capa límite está exagerado para que se observe con claridad.

EJEMPLO 10-9 **¿Capa límite laminar o turbulenta?**

Una canoa de aluminio se desplaza horizontalmente a lo largo de la superficie de un lago a 5.0 mi/h (Fig. 10-84). La temperatura del agua es de 50°F. El fondo de la canoa es plano y mide 16 ft de longitud. La capa límite sobre el fondo de la canoa ¿es laminar o turbulenta?

SOLUCIÓN Debe valorarse si la capa límite sobre el fondo de una canoa es laminar o turbulenta.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Se ignoran bordes y rugosidades en el fondo de la canoa; se supone que el fondo es una placa plana lisa alineada exactamente con la dirección del flujo. **3** Desde el marco de referencia de la canoa, el agua por abajo de la capa límite debajo de la canoa fluye a una velocidad uniforme $V = 5.0$ mi/h.

Propiedades La viscosidad cinemática del agua en $T = 50°F$ es $\nu = 1.407 \times 10^{-5}$ ft²/s.

Análisis Primero se calcula el número de Reynolds en la popa de la canoa, con la ecuación 10-60:

$$\text{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(5.0 \text{ mi/h})(16 \text{ ft})}{1.407 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}}\left(\frac{5\,280 \text{ ft}}{\text{mi}}\right)\left(\frac{\text{h}}{3\,600 \text{ s}}\right) = 8.34 \times 10^6 \quad \textbf{(1)}$$

Dado que Re_x es mucho mayor que $\text{Re}_{x,\text{cr}}$, e inclusive es mayor que $\text{Re}_{x,\text{transición}}$, *la capa límite es definitivamente turbulenta en la parte trasera de la canoa.*

Discusión Puesto que el fondo de la canoa no es perfectamente liso o perfectamente plano, y puesto que se esperan perturbaciones en el agua del lago debidas a las ondas, los remos, los peces, entre otros, se espera que la transición a turbulencia ocurra mucho antes y más rápidamente de lo que se ilustra para el caso teórico en la figura 10-81. En consecuencia, inclusive se tiene más confianza de que esta capa límite sea turbulenta.

Ecuaciones de la capa límite

Ahora que se tiene un sentido físico de las capas límite, es necesario generar las ecuaciones de movimiento que se usan en los cálculos de éstas: las **ecuaciones de capa límite**. Por sencillez, sólo se considera flujo bidimensional estacionario en el plano xy en coordenadas cartesianas. Sin embargo, la metodología que se usa aquí se puede extender a capas límite axisimétricas o a capas límite tridimensionales en cualquier sistema coordenado. Se ignora la gravedad, porque no se trata con superficies libres o con flujos conducidos por flotabilidad (flujos de convección libre), donde dominan los efectos gravitacionales. Sólo se consideran capas límite *laminares*; las ecuaciones de capa límite turbulenta están fuera de los objetivos de este libro. Para el caso de una capa límite a lo largo de una superficie sólida, se adopta un sistema coordenado en el que el eje x sea en todas partes paralelo a la pared y el eje y en todas partes sea normal a la pared (Fig. 10-85). Este sistema coordenado se llama **sistema coordenado de capa límite**. Cuando se resuelven las ecuaciones de capa límite, se hace en una posición x a la vez, y este sistema coordenado se usa *localmente*, y es *localmente ortogonal*. No es decisivo dónde se define $x = 0$, sin embargo para flujo sobre un cuerpo, como en la figura 10-85, por lo general se hace $x = 0$ en el punto de estancamiento frontal.

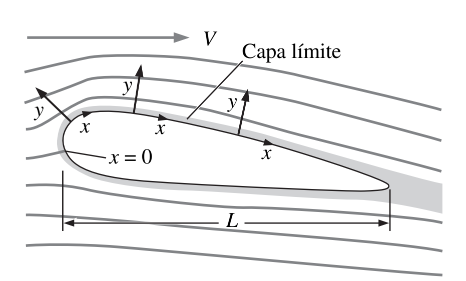


FIGURA 10-85
Sistema coordenado para capa límite de flujo sobre un cuerpo; x sigue la superficie y, por lo general, se establece en cero en el punto de estancamiento frontal del cuerpo, y y localmente es normal a la superficie en todas partes.

Se comienza con la ecuación adimensional de Navier-Stokes deducida al comienzo de este capítulo. Cuando se desprecian los términos no-estacionario y de gravedad, la ecuación 10-6 se convierte en:

$$(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*)\vec{V}^* = -[\mathrm{Eu}]\vec{\nabla}^*P^* + \left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\right]\nabla^{*2}\vec{V}^* \tag{10-61}$$

El número de Euler es de orden unitario porque las diferencias de presión afuera de la capa límite se determinan mediante la ecuación de Bernoulli y $\Delta P = P - P_\infty \sim \rho V^2$. Note que V es una velocidad característica del flujo exterior, usualmente igual a la velocidad de flujo libre para cuerpos que se encuentran sumergidos en un flujo uniforme. La longitud característica que se usa en esta eliminación de dimensiones es L, cierto tamaño característico del cuerpo. Para capas límite, x es de orden de magnitud L, y el número de Reynolds en la ecuación 10-61 puede considerarse como Re_x (Ec. 10-60). Re_x es muy grande en aplicaciones comunes de la aproximación de capa límite. Parecería entonces que se podría despreciar el último término en la ecuación 10-61 en caso de capas límite. Sin embargo, al hacerlo así resultaría en la ecuación de Euler, junto con todas sus deficiencias ya comentadas. De este modo, deben conservarse por lo menos *algunos* de los términos viscosos en la ecuación 10-61.

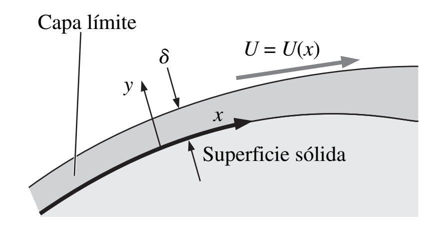


FIGURA 10-86
Vista amplificada de la capa límite a lo largo de la superficie de un cuerpo, que muestra las escalas de longitud x y δ y escala de velocidad U.

¿Cómo se decide cuáles términos conservar y cuáles despreciar? Para contestar esta pregunta, vuelve a realizarse una adimensionalización de las ecuaciones de movimiento con base en la longitud característica y la velocidad característica adecuadas dentro de la capa límite. En la figura 10-86 se bosqueja una vista amplificada de una porción de la capa límite de la figura 10-85. Puesto que el orden de magnitud de x es L, se usa L como una longitud característica apropiada para distancias en la dirección del flujo y para derivadas de velocidad y presión con respecto a x. Sin embargo, esta longitud característica es mucho más grande de lo deseable para derivadas respecto a y. Tiene más sentido usar δ como la longitud característica para distancias en la dirección normal a la dirección del flujo y para derivadas respecto a y. De manera similar, aunque la velocidad característica es V para todo el campo de flujo, es más adecuado usar U como la velocidad característica para capas límite, donde *U es la magnitud de la componente de velocidad paralela a la superficie sólida en una posición justo sobre la capa* límite (Fig. 10-86). En general, U es una función de x. Por lo tanto, dentro de la capa límite en algún valor de x, los órdenes de magnitud son:

$$u \sim U \qquad P - P_\infty \sim \rho U^2 \qquad \frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta} \tag{10-62}$$

El orden de magnitud de la componente de velocidad v no se especifica en la ecuación 10-62, sino que más bien se obtiene a partir de la ecuación de continuidad. Cuando se aplican los órdenes de magnitud en la ecuación 10-62 a la ecuación de continuidad de flujo incompresible en dos dimensiones:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\sim U/L} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim v/\delta} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{U}{L} \sim \frac{v}{\delta}$$

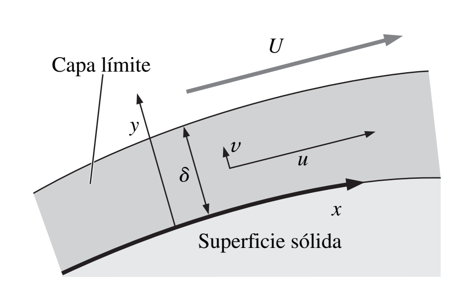


FIGURA 10-87
Vista excesivamente amplificada de la capa límite a lo largo de la superficie de un cuerpo, en donde se muestra que la componente de velocidad v es mucho más pequeña que u.

Dado que los dos términos tienen que equilibrarse mutuamente, deben ser del mismo orden de magnitud. Por lo tanto, se obtiene el orden de magnitud de la componente de velocidad v:

$$v \sim \frac{U\delta}{L} \tag{10-63}$$

Puesto que $\delta/L \ll 1$ en una capa límite (la capa límite es muy delgada), se llega a la conclusión de que $v \ll u$ en una capa límite (Fig. 10-87). A partir de las

ecuaciones 10-62 y 10-63 se definen las siguientes variables adimensionales dentro de la capa límite:

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad y^* = \frac{y}{\delta} \qquad u^* = \frac{u}{U} \qquad v^* = \frac{vL}{U\delta} \qquad P^* = \frac{P - P_\infty}{\rho U^2}$$

Como se usaron escalas apropiadas, todas estas variables adimensionales son de orden unitario; es decir, son variables *normalizadas* (capítulo 7).

Ahora se consideran las componentes x y y de la ecuación de Navier-Stokes. Estas variables adimensionales se sustituyen en la ecuación de la cantidad de movimiento y, lo que produce:

$$\underbrace{u}_{u^*U}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x^*}\frac{v^*U\delta}{L^2}} + \underbrace{v}_{v^*\frac{U\delta}{L}}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y^*}\frac{v^*U\delta}{L\delta}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}}_{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y^*}\frac{P^*\rho U^2}{\delta}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\nu\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}\frac{v^*U\delta}{L^3}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\nu\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}\frac{v^*U\delta}{L\delta^2}}$$

Después de aplicar algo de álgebra, y luego de multiplicar cada término por $L^2/(U^2\delta)$, se obtiene:

$$u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\left(\frac{L}{\delta}\right)^2\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \left(\frac{\nu}{UL}\right)\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{\nu}{UL}\right)\left(\frac{L}{\delta}\right)^2\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \qquad \textbf{(10-64)}$$

Cuando se comparan términos en la ecuación 10-64, el término medio en el lado derecho claramente es de órdenes de magnitud más pequeños que cualquier otro término ya que $\text{Re}_L = UL/\nu \gg 1$. Por la misma razón, el último término a la derecha es mucho más pequeño que el primer término a la derecha. Cuando se desprecian estos dos términos quedan los dos términos a la izquierda y el primer término a la derecha. Sin embargo, dado que $L \gg \delta$, el término de gradiente de presión es de órdenes de magnitud mayores que los términos convectivos en el lado izquierdo de la ecuación. En consecuencia, el único término que queda en la ecuación 10-64 es el término de presión. Dado que ningún otro término en la ecuación puede equilibrar este término, no se tiene opción sino hacerlo igual a cero. Por lo tanto, la ecuación de cantidad de movimiento y adimensional se reduce a:

$$\frac{\partial P^*}{\partial y^*} \cong 0$$

o, en términos de las variables físicas:

Gradiente de presión normal a través de una capa límite: $$\frac{\partial P}{\partial y} \cong 0 \qquad \textbf{(10-65)}$$

En palabras, aunque la presión puede variar *a lo largo* de la superficie sólida (en la dirección x), hay cambio despreciable en presión en la dirección *normal* a la superficie. Esto se ilustra en la figura 10-88. En $x = x_1$, $P = P_1$ en todos los valores de y a través de la capa límite desde la superficie hasta el flujo exterior. En alguna otra posición x, $x = x_2$, la presión puede cambiar, pero $P = P_2$ en todos los valores de y a través de esta sección de la capa límite.

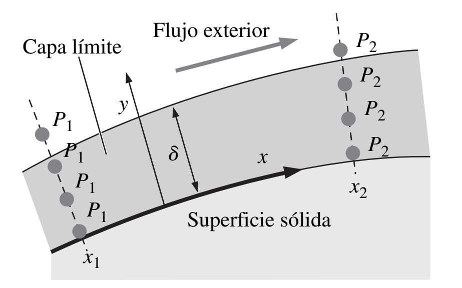


FIGURA 10-88
La presión puede cambiar *a lo largo* de una capa límite (dirección x), pero el cambio en presión *a través* de una capa límite (dirección y) es despreciable.

> La presión a través de una capa límite (dirección y) es aproximadamente constante.

Físicamente, puesto que la capa límite es tan delgada, las líneas de corriente dentro de ella tienen *curvatura* despreciable cuando se observan a la escala del espesor de la capa límite. Las líneas de corriente curvas necesitan una *aceleración centrípeta*, que proviene de un gradiente de presión a lo largo del radio de curvatura. Como las líneas de corriente no son considerablemente curvas en una capa límite delgada, no existe un gradiente de presión significativo a través de la capa límite.

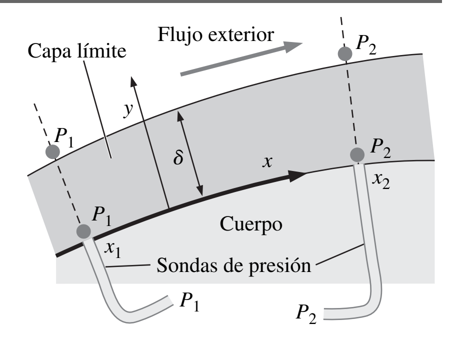


FIGURA 10-89
La presión en la región irrotacional de flujo afuera de una capa límite se puede medir por medio de las sondas de presión estática en la superficie del cuerpo. Se bosquejan dos de estas sondas de presión.

Una consecuencia inmediata de la ecuación 10-65 y del enunciado apenas presentado es que, en cualquier posición x a lo largo de la pared, la presión en el borde exterior de la capa límite ($y \cong \delta$) es la *misma* que la presión en la superficie ($y = 0$). Esto conduce a una tremenda aplicación práctica; es decir, la presión en el borde exterior de una capa límite se puede medir de manera experimental mediante una sonda de presión estática en la *superficie* directamente abajo de la capa límite (Fig. 10-89). Los experimentadores, con frecuencia aprovechan esta situación afortunada, e incontables formas de perfiles aerodinámicos para alas de avión y álabes de turbomaquinaria se probaron con estas sondas de presión durante el siglo pasado.

Los datos de presión experimental que se muestran en la figura 10-64 para flujo sobre un cilindro circular se midieron con sondas de presión en la superficie del cilindro, aunque se usaron para comparar la presión calculada por la aproximación de flujo exterior irrotacional. Tal comparación es válida, porque la presión que se obtiene *afuera* de la capa límite (a partir de la ecuación de Euler o en análisis de flujo potencial junto con la ecuación de Bernoulli) se aplica todo el camino a través de la capa límite hacia la superficie.

Se regresa al desarrollo de las ecuaciones de capa límite y se usa la ecuación 10-65 para simplificar de manera considerable la componente x de la ecuación de cantidad de movimiento. Específicamente, dado que P no es una función de y, se sustituye $\partial P/\partial x$ con dP/dx, donde P es el valor de la presión calculada a partir de la aproximación de flujo exterior (con el uso o de ecuación de continuidad más la de Euler, o de las ecuaciones de flujo potencial más Bernoulli). La componente x de la ecuación de Navier-Stokes se convierte en:

$$\underbrace{u}_{u^*U}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x^*}\frac{u^*U}{L}} + \underbrace{v}_{v^*\frac{U\delta}{L}}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y^*}\frac{u^*U}{\delta}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}}_{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^*}\frac{P^*\rho U^2}{L}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\nu\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}\frac{u^*U}{L^2}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\nu\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}\frac{u^*U}{\delta^2}}$$

Después de aplicar algo de álgebra, y luego de multiplicar cada término por L/U^2, se obtiene:

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dP^*}{dx^*} + \left(\frac{\nu}{UL}\right)\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{\nu}{UL}\right)\left(\frac{L}{\delta}\right)^2\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \qquad \textbf{(10-66)}$$

Cuando se comparan los términos en la ecuación 10-66, el término medio en el lado derecho es claramente de órdenes de magnitud más pequeña que los términos en el lado izquierdo, ya que $\text{Re}_L = UL/\nu \gg 1$. ¿Y qué hay acerca del último término a la derecha? Si se desprecia éste, se eliminan todos los términos viscosos y se está de vuelta en la ecuación de Euler. Es claro que este término debe permanecer. Más aún, puesto que todos los términos que permanecen en la ecuación 10-66 son de orden unitario, la combinación de parámetros entre paréntesis en el último término en el lado derecho de la ecuación 10-66 también debe ser de orden unitario:

$$\left(\frac{\nu}{UL}\right)\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \sim 1$$

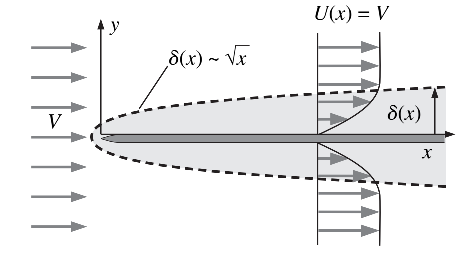


FIGURA 10-90
Un análisis del orden de magnitud de las ecuaciones de capa límite laminar a lo largo de una placa plana revela que δ crece como $\sqrt{x}$ (no está a escala).

De nuevo, cuando se reconoce que $\text{Re}_L = UL/\nu$, se ve inmediatamente que:

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} \qquad \textbf{(10-67)}$$

Esto confirma el enunciado previo de que, en una ubicación de flujo dada a lo largo de la superficie sólida, cuanto más grande sea el número de Reynolds, más delgada es la capa límite. Si en la ecuación 10-67 se sustituye x por L, también se llega a la conclusión que, para una capa límite laminar en una placa plana, donde $U(x) = V =$ constante, δ crece como la raíz cuadrada de x (Fig. 10-90).

En términos de las variables originales (físicas), la ecuación 10-66 se escribe como:

Ecuación de capa límite *de cantidad de movimiento en x*:

$$u\ \frac{\partial u}{\partial x} + v\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\ \frac{dP}{dx} + \nu\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \textbf{(10-68)}$$

Note que el último término en la ecuación 10-68 no es despreciable en la capa límite, pues la derivada y del gradiente de velocidad $\partial u/\partial y$ es suficientemente grande como para superar el valor (por lo general pequeño) de la viscosidad cinemática ν. Para finalizar, puesto que se sabe del análisis de la ecuación de cantidad de movimiento en y que la presión a través de la capa límite es la misma que en el exterior de la capa límite (Ec. 10-65), se aplica la ecuación de Bernoulli a la región de flujo exterior. Cuando se diferencia respecto a x se obtiene:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 = \text{constante} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{\rho}\ \frac{dP}{dx} = -U\ \frac{dU}{dx} \quad \textbf{(10-69)}$$

donde se nota que tanto P como U son funciones sólo de x, como se ilustra en la figura 10-91. La sustitución de la ecuación 10-69 en la ecuación 10-68 produce:

$$u\ \frac{\partial u}{\partial x} + v\ \frac{\partial u}{\partial y} = U\ \frac{dU}{dx} + \nu\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \textbf{(10-70)}$$

y se eliminó la presión de las ecuaciones de capa límite.

Se resume el conjunto de ecuaciones de movimiento para una capa límite laminar de flujo estacionario de fluido incompresible en el plano xy sin efectos gravitacionales significativos:

Ecuaciones de capa límite:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\ \frac{\partial u}{\partial y} = U\ \frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \textbf{(10-71)}$$

De manera matemática, la ecuación de Navier-Stokes completa es **elíptica** en el espacio, lo que significa que las condiciones de frontera se requieren a lo largo de toda la frontera del dominio de flujo. Físicamente, la información sobre el flujo se especifica en todas las partes de la frontera, tanto corriente arriba como corriente abajo. Por otra parte, la ecuación de capa límite de la cantidad de movimiento en x (la segunda de la ecuación 10-71) es **parabólica**. Esto significa que es necesario especificar condiciones de frontera sólo en tres lados del dominio de flujo (bidimensional). Físicamente, la información del flujo no pasa en la dirección opuesta al flujo (desde corriente abajo). Este hecho reduce enormemente el nivel de dificultad cuando se resuelven las ecuaciones de capa límite. De manera específica, no es necesario describir condiciones de frontera *corriente abajo*, sólo corriente arriba y en las partes superior e inferior del dominio de flujo (Fig. 10-92). Para un problema típico de capa límite a lo largo de una superficie sólida, se especifica la condición de no-deslizamiento en la pared ($u = v = 0$ en $y = 0$), la condición del flujo exterior en el borde de la capa límite y más allá [$u = U(x)$ conforme $y \rightarrow \infty$] y un perfil de velocidad de partida en alguna posición corriente arriba [$u = u_{\text{partida}}(y)$ en $x = x_{\text{partida}}$, donde x_{partida} puede o no ser cero]. Con estas condiciones de frontera simplemente se marcha corriente abajo en la dirección x, cuando se resuelven las ecuaciones de capa límite conforme se avanza. Esto es particularmente atractivo para cálculos numéricos de capa límite, porque una vez que se conoce el perfil de velocidad en una posición x (x_i), puede caminarse hacia la siguiente posición x (x_{i+1}) y luego se usa este perfil recién calculado como el perfil de partida para caminar hacia la siguiente posición x (x_{i+2}).

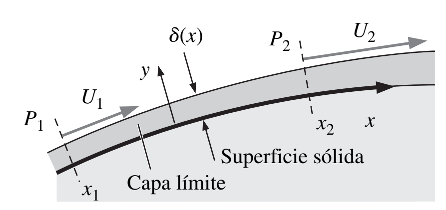


FIGURA 10-91
La velocidad de flujo exterior paralela a la superficie sólida es $U(x)$ y se obtiene a partir de la presión de flujo exterior, $P(x)$. Esta velocidad aparece en la componente x de la ecuación de cantidad de movimiento de la capa límite, ecuación 10-70.

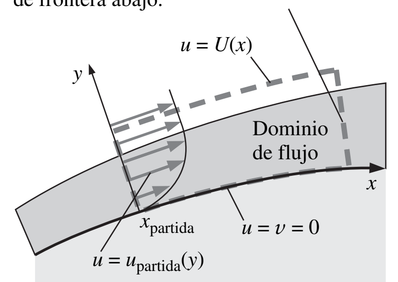


FIGURA 10-92
La ecuación de capa límite es parabólica, de modo que sólo se necesita especificar las condiciones de frontera en tres lados del dominio de flujo.

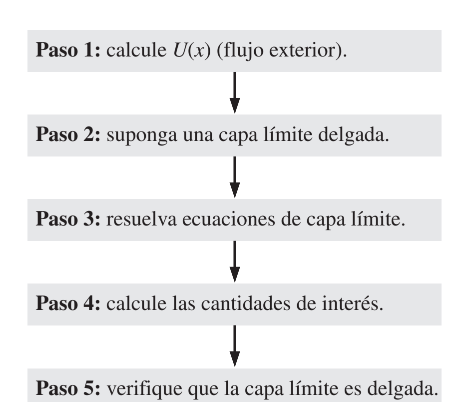


FIGURA 10-93
Resumen del procedimiento de capa límite para capas límite bidimensionales de flujo estacionario e incompresible en el plano xy.

El procedimiento de capa límite

Cuando se emplea la aproximación de capa límite se usa un procedimiento general paso a paso. Aquí se subraya el procedimiento y en la figura 10-93 se presenta de manera condensada.

Paso 1 Resuelva para el flujo exterior e ignore la capa límite (suponga que la región de flujo exterior a la capa límite es aproximadamente invíscida y/o irrotacional). Transforme las coordenadas según sea necesario para obtener $U(x)$.

Paso 2 Suponga una capa límite delgada; tan delgada, de hecho, que no afecte la solución de flujo exterior del paso 1.

Paso 3 Resuelva las ecuaciones de capa límite (Ecs. 10-71), con el uso de las condiciones de frontera adecuadas: la condición de frontera de no-deslizamiento en la pared, $u = v = 0$ en $y = 0$; la condición conocida de flujo exterior en el borde de la capa límite, $u \to U(x)$ conforme $y \to \infty$; y algún perfil de velocidad de partida conocido, $u = u_{\text{partida}}(y)$ en $x = x_{\text{partida}}$.

Paso 4 Calcule las cantidades de interés en el campo de flujo. Por ejemplo, ya resueltas las ecuaciones de capa límite (paso 3), puede calcular $\delta(x)$, el esfuerzo de corte a lo largo de la superficie sólida, la fuerza de arrastre debido a fricción, etcétera.

Paso 5 Verifique que las aproximaciones de capa límite son adecuadas. En otras palabras, verifique que la capa límite es *delgada*; de otro modo, la aproximación no se justifica.

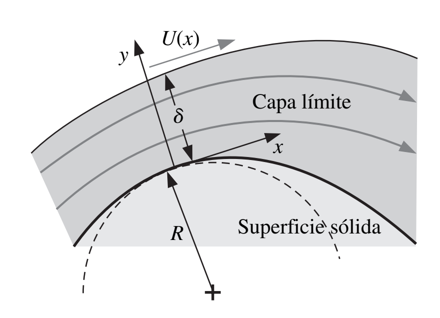


FIGURA 10-94
Cuando el radio local de curvatura de la superficie sólida (R) es lo suficientemente pequeño para ser de la misma magnitud que δ, no pueden ignorarse los efectos de aceleración centrípeta y $\partial P/\partial y \neq 0$. En estas regiones no es adecuada la aproximación de capa límite.

Antes de resolver algunos ejemplos, a continuación se mencionan varias de las limitaciones de la aproximación de capa límite. Se trata de *banderas rojas* para tenerlas presentes cuando se realizan cálculos de capa límite:

- La aproximación de capa límite no es válida si el número de Reynolds no es lo suficientemente grande. ¿Qué tan grande es suficientemente grande? Depende de la precisión deseada de la aproximación. Cuando se usa la ecuación 10-67 como lineamiento, $\delta/L \sim 0.03$(3 por ciento) para $\text{Re}_L = 1\,000$, y $\delta/L \sim 0.01$ (1 por ciento) para $\text{Re}_L = 10\,000$.
- La suposición de gradiente de presión cero en la dirección y (Ec. 10-65) no es válida si la curvatura de la pared es de magnitud similar que δ (Fig. 10.94). En estos casos, no pueden ignorarse los efectos de aceleración centrípeta debidos a la curvatura de la línea de corriente. Físicamente, la capa límite no es lo suficientemente delgada para que la aproximación sea adecuada cuando δ no es $\ll R$.
- Cuando el número de Reynolds es demasiado *alto*, la capa límite no permanece laminar, como ya se indicó. La aproximación de capa límite por sí misma no obstante puede ser apropiada, pero las ecuaciones 10-71 *no* son válidas si el flujo es de transición o totalmente turbulento. Como ya se indicó, la capa límite laminar sobre una placa plana lisa en condiciones de flujo libre no perturbado comienza una transición hacia turbulencia a $\text{Re}_x \cong 1 \times 10^5$. En aplicaciones de ingeniería práctica, las paredes no pueden ser lisas y pueden existir vibraciones, ruido y fluctuaciones en el flujo libre sobre la superficie sólida, todo lo cual contribuye a un comienzo inclusive antes del proceso de transición.
- Si ocurre separación del flujo, la aproximación de capa límite ya no es adecuada en la región de flujo separado. La razón principal para esto es que una región de flujo separado contiene *flujo inverso*, y se pierde la naturaleza parabólica de las ecuaciones de la capa límite.

EJEMPLO 10-10 Capa límite laminar sobre una placa plana

Un flujo libre uniforme de velocidad V fluye paralelo a una placa plana semi-infinita e infinitesimalmente delgada, como se bosqueja en la figura 10-95. El sistema coordenado se define de modo que la placa comienza en el origen. Dado que el flujo es simétrico alrededor del eje x, sólo se considera la mitad superior del flujo. Calcule el perfil de velocidad de la capa límite a lo largo de la placa y coméntelo.

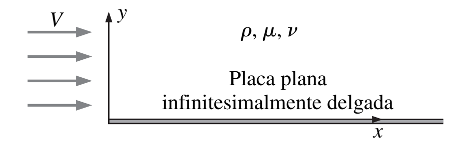


FIGURA 10-95
Configuración para el ejemplo 10-10: flujo uniforme paralelo a una placa plana semiinfinita a lo largo del eje x.

SOLUCIÓN Debe calcularse el perfil de velocidad de capa límite (u como función de x y y) conforme la capa límite laminar crece a lo largo de la placa plana.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario, incompresible y bidimensional en el plano xy. **2** El número de Reynolds es suficientemente alto como para que la aproximación de capa límite sea razonable. **3** La capa límite permanece laminar sobre el rango de interés.
Análisis Se sigue el procedimiento paso a paso esbozado en la figura 10-93.

Paso 1 El flujo exterior se obtiene cuando se ignora la capa límite, porque se supone que es muy, muy delgado. Recuerde que cualquier línea de corriente en un flujo irrotacional puede considerarse como una pared. En este caso, el eje x puede considerarse como una línea de corriente de flujo libre uniforme, uno de los flujos de bloques de construcción de la sección 10-5; esta línea de corriente también puede considerarse como una placa infinitesimalmente delgada (Fig. 10-96). En consecuencia:

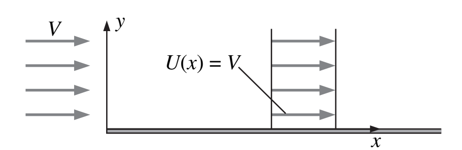


FIGURA 10-96
El flujo exterior del ejemplo 10-10 es trivial porque el eje x es una línea de corriente de flujo y $U(x) = V =$ constante.

Flujo exterior: $$U(x) = V = \text{constante} \tag{1}$$

Por conveniencia, de aquí en adelante se usa U en lugar de $U(x)$, ya que es una constante.

Paso 2 Se supone una capa límite muy delgada a lo largo de la pared (Fig. 10-97). La clave aquí es que la capa límite es tan delgada que tiene efecto despreciable en el flujo exterior calculado en el paso 1.

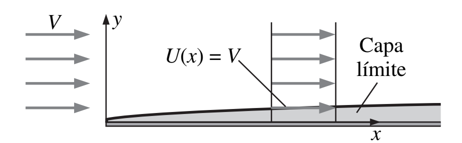


FIGURA 10-97
La capa límite es tan delgada que no afecta al flujo exterior; aquí, para observarse con claridad, se exagera el espesor de la capa límite.

Paso 3 Ahora deben resolverse las ecuaciones de capa límite. Se ve de la ecuación 1 que $dU/dx = 0$; en otras palabras, no permanece término de gradiente de presión en la ecuación de cantidad de movimiento en x de la capa límite. Por esto, la capa límite sobre una placa plana con frecuencia se llama **capa límite de gradiente de presión cero**. Las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento en x para la capa límite (Ecs. 10-71) se convierten en:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

Existen cuatro condiciones de frontera necesarias:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{en } y = 0 \qquad & u &= U \quad \text{como } y \rightarrow \infty \\ v &= 0 \quad \text{en } y = 0 \qquad & u &= U \quad \text{para toda } y \text{ en } x = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

La última de las condiciones de frontera en la ecuación 3 es el perfil de velocidad de partida; se supone que la placa todavía no influye en el flujo en la posición de partida ($x = 0$).

Estas ecuaciones y condiciones de frontera parecen suficientemente simples; pero, por desgracia, *nunca se ha encontrado solución analítica alguna*. Sin embargo, las ecuaciones 2 las resolvió *numéricamente* por primera vez en 1908 P. R. Heinrich Blasius (1883–1970). Como nota marginal, Blasius fue un estudiante de doctorado de Prandtl. Desde luego, en aquellos días las computadoras todavía no existían, y todos los cálculos se realizaron *a mano*. En

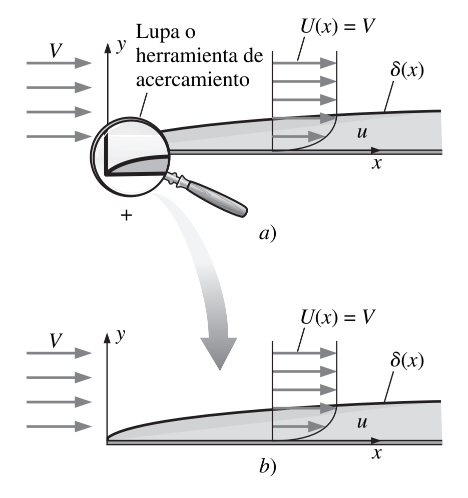


FIGURA 10-98
Un resultado útil de la suposición de similitud es que el flujo parece igual (es *similar*) sin importar qué tan cerca o qué tan lejos se esté; *a*) vista desde una distancia, como una persona puede ver, *b*) vista de acercamiento, como podría ver una hormiga.

la actualidad, estas ecuaciones pueden resolverse en computadora en pocos segundos. La clave para la solución es la suposición de **similitud**. En términos simples, aquí se puede suponer la similitud porque *no existe la longitud característica* en la geometría del problema. Físicamente, dado que la placa es infinitamente larga en la dirección *x*, siempre se ve el *mismo* patrón de flujo sin importar cuánto se acerque o se aleje (Fig. 10-98).

Blasius introdujo una **variable de similitud** η que combina las variables independientes *x* y *y* en una variable adimensional independiente:

$$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \qquad \textbf{(4)}$$

y la resolvió para una forma adimensional de la componente *x* de velocidad:

$$f' = \frac{u}{U} = \text{función de } \eta \qquad \textbf{(5)}$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones 4 y 5 en las ecuaciones 2, expuestas a las condiciones de frontera de la ecuación 3, se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para velocidad adimensional $f'(\eta) = u/U$ como función de la variable de similitud η. Para obtener los resultados que se muestran en la tabla 10-3 y en la figura 10-99, se usa la popular técnica numérica de Runge-Kutta. Los detalles de la técnica numérica están fuera de los objetivos de este texto (véase Heinsohn y Cimbala, 2003). También existe una pequeña componente *y* de velocidad *v* lejos de la placa, pero $\upsilon \ll u$, y no se trata aquí tampoco. La belleza de la solución de similitud es que esta forma única de perfil de velocidad se aplica a *cualquier* posición *x* cuando se grafica en variables de similitud, como en la figura 10-99. La concordancia de la forma de perfil calculado en la figura 10-99 con los datos obtenidos experimentalmente (círculos en la figura 10-99) y con la forma de perfil visualizado de la figura 10-78 es notable. La solución de Blasius es un éxito sorprendente.

TABLA 10-3

Solución de Blasius de la capa límite laminar sobre la placa plana en variables de similitud*

η	f''	f'	f	η	f''	f'	f
0.0	0.33206	0.00000	0.00000	2.4	0.22809	0.72898	0.92229
0.1	0.33205	0.03321	0.00166	2.6	0.20645	0.77245	1.07250
0.2	0.33198	0.06641	0.00664	2.8	0.18401	0.81151	1.23098
0.3	0.33181	0.09960	0.01494	3.0	0.16136	0.84604	1.39681
0.4	0.33147	0.13276	0.02656	3.5	0.10777	0.91304	1.83770
0.5	0.33091	0.16589	0.04149	4.0	0.06423	0.95552	2.30574
0.6	0.33008	0.19894	0.05973	4.5	0.03398	0.97951	2.79013
0.8	0.32739	0.26471	0.10611	5.0	0.01591	0.99154	3.28327
1.0	0.32301	0.32978	0.16557	5.5	0.00658	0.99688	3.78057
1.2	0.31659	0.39378	0.23795	6.0	0.00240	0.99897	4.27962
1.4	0.30787	0.45626	0.32298	6.5	0.00077	0.99970	4.77932
1.6	0.29666	0.51676	0.42032	7.0	0.00022	0.99992	5.27923
1.8	0.28293	0.57476	0.52952	8.0	0.00001	1.00000	6.27921
2.0	0.26675	0.62977	0.65002	9.0	0.00000	1.00000	7.27921
2.2	0.24835	0.68131	0.78119	10.0	0.00000	1.00000	8.27921

* $\boldsymbol{\eta}$ es la variable de similitud definida en la ecuación 4 anterior, y la función $f(\boldsymbol{\eta})$ se resuelve con la técnica numérica de Runge-Kutta. Note que f'' es proporcional al esfuerzo de corte τ, f' es proporcional a la componente *x* de velocidad en la capa límite ($f' = u/U$) y *f* misma es proporcional a la función de corriente. En la figura 10-99 se grafica f' como función de $\boldsymbol{\eta}$.

Paso 4 A continuación se calculan varias cantidades de interés en esta capa límite. En primer lugar, con base en la solución numérica con resolución más fina que la que se muestra en la tabla 10-3, se encuentra que $u/U = 0.990$ en $\eta \cong 4.91$. Este espesor de capa límite que corresponde a 99 por ciento de velocidad de flujo libre se bosqueja en la figura 10-99. Con la ecuación 4 y la definición de δ se llega a la conclusión que $y = \delta$ cuando:

$$\eta = 4.91 = \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\,\delta \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}} \tag{6}$$

Este resultado concuerda cualitativamente con la ecuación 10-67, que se obtuvo a partir de un simple análisis de orden de magnitud. Numerosos autores redondean a 5.0 la constante 4.91 de la ecuación 6, pero en este texto se prefiere expresar el resultado a tres cifras significativas por coherencia con otras cantidades obtenidas a partir del perfil de Blasius.

Otra cantidad de interés es el esfuerzo de corte en la superficie de la placa τ_w,

$$\tau_p = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{7}$$

En la figura 10-99 está la pendiente del perfil de velocidad adimensional en la superficie de la placa ($y = 0$ y $\eta = 0$). A partir de los resultados de similitud (Tabla 10-3), la pendiente adimensional en la pared es:

$$\left.\frac{d(u/U)}{d\eta}\right)_{\eta=0} = f''(0) = 0.332 \tag{8}$$

Luego de sustituir la ecuación 8 en la ecuación 7, y después de aplicar algo de álgebra (transformación de variables de similitud de vuelta a variables físicas), se obtiene:

Esfuerzo de corte en variables físicas:
$$\tau_w = 0.332\frac{\rho U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{9}$$

Por lo tanto, se ve que el esfuerzo de corte decae con x como $x^{-1/2}$, como se bosqueja en la figura 10-100. En $x = 0$, la ecuación 9 predice que τ_p es infinito, lo que carece de significado físico. La aproximación de capa límite no es adecuada en el borde de entrada ($x = 0$), porque el espesor de la capa límite no es pequeño comparado con x. Más aún, cualquier placa plana *real* tiene espesor finito, y existe un punto de estancamiento en el frente de la placa, con la rápida aceleración hacia $U(x) = V$ del flujo exterior. Es posible ignorar la región muy cercana a $x = 0$ sin pérdida de precisión en el resto del flujo.

La ecuación 9 es adimensional cuando se define un **coeficiente de fricción local**

Coeficiente de fricción local, placa plana laminar:
$$\boldsymbol{C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}} \tag{10}$$

Note que la función de la ecuación 10 para $C_{f,x}$ tiene la misma forma que la función de la ecuación 6 para δ/x, pero con una constante diferente: ambas decaen como el inverso de la raíz cuadrada del número de Reynolds. En el capítulo 11 se integra la ecuación 10 para obtener la fuerza total de arrastre debido a fricción sobre una placa plana de longitud L.

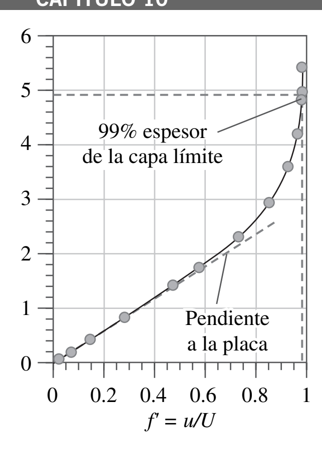


FIGURA 10-99
Perfil de Blasius en variables de similitud para la capa límite que crece sobre una placa plana semiinfinita. Los datos experimentales (círculos) son a $\mathrm{Re}_x = 3.64 \times 10^5$.
Tomado de Panton (1996).

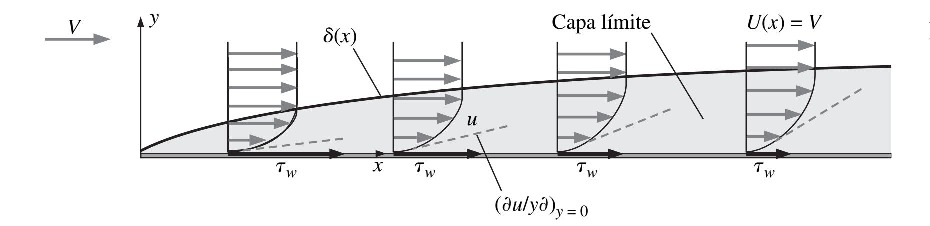


FIGURA 10-100
Para una capa límite laminar de placa plana, el esfuerzo de corte decae como $x^{-1/2}$ conforme la pendiente $\partial u/\partial y$ en la superficie de la placa disminuye corriente abajo. La porción delantera de la placa aporta más fuerza de arrastre debido a fricción que la porción trasera.

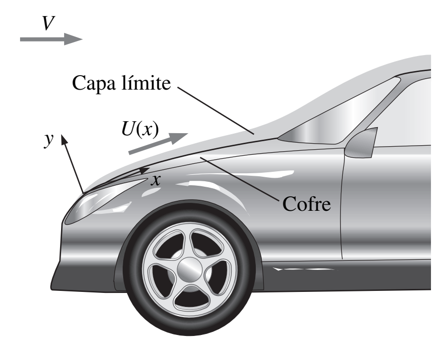


FIGURA 10-101
Capa límite que crece sobre el cofre de un automóvil. Para que se observe con claridad se exagera el espesor de la capa límite.

Paso 5 Es necesario verificar que la capa límite sea delgada. Considere el ejemplo práctico del flujo sobre el cofre de su automóvil (Fig. 10-101) mientras el lector conduce por la ciudad a 20 mi/h en un día caluroso. La viscosidad cinemática del aire es $\nu = 1.8 \times 10^{-4}$ ft^2/s. El cofre se aproxima a una placa plana de 3.5 ft de longitud que se desplaza horizontalmente con una velocidad de $V = 20$ mi/h. Primero, con la ecuación 10-60, se aproxima el número de Reynolds al final del cofre:

$$\text{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(20\text{ mi/h})(3.5\text{ ft})}{1.8 \times 10^{-4}\text{ ft}^2/\text{s}}\left(\frac{5280\text{ ft}}{\text{mi}}\right)\left(\frac{\text{h}}{3600\text{ s}}\right) = 5.7 \times 10^5$$

Puesto que Re_x está muy cerca del número de Reynolds crítico estimado, $\text{Re}_{x,\text{cr}} = 5 \times 10^5$, la suposición de flujo laminar puede o no ser apropiada. No obstante, se usa la ecuación 6 para estimar el espesor de la capa límite, cuando se supone que el flujo permanece laminar:

$$\delta = \frac{4.91x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{4.91(3.5\text{ ft})}{\sqrt{5.7 \times 10^5}}\left(\frac{12\text{ in}}{\text{ft}}\right) = 0.27\text{ in} \tag{11}$$

Hacia el final del cofre, la capa límite sólo tiene casi un cuarto de pulgada de espesor, y se verifica la suposición de una capa límite muy delgada.

Discusión La solución de Blasius de capa límite es válida sólo para flujo sobre una placa plana perfectamente alineada con el flujo. Sin embargo, con frecuencia se usa como una aproximación rápida para la capa límite que se forma a lo largo de las superficies sólidas que no necesariamente son planas ni exactamente paralelas al flujo, como el cofre del automóvil. Como se ilustró en el paso 5, en problemas prácticos de ingeniería no es difícil alcanzar números de Reynolds mayores que el valor crucial para la transición a turbulencia. Debe tenerse cuidado de no aplicar la solución de capa límite laminar que se presenta aquí cuando ésta se vuelve turbulenta.

Espesor de desplazamiento

Como se mostró en la figura 10-80, las líneas de corriente adentro y afuera de una capa límite deben doblarse ligeramente hacia fuera para que se alejen de la pared, con la finalidad de satisfacer la conservación de la masa conforme el espesor de la capa límite crece corriente abajo. Esto se debe a que la componente y de velocidad, v, es pequeña pero finita y positiva. Afuera de la capa límite, esta desviación de las líneas de corriente afecta al flujo exterior. El **espesor de desplazamiento** δ^* se define como la distancia que se desvía una línea de corriente justo afuera de la capa límite, como se bosqueja en la figura 10-102.

V
Línea de corriente del flujo exterior
$U(x) = V$
$\delta^*(x)$
y
$\delta(x)$
x
Capa límite

FIGURA 10-102
Espesor de desplazamiento definido por una línea de corriente afuera de la capa límite. El espesor de la capa límite está exagerado.

El espesor de desplazamiento es la distancia que una línea de corriente se desvía y se aleja de la pared, justo afuera de la capa límite debido al efecto de la capa límite.

Una expresión para δ^* para la capa límite a lo largo de una placa plana se genera cuando se realiza un análisis de volumen de control con el uso de conservación de masa. Los detalles se dejan como ejercicio para el lector; el resultado en cualquier posición x a lo largo de la placa es:

Espesor de desplazamiento:
$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{10-72}$$

Note que el límite superior de la integral en la ecuación 10-72 se muestra como ∞, pero, ya que $u = U$ en todas partes sobre la capa límite, es necesario integrar

sólo hasta cierta distancia finita sobre δ. Obviamente, δ^* crece con x conforme crece la capa límite (Fig. 10-103). Para una placa plana laminar, se integra la solución numérica (de Blasius) del ejemplo 10-10 para obtener:

Espesor de desplazamiento, placa plana laminar: $$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{\text{Re}_x}} \qquad \textbf{(10-73)}$$

La ecuación para δ^* es la misma que la de δ, pero con una constante diferente. De hecho, para flujo laminar sobre una placa plana, δ^* en cualquier posición x demuestra ser casi tres veces más pequeña que δ en dicha misma posición x (Fig. 10-103).

Existe otra manera de explicar el significado físico de δ^* que demuestra ser más útil para aplicaciones prácticas de ingeniería. A saber, el espesor de desplazamiento puede considerarse como un aumento imaginario o aparente en el espesor de la pared desde el punto de vista de la región de flujo exterior invíscido y/o irrotacional. Para el ejemplo de la placa plana, el flujo exterior ya no "ve" más una placa plana infinitesimalmente delgada; más bien ve una placa de espesor finito con forma como el espesor de desplazamiento de la ecuación 10-73, que se ilustra en la figura 10-104.

El espesor de desplazamiento es el aumento imaginario en espesor de la pared, visto por el flujo exterior, debido al efecto de la creciente capa límite.

Si se tuviera que resolver la ecuación de Euler para el flujo alrededor de esta placa imaginaria más gruesa, la componente de velocidad del flujo exterior $U(x)$ diferiría del cálculo original. Entonces podría usarse esta $U(x)$ aparente para mejorar el análisis de capa límite. El lector puede imaginar una modificación al procedimiento de capa límite de la figura 10-93 en el que vaya a través de los primeros cuatro pasos, calcule $\delta^*(x)$ y luego regrese al paso 1, esta vez con el uso del cuerpo imaginario (más grueso) para calcular una $U(x)$ aparente. Si se sigue esto, se resuelven las ecuaciones de capa límite. El procedimiento podría repetirse tantas veces como fuera necesario hasta que converja. De esta manera, el flujo exterior y la capa límite serían más coherentes uno con otra.

La utilidad de esta interpretación del espesor de desplazamiento se vuelve obvia si se considera flujo uniforme que entra a un canal acotado por dos paredes paralelas (Fig. 10-105). Conforme las capas límite crecen en las paredes superior e inferior, el flujo central irrotacional debe acelerar para satisfacer la ley de conservación de masa (Fig. 10-105*a*). Desde el punto de vista del flujo central entre las capas límite, las capas límite provocan que las paredes del canal parezcan convergir: la distancia aparente entre las paredes disminuye conforme x aumenta. Este aumento imaginario en el espesor de una de las paredes es igual a $\delta^*(x)$, y la $U(x)$ *aparente* del flujo central debe aumentar en concordancia, como se bosqueja, para satisfacer la ley de conservación de masa.

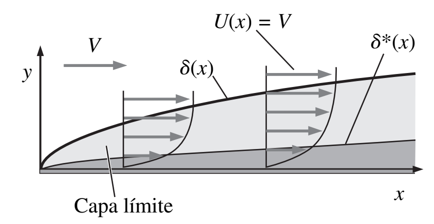


FIGURA 10-103
Para una capa límite de placa plana laminar, el espesor de desplazamiento es casi un tercio del espesor de la capa límite definido como la distancia de la pared a la posición donde la velocidad alcanza 99 por ciento de la velocidad del flujo libre.

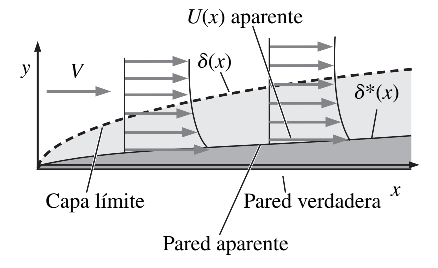


FIGURA 10-104
La capa límite afecta al flujo exterior en tal manera que la pared parece tomar la forma del espesor de desplazamiento. La $U(x)$ aparente difiere de la aproximación original.

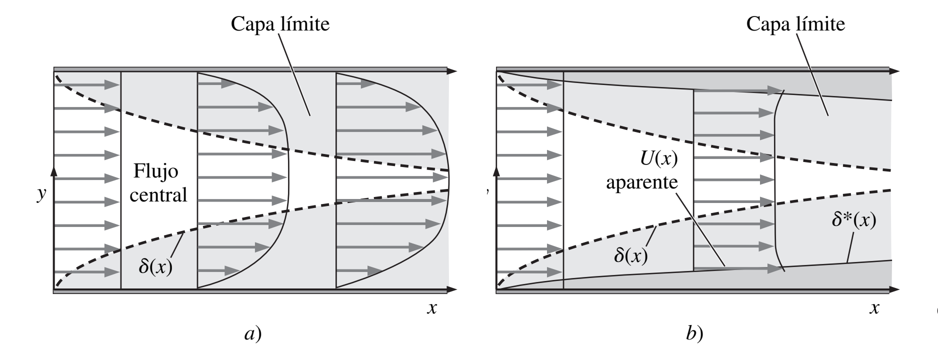


FIGURA 10-105
Efecto de capa límite creciente sobre el flujo que entra a un canal bidimensional: el flujo irrotacional entre las capas límite superior e inferior acelera como se indica por *a*) los perfiles de velocidad verdaderos y *b*) el cambio en el aparente flujo central debido al espesor de desplazamiento de la capa límite (las capas límite están exageradas para que se observen con claridad).

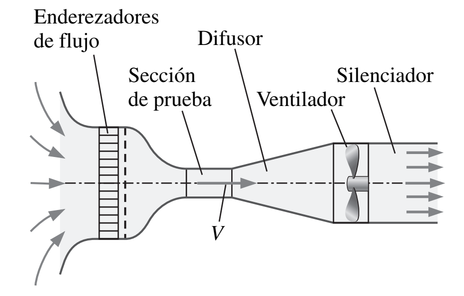


FIGURA 10-106
Diagrama esquemático del túnel de viento del ejemplo 10-11.

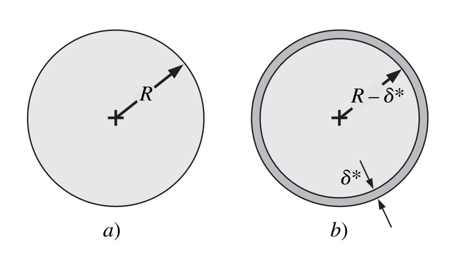


FIGURA 10-107
Vistas transversales de la sección de prueba del túnel de viento del ejemplo 10-11: *a*) al comienzo de la sección de prueba y *b*) al final de ésta.

EJEMPLO 10-11 Espesor de desplazamiento en el diseño de un túnel de viento

Debe diseñarse un pequeño túnel de viento de baja velocidad (Fig. 10-106) para calibrar anemómetros de hilo caliente. El aire está a 19°C. La sección de prueba del túnel de viento mide 30 cm de diámetro y 30 cm de longitud. El flujo a través de la sección de prueba debe ser tan uniforme como sea posible. La velocidad del túnel de viento varía de 1 a 8 m/s, y el diseño se debe optimizar para una velocidad de aire de $V = 4.0$ m/s en la sección de prueba. *a*) Para el caso de flujo casi uniforme a 4.0 m/s en la entrada de la sección de prueba, ¿en cuánto acelerará la velocidad del aire de la línea central al final de la sección de prueba? *b*) Recomiende un diseño que pueda conducir a un flujo de sección de prueba más uniforme.

SOLUCIÓN Debe calcularse la aceleración del aire a través de la sección de prueba redonda de un túnel de viento, y también recomendarse un rediseño de la sección de prueba.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** Las paredes son lisas y las perturbaciones y vibraciones se mantienen en un mínimo. **3** La capa límite es laminar.
Propiedades La viscosidad cinemática del aire a 19°C es $\nu = 1.507 \times 10^{-5}$ m^2/s.
Análisis *a*) El número de Reynolds al final de la sección de prueba es casi:

$$\text{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(4.0 \text{ m/s})(0.30 \text{ m})}{1.507 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 7.96 \times 10^4$$

Dado que Re_x es más bajo que el número de Reynolds crucial en ingeniería, $\text{Re}_{x,\text{ cr}} = 5 \times 10^5$, e inclusive es más bajo que $\text{Re}_{x,\text{crítico}} = 1 \times 10^5$, y puesto que las paredes son lisas y el flujo está sin perturbaciones, puede suponerse que la capa límite en la pared permanece laminar a través de toda la longitud de la sección de prueba. Conforme la capa límite crece a lo largo de la pared de la sección de prueba del túnel de viento, el aire en la región de flujo irrotacional en la porción central de la sección de prueba acelera como en la figura 10-105, con la finalidad de satisfacer la ley de conservación de masa. Se usa la ecuación 10-73 para estimar el espesor de desplazamiento al final de la sección de prueba:

$$\delta^* \cong \frac{1.72x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{1.72(0.30 \text{ m})}{\sqrt{7.96 \times 10^4}} = 1.83 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.83 \text{ mm} \quad \textbf{(1)}$$

En la figura 10-107 se bosquejan dos vistas transversales de la sección de prueba, una al comienzo y otra al final de dicha sección. El radio efectivo al final de la sección de prueba se reduce en δ^* como se calcula mediante la ecuación 1. Se aplica la ley de conservación de masa para calcular la velocidad promedio del aire al final de la sección de prueba:

$$V_{\text{final}} A_{\text{final}} = V_{\text{comienzo}} A_{\text{comienzo}} \quad \rightarrow \quad V_{\text{final}} = V_{\text{comienzo}} \frac{\pi R^2}{\pi (R - \delta^*)^2} \quad \textbf{(2)}$$

lo que produce:

$$V_{\text{final}} = (4.0 \text{ m/s}) \frac{(0.15 \text{ m})^2}{(0.15 \text{ m} - 1.83 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = \mathbf{4.10 \text{ m/s}} \quad \textbf{(3)}$$

Por lo tanto, la velocidad del aire aumenta casi 2.5 por ciento a lo largo de la sección de prueba debido al efecto del espesor de desplazamiento.
b) ¿Qué recomendación puede hacerse para un mejor diseño? Una posibilidad es diseñar la sección de prueba como un ducto que diverge ligeramente, en vez de

un cilindro recto (Fig. 10-108). Si el radio se diseñara de modo que aumente como $\delta^*(x)$ a lo largo de la longitud de la sección de prueba, el efecto de desplazamiento de la capa límite se eliminaría, y la velocidad del aire en la sección de prueba permanecería bastante constante. Note que todavía existe un crecimiento en la capa límite sobre la pared, como se ilustra en la figura 10-108. Sin embargo, la velocidad del flujo central afuera de la capa límite permanece constante, a diferencia de la situación de la figura 10-105. La recomendación de paredes divergentes funcionaría de manera adecuada en la condición de diseño operativo de 4.0 m/s y ayudaría un poco a otras velocidades de flujo. Otra opción es aplicar succión a lo largo de la pared de la sección de prueba con la finalidad de sacar parte del aire a lo largo de la pared. La ventaja de este diseño es que la succión puede ajustarse cuidadosamente conforme la velocidad del túnel de viento varía, de modo que se garantice velocidad de aire constante a través de la sección de prueba en cualquier condición de operación. Esta recomendación es la opción más complicada y quizá la más costosa.

Discusión Se han construido túneles de viento que usan la opción de paredes divergentes o la opción de succión a lo largo de la pared para controlar cuidadosamente la uniformidad de la velocidad del aire a través de la sección de prueba del túnel de viento. La misma técnica de espesor de desplazamiento se aplica a túneles de viento más grandes, donde la capa límite es turbulenta; sin embargo, se necesita una ecuación diferente para $\delta^*(x)$.

Pared original de la sección de prueba
$\delta^*(x)$
$\delta(x)$
V
Flujo central
x
Pared modificada de la sección de prueba

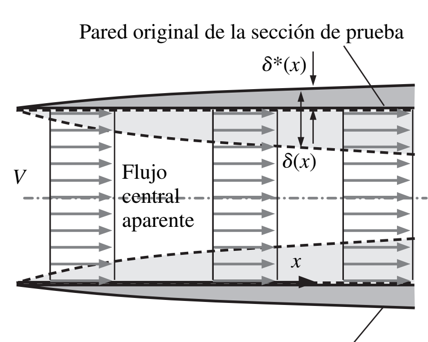
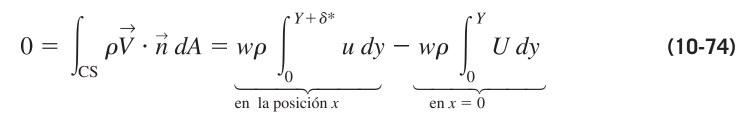


FIGURA 10-108
Una sección de prueba divergente eliminaría la aceleración del flujo debida al efecto de desplazamiento de la capa límite: *a*) flujo verdadero y *b*) flujo central irrotacional aparente.

Espesor de cantidad de movimiento

Otra medición del espesor de la capa límite es el **espesor de la cantidad de movimiento**, a la que comúnmente se le asigna el símbolo θ. El espesor de la cantidad de movimiento se explica mejor cuando se analiza el volumen de control de la figura 10-109 para una capa límite de placa plana. Dado que el fondo del volumen de control es la placa misma, ninguna masa o cantidad de movimiento puede cruzar esta superficie. La parte superior del volumen de control se toma como una línea de corriente del flujo exterior. Dado que ningún flujo puede cruzar una línea de corriente, no puede haber flujo de masa o de cantidad de movimiento a través de la superficie superior del volumen de control. Cuando se aplica la ley de conservación de masa a este volumen de control se encuentra que el flujo de masa que entra al volumen de control desde la izquierda (en $x = 0$), debe ser igual al flujo de masa que sale de la derecha (en alguna posición arbitraria x a lo largo de la placa):



$$0 = \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA = \underbrace{w\rho \int_0^{Y+\delta^*} u\, dy}_{\text{en la posición } x} - \underbrace{w\rho \int_0^{Y} U\, dy}_{\text{en } x\,=\,0} \quad \textbf{(10-74)}$$

donde w es el ancho hacia la página en la figura 10-109, que se toma arbitrariamente como ancho unitario, y Y es la distancia desde la placa hasta la línea de corriente exterior en $x = 0$, como se indica en la figura 10-109. Dado que $u = U$ = constante en todas partes a lo largo de la superficie izquierda del volumen de control, y puesto que $u = U$ entre $y = Y$ y $y = Y + \delta^*$ a lo largo de la superficie derecha del volumen de control, la ecuación 10-74 se reduce a:

$$\int_0^Y (U - u)\, dy = U\delta^* \quad \textbf{(10-75)}$$

Físicamente, el *déficit* de flujo de masa dentro de la capa límite (la región inferior sombreada en azul de la figura 10-109) se sustituye por medio de una porción del flujo libre de espesor δ^* (la región superior sombreada en azul de la figura 10-109). La ecuación 10-75 verifica que estas dos regiones sombreadas tienen la *misma área*. En la figura 10-110 se realiza un acercamiento para mostrar con claridad estas áreas.

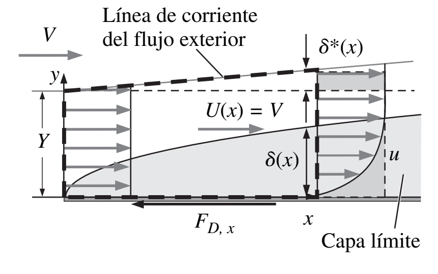


FIGURA 10-109
Un volumen de control se define por la línea punteada gruesa, acotada arriba por una línea de corriente afuera de la capa límite, y acotada abajo por la placa plana; $F_{D,x}$ es la fuerza viscosa de la placa que actúa sobre el volumen de control.

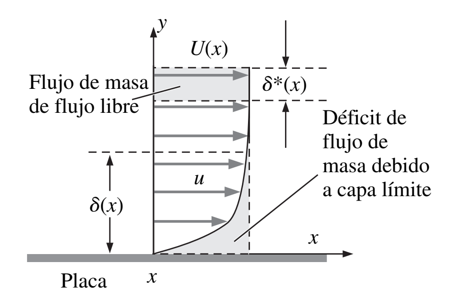


FIGURA 10-110
Comparación del área bajo el perfil de capa límite que representa el déficit de flujo de masa, y el área generada por una porción del fluido de flujo libre de espesor δ^*. Para satisfacer la ley de conservación de masa, estas dos áreas deben ser idénticas.

Considere ahora la componente x de la ecuación de cantidad de movimiento aplicada al volumen de control. Dado que ninguna cantidad de movimiento cruza las superficies de control superior o inferior, la fuerza neta que actúa sobre el volumen de control debe ser igual al flujo de cantidad de movimiento que sale del volumen de control menos el que entra al volumen de control:

Conservación de la cantidad de movimiento x para el volumen de control:

$$\sum F_x = -F_{D,x} = \int_{SC} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA = \underbrace{w \int_0^{Y+\ \ *} u^2\, dy}_{\text{en la posición } x} - \underbrace{\rho w \int_0^{Y} U^2\, dy}_{\text{en } x\,=\,0} \qquad \textbf{(10-76)}$$

donde $F_{D,x}$ es la fuerza de arrastre debida a la fricción sobre la placa desde $x = 0$ hasta la posición x. Después de aplicar algo de álgebra, que incluye la sustitución de la ecuación 10-75, la ecuación 10-76 se reduce a:

$$F_{D,x} = \rho w \int_0^{Y} u(U - u)\, dy \qquad \textbf{(10-77)}$$

Para finalizar, se define el espesor de la cantidad de movimiento de tal manera que la fuerza de arrastre viscosa sobre la placa por unidad de ancho normal a la página es igual a ρU^2 por θ; es decir:

$$\frac{F_{D,x}}{w} = \rho \int_0^{Y} u(U - u)dy \equiv \rho U^2 \theta \qquad \textbf{(10-78)}$$

En palabras:

> El espesor de la cantidad de movimiento se define como la pérdida de flujo de cantidad de movimiento por unidad de ancho dividida entre ρU^2 debida a la presencia de la capa límite creciente.

La ecuación 10-78 se reduce a:

$$\theta = \int_0^{Y} \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \qquad \textbf{(10-79)}$$

La altura Y de la línea de corriente puede ser cualquier valor, en tanto la línea de corriente tomada como la superficie superior del volumen de control está sobre la capa límite. Dado que $u = U$ para cualquier y mayor que Y, puede sustituirse Y por infinito en la ecuación 10-79 sin cambio en el valor de θ:

Espesor de la cantidad de movimiento:

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \qquad \textbf{(10-80)}$$

Para el caso específico de la solución de Blasius para una capa límite laminar sobre placa plana (Ejemplo 10-10), se integra numéricamente la ecuación 10-80 para obtener:

Espesor de la cantidad de movimiento, placa plana, capa límite laminar:

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad \textbf{(10-81)}$$

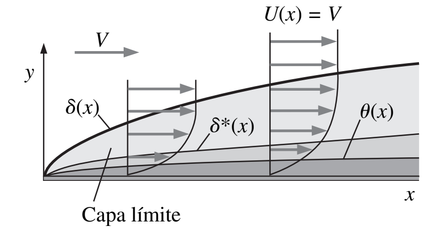


FIGURA 10-111
Para una capa límite laminar sobre placa plana, el espesor de desplazamiento es 35.0 por ciento de δ, y el espesor de la cantidad de movimiento es 13.5 por ciento de δ.

Note que la ecuación para θ es la misma que la ecuación para δ o para δ^*, pero con una constante diferente. De hecho, para flujo laminar sobre una placa plana, θ señala ser aproximadamente 13.5 por ciento de δ en cualquier posición x, como se indica en la figura 10-111. No es coincidencia que θ/x (Ec. 10-81) sea idéntica a $C_{f,x}$ (ecuación 10 del ejemplo 10-10): ambas se derivan del arrastre debido a fricción sobre la placa.

Capa límite turbulenta sobre placa plana

Está fuera de los objetivos de este texto deducir o intentar resolver las ecuaciones de capa límite de flujo turbulento. Las expresiones para la forma del perfil

de capa límite y otras propiedades de la capa límite turbulenta se obtienen *empíricamente* (o, en el mejor de los casos, *semiempíricamente*), porque no se pueden resolver analíticamente las ecuaciones de capa límite para flujo turbulento. Note también que los flujos turbulentos son inherentemente *no-estacionarios* y que la forma del perfil de velocidad instantánea varía con el tiempo (Fig. 10-112). En consecuencia, todas las expresiones para el flujo turbulento comentadas aquí representan *valores promediados en el tiempo*. Una aproximación empírica común para el perfil de velocidad promediado en el tiempo de una capa límite turbulenta sobre placa plana es la **ley de un séptimo de potencia**:

$$\frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \text{para } y \leq \delta, \qquad \rightarrow \qquad \frac{u}{U} \cong 1 \quad \text{para } y > \delta \tag{10-82}$$

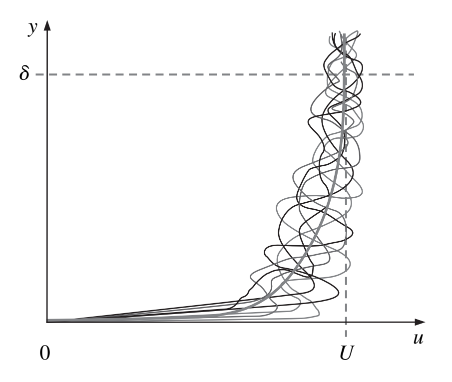


FIGURA 10-112
Ilustración de la condición no estacionaria de una capa límite turbulenta; las delgadas líneas negras onduladas son perfiles instantáneos, y la línea gruesa azul es un perfil promediado en el tiempo largo.

Note que, en la aproximación de la ecuación 10-82, δ *no* es el espesor de la capa límite definido como la distancia de la pared a la posición donde la velocidad es de 99 por ciento de velocidad de flujo libre, sino más bien el borde verdadero de la capa límite, a diferencia de la definición de δ para flujo laminar. En la figura 10-113 se grafica la ecuación 10-82. Para comparación, en la figura 10-113 también se grafica el perfil de velocidad de capa límite laminar sobre placa plana (la solución numérica de Blasius, figura 10-99), con el uso de y/δ para el eje vertical en vez de la variable de similitud η. El lector puede ver que si las capas límite laminar y turbulenta tuvieran el mismo espesor, la turbulenta sería mucho *más llena* que la laminar. En otras palabras, la capa límite turbulenta "abrazaría" la pared más cercanamente, con lo que llena la capa límite con flujo de mayor velocidad cerca de la pared. Esto se debe a los grandes remolinos turbulentos que transportan fluido de alta velocidad desde la parte exterior de la capa límite hacia las partes más bajas de la capa límite (y viceversa). En otras palabras, una capa límite turbulenta tiene un grado mayor de mezcla cuando se compara con una capa límite laminar. En el caso laminar, el fluido se mezcla lentamente debido a difusión viscosa. Sin embargo, los grandes remolinos en un flujo turbulento provocan el proceso de mezclar más rápido y completo.

La forma aproximada del perfil de velocidad de la capa límite turbulenta de la ecuación 10-82 no es físicamente significativa muy cerca de la pared ($y \rightarrow 0$) ya que predice que la pendiente ($\partial u/\partial y$) es infinita en $y = 0$. Mientras que la pendiente en la pared es muy grande para una capa límite turbulenta, no obstante es finita. Esta gran pendiente en la pared conduce a un esfuerzo de corte muy alto, $\tau_w = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$, y, por lo tanto, la correspondiente alta fricción local a lo largo de la superficie de la placa (comparada con una capa límite laminar del mismo espesor). El arrastre debido a fricción que producen las capas límite laminar y turbulenta se trata con mayor detalle en el capítulo 11.

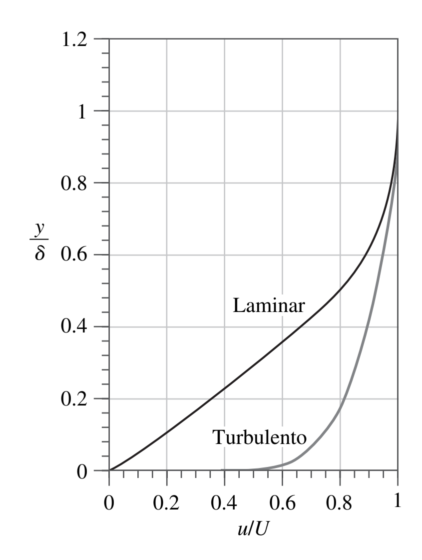


FIGURA 10-113
Comparación de perfiles de velocidad de capa límite laminar y turbulenta sobre placa plana, adimensionalizados por el espesor de la capa límite.

Una gráfica adimensionalizada como la de la figura 10-113 puede causar un poco de confusión porque la capa límite turbulenta en realidad sería mucho *más gruesa* que la correspondiente capa límite laminar al mismo número de Reynolds. Este hecho se ilustra en variables físicas en el ejemplo 10-12.

En la tabla 10-4 se comparan expresiones para δ, δ^*, θ, y $C_{f,\,x}$ para capas límite laminar y turbulenta sobre una placa plana lisa. Las expresiones turbulentas se basan en la ley de un séptimo de potencia de la ecuación 10-82. Note que las expresiones de la tabla 10-4 para la capa límite turbulenta sobre placa plana son válidas sólo para una superficie muy *lisa*. Inclusive, una pequeña cantidad de superficie rugosa puede afectar de manera considerable las propiedades de la capa límite turbulenta, como el espesor de la cantidad de movimiento y el coeficiente local de fricción. El efecto de la rugosidad de superficie sobre una capa límite turbulenta sobre placa plana se comenta con mayor detalle en el capítulo 11.

TABLA 10-4

Resumen de expresiones para capas límite laminar y turbulenta sobre una placa plana lisa alineada paralela a un flujo uniforme*

Propiedad	Laminar	a) Turbulenta(†)	b) Turbulenta(‡)
Espesor de capa límite	$\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.16}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.38}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$
Espesor de desplazamiento	$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.020}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.048}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$
Espesor de cantidad de movimiento	$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.016}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.037}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$
Coeficiente local de fricción	$C_{f,x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0.027}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0.059}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$

* Los valores laminares son exactos y se mencionan a tres cifras significativas, pero los valores turbulentos se mencionan sólo a dos cifras significativas debido a la gran incertidumbre relacionada con todos los campos de flujo turbulento.

† Obtenidos a partir de la ley de un séptimo de potencia.

‡ Obtenidos a partir de la ley de un séptimo de potencia combinada con datos empíricos para flujo turbulento en tuberías lisas.

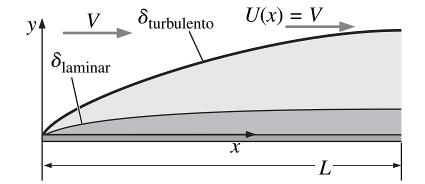


FIGURA 10-114
Comparación de capas límite laminar y turbulenta para flujo de aire sobre una placa plana para el ejemplo 10-12 (el espesor de la capa límite está exagerado).

EJEMPLO 10-12 Comparación de capas límite laminar y turbulenta

Se tiene aire a 20°C que fluye a V = 10.0 m/s sobre una placa plana lisa de longitud L = 1.52 m (Fig. 10-114). *a*) Grafique y compare los perfiles de velocidad de capa límite laminar y turbulenta en variables físicas (u como función de y) en $x = L$. *b*) Compare los valores de coeficiente local de fricción para los dos casos en $x = L$. *c*) Grafique y compare el crecimiento de las capas límite laminar y turbulenta.

SOLUCIÓN Deben compararse los perfiles de velocidad, los coeficientes locales de fricción y los espesores de la capa límite al final de una placa plana para los casos de capa límite laminar y turbulenta.

Hipótesis **1** La placa es lisa, el flujo libre no sufre perturbaciones y es uniforme, **2** El flujo es estacionario en la media. **3** La placa es infinitesimalmente delgada y está alineada paralela al flujo libre.

Propiedades La viscosidad cinemática del aire a 20°C es $\nu = 1.516 \times 10^{-5}$ m²/s.

Análisis *a*) Primero se calcula el número de Reynolds en $x = L$,

$$\text{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(10.0 \text{ m/s})(1.52 \text{ m})}{1.516 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1.00 \times 10^6$$

Este valor de Re_x está en la región de transición entre laminar y turbulenta, de acuerdo con la figura 10-81. Por lo tanto, es adecuada una comparación entre los perfiles de velocidad laminar y turbulento. Para el caso laminar, se multiplican los valores y/δ de la figura 10-113 por δ_{laminar}, donde:

$$\delta_{\text{laminar}} = \frac{4.91x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{4.91(1\,520 \text{ mm})}{\sqrt{1.00 \times 10^6}} = \mathbf{7.46 \text{ mm}} \qquad (1)$$

Esto proporciona los valores *y* en unidades mm. De manera similar, se multiplican los valores *u*/*U* de la figura 10-113 por *U* ($U = V = 10.0$ m/s) para obtener *u* en unidades de m/s. En la figura 10-115 se grafica el perfil de capa límite laminar en variables físicas.

El espesor de la capa límite turbulenta se calcula en esta misma posición *x* con la ecuación ofrecida en la tabla 10-4, columna a):

$$\delta_{\text{turbulenta}} \cong \frac{0.16x}{(\text{Re}_x)^{1/7}} = \frac{0.16(1520 \text{ mm})}{(1.00 \times 10^6)^{1/7}} = \mathbf{33.8 \text{ mm}} \quad \textbf{(2)}$$

[El valor de $\delta_{\text{turbulenta}}$ con base en la columna *b*) de la tabla 10-4 es un poco más alto, a saber, 36.4 mm.] Cuando se comparan las ecuaciones 1 y 2, se ve que la capa límite turbulenta es casi 4.5 veces más gruesa que la capa límite laminar a un número de Reynolds de 1.0×10^6. El perfil de velocidad de la capa límite turbulenta de la ecuación 10-82 se convierte a variables físicas y se grafica en la figura 10-115 para compararlo con el perfil laminar. Las dos características más sorprendentes de la figura 10-115 son: 1) la capa límite turbulenta es mucho más gruesa que la laminar y 2) la pendiente de *u* contra *y* cerca de la pared es mucho más pronunciada para el caso turbulento (desde luego, debe tenerse en la mente que muy cerca de la pared la ley de un séptimo de potencia no representa adecuadamente el perfil verdadero de la capa límite turbulenta).

b) Se usan las expresiones de la tabla 10-4 para comparar el coeficiente local de fricción para los dos casos. Para la capa límite laminar:

$$C_{f,\,x,\,\text{laminar}} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{0.664}{\sqrt{1.00 \times 10^6}} = \mathbf{6.64 \times 10^{-4}} \quad \textbf{(3)}$$

y para la capa límite turbulenta, columna a),

$$C_{f,\,x,\,\text{turbulenta}} \cong \frac{0.027}{(\text{Re}_x)^{1/7}} = \frac{0.027}{(1.00 \times 10^6)^{1/7}} = \mathbf{3.8 \times 10^{-3}} \quad \textbf{(4)}$$

Cuando se comparan las ecuaciones 3 y 4, el valor de coeficiente de fricción en caso de capa límite turbulenta es más de cinco veces mayor que el valor de capa límite laminar. Si se hubiera usado la otra expresión para coeficiente de fricción local de capa límite turbulenta, la columna *b*) de la tabla 10-4, se habría obtenido $C_{f,x,\text{turbulento}} = 3.7 \times 10^{-3}$, muy cerca del valor calculado en la ecuación 4.

c) El cálculo de flujo turbulento supone que la capa límite es turbulenta desde el comienzo de la placa. En realidad, existe una región de flujo laminar, seguida por una región de transición, y luego, para finalizar, una región turbulenta, como se ilustra en la figura 10-81. No obstante, es interesante comparar cómo δ_{laminar} y $\delta_{\text{turbulento}}$ crecen como funciones de *x* para este flujo, si se supone o todo flujo laminar o todo flujo turbulento. Cuando se usan las expresiones en la tabla 10-4, ambas se grafican en la figura 10-116 para comparación.

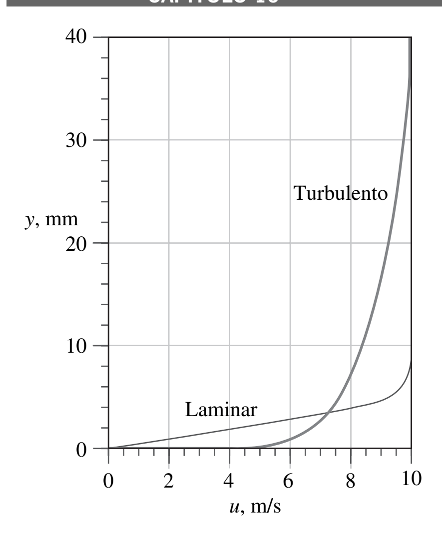


FIGURA 10-115
Comparación de perfiles de capa límite laminar y turbulenta sobre placa plana en variables físicas en la misma posición *x*. El número de Reynolds es $\text{Re}_x = 1.0 \times 10^6$.

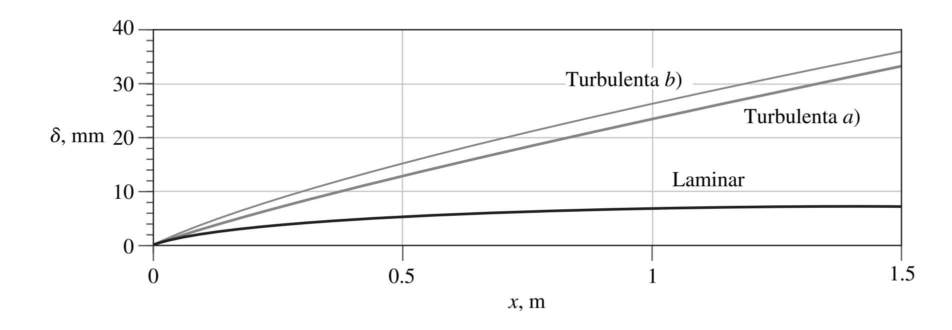


FIGURA 10-116
Comparación del crecimiento de una capa límite laminar y una capa límite turbulenta para la placa plana del ejemplo 10-12.

Discusión Para aclarar, la ordenada en la figura 10-116 está en mm, mientras que la abscisa está en m: la capa límite es increíblemente delgada, inclusive para el caso turbulento. La diferencia entre los casos turbulento *a*) y *b*) (véase la tabla 10-4) se explica mediante las discrepancias entre los ajustes de curva empíricos y las aproximaciones semiempíricas utilizadas para obtener las expresiones en la tabla 10-4. Esto refuerza la decisión de reportar los valores de capa límite turbulenta cuando mucho a dos cifras significativas. El valor real de δ más quizá se encontrará en alguna parte entre los valores de flujos laminar y turbulento graficados en la figura 10-116, ya que el número de Reynolds al final de la placa está dentro de la región de transición.

La ley de un séptimo de potencia no es la única aproximación de capa límite turbulenta que se usa en la mecánica de fluidos. Otra aproximación común es la **ley de logaritmo**, una expresión semiempírica que demuestra ser válida no sólo para capas límite sobre placa plana, sino también para perfiles de velocidad de flujo turbulento totalmente desarrollado en tubería (capítulo 8). De hecho, la ley de logaritmo demuestra ser aplicable para casi *todas* las capas límite turbulentas acotadas por pared, no sólo para flujo sobre una placa plana (esta afortunada situación permite emplear la aproximación de ley de logaritmo cerca de paredes sólidas en paquetes de dinámica de fluidos computacional, como se comenta en el capítulo 15). La ley de logaritmo se expresa, por lo general en variables adimensionales por medio de una velocidad característica llamada **velocidad de fricción** u_* (note que la mayoría de los autores usan u^* en lugar de u_*. En este texto se usa un subíndice para distinguir u_*, una cantidad *dimensional*, de u^*, que se usa para indicar una velocidad adimensional).

La ley de logaritmo:
$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_*}{\nu} + B \qquad \textbf{(10-83)}$$

donde

Velocidad de fricción:
$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \qquad \textbf{(10-84)}$$

y κ y B son constantes; sus valores usuales son $\kappa = 0.40$ a 0.41 y $B = 5.0$ a 5.5. Desafortunadamente, la ley de logaritmo sufre del hecho de que no funciona muy cerca de la pared (ln 0 está indefinido). También se desvía de los valores experimentales cerca del borde de capa límite. No obstante, la ecuación 10-83 se aplica a través de casi toda la capa límite turbulenta sobre placa plana y es útil porque relaciona la forma del perfil de velocidad al valor local del esfuerzo de corte mediante la ecuación 10-84.

Una expresión inteligente que es válida en todas partes de la capa límite turbulenta la creó D. B. Spalding en 1961; se llama **ley de Spalding**:

$$\frac{yu_*}{\nu} = \frac{u}{u_*} + e^{-\kappa B}\left[e^{\kappa(u/u_*)} - 1 - \kappa(u/u_*) - \frac{[\kappa(u/u_*)]^2}{2} - \frac{[\kappa\,(u/u_*)]^3}{6}\right] \qquad \textbf{(10-85)}$$

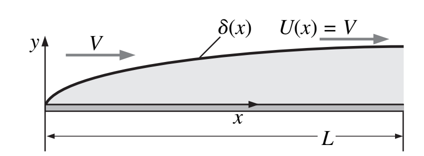


FIGURA 10-117
Capa límite turbulenta generada por flujo de aire sobre una placa plana para el ejemplo 10-13 (el espesor de la capa límite está exagerado).

EJEMPLO 10-13 **Comparación de las ecuaciones de perfil de velocidad de capa límite turbulenta**

Se tiene aire a 20°C que fluye con $V = 10.0$ m/s sobre una placa plana lisa de longitud $L = 15.2$ m (Fig. 10-117). Grafique el perfil de velocidad de capa límite turbulenta en variables físicas (u como función de y) en $x = L$. Compare el

perfil generado por la ley de un séptimo de potencia, la ley de logaritmo y la ley de Spalding, y suponga que la capa límite está totalmente turbulenta desde el comienzo de la placa.

SOLUCIÓN Debe graficarse el perfil medio de capa límite $u(y)$ al final de una placa plana con el uso de tres aproximaciones diferentes.

Hipótesis **1** La placa es lisa, pero existen fluctuaciones de flujo libre que tienden a provocar que la capa límite transite a turbulencia más pronto que lo usual: la capa límite es turbulenta desde el comienzo de la placa. **2** El flujo es estacionario en la media. **3** La placa es infinitesimalmente delgada y está alineada paralela al flujo libre.

Propiedades La viscosidad cinemática del aire a 20°C es $\nu = 1.516 \times 10^{-5}$ m²/s.

Análisis Primero calcule el número de Reynolds en $x = L$,

$$\text{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(10.0 \text{ m/s})(15.2 \text{ m})}{1.516 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1.00 \times 10^7$$

Este valor de Re_x se encuentra más arriba del número de Reynolds crítico para una capa límite sobre placa plana (Fig. 10-81), de modo que es razonable la suposición de flujo turbulento desde el comienzo de la placa.

Se usan los valores de la columna a) de la tabla 10-4 para estimar el espesor de la capa límite y el coeficiente local de fricción al final de la placa:

$$\delta \cong \frac{0.16x}{(\text{Re}_x)^{1/7}} = 0.240 \text{ m} \qquad C_{f,x} \cong \frac{0.027}{(\text{Re}_x)^{1/7}} = 2.70 \times 10^{-3} \tag{1}$$

Se calcula la velocidad de fricción con su definición (Ec. 10-84) y $C_{f,x}$, con su definición (parte izquierda de la ecuación 10 del ejemplo 10-10):

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = U\sqrt{\frac{C_{f,x}}{2}} = (10.0 \text{ m/s})\sqrt{\frac{2.70 \times 10^{-3}}{2}} = 0.367 \text{ m/s} \tag{2}$$

donde U = constante = V en todas partes para una placa plana. Es trivial generar una gráfica de la ley de un séptimo de potencia (Ec. 10-82), pero la ley de logaritmo (Ec. 10-83) es implícita para u como función de y. En vez de ello, se resuelve la ecuación 10-83 para y como función de u:

$$y = \frac{\nu}{u_*} e^{\kappa(u/u_* - B)} \tag{3}$$

Dado que se conoce que u varía de 0 en la pared a U en el borde de la capa límite, es posible graficar el perfil de velocidad de la ley de logaritmo en variables físicas con la ecuación 3. Para finalizar, la ley de Spalding (Ec. 10-85) también se escribe en términos de y como función de u. Se grafican los tres perfiles en la misma gráfica para compararlos (Fig. 10-118). Los tres están cercanos entre sí y no puede distinguirse la ley de logaritmo de la ley de Spalding en esta escala.

En lugar de una gráfica de variable física, con ejes lineales como en la figura 10-118, con frecuencia se dibuja una gráfica semilogarítmica de variables adimensionales para amplificar la región cercana a la pared. La notación más común en la literatura de capa límite para las variables adimensionales es y^+ y u^+, donde:

Variables adimensionales de las ecuaciones para perfil de velocidad de capa límite turbulenta sobre la placa plana:

$$y^+ = \frac{yu_*}{\nu} \qquad u^+ = \frac{u}{u_*} \tag{4}$$

Como puede verse, y^+ es un tipo de número de Reynolds, y la velocidad de fricción u se usa para eliminar las dimensiones tanto de y como de u. La figura 10-118 vuelve a dibujarse en la figura 10-119 con las variables adimensionales. Las diferencias entre las tres aproximaciones, en especial cerca de la pared, son

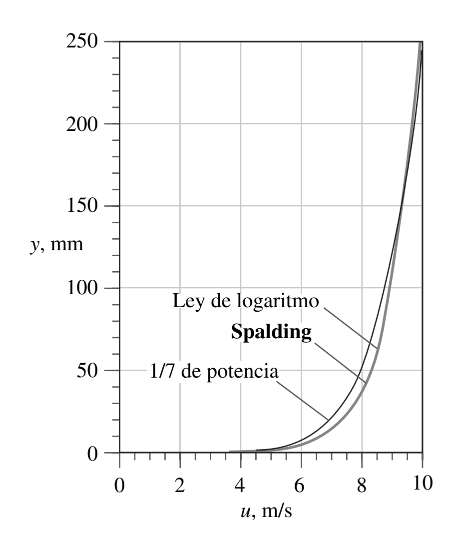


FIGURA 10-118
Comparación en variables físicas de las expresiones de perfil de capa límite turbulenta sobre la placa plana a $\text{Re}_x = 1.0 \times 10^7$: aproximación de un séptimo de potencia, ley de logaritmo y ley de Spalding.

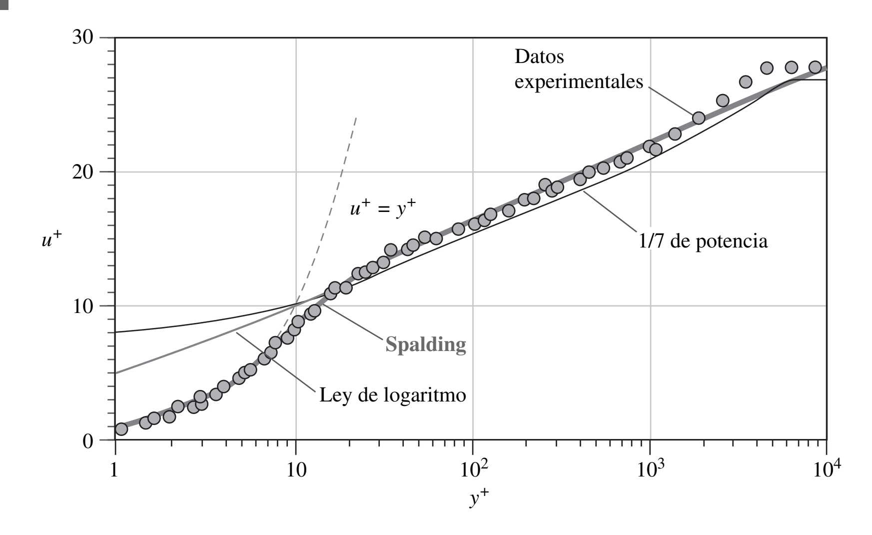


FIGURA 10-119
Comparación en variables adimensionales de las expresiones de perfil de capa límite turbulenta de placa plana a $Re_x = 1.0 \times 10^7$: aproximación de un séptimo de potencia, ley de logaritmo y ley de Spalding. También se muestran para comparación los datos experimentales típicos y la ecuación de subcapa viscosa ($u^+ = y^+$).

mucho más claras cuando se grafican en esta forma. En la figura 10-119 también se grafican para comparación los datos experimentales. La fórmula de Spalding realiza el mejor trabajo global y es la única expresión que sigue los datos experimentales cerca de la pared. En la parte exterior de la capa límite, los valores experimentales de u^+ se estabilizan más allá de cierto valor de y^+, como lo hace la ley de un séptimo de potencia. Sin embargo, tanto la ley de logaritmo como la fórmula de Spalding continúan indefinidamente como una línea recta en esta gráfica semi logarítmica.

Discusión En la figura 10-119 también se grafica la ecuación lineal $u^+ = y^+$. La región *muy* cercana a la pared ($0 < y^+ < 5$ o 6) se llama **subcapa viscosa**. En esta región, las fluctuaciones turbulentas se suprimen debido a la proximidad de la pared, y el perfil de velocidad es casi *lineal*. Otros nombres para esta región son **subcapa lineal** y **subcapa laminar**. Se ve que la ecuación de Spalding captura la subcapa viscosa y después se dobla suavemente hacia la ley de logaritmo. Ni la ley de un séptimo de potencia ni la ley de logaritmo son válidas a esta cercanía de la pared.

Capas límite con gradientes de presión

Hasta el momento, la mayor parte del comentario ha tratado acerca de las capas límite sobre placa plana. Para los ingenieros son de preocupación más práctica las capas límite sobre las paredes de forma arbitraria. Éstas incluyen flujos externos sobre cuerpos sumergidos en un flujo libre (Fig. 10-120*a*), así como algunos flujos internos como los flujos en túneles de viento y otros grandes ductos, en los que las capas límite se desarrollan a lo largo de las paredes (Fig. 10-120*b*). Tal como sucede en el caso de la capa límite sobre placa plana de gradiente cero de presión que se trató anteriormente, las capas límite con gradientes de presión distintos de cero pueden ser laminares o turbulentas. Con frecuencia se usan los resultados de la capa límite sobre placa plana (y de gradiente cero de presión) como estimaciones para casos tales como la ubicación de transición a turbulencia, el espesor de la capa límite, la fricción local, etcétera. Sin embargo, cuando se necesita más precisión deben resolverse las ecuaciones de capa límite (Ecs. 10-71, para el caso bidimensional estacionario laminar) con el procedimiento subrayado en la figura 10-93. El análisis es mucho más difícil que el de una placa plana porque el término de gradiente de presión ($U\, dU/dx$) en la ecuación de cantidad de movimiento x es distinto de cero. Este análisis puede complicarse rápidamente mucho, en especial para el caso de flujos tridimensionales. En consecuencia, sólo se comentan algunas características *cualitativas* de las ca-

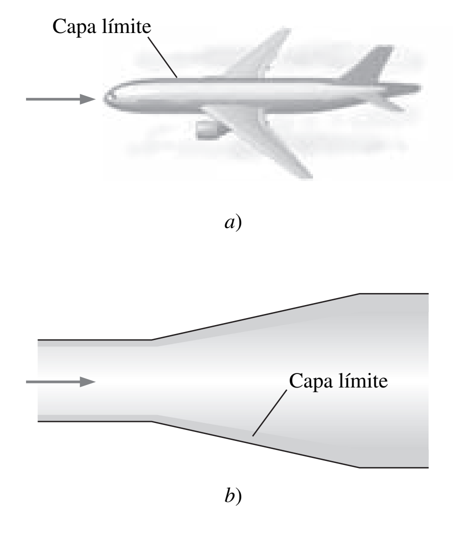


FIGURA 10-120
Las capas límite con gradientes de presión distintos de cero ocurren tanto en flujos externos como en internos: *a*) capa límite que se forma a lo largo del fuselaje de un avión y hacia la estela, y *b*) capa límite que crece a lo largo de la pared de un difusor (en ambos casos está exagerado el espesor de la capa límite).

pas límite con gradientes de presión diferentes de cero, pero las soluciones detalladas de las ecuaciones de capa límite se dejan para libros superiores de mecánica de fluidos (por ejemplo, Panton, 1996 y White, 1991).

Primero algo de terminología. Cuando el flujo en la región de flujo exterior invíscido y/o irrotacional (afuera de la capa límite) *acelera*, $U(x)$ aumenta y $P(x)$ disminuye. A esto se le conoce como **gradiente de presión favorable**. Es favorable o deseable porque la capa límite en este flujo en aceleración de manera usual es delgada, se abraza a la pared y por lo tanto no es probable separarla. Cuando el flujo exterior *desacelera*, $U(x)$ disminuye, $P(x)$ aumenta y se tiene un **gradiente de presión desfavorable** o **adverso**. Como su nombre implica, esta condición no es deseable porque la capa límite por lo general es más gruesa, no se abraza a la pared y es mucho más probable separarla de ésta.

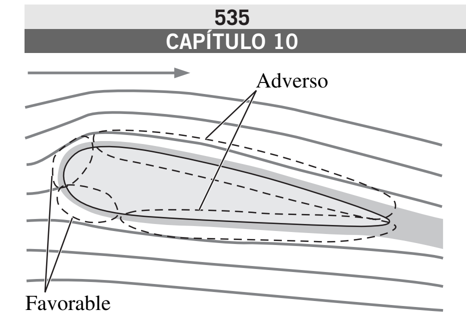


FIGURA 10-121
La capa límite a lo largo de un cuerpo sumergido en un flujo libre, por lo general está expuesta a un gradiente de presión favorable en la porción frontal del cuerpo y un gradiente de presión adverso en la porción posterior del cuerpo.

En un flujo externo típico, como el flujo sobre el ala de un avión (Fig. 10-121), la capa límite en la porción frontal del cuerpo está sujeta a un gradiente de presión favorable, mientras que, en la porción posterior, está sujeta a un gradiente de presión adverso. Si el gradiente de presión adverso es lo suficientemente intenso ($dP/dx = -U\, dU/dx$ es grande), es probable que la capa límite se **separe** de la pared. En la figura 10-122 se muestran ejemplos de separación de flujo para flujos externos e internos. En la figura 10-122*a* se bosqueja un perfil aerodinámico en un ángulo de ataque moderado. La capa límite permanece unida sobre toda la superficie inferior del perfil aerodinámico, pero se separa en alguna parte cerca de la parte posterior de la superficie superior, como se ilustra. La línea de corriente cerrada indica una región de flujo de recirculación llamada **burbuja de separación**. Como ya se indicó, las ecuaciones de capa límite son parabólicas, lo que significa que no se necesita transferir ninguna información acerca de la parte de la frontera del volumen de control corriente abajo. Sin embargo, la separación conduce a **flujo inverso** cerca de la pared, lo que destruye la naturaleza parabólica del campo de flujo, y vuelve inaplicables las ecuaciones de capa límite.

> Las ecuaciones de capa límite no son válidas corriente abajo de un punto de separación debido al flujo inverso en la burbuja de separación.

En estos casos, deben usarse las ecuaciones de Navier-Stokes completas en vez de la aproximación de capa límite. Desde el punto de vista del procedimiento de capa límite de la figura 10-93, el procedimiento se rompe porque el flujo exterior calculado en el paso 1 ya no es válido cuando ocurre la separación, en especial más allá del punto de separación (compare la figura 10-121 con la figura 10-122*a*).

La figura 10-122*b* muestra el caso clásico de un perfil aerodinámico a un ángulo de ataque demasiado elevado, en el que el punto de separación se mueve cerca del frente del perfil aerodinámico; la burbuja de separación cubre casi toda la superficie superior de la sección aerodinámica: una situación conocida como **entrada en pérdida**. Esta entrada en pérdida se acompaña con una pérdida de sustentación y un notable aumento en el arrastre aerodinámico, como se comentará con más detalle en el capítulo 11. La separación de flujo también puede

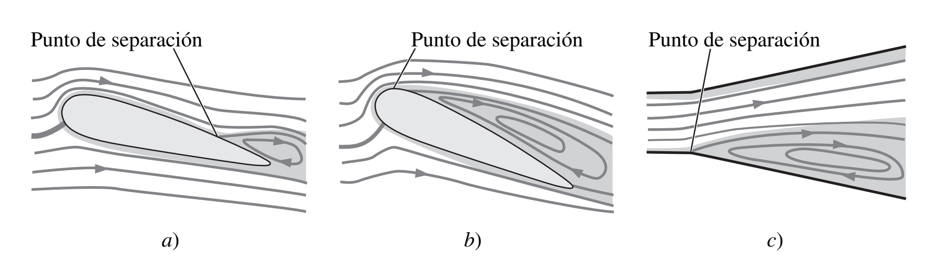


FIGURA 10-122
Ejemplos de separación de capa límite en regiones de gradiente de presión adverso: *a*) el ala de un avión en un ángulo de ataque moderado, *b*) la misma ala en un ángulo de ataque elevado (el ala de un avión que falla o *entra en pérdida*) y *c*) un difusor de amplio ángulo en el que la capa límite no puede permanecer unida y se separa en un lado.

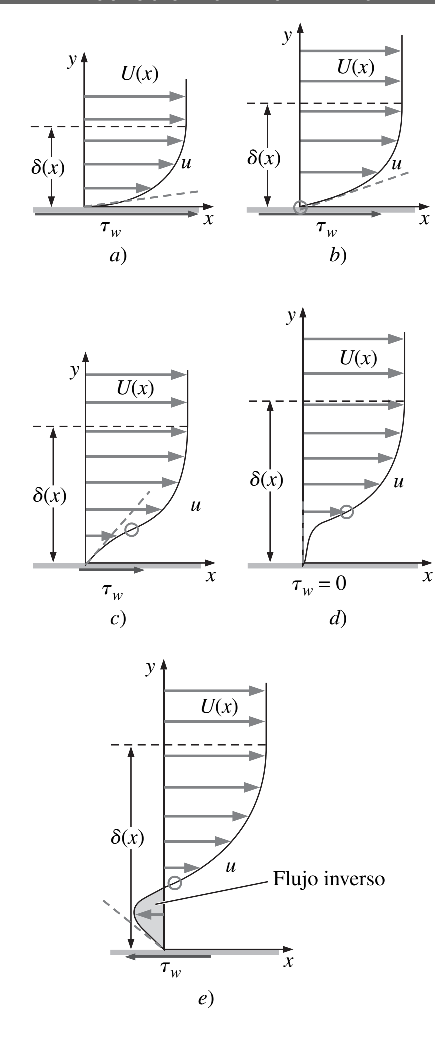


FIGURA 10-123
Comparación de la forma del perfil de velocidad de capa límite como función del gradiente de presión ($dP/dx = -U\, dU/dx$): *a*) favorable, *b*) cero, *c*) adverso ligero, *d*) adverso crítico (punto de separación) y *e*) muy adverso; los puntos de inflexión se indican con círculos azules y los esfuerzos de corte $\tau_w = \mu\, (\partial u/\partial y)_{y=0}$ se bosquejan para cada caso.

ocurrir en flujos internos, como en la región de gradiente de presión adverso de un difusor (Fig. 10-122*c*). Como se bosquejó, la separación con frecuencia ocurre de manera asimétrica sólo en un lado del difusor. Como ocurre en el caso de un perfil aerodinámico con separación de flujo, el cálculo del flujo exterior a la capa límite en el difusor ya no es significativo, y las ecuaciones de capa límite no son válidas. La separación de flujo en un difusor conduce a una disminución significativa de recuperación de presión, y a estas condiciones en un difusor también se les conoce como condiciones de desprendimiento de flujo.

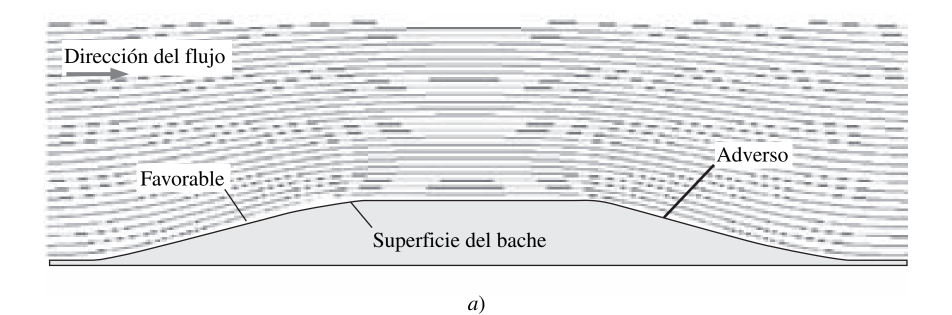
Se puede aprender mucho acerca de la forma del perfil de velocidad en varias condiciones de gradiente de presión al examinar la ecuación de cantidad de movimiento de la capa límite justo en la pared. Dado que la velocidad es cero en la pared (condición de no-deslizamiento), todo el lado izquierdo de la ecuación 10-71 desaparece, lo que sólo deja el término de gradiente de presión y el término viscoso, que deben equilibrarse:

En la pared:
$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -U\frac{dU}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} \qquad \textbf{(10-86)}$$

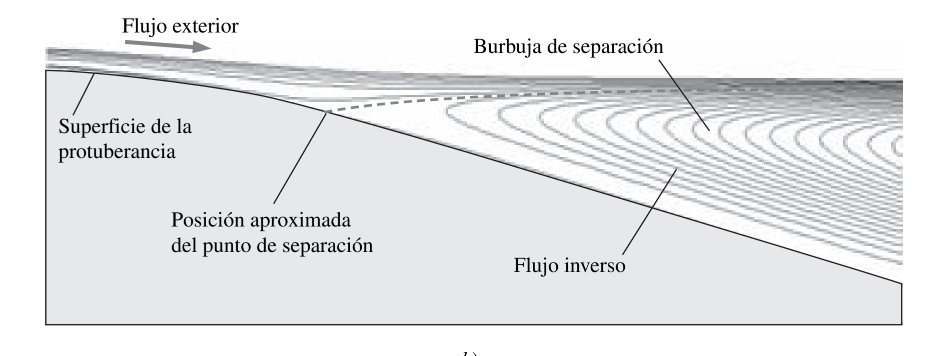
En condiciones de gradiente de presión favorable (flujo exterior en aceleración), dU/dx es positivo, y por la ecuación 10-86, la segunda derivada de u en la pared es negativa; es decir: $(\partial^2 u/\partial y^2)_{y=0} < 0$. Se sabe que $\partial^2 u/\partial y^2$ debe *permanecer* negativa conforme u tiende a $U(x)$ en el borde de la capa límite. Por lo tanto, se espera que el perfil de velocidad a través de la capa límite esté redondeada, sin punto de inflexión alguno, como se bosqueja en la figura 10-123*a*. Bajo condiciones de gradiente de presión cero, $(\partial^2 u/\partial y^2)_{y=0}$ es cero, lo que implica un crecimiento lineal de u respecto a y cerca de la pared, como se muestra en la figura 10-123*b* (esto se verifica por medio del perfil de velocidad de capa límite de Blasius para la capa límite con gradiente de presión cero sobre una placa plana, como se muestra en la figura 10-99). Para gradientes de presión *adversos*, dU/dx es negativa y la ecuación 10-86 demanda que $(\partial^2 u/\partial y^2)_{y=0}$ sea positiva. Sin embargo, ya que $\partial^2 u/\partial y^2$ debe ser negativa conforme u tiende a $U(x)$ en el borde de la capa límite, tiene que haber un *punto de inflexión* ($\partial^2 u/\partial y^2 = 0$) en alguna parte en la capa límite, como se ilustra en la figura 10-123*c*.

La primera derivada de u respecto a y en la pared es directamente proporcional a τ_w, el esfuerzo de corte [$\tau_w = \mu\, (\partial u/\partial y)_{y=0}$]. La comparación de $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ en las figuras 10-123*a*, *b* y *c* revela que τ_w es más grande para gradientes de presión favorables y más pequeño para gradientes de presión adversos. El espesor de la capa límite aumenta conforme el gradiente de presión cambia de signo, como también se ilustra en la figura 10-123. Si el gradiente de presión adverso es lo suficientemente grande, $(\partial u/\partial y)_{y=0}$ puede volverse cero (Fig. 10-123*d*); esta posición a lo largo de una pared es el *punto de separación*, más allá del cual existe un flujo inverso y una burbuja de separación (Fig. 10-123*e*). Note que, más allá del punto de separación, τ_w es *negativo* debido al valor negativo de $(\partial u/\partial y)_{y=0}$. Como ya se indicó, las ecuaciones de la capa límite pierden la validez en regiones de flujo inverso. Por lo tanto, la aproximación de capa límite puede ser apropiada hasta el punto de separación, pero no más allá.

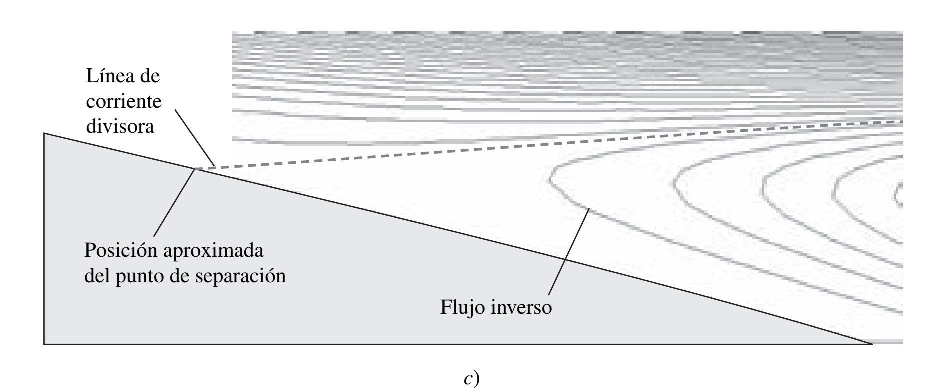
Se usa dinámica de fluido computacional (CFD, por sus siglas en inglés) para ilustrar la separación de flujo para el caso de flujo sobre una protuberancia sobre una pared. El flujo es estacionario y bidimensional, y la figura 10-124*a* muestra líneas de corriente de flujo externo que son generadas por una solución de la ecuación de Euler. Sin los términos viscosos no existe separación, y las líneas de corriente son simétricas adelante y atrás de la protuberancia. Como se indicó en la figura, la porción frontal de la protuberancia experimenta un flujo que acelera y por lo tanto un gradiente de presión favorable. La porción posterior experimenta un flujo en desaceleración y un gradiente de presión adverso. Cuando se resuelve la ecuación de Navier-Stokes completa (laminar), los térmi-



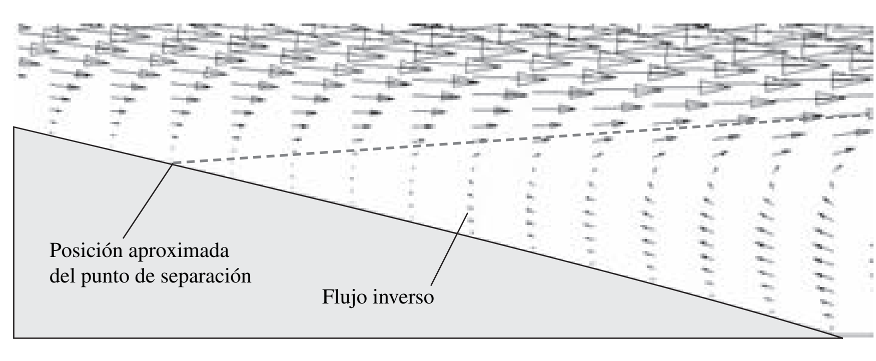
a)



b)



c)



d)

FIGURA 10-124
Cálculos de dinámica de fluido computacional (CFD, por sus siglas en inglés) de flujo sobre una protuberancia: *a*) solución de la ecuación de Euler con gráfica de las líneas de corriente de flujo exterior (ningún flujo de separación), *b*) solución de flujo laminar que muestra separación de flujo sobre el lado corriente abajo de la protuberancia, *c*) vista de acercamiento de las líneas de corriente cerca del punto de separación, y *d*) vista de acercamiento de los vectores de velocidad, misma vista que *c*).

nos viscosos conducen a separación de flujo del extremo posterior de la protuberancia, como se ilustra en la figura 10-124*b*. Debe tenerse en la mente que ésta es una solución de Navier-Stokes completa, no una solución de capa límite; no obstante, ilustra el proceso de separación de flujo en la capa límite. La posición aproximada del punto de separación se indica en la figura 10-124*b*, y la línea negra punteada es un tipo de **línea de corriente divisora**. El fluido abajo de esta línea de corriente se atrapa en la burbuja de separación, mientras que el fluido sobre esta línea de corriente continúa corriente abajo. En la figura 10-124*c* se muestra un acercamiento de las líneas de corriente, y en la figura 10-124*d* se grafican los vectores de velocidad con el uso de la misma vista de acercamiento. El flujo inverso en la porción inferior de la burbuja de separación es claramente visible. Además, existe una intensa componente *y* de velocidad más allá del punto de separación, y el flujo exterior ya no es casi paralelo a la pared. De hecho, el flujo exterior separado ya no se parece mucho al flujo exterior original de la figura 10-124*a*. Esto es típico y representa una seria deficiencia en la aproximación de capa límite. A saber, las ecuaciones de capa límite pueden ser capaces de predecir la posición del punto de separación bastante bien, pero no pueden predecir algo más allá del punto de separación. En algunos casos el flujo exterior cambia de manera significativa también *corriente arriba* del punto de separación, y la aproximación de capa límite proporciona resultados erróneos.

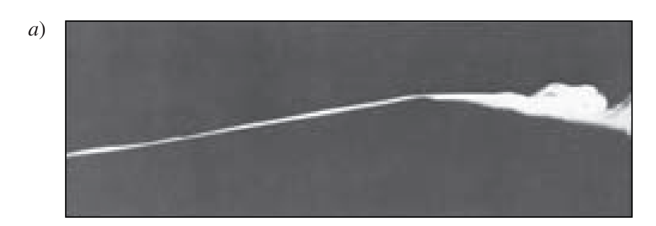
> La aproximación de capa límite sólo es tan buena como la solución de flujo exterior; si el flujo exterior se altera de manera significativa por separación de flujo, la aproximación de capa límite será errónea.

Las capas límite que se bosquejan en la figura 10-123 y los vectores de velocidad de separación de flujo que se grafican en la figura 10-124 son para flujo laminar. Las capas límite turbulentas tienen comportamiento cualitativamente similar, aunque, como se comentó, el perfil de velocidad media de una capa límite turbulenta es mucho más pronunciado que el perfil de una capa límite laminar en condiciones similares. Por lo tanto, para separar una capa límite turbulenta, se necesita un gradiente de presión adverso más intenso. Se hace la siguiente afirmación general:

> Las capas límite turbulentas son más resistentes a la separación de flujo que las capas límite laminares expuestas al mismo gradiente de presión adverso.

La evidencia experimental para esta afirmación se muestra en la figura 10-125, en la que el flujo exterior intenta una vuelta aguda de un ángulo de 20°. La capa

a)



b)



FIGURA 10-125
Comparación de las visualizaciones del flujo de capas límite laminar y turbulenta en un gradiente de presión adverso; el flujo es de izquierda a derecha. *a*) La capa límite laminar se separa en la esquina, pero *b*) la turbulenta no se separa. Fotografías tomadas por M. R. Head en 1982, visualizadas con tetracloruro de titanio.

Head, M. R. 1982 en Flow Visualization II, *W. Merzkirch, ed., 399–403. Washington:* Hemisphere.

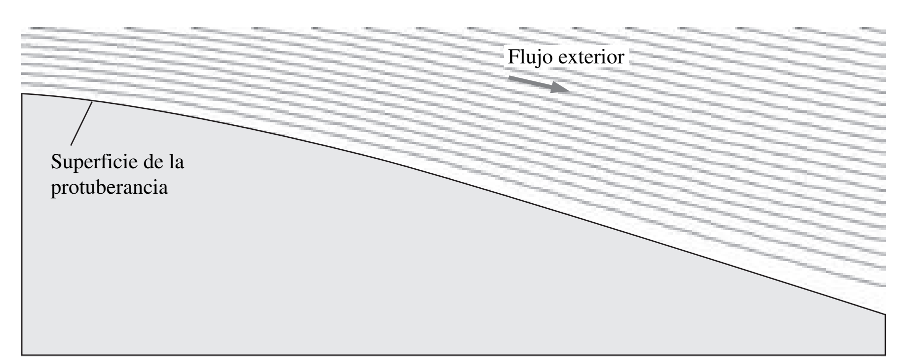


FIGURA 10-126
Cálculo de dinámica de fluido computacional (CFD, por sus siglas en inglés) de flujo turbulento sobre la misma protuberancia que el de la figura 10-124. En comparación con el resultado laminar de la figura 10-124*b*, la capa límite turbulenta es más resistente a la separación del flujo y no se separa en la región de gradiente de presión adverso en la parte posterior de la protuberancia.

límite laminar (Fig. 10-125*a*) no puede realizar la vuelta aguda y se separa en la esquina. Por otra parte, la capa límite turbulenta (Fig. 10-125*b*) permanece unida a la esquina aguda.

Como otro ejemplo, se calcula de nuevo el flujo sobre el mismo bache de la figura 10-124, pero con turbulencia modelada en la simulación. En la figura 10-126 se muestran las líneas de corriente de flujo turbulento generadas por el cálculo de CFD. Note que la capa límite turbulenta permanece unida (no hay separación de flujo), en contraste con la capa límite laminar que se separa en la parte posterior de la protuberancia. En el caso turbulento, la solución de Euler del flujo exterior (Fig. 10-124*a*) continúa siendo válida sobre toda la superficie porque no existe separación de flujo puesto que la capa límite permanece muy delgada.

Una situación similar ocurre para flujo sobre objetos romos como las esferas. Una pelota de golf lisa, por ejemplo, conservaría una capa límite laminar sobre su superficie, y la capa límite se separaría con bastante facilidad, lo que conduce a un gran arrastre aerodinámico. Las pelotas de golf tienen hoyuelos (un tipo de rugosidad de superficie) con la finalidad de crear una transición anticipada hacia una capa límite turbulenta. El flujo no obstante se separa de la superficie de la pelota de golf, pero mucho más lejos corriente abajo en la capa límite, lo que resulta en arrastre aerodinámico significativamente reducido. Esto se comenta con más detalle en el capítulo 11.

Técnica de la integral de la cantidad de movimiento para capas límite

En muchas aplicaciones prácticas de ingeniería no es necesario conocer todos los detalles adentro de la capa límite; más bien se busca conocer las estimaciones razonables de las características generales de la capa límite como el espesor de la capa límite y el coeficiente de fricción local. La **técnica de la integral de la cantidad de movimiento** utiliza un método de volumen de control para obtener estas aproximaciones de las propiedades de la capa límite a lo largo de superficies con gradientes de presión cero o distintos de cero. La técnica de la integral de la cantidad de movimiento es directa, y en algunas aplicaciones no se necesita usar computadora. Es válida tanto para capas límite laminar como turbulenta.

Se comienza con el volumen de control bosquejado en la figura 10-127. La parte inferior del volumen de control es la pared en $y = 0$, y la parte superior está en $y = Y$, lo suficientemente alejada de la pared como para encerrar toda la capa límite. El volumen de control es una rebanada infinitesimalmente delgada de ancho dx en la dirección x. En concordancia con la aproximación de capa lí-

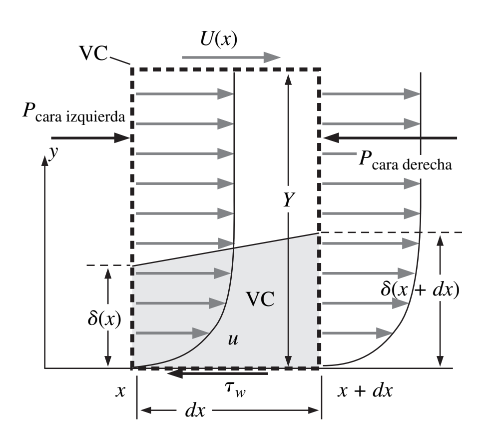


FIGURA 10-127
Volumen de control (línea negra punteada gruesa) que se usa en la deducción de la ecuación integral de la cantidad de movimiento.

mite, $\partial P/\partial y = 0$, de modo que se supone que la presión P actúa a lo largo de toda la cara izquierda del volumen de control:

$$P_{\text{cara izquierda}} = P$$

En el caso general con gradiente de presión distinto de cero, la presión en la cara derecha del volumen de control difiere de la presión de la cara izquierda. Cuando se usa una aproximación en serie de Taylor truncada de primer orden (capítulo 9), se establece:

$$P_{\text{cara derecha}} = P + \frac{dP}{dx}\,dx$$

De manera similar se escribe la razón de flujo de masa entrante a través de la cara izquierda como:

$$\dot{m}_{\text{cara izquierda}} = \rho w \int_0^Y u\,dy \qquad \textbf{(10-87)}$$

y la masa saliente a través de la cara derecha como:

$$\dot{m}_{\text{cara derecha}} = \rho w\left[\int_0^Y u\,dy + \frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u\,dy\right)dx\right] \qquad \textbf{(10-88)}$$

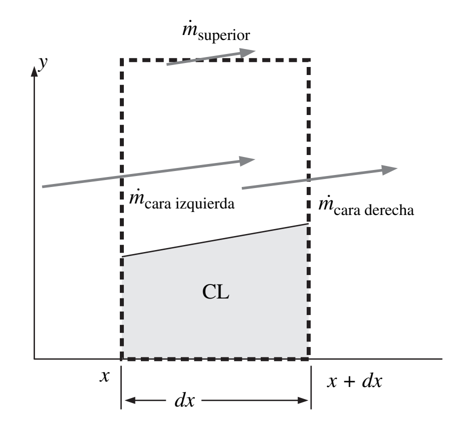


FIGURA 10-128
Equilibrio de flujo de masa en el volumen de control de la figura 10-127.

donde w es el ancho del volumen de control hacia la página en la figura 10-127. Si se prefiere, puede establecerse w como ancho unitario; de cualquier manera se cancelará más adelante.

Dado que la ecuación 10-88 difiere de la ecuación 10-87, y puesto que ningún flujo puede atravesar el fondo del volumen de control (la pared), la masa debe fluir hacia o desde la cara *superior* del volumen de control. Esto se ilustra en la figura 10-128 para el caso de una capa límite creciente en la que $\dot{m}_{\text{cara derecha}} < \dot{m}_{\text{cara izquierda}}$, y $\dot{m}_{\text{superior}}$ es positivo (la masa fluye hacia afuera). La ley de conservación de masa aplicada al volumen de control produce:

$$\dot{m}_{\text{superior}} = -\rho w \frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u\,dy\right)dx \qquad \textbf{(10-89)}$$

Ahora se aplica la ley de conservación de la cantidad de movimiento en x para el volumen de control elegido. La cantidad de movimiento en x se lleva a través de la cara izquierda y se elimina a través de las caras derecha y superior del volumen de control. El flujo de cantidad de movimiento neto afuera del volumen de control debe equilibrarse con la fuerza debida al esfuerzo cortante que actúa sobre el volumen de control mediante la pared y la fuerza de presión neta sobre la superficie de control, como se muestra en la figura 10-127. Por lo tanto, la ecuación de cantidad de movimiento en x para el volumen de control en caso estacionario es:

$$\underbrace{\cancel{\sum F_{x,\text{ cuerpo}}}}_{\text{ignore gravedad}} + \underbrace{\sum F_{x,\text{ superficie}}}_{YwP - Yw\left(P + \frac{dP}{dx}dx\right) - w\,dx\,\tau_w}$$

$$= \underbrace{\int_{\text{cara izquierda}} \rho u \vec{V}\cdot\vec{n}\,dA}_{-\rho w\int_0^Y u^2\,dy} + \underbrace{\int_{\text{cara derecha}} \rho u \vec{V}\cdot\vec{n}\,dA}_{\rho w\left[\int_0^Y u^2\,dy + \frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u^2\,dy\right)dx\right]} + \underbrace{\int_{\text{superior}} \rho u \vec{V}\cdot\vec{n}\,dA}_{\dot{m}_{\text{superior}}U}$$

donde el flujo de la cantidad de movimiento, a través de la superficie superior del volumen de control, se toma como la razón de flujo de masa a través de esta superficie multiplicada por U. Algunos de los términos se cancelan y la ecuación se reescribe como:

$$-Y\frac{dP}{dx} - \tau_w = \rho\frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u^2\,dy\right) - \rho U\frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u\,dy\right) \qquad \textbf{(10-90)}$$

donde se usó la ecuación 10-89 para $\dot{m}_{\text{superior}}$, y w y dx se cancelan de cada término restante. Por conveniencia, note que $Y = \int_0^Y dy$. A partir del flujo exterior (ecuación de Euler), $dP/dx = -\rho U\, dU/dx$. Después de dividir cada término en laecuación 10-90 entre la densidad ρ, se obtiene:

$$U\frac{dU}{dx}\int_0^Y dy - \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u^2\, dy\right) - U\frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u\, dy\right) \tag{10-91}$$

La ecuación 10-91 se simplifica cuando se utiliza la regla del producto de diferenciación a la inversa (Fig. 10-129). Después de cierto reordenamiento, la ecuación 10-91 se convierte en:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^Y u(U-u)\, dy\right) + \frac{dU}{dx}\int_0^Y (U-u)\, dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

donde se tiene la posibilidad de poner U adentro de las integrales ya que en cualquier posición x dada, U es constante respecto a y (U es una función sólo de x).

El primer término se multiplica y divide entre U^2 y el segundo entre U para obtener:

$$\frac{d}{dx}\left(U^2\int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy\right) + U\frac{dU}{dx}\int_0^\infty\left(1-\frac{u}{U}\right)dy = \frac{\tau_w}{\rho} \tag{10-92}$$

donde también se sustituyó infinito en vez de Y en el límite superior de cada integral ya que $u = U$ para toda y mayor que Y, y por tanto el valor de la integral no cambia por esta sustitución.

Previamente se definió el espesor de desplazamiento δ^* (Ec. 10-72) y el espesor de la cantidad de movimiento θ (Ec. 10-80) para una capa límite de placa plana. En el caso general con gradiente de presión distinto de cero, se define δ^* y θ de la misma manera, excepto que se usa el valor *local* de la velocidad de flujo exterior, $U = U(x)$, en una posición x dada en vez de la constante U ya que U ahora varía con x. Por lo tanto, la ecuación 10-92 puede escribirse en forma más compacta como:

Ecuación integral de Kármán:
$$\frac{d}{dx}(U^2\theta) + U\frac{dU}{dx}\delta^* = \frac{\tau_w}{\rho} \tag{10-93}$$

La ecuación 10-93 se llama **ecuación integral de Kármán** en honor a Theodor von Kármán (1881-1963), estudiante de Prandtl, quien fue el primero en deducir la ecuación en 1921.

Otra forma de la ecuación 10-93 se obtiene cuando se realiza la regla del producto sobre el primer término, se divide entre U^2 y se reordena:

Ecuación integral de Kármán, forma alternativa:
$$\frac{C_{f,x}}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (2+H)\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx} \tag{10-94}$$

donde se define el **factor de forma** H como:

Factor de forma:
$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \tag{10-95}$$

y el **coeficiente de fricción local** $C_{f,x}$ como:

Coeficiente de fricción local:
$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \tag{10-96}$$

Note que tanto H como $C_{f,x}$ son funciones de x para el caso general de una capa límite con un gradiente de presión distinto de cero que se forma a lo largo de una superficie.



FIGURA 10-129
La regla del producto se utiliza a la inversa en la derivación de la ecuación integral de la cantidad de movimiento.

De nuevo se hace énfasis en que la derivación de la ecuación integral de Kármán y las ecuaciones 10-93 a la 10-96 son válidas para cualquier capa límite de flujo estacionario de fluido incompresible a lo largo de una pared, sin importar si la capa límite es laminar, turbulenta o está en alguna parte intermedia. Para el caso especial de la capa límite sobre una placa plana, $U(x) = U =$ constante, y la ecuación 10-94 se reduce a:

Ecuación integral de Kármán, capa límite *sobre placa plana*: $$C_{f,x} = 2\frac{d\theta}{dx} \quad \textbf{(10-97)}$$

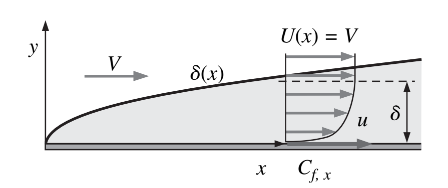


FIGURA 10-130
Capa límite turbulenta que se genera por flujo sobre una placa plana para el ejemplo 10-14 (el espesor de la capa límite está exagerado).

EJEMPLO 10-14 **Análisis de capa límite sobre placa plana con el uso de la ecuación integral de Kármán**

Suponga que sólo se conocen dos datos acerca de la capa límite turbulenta sobre una placa plana, es decir, el coeficiente de fricción local (Fig. 10-130):

$$C_{f,x} \cong \frac{0.027}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}} \quad \textbf{(1)}$$

y la aproximación de la ley de un séptimo de potencia para la forma del perfil de capa límite:

$$\frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \text{para } y \leq \qquad \frac{u}{U} \cong 1 \quad \text{para } y > \delta \quad \textbf{(2)}$$

Use las definiciones del espesor de desplazamiento y espesor de cantidad de movimiento y emplee la ecuación integral de Kármán para estimar cómo δ, δ^*, y θ varían con x.

SOLUCIÓN Se debe estimar δ, δ^* y θ con base en las ecuaciones 1 y 2.

Hipótesis **1** El flujo es turbulento, pero estacionario en su promedio. **2** La placa es delgada y está alineada paralela al flujo libre, de modo que $U(x) = V =$ constante.

Análisis Primero se sustituye la ecuación 2 en la ecuación 10-80 y se integra para encontrar el espesor de la cantidad de movimiento:

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right)dy = \frac{7}{72}\delta \quad \textbf{(3)}$$

De manera similar, el espesor de desplazamiento se encuentra cuando se integra la ecuación 10-72:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right)dy = \int_0^\delta \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right)dy = \frac{1}{8}\delta \quad \textbf{(4)}$$

La ecuación integral de Kármán se reduce a la ecuación 10-97 para una capa límite de placa plana. La ecuación 3 se sustituye en la ecuación 10-97 y se reordena para obtener:

$$C_{f,x} = 2\frac{d\theta}{dx} = \frac{14}{72}\frac{d\delta}{dx}$$

a partir de lo cual:

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72}{14}C_{f,x} = \frac{72}{14}0.027(\mathrm{Re}_x)^{-1/7} \quad \textbf{(5)}$$

donde la ecuación 1 se sustituyó para el coeficiente de fricción local. La ecuación 5 puede integrarse directamente, lo que produce

Espesor de capa límite: $$\boldsymbol{\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.16}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}}} \quad \textbf{(6)}$$

Para finalizar, la sustitución de las ecuaciones 3 y 4 en la ecuación 6 produce aproximaciones para δ^* y θ,

Espesor de desplazamiento: $$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.020}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}} \quad (7)$$

y

Espesor de cantidad de movimiento: $$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.016}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}} \quad (8)$$

Discusión Los resultados concuerdan con las expresiones dadas en la columna (a) de la tabla 10-4 a dos cifras significativas. De hecho, muchas de las expresiones en la tabla 10-4 se *generaron* con la ayuda de la ecuación integral de Kármán.



FIGURA 10-131
Cuando se usa la ecuación integral de Kármán se requiere la integración de un perfil de velocidad conocido (o supuesto).

Aunque es bastante simple de usar, la técnica de la integral de la cantidad de movimiento tiene una seria deficiencia. Es decir, debe conocerse (o adivinarse) la forma del perfil de velocidad de la capa límite con la finalidad de aplicar la ecuación integral de Kármán (Fig. 10-131). Para el caso de las capas límite con gradientes de presión diferente de cero, la forma de la capa límite cambia con x (como se ilustra en la figura 10-123), con lo que complica aún más el análisis. Por fortuna, no es necesario conocer con precisión la forma del perfil de velocidad, ya que la integración es muy generosa con respecto a la imprecisión de la forma del perfil. Para predecir las principales características de la capa límite se han desarrollado varias técnicas que utilizan la ecuación integral de Kármán. Algunas de éstas, como el método de Thwaite, realizan muy buen trabajo para capa límite laminar. Por desgracia, las técnicas propuestas para capa límite turbulenta no han sido tan exitosas. Muchas de las técnicas exigen usar computadora y están fuera de los objetivos de este libro.

EJEMPLO 10-15 Arrastre sobre la pared de una sección de prueba de un túnel de viento

A lo largo de las paredes de un túnel de viento rectangular se forma una capa límite. El aire está a 20°C y presión atmosférica. La capa límite surge en la contracción y crece en la sección de prueba (Fig. 10-132). Cuando alcanza la sección de prueba, la capa límite es totalmente turbulenta. El perfil de capa límite y su espesor se miden al comienzo ($x = x_1$) y al final ($x = x_2$) de la pared inferior de la sección de prueba del túnel de viento. La sección de prueba mide 1.8 m de largo y 0.50 m de ancho (normal a la página en la figura 10-132). Se realizan las siguientes mediciones:

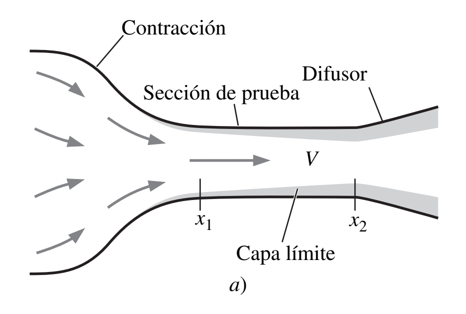
$$\delta_1 = 4.2 \text{ cm} \qquad \delta_2 = 7.7 \text{ cm} \quad (1)$$

En ambas posiciones, el perfil de capa límite se ajusta mejor a una aproximación de un octavo de potencia en vez de la aproximación estándar de un séptimo de potencia:

$$\frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/8} \quad \text{para } y \leq \delta \qquad \frac{u}{U} \cong 1 \quad \text{para } y > \delta \quad (2)$$

Estime la fuerza total de arrastre debido a fricción F_D que actúa sobre la pared inferior de la sección de prueba del túnel de viento.

SOLUCIÓN Debe estimarse la fuerza de arrastre debido a fricción sobre la pared inferior de la sección de prueba de un túnel de viento (entre $x = x_1$ y $x = x_2$).



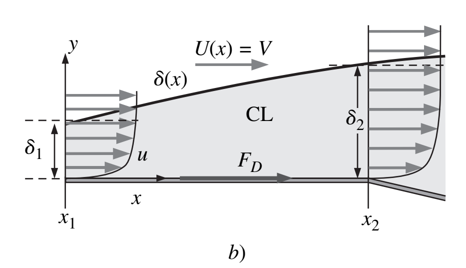


FIGURA 10-132
Capa límite que se forma a lo largo de las paredes del túnel de viento del ejemplo 10-15: *a*) vista global y *b*) acercamiento a la pared inferior de la sección de prueba (el espesor de la capa límite está exagerado).

Propiedades Para aire a 20°C, $\nu = 1.516 \times 10^{-5}$ m²/s y $\rho = 1.204$ kg/m³.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario en su promedio. **2** Las paredes del túnel de viento divergen ligeramente para garantizar que $U(x) = V =$ constante.
Análisis Primero se sustituye la ecuación 2 en la ecuación 10-80 y se integra para encontrar el espesor de la cantidad de movimiento θ,

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/8}\left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/8}\right] dy = \frac{4}{45}\delta \qquad (3)$$

La ecuación integral de Kármán se reduce a la ecuación 10-97 para una capa límite sobre placa plana. En términos del esfuerzo de corte a lo largo de la pared, la ecuación 10-97 es:

$$\tau_w = \frac{1}{2}\rho U^2 C_{f,x} = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \qquad (4)$$

La ecuación 4 se integra desde $x = x_1$ hasta $x = x_2$ para encontrar la fuerza de arrastre debido a fricción:

$$F_D = w \int_{x_1}^{x_2} \tau_w \, dx = w\rho U^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\theta}{dx} \, dx = w\rho U^2(\theta_2 - \theta_1) \qquad (5)$$

donde w es el ancho de la pared normal a la página en la figura 10-132. Después de sustituir la ecuación 3 en la ecuación 5 se obtiene:

$$F_D = w\rho U^2 \frac{4}{45}(\delta_2 - \delta_1) \qquad (6)$$

Para terminar, la sustitución de los valores numéricos dados en la ecuación 6 produce la fuerza de arrastre:

$$F_D = (0.50 \text{ m})(1.204 \text{ kg/m}^3)(10.0 \text{ m/s})^2 \frac{4}{45}(0.077 - 0.042) \text{ m}\left(\frac{\text{s}^2 \cdot \text{N}}{\text{kg} \cdot \text{m}}\right) = \mathbf{0.19 \text{ N}}$$

Discusión Ésta es una fuerza muy pequeña, ya que el newton es por sí mismo una unidad de fuerza pequeña. Sería mucho más difícil aplicar la ecuación integral de Kármán si la velocidad de flujo exterior $U(x)$ no fuera constante.

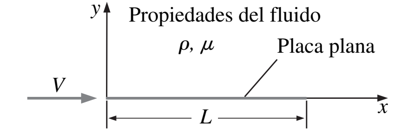
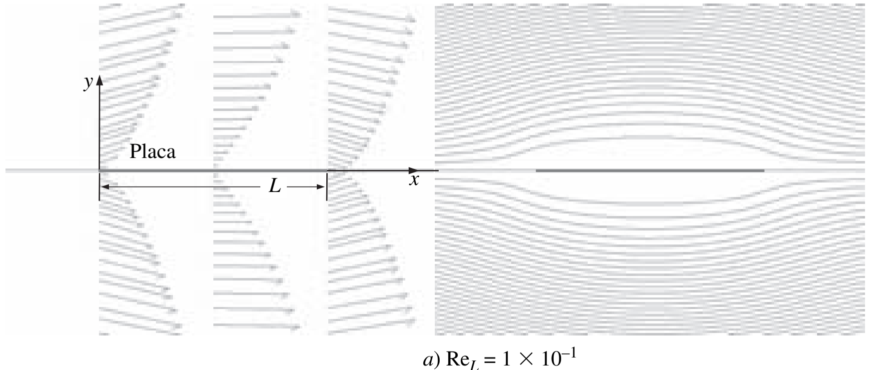


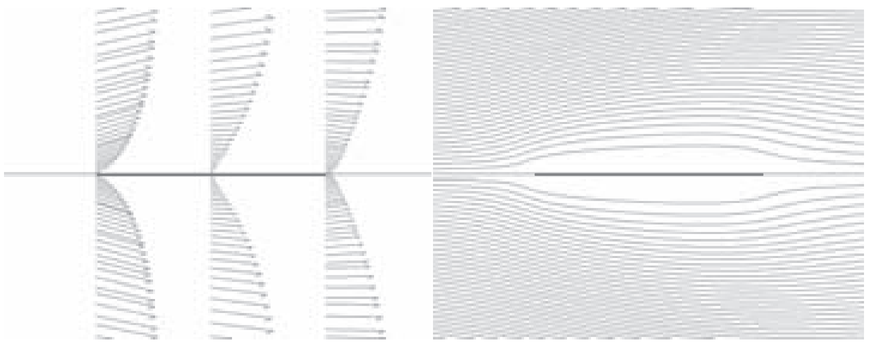
FIGURA 10-133
Flujo sobre una placa plana infinitesimalmente delgada de longitud L. Los cálculos de dinámica de fluido computacional (CFD, por sus siglas en inglés) se reportan para Re_L que varía de 10^{-1} a 10^5.

Este capítulo termina con algunos resultados explicativos de cálculos de dinámica de fluido computacional (CFD, por sus siglas en inglés) de flujo sobre una placa plana bidimensional infinitesimalmente delgada alineada con el flujo libre (Fig. 10-133). En todos los casos la placa mide 1 m de largo ($L = 1$ m) y el fluido es aire con propiedades constantes $\rho = 1.23$ kg/m³ y $\mu = 1.79 \times 10^{-5}$ kg/m · s. La velocidad V de flujo libre varía de tal modo que el número de Reynolds al final de la placa ($\text{Re}_L = \rho VL/\mu$) varía de 10^{-1} (flujo de Stokes) hasta 10^5 (flujo laminar pero listo para comenzar la transición hacia turbulencia). Todos los casos son soluciones de Navier-Stokes de flujo laminar y estacionario de fluido incompresible generadas por un paquete de CFD comercial. En la figura 10-134 se grafican los vectores de velocidad para cuatro casos de número de Reynolds en tres posiciones x: $x = 0$ (comienzo de la placa), $x = 0.5$ m (mitad de la placa) y $x = 1$ m (final de la placa). También se grafican líneas de corriente en la vecindad de la placa para cada caso.

En la figura 10-134*a*, $\text{Re}_L = 0.1$, y la *aproximación de flujo de Stokes* es razonable. El campo de flujo es casi simétrico adelante y atrás: flujo de Stokes típico sobre cuerpos simétricos. Note cómo el flujo diverge alrededor de la placa, como si fuera de espesor finito. Esto se debe al gran efecto de desplazamiento que



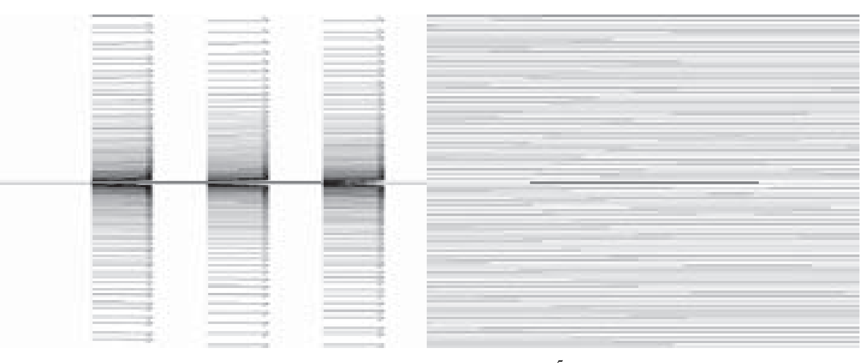
a) $Re_L = 1 \times 10^{-1}$



b) $Re_L = 1 \times 10^{1}$



c) $Re_L = 1 \times 10^{3}$



d) $Re_L = 1 \times 10^{5}$

FIGURA 10-134
Cálculos de dinámica de fluidos computacional (CFD, por sus siglas en inglés) de flujo bidimensional, laminar, estacionario e incompresible de izquierda a derecha sobre una placa plana de 1 m de largo de espesor infinitesimal; los vectores de velocidad se muestran en la columna izquierda en tres posiciones a lo largo de la placa, y las líneas de corriente cerca de la placa se muestran en la columna derecha. Re_L = *a*) 0.1, *b*) 10, *c*) 1 000 y *d*) 100 000; sólo se resuelve la mitad superior del campo de flujo; la mitad inferior es una imagen especular. El dominio computacional se extiende cientos de longitudes de placa más allá de lo que aquí se muestra, con la finalidad de aproximar condiciones de campo lejano "infinito" en los bordes del dominio computacional.

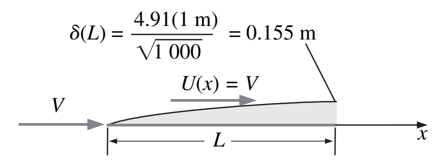


FIGURA 10-135
Cálculo de espesor de capa límite para una capa límite laminar sobre una placa plana a $\text{Re}_L = 1\,000$. Este resultado se compara con el perfil de velocidad que se genera por CFD en $x = L$ que se muestra en la figura 10-134*c* a este mismo número de Reynolds.

causan la viscosidad y la condición de no-deslizamiento. En esencia, la velocidad del flujo cerca de la placa es tan pequeña que el resto del flujo "la ve" como un bloqueo alrededor del cual debe divergir el flujo. La componente *y* de velocidad es significativa cerca de tanto la parte delantera como la parte trasera de la placa. Para finalizar, la influencia de la placa se extiende decenas de longitudes de placa en todas direcciones hacia el resto del flujo, lo que también es típico de los flujos de Stokes.

El número de Reynolds aumenta por dos órdenes de magnitud hasta $\text{Re}_L = 10$ en los resultados que se muestran en la figura 10-134*b*. Este número de Reynolds es demasiado alto para que el flujo sea considerado como el flujo de Stokes, pero demasiado bajo para que la aproximación de capa límite sea adecuada. Se notan algunas características iguales a aquellas del caso de número de Reynolds más bajo, como un gran desplazamiento de las líneas de corriente y una significativa componente *y* de velocidad cerca del frente y la parte posterior de la placa. Sin embargo, el efecto del desplazamiento no es tan intenso, y el flujo ya no es simétrico adelante y atrás. Se ven los efectos de la *inercia* conforme el fluido deja el borde final de la placa; la inercia barre el fluido hacia el desarrollo de estela detrás de la placa. La influencia de la placa sobre el resto del flujo no obstante es grande, pero mucho menor que para el flujo a $\text{Re}_L = 0.1$.

En la figura 10-134*c* se muestran los resultados de los cálculos de CFD a $\text{Re}_L = 1\,000$, otro aumento de dos órdenes de magnitud. A este número de Reynolds, los efectos inerciales comienzan a dominar sobre los efectos viscosos a través de la mayor parte del campo de flujo, y puede comenzarse a llamarlo *capa límite* (aunque bastante gruesa). En la figura 10-135 se calcula el espesor de la capa límite con la expresión laminar dada en la tabla 10-4. El valor predicho de $\delta(L)$ se da aproximadamente 15 por ciento de la longitud de placa a $\text{Re}_L = 1\,000$, que está en razonable concordancia con la gráfica del vector de velocidad en $x = L$ en la figura 10-134*c*. Cuando se compara con los casos de número de Reynolds más bajo de la figura 10-134*a* y *b*, el efecto de desplazamiento se reduce enormemente y cualquier trazo de simetría atrás-adelante desaparece.

Para finalizar, el número de Reynolds aumenta una vez más por dos órdenes de magnitud a $\text{Re}_L = 100\,000$ en los resultados que se muestran en la figura 10-134*d*. No hay dudas acerca de lo adecuado de la aproximación de capa límite a este gran número de Reynolds. Los resultados de CFD muestran una capa límite extremadamente delgada con efecto despreciable sobre el flujo exterior. Las líneas de corriente de la figura 10-134*d* son casi paralelas en todas partes, y debe mirarse de cerca para observar la delgada región de estela detrás de la placa. Las líneas de corriente en la estela están ligeramente más separadas que las líneas que hay en el resto del flujo, porque en la región de estela la velocidad es significativamente menor que la velocidad de flujo libre. La componente *y* de velocidad es despreciable, como se espera en una capa límite muy delgada porque el espesor de desplazamiento es muy pequeño.

En la figura 10-136 se grafican los perfiles de la componente *x* de velocidad para cada uno de los cuatro números de Reynolds de la figura 10-134, más algunos casos adicionales a otros valores de Re_L. Se usa una escala logarítmica para el eje vertical (*y* en unidades de m), ya que *y* abarca varios órdenes de magnitud. A la abscisa se le quitan las dimensiones al dividir entre la velocidad de flujo libre, u/U de modo que pueden compararse las formas de perfil de velocidad. Todos los perfiles tienen forma un tanto similar cuando se grafican de esta manera. Sin embargo, note que algunos de los perfiles tienen **exceso de velocidad** ($u > U$) cerca de la porción exterior del perfil de velocidad. Éste es un resultado directo del efecto de desplazamiento y el efecto de inercia que se trató con anterioridad. A valores muy *bajos* de Re_L ($\text{Re}_L \leq 10^0$), donde el efecto de desplazamiento es más prominente, el exceso de velocidad casi es inexistente. Esto puede explicarse con la falta de inercia a estos números de Reynolds bajos. Sin

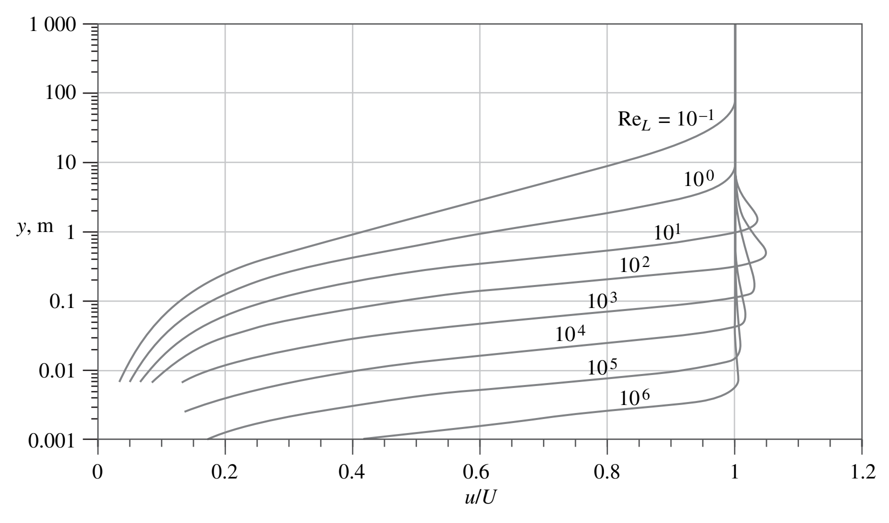


FIGURA 10-136
Cálculos de dinámica de fluido computacional (CFD, por sus siglas en inglés) de flujo bidimensional, laminar, estacionario e incompresible sobre una placa plana de espesor infinitesimal: la componente adimensional de velocidad *x* u/U se grafica contra distancia vertical desde la placa, *y*. Un exceso de velocidad importante se observa a números de Reynolds moderados, pero desaparece a valores muy bajos y muy altos de Re_L.

inercia, no existe mecanismo para acelerar el flujo alrededor de la placa; más bien, la viscosidad *retarda* el flujo en todas partes en la vecindad de la placa, y la influencia de la placa se extiende decenas de longitudes de placa más allá de la placa en todas direcciones. Por ejemplo, a $\text{Re}_L = 10^{-1}$, *u* no alcanza 99 por ciento de *U* hasta $y \cong 320$ m, ¡más de 300 longitudes de placa sobre la placa! A valores *moderados* del número de Reynolds (Re_L entre casi 10^1 y 10^4), el efecto de desplazamiento no obstante es significativo, mientras que los términos inerciales ya no son despreciables. Por lo tanto, el fluido es capaz de acelerar alrededor de la placa y el exceso de velocidad es considerable. Por ejemplo, el máximo exceso de velocidad es de casi 5 por ciento a $\text{Re}_L = 10^2$. A valores muy *altos* del número de Reynolds ($\text{Re}_L \geq 10^5$), los términos inerciales dominan los términos viscosos, y la capa límite es tan delgada que el efecto de desplazamiento es casi despreciable. El pequeño efecto de desplazamiento conduce a exceso de velocidad muy pequeño. Por ejemplo, a $\text{Re}_L = 10^6$ el máximo exceso de velocidad es sólo de más o menos 0.4 por ciento. Más allá de $\text{Re}_L = 10^6$ el flujo laminar ya no es físicamente realista y los cálculos CFD necesitarían incluir los efectos de turbulencia.

RESUMEN

La ecuación de Navier-Stokes es difícil de resolver, y por lo tanto con frecuencia se usan *aproximaciones* para análisis prácticos de ingeniería. Sin embargo, como con cualquier aproximación, debe estarse seguro de que la aproximación es adecuada en la región de flujo por analizar. En este capítulo se examinaron varias aproximaciones y se mostraron ejemplos de situaciones de flujo en los que son útiles. Primero se eliminaron las dimensiones de la ecuación de Navier-Stokes, lo que produce varios parámetros adimensionales: el *número de Strouhal* (St), el *número de Froude* (Fr), el *número de Euler* (Eu) y el *número de Reynolds* (Re). Más aún, para flujos sin efectos de superficie libre, la componente de presión hidrostática debida a gravedad puede incorporarse en una *presión modificada P'*, lo que de manera efectiva elimina el término de gravedad (y el número de Froude) de la ecuación de Navier-Stokes. La ecuación de Navier-Stokes adimensional con presión modificada es:

$$[\text{St}]\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*)\vec{V}^* = -[\text{Eu}]\vec{\nabla}^* P'^* + \left[\frac{1}{\text{Re}}\right]\nabla^{*2}\vec{V}^*$$

Cuando las variables adimensionales (indicadas por *) son de orden de magnitud de unidad, la importancia relativa de cada término en la ecuación depende de la *magnitud relativa* de los parámetros adimensionales.

Para regiones de flujo en las que el número de Reynolds es muy pequeño, el último término en la ecuación domina los términos en el lado izquierdo, y por tanto las fuerzas de presión deben equilibrar las fuerzas viscosas. Si se ignoran por completo las fuerzas inerciales, se hace la aproximación de *flujo de Stokes*, y la ecuación de Navier-Stokes se reduce a:

$$\vec{\nabla} P' \cong \mu \nabla^2 \vec{V}$$

El flujo de Stokes es extraño a las observaciones cotidianas, ya que los cuerpos, los automóviles, etcétera, se desplazan a números de Reynolds relativamente altos lo que conduce a algunas peculiaridades muy interesantes, como se comentó en este capítulo.

Las *regiones invíscidas de flujo* se definen como regiones donde los términos viscosos son despreciables comparados con los términos inerciales (opuesto al flujo de Stokes). En estas regiones de flujo la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la *ecuación de Euler*:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}\right) = -\vec{\nabla} P'$$

En regiones invíscidas de flujo, la ecuación de Euler puede utilizarse para deducir la *ecuación de Bernoulli*, válida a lo largo de líneas de corriente de flujo.

Las regiones de flujo, en donde las partículas individuales de fluido no rotan, se llaman *regiones irrotacionales de flujo*. En estas regiones la vorticidad de las partículas del fluido es despreciablemente pequeña, y pueden despreciarse los términos viscosos en la ecuación de Navier-Stokes, lo que deja de nuevo con la ecuación de Euler. Además, la ecuación de Bernoulli se vuelve menos restrictiva porque la constante de Bernoulli es la misma en todas partes, no sólo a lo largo de las líneas de corriente. Una agradable característica del flujo irrotacional es que las soluciones elementales de flujo (*flujos de bloques de construcción*) pueden sumarse para generar soluciones de flujo más complicadas, proceso conocido como *superposición*.

Dado que la ecuación de Euler no puede sostener la condición de frontera de no-deslizamiento en paredes sólidas, la *aproximación de capa límite* es útil como puente entre una aproximación de ecuación de Euler y una solución completa de Navier-Stokes. Se supone que en todas partes, excepto en regiones muy delgadas cerca de paredes sólidas o dentro de estelas, chorros y capas de mezcla, existe *flujo externo* invíscido y/o irrotacional. La aproximación de capa límite es adecuada para *flujos con número de Reynolds alto*. Sin embargo, se reconoce que, no importa qué tan grande sea el número de Reynolds, los términos viscosos en las ecuaciones de Navier-Stokes no obstante son importantes dentro de la capa límite delgada, donde el flujo es rotacional y viscoso. Las *ecuaciones de capa* límite para flujo bidimensional estacionario incompresible laminar son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{y} \qquad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Se definen varias medidas del espesor de la capa límite, incluso el *espesor* δ *de 99 por ciento de velocidad de flujo libre*, el *espesor de desplazamiento* δ^* y el *espesor de la cantidad de movimiento* θ. Estas cantidades pueden calcularse exactamente para una capa límite laminar creciente a lo largo de una placa plana, en condiciones de *gradiente de presión cero*. Conforme el número de Reynolds aumenta por la placa, la capa límite transita a turbulencia; en este capítulo se proporcionaron expresiones semiempíricas para una capa límite turbulenta sobre placa plana.

La *ecuación integral de Kármán* es válida para capas límite tanto laminares como turbulentas expuestas a gradientes de presión arbitrarios distintos de cero:

$$\frac{d}{dx}(U^2\theta) + U\frac{dU}{dx}\delta^* = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Esta ecuación es útil para estimaciones rápidas y generales de propiedades de capa límite como el espesor de la capa límite y el coeficiente de fricción local.

Las aproximaciones que se presentaron en este capítulo se aplican a muchos problemas prácticos de ingeniería. El análisis de flujo potencial es útil para cálculo de sustentación del perfil aerodinámico (capítulo 11). La aproximación invíscida se utiliza en el análisis de flujo compresible (capítulo 12), flujo de canal abierto (capítulo 13) y turbomaquinaria (capítulo 14). En casos donde estas aproximaciones no están justificadas, o donde se necesitan cálculos más precisos, la ecuación de Navier-Stokes se resuelve numéricamente con el uso de CFD (capítulo 15).

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. G. T. Yates. "How Microorganisms Move through Water", *American Scientist*, 74, pp. 358-365, julio-agosto, 1986.

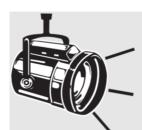
2. R. J. Heinsohn y J. M. Cimbala. *Indoor Air Quality Engineering*. Nueva York: Marcel-Dekker, 2003.

3. P. K. Kundu. *Fluid Mechanics*. San Diego, CA: Academic Press, 1990.

4. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.

5. F. M. White. *Viscous Fluid Flow*, 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1991.

6. R. L. Panton. *Incompressible Flow*, 2a. ed., Nueva York: Wiley, 1996.



PROYECTOR DE APLICACIONES ■ Fomación de gotitas

Autores invitados: James A. Liburdy y Brian Daniels, Oregon State University

La formación de gotitas es una interacción compleja de fuerzas inerciales, de tensión superficial y viscosas. El desprendimiento real de una gota de una corriente de líquido, aunque se ha estudiado durante casi 200 años, todavía no se ha explicado por completo. La formación de gotitas DoD (*Droplet-on Demand*, DoD, por sus siglas en inglés) se usa para aplicaciones tan diversas como las impresoras de inyección de tinta y el análisis de ADN a microescala, en dispositivos "laboratorio en un chip". El DoD necesita tamaños de gotas muy uniformes, velocidades y trayectorias controladas, y alta tasa de formación secuencial de éstas. Por ejemplo, en las impresoras de inyección de tinta, el tamaño típico de una gota es de 25 a 50 micras (apenas visibles a simple vista), las velocidades son del orden de 10 m/s y la tasa de formación de gotas puede ser mayor que 20 000 por segundo.

El método más común de formación de gotas implica aceleración de una corriente de líquido y luego permitir que la tensión superficial induzca una inestabilidad en la corriente, la cual se descompone en gotitas individuales. En 1879, Lord Rayleigh formuló una teoría clásica para la inestabilidad relacionada con este desprendimiento; su teoría todavía se usa de manera generalizada en la actualidad para definir condiciones de desprendimiento de gotas. Una pequeña perturbación a la superficie de la corriente del líquido establece un patrón ondulatorio a lo largo de la longitud de la corriente, lo que provoca que la corriente se rompa en gotitas cuyo tamaño está determinado por el radio de la corriente y la tensión superficial del líquido. Sin embargo, la mayoría de los sistemas DoD se apoyan en la aceleración de la corriente, con funciones de fuerza dependientes del tiempo en la forma de una onda de presión que se ejerce en la entrada de un inyector. Si la onda de presión es muy rápida, los efectos viscosos en las paredes son despreciables y puede usarse la aproximación de flujo potencial para predecir el flujo.

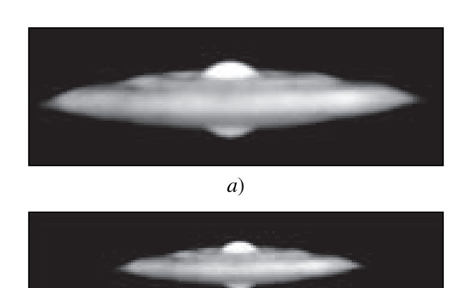
Dos importantes parámetros DoD adimensionales son el *número de Ohnesorge* $\text{Oh} = \mu/(\rho\sigma_s a)^{1/2}$ y el *número de Weber* $\text{We} = \rho V a/\sigma_s$, donde a es el radio del inyector, σ_s es la tensión superficial y V es la velocidad. El número de Ohnesorge determina cuándo son importantes las fuerzas viscosas en relación con las fuerzas de tensión superficial. Además, la presión adimensional requerida para formar una corriente de fluido inestable, $P_c = Pa/\sigma_s$, se llama *presión de capilaridad*, y la *escala de tiempo de capilaridad* asociada para que se formen las gotas es $t_c = (\rho a/\sigma_s)^{1/2}$. Cuando Oh es pequeño puede aplicarse la aproximación de flujo potencial, y la forma de la superficie se controla mediante un balance entre la tensión superficial y la aceleración del fluido.

En las figuras 10-137*a* y *b* se muestran ejemplos de superficies de flujo que emergen de un inyector. La forma de la superficie depende de la amplitud de presión y la escala de tiempo de la perturbación, y se predice bien con el uso de la aproximación de flujo potencial. Cuando la presión es lo suficientemente grande y el pulso es lo suficientemente rápido, la superficie ondula y el centro forma un chorro que finalmente se separa en una gota (Fig. 10-137*c*). Un área de investigación activa es cómo controlar el tamaño y la velocidad de estas gotas mientras se producen miles por segundo.

Referencias

Rayleigh, Lord, "On the Instability of Jets", *Proc. London Math. Soc.*, 10, pp. 4-13, 1879.

Daniels, B. J., y Liburdy, J. A., "Oscillating Free-Surface Displacement in an Orifice Leading to Droplet Formation", *J. Fluids Engr.*, 10, pp. 7-8, 2004.



a)

b)



c)

FIGURA 10-137
La formación de gotas comienza cuando una superficie se vuelve inestable debido a un pulso de presión. Aquí se muestran superficies de agua en *a*) un orificio de 800 micras que se perturba por un pulso de 5 000 Hz y *b*) un orificio de 1 200 micras que se perturba por un pulso de 8 100 Hz. Los reflejos de la superficie provocan que la imagen aparezca como si la onda de superficie estuviera arriba y abajo. La onda es axisimétrica, al menos para pulsos de presión de pequeña amplitud. Cuanto mayor sea la frecuencia, más corta será la longitud de onda y más pequeño el nodo central. El tamaño del nodo central define el diámetro del chorro líquido, que entonces se rompe en una gota. *c*) Formación de gotas a partir de un pulso de presión de alta frecuencia que se expulsa de un orificio de 50 micras de diámetro. La corriente líquida central produce la gota y sólo es de casi 25 por ciento del diámetro del orificio. En el mejor de los casos, se forma una sola gota, pero con frecuencia se generan gotas "satélites" indeseables junto con la gota principal.

PROBLEMAS*

Problemas generales e introductorios, presión modificada, estática de fluidos

10-1C Explique la diferencia entre una *solución "exacta"* de la ecuación de Navier-Stokes (como se comentó en el capítulo 9) y una *solución aproximada* (como se comentó en este capítulo).

10-2C Un ventilador de caja se coloca en el piso de una habitación muy grande (Fig. P10-2C). Identifique las regiones del campo de flujo que se puedan aproximar como estáticas. Identifique las regiones en las que es probable que la aproximación irrotacional sea adecuada. Identifique las regiones donde la aproximación de capa límite pueda ser apropiada. Para finalizar, identifique las regiones en donde con más probabilidad sea necesario resolver la ecuación completa de Navier-Stokes (es decir: las regiones donde ninguna aproximación es apropiada).

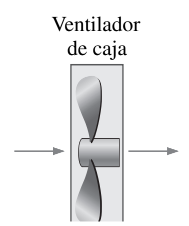


FIGURA P10-2C

10-3C Explique cómo la *eliminación de dimensiones* de la ecuación de Navier-Stokes es útil para obtener soluciones aproximadas. Dé un ejemplo.

10-4C ¿Cuál es el peligro más significativo relacionado con una solución aproximada de la ecuación de Navier-Stokes? dé un ejemplo que sea diferente de los proporcionados en este capítulo.

10-5C ¿Qué criterio puede aplicarse para determinar si una aproximación de la ecuación de Navier-Stokes es adecuada o no? Explíquelo.

10-6C En la ecuación adimensional de Navier-Stokes para el fluido incompresible (Ec. 10-6), existen cuatro parámetros adimensionales. Mencione cada uno, explique su significado físico (por ejemplo: la razón de fuerzas de presión a fuerzas viscosas), y diga qué significa físicamente cuando el parámetro es muy pequeño o muy grande.

*Los problemas designados por una "C" son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

10-7C ¿Cuál es el criterio más importante para usar la *presión modificada P'* en vez de la presión termodinámica P en una solución de la ecuación de Navier-Stokes?

10-8C ¿Cuál parámetro adimensional en la ecuación de Navier-Stokes adimensional se elimina con el uso de la presión modificada en vez de la presión verdadera? Explíquelo.

10-9 Considere flujo de agua a través de un pequeño agujero en el fondo de un gran tanque cilíndrico (Fig. P10-9). El flujo es laminar en todas partes. El diámetro del chorro d es mucho más pequeño que el diámetro del tanque D, pero D es del mismo orden de magnitud que la altura del tanque H. Carolina piensa que puede usar la aproximación de fluido estático en todas partes en el tanque excepto cerca del agujero, pero quiere validar de manera matemática esta aproximación. Ella permite que la velocidad característica en el tanque sea $V = V_{\text{tanque}}$. La longitud característica es la altura del tanque H, el tiempo característico es el tiempo necesario para drenar el tanque t_{drenar} y la diferencia de presión de referencia es $\rho g H$ (diferencia de presión desde la superficie del agua hasta el fondo del tanque, si se supone fluido estático). Sustituya todas estas magnitudes características en la ecuación adimensional de Navier-Stokes para el fluido incompresible (Ec. 10-6) y verifique, mediante análisis de orden de magnitud, que, para $d \ll D$, sólo permanecen los términos de presión y gravedad. En particular, compare el orden de magnitud de cada término y cada uno de los cuatro parámetros adimensionales St, Eu, Fr y Re. (Sugerencia: $V_{\text{chorro}} \sim \sqrt{gH}$.) ¿Según qué criterios la aproximación de Carolina es adecuada?

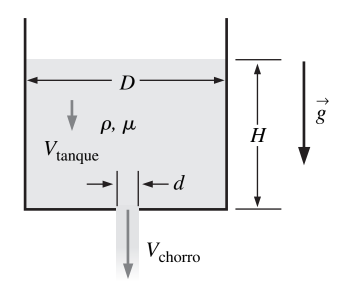


FIGURA P10-9

10-10 Considere flujo de Poiseuille planar estacionario incompresible laminar totalmente desarrollado entre dos placas

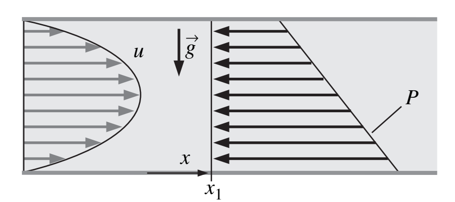


FIGURA P10-10

paralelas horizontales (en la figura P10-10 se muestran los perfiles de velocidad y de presión). En alguna posición horizontal $x = x_1$, la presión varía linealmente con la distancia vertical z, como se bosqueja. Escoja un plano de referencia adecuado ($z = 0$), muestre el perfil de *presión modificada* a todo lo largo de la sección vertical y sombree la región que representa la componente de presión hidrostática. Explíquelo.

10-11 Considere el flujo de Poiseuille planar del problema 10-10. Explique cómo varía la presión modificada con la distancia x corriente abajo. En otras palabras, ¿la presión modificada aumenta, permanece igual o disminuye con x? Si P' aumenta o disminuye con x, ¿cómo lo hace (por ejemplo: lineal, cuadrática o exponencialmente)? Use un bosquejo para ilustrar su respuesta.

10-12 En el capítulo 9 (Ejemplo 9-15) se generó una solución "exacta" de la ecuación de Navier-Stokes para flujo de Couette totalmente desarrollado entre dos placas planas horizontales (Fig. P10-12), con la gravedad que actúa en la dirección z negativa (hacia la página de la figura P10-12). En este ejemplo se usó la presión real. Repita la solución para la componente x de velocidad u y presión P, pero use la *presión modificada* en sus ecuaciones. La presión es P_0 en $z = 0$. Demuestre que obtiene el mismo resultado que el anterior. Explíquelo. *Respuestas:* $u = Vy/h$, $P = P_0 - \rho gz$

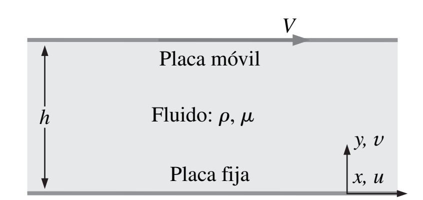


FIGURA P10-12

10-13 Escriba las tres componentes de la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas en términos de la presión modificada. Inserte la definición de presión modificada y demuestre que las componentes x, y y z son idénticas a las que están en términos de presión regular. ¿Cuál es la ventaja de usar presión modificada?

10-14 Un campo de flujo se simula mediante un paquete de dinámica de fluido computacional que usa la presión modificada en sus cálculos. En la figura P10-14 se bosqueja un perfil de la presión modificada a lo largo de una sección vertical del flujo. Se conoce la presión real en un punto a la mitad del camino a través de la sección, como se indica en la figura P10-14. Bosqueje el perfil de presión real a todo lo largo de la sección vertical. Explíquelo.

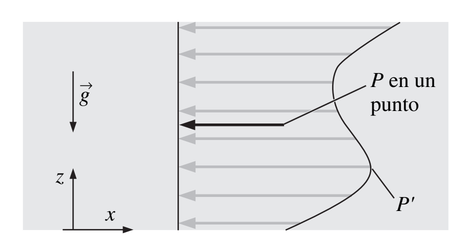


FIGURA P10-14

10-15 En el ejemplo 9-18 se resolvió la ecuación de Navier-Stokes para flujo laminar estacionario totalmente desarrollado en una tubería redonda (flujo de Poiseuille) al despreciar la gravedad. Ahora, agregue de vuelta el efecto de la gravedad y vuelva a resolver este mismo problema, pero use presión modificada P' en vez de presión real P. De manera específica, calcule el campo de presión real y el campo de velocidad. Suponga que la tubería es horizontal y sea $z = 0$ el plano de referencia hacia alguna distancia arbitraria bajo la tubería. La presión real en la parte superior de la tubería ¿es mayor que, igual a, o menor que la del fondo de la tubería? Explíquelo.

Flujo de Stokes

10-16C Escriba una descripción en una sola palabra de cada uno de los cinco términos en la ecuación de Navier-Stokes incompresible:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}}_{\text{II}} = \underbrace{-\vec{\nabla} P}_{\text{III}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{IV}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{V}}_{\text{V}}$$

Cuando se hace la aproximación de flujo de Stokes, sólo dos de los cinco términos permanecen. ¿Cuáles dos términos permanecen y por qué esto es importante?

10-17 En la tabla P10-17 se presenta una lista de la viscosidad de la miel como función de la temperatura. La gravedad específica de la miel es casi de 1.42 y no es una importante función de la temperatura. La miel se aprieta a través de un pequeño agujero con diámetro $D = 4.0$ mm en la tapa de un frasco de miel invertido. La habitación y la miel están a $T = 20°C$. Estime la velocidad máxima de la miel a través del agujero, tal que el flujo se pueda aproximar como flujo de Stokes (suponga que Re debe ser menor que 0.1 para que la aproximación de flujo de Stokes sea apropiada). Repita su cálculo si la temperatura es de 40°C. Explíquelo. *Respuestas:* 0.33 m/s, 0.035 m/s

TABLA P10-17

Viscosidad de la miel con contenido de 16 por ciento de humedad

T, °C	μ, poise*
14	600
20	190
30	65
40	20
50	10
70	3

* Poise = g/cm · s.

Datos tomados de Airborne Honey, Ltd., *www.airborne.co.nz*.

10-18 Para cada caso, calcule un número de Reynolds adecuado e indique si el flujo puede aproximarse mediante las ecua-

ciones de flujo de Stokes. *a*) Un microorganismo de 5.0 μm de diámetro nada en agua a temperatura ambiente a una velocidad de 0.2 mm/s. *b*) Aceite de motor a 140°C fluye en el reducido espacio de un cojinete automotriz lubricado. El espacio mide 0.0012 mm de grosor y la velocidad característica es de 20.0 m/s. *c*) Una gota de niebla de 10 μm de diámetro cae a través de aire a 30°C con una velocidad de 3.0 mm/s.

10-19 Estime la velocidad y el número de Reynolds del esperma que se muestra en la figura 10-10. ¿Este microorganismo nada en condiciones de flujo de Stokes? Suponga que nada en agua a temperatura ambiente.

10-20 Un buen nadador puede nadar 100 m en casi un minuto. Si el cuerpo de un nadador mide 1.8 m de largo, ¿cuántas longitudes de cuerpo nada por segundo? Repita el cálculo para el esperma de la figura 10-10. En otras palabras, ¿cuántas longitudes de esperma nada el esperma por segundo? Para el cálculo use toda la longitud de cuerpo del esperma, no sólo la de su cabeza. Compare los dos resultados y explíquelos.

10-21 Una gota de agua en una nube de lluvia tiene diámetro $D = 30\ \mu$m (Fig. P10-21). La temperatura del aire es de 25°C y su presión es presión atmosférica estándar. ¿Qué tan rápido tiene que desplazarse verticalmente el aire de modo que la gota permanezca suspendida en el aire? *Respuesta:* 0.0264 m/s

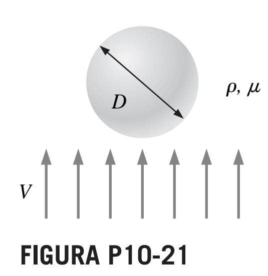


FIGURA P10-21

10-22 Explique por qué la densidad del fluido no influye en la fuerza de arrastre aerodinámica sobre una partícula que se desplaza en el régimen de flujo de Stokes.

10-23 En los problemas de lubricación, con frecuencia se encuentra una almohadilla deslizante (Fig. P10-23). El aceite fluye entre dos bloques; el superior es estacionario y el inferior se mueve en este caso. El dibujo no está a escala; en realidad, $h \ll L$. La separación entre los bloques converge con x creciente. De manera específica, la altura de la separación h disminuye linealmente de h_0 en $x = 0$ a h_L en $x = L$. Por lo general, la longitud característica de la altura de la brecha h_0 es mucho más pequeña que la longitud característica axial L. Este problema es más complicado que el simple flujo de Couette entre placas paralelas debido a la altura de brecha variable. En particular, la componente de velocidad axial u es una función tanto de x como de y, y la presión P varía de manera no-lineal de $P = P_0$ en $x = 0$ hasta $P = P_L$ en $x = L$ ($\partial P/\partial x$ no es constante). Las fuerzas de gravedad son despreciables en este campo de flujo, que se aproxima como bidimensional, estacionario y laminar. De hecho, dado que h es tan pequeño y el aceite es tan viscoso, las aproximaciones de flujo de Stokes se usan en el análisis de estos problemas de lubricación. Sea L la escala de longitud característica asociada con x, y sea h_0 ($x \sim L$ y $y \sim h_0$) la asociada con y. Suponga que el flujo es el flujo de Stokes y genere una magnitud característica para la diferencia de presión $\Delta P = P - P_0$ en términos de L, h_0, μ y V. *Respuesta:* $\mu VL/h_0^2$

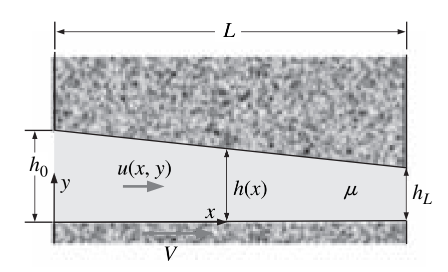


FIGURA P10-23

10-24 Considere la almohadilla deslizante del problema 10-23. *a*) Genere una magnitud característica para v, la componente y de velocidad. *b*) Realice un análisis de orden de magnitud para comparar los términos inerciales con los términos de presión y viscoso en la ecuación de cantidad de movimiento x. Demuestre que cuando la separación es pequeña ($h_0 \ll L$) y el número de Reynolds es pequeño ($\text{Re} = \rho V h_0/\mu \ll 1$), la aproximación de flujo de Stokes es adecuada. *c*) Demuestre que, cuando $h_0 \ll L$, las ecuaciones de flujo de Stokes sin embargo pueden ser apropiadas, inclusive, si el número de Reynolds ($\text{Re} = \rho V h_0/\mu$) no es menor que 1. Explíquelo.
Respuesta: (*a*) Vh_0/L

10-25 Considere de nuevo la almohadilla deslizante del problema 10-23. *a*) Haga una lista de condiciones de frontera adecuadas sobre u. *b*) Resuelva la aproximación de flujo de Stokes de la ecuación de cantidad de movimiento x para obtener una expresión de u como función de y (sugerencia: necesitará los resultados de los problemas 10-23 y 10-24). ¿Qué puede decir acerca del gradiente de presión $\partial P/\partial y$?

10-26 Considere de nuevo la almohadilla deslizante del problema 10-23. *a*) Haga una lista de condiciones límite adecuadas sobre u. *b*) Resuelva la aproximación de flujo de Stokes de la ecuación de cantidad de movimiento x para obtener una expresión de u como función de y (e indirectamente como función de x a través de h y dP/dx, que son funciones de x). Puede suponer que P *no* es función de y. Su expresión final debe escribirse como $u(x, y) = f(y, h, dP/dx, V \text{ y } \mu)$. Mencione las dos distintas componentes del perfil de velocidad en su resultado. *c*) Elimine las dimensiones de su expresión para u con el uso de estos parámetros adimensionales adecuados: $x^* = x/L$, $y^* = y/h_0$, $h^* = h/h_0$, $u^* = u/V$, y $P^* = (P - P_0)h_0^2/\mu VL$.

10-27 Considere la almohadilla deslizante de la figura P10-27. El dibujo no está a escala; en realidad, $h \ll L$. Este caso difiere del problema 10-23 en que $h(x)$ no es lineal; más bien, h es alguna función arbitraria conocida de x. Escriba una expresión para la componente de velocidad axial u como función de y, h, dP/dx, V y μ. Explique algunas diferencias entre este resultado y el del problema 10-26.

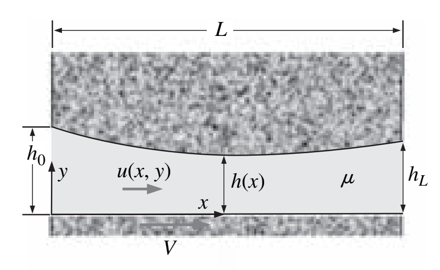


FIGURA P10-27

10-28 Para la almohadilla deslizante del problema 10-23, use la ecuación de continuidad, las condiciones de frontera adecuadas y el teorema unidimensional de Leibnitz (vea el capítulo 4) para demostrar que:

$$\frac{d}{dx}\int_0^h u\,dy = 0.$$

10-29 Combine los resultados de los problemas 10-26 y 10-28 para demostrar que, para una almohadilla deslizante bidimensional, el gradiente de presión dP/dx se relaciona con la altura de brecha h mediante $\frac{d}{dx}\left(h^3\frac{dP}{dx}\right) = 6\mu U\frac{dh}{dx}$. Ésta es la forma bidimensional estacionaria de la **ecuación de Reynolds** más general para lubricación (Panton, 1996).

10-30 Considere flujo a través de una almohadilla deslizante bidimensional con altura de separación linealmente decreciente desde h_0 hasta h_L (Fig. P10-23), a saber, $h = h_0 + \alpha x$, donde α es la convergencia adimensional de la separación, $\alpha = (h_L - h_0)/L$. Note que $\alpha \cong \alpha$ para valores muy pequeños de α. Por lo tanto, *a* es casi el ángulo de convergencia de la placa superior en la figura P10-23 (α es *negativo* para este caso). Suponga que el aceite está sometido a presión atmosférica en ambos extremos de la almohadilla deslizante, de modo que $P = P_0 = P_{atm}$ en $x = 0$ y $P = P_L = P_{atm}$ en $x = L$. Integre la ecuación de Reynolds (problema 10-29) para esta almohadilla deslizante y genere una expresión para P como función de x.

10-31I Se diseñará una almohadilla deslizante con altura de separación decreciente linealmente (Fig. P10-23) para un juego en un parque de diversiones. Sus dimensiones son h_0 = 1/1000 en (2.54×10^{-5} m), h_L = 1/2000 en (1.27×10^{-5} m), y L = 1.0 en (0.0254 m). La placa inferior se desplaza con velocidad V = 10.0 ft/s (3.048 m/s) en relación con la placa superior. El aceite es de motor a 40°C. Ambos extremos de la almohadilla deslizante están expuestos a presión atmosférica, como en el problema 10-30. *a*) Calcule la convergencia α y verifique que, para este caso, $\alpha \cong \alpha$. *b*) Calcule la presión manométrica a la mitad a lo largo de la almohadilla deslizante (en x = 0.5 in). Comente la magnitud de la presión manométrica. *c*) Grafique P^* como función de x^*, donde $x^* = x/L$ y $P^* = (P - P_{atm})h_0^2/\mu VL$. *d*) Aproximadamente ¿cuántas libras de peso (carga) puede soportar esta almohadilla deslizante si tiene b = 6.0 in de profundidad (normal a la página de la figura P10-23)?

10-32 Explique qué ocurre cuando la temperatura del aceite aumenta de manera considerable conforme la almohadilla deslizante del problema 10-31I se somete a uso constante en el parque de diversiones. En particular, la capacidad de transporte de carga ¿aumentaría o disminuiría? ¿Por qué?

10-33 ¿El flujo de la almohadilla deslizante del problema 10-31I está en el régimen del flujo de Stokes? Explíquelo. ¿Son razonables los resultados?

10-34 En el problema 10-31I se vio que una almohadilla deslizante puede soportar una gran carga. Si la carga aumentara, la altura de la separación *disminuiría*, con lo cual aumenta la presión en la separación. En este sentido, la almohadilla deslizante es "autoajustable" a cargas variables. Si la carga aumenta por un factor de 2, calcule cuánto disminuye la altura de la separación. De manera específica, calcule el nuevo valor de h_0 y el porcentaje de cambio. Suponga que la pendiente de la placa superior y todos los otros parámetros y dimensiones permanecen igual que los del problema 10-31I.

10-35 Estime la velocidad a la que usted necesitaría nadar en agua a temperatura ambiente para estar en el régimen de flujo de Stokes (una estimación del orden de magnitud será suficiente). Explíquelo.

Flujo invíscido

10-36C ¿En qué forma la ecuación de Euler es una aproximación de la ecuación de Navier-Stokes? ¿Dónde, en un campo de flujo, la ecuación de Euler es una aproximación adecuada?

10-37C ¿Cuál es la diferencia principal entre la ecuación de Bernoulli de flujo estacionario incompresible para regiones irrotacionales de flujo, y la ecuación de Bernoulli de flujo estacionario incompresible para regiones de flujo rotacionales pero invíscidas?

10-38 En la derivación de la ecuación de Bernoulli para regiones de flujo invíscido se usa la identidad vectorial

$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})$$

Demuestre que esta identidad vectorial se satisface para el caso del vector de velocidad $\vec{V}$ en coordenadas cartesianas; es decir: $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$. Para dar una idea completa, expanda cada término tanto como sea posible y muestre todo el procedimiento.

10-39 En la derivación de la ecuación de Bernoulli, para regiones de flujo invíscido, la ecuación de Euler estacionaria incompresible se reescribe en una forma que muestre que el gradiente de tres términos escalares es igual al vector de velocidad en producto cruz con el vector de vorticidad y se hace notar que z está dirigida verticalmente hacia arriba:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right) = \vec{V}\times\vec{\zeta}$$

Entonces, se emplean algunos argumentos acerca de la dirección del vector gradiente y la dirección del producto cruz de dos vectores para demostrar que la suma de los tres términos escalares debe ser constante a lo largo de una línea de corriente. En este problema, el lector usará un planteamiento diferente para lograr el mismo resultado. Es decir, tome el producto punto

de ambos lados de la ecuación de Euler con el vector de velocidad $\vec{V}$ y aplique algunas reglas fundamentales acerca del producto punto de dos vectores. Los bosquejos pueden ser útiles.

10-40 Desarrolle las componentes de la ecuación de Euler, tanto como sea posible, en coordenadas cartesianas (x, y, z) y (u_r, v_θ, u_z). Suponga que la gravedad actúa en alguna dirección arbitraria.

10-41 Desarrolle las componentes de la ecuación de Euler, tanto como sea posible, en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y (u_r, u_θ, u_z). Suponga que la gravedad actúa en alguna dirección arbitraria.

10-42 Se tiene agua a $T = 20°C$ que rota como un cuerpo rígido en torno al eje z en un contenedor cilíndrico que gira (Fig. P10-42). No existen esfuerzos viscosos ya que el agua se desplaza como un cuerpo sólido; por lo tanto, la ecuación de Euler es adecuada (se desprecian los esfuerzos viscosos causados por el aire que actúa sobre la superficie del agua). Integre la ecuación de Euler y genere una expresión para presión como función de r y z en todas partes en el agua. Escriba una ecuación para la forma de la superficie libre ($z_{\text{superficie}}$ como función de r) (sugerencia: $P = P_{\text{atm}}$ en todas partes sobre la superficie libre. El flujo es rotacionalmente simétrico alrededor del eje z.)
Respuesta: $z_{\text{superficie}} = \omega^2 r^2/2g$

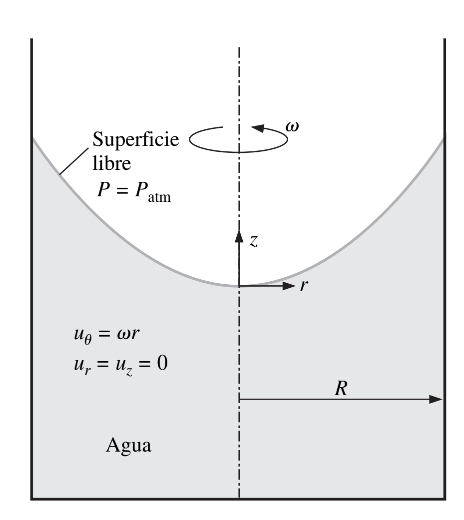


FIGURA P10-42

10-43 Repita el problema 10-42, excepto que ahora el fluido que rota es aceite de motor a 60°C. Explíquelo.

10-44 Con los resultados del problema 10-42, calcule la constante de Bernoulli como función de la coordenada radial r.
Respuesta: $\dfrac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \omega^2 r^2$

10-45 Considere flujo bidimensional estacionario incompresible de fluido en un ducto convergente con paredes rectas (Fig. P10-45). La razón de flujo volumétrico es $\dot{V}$, y la velocidad sólo está en la dirección radial, con u_r como función sólo de r. Sea b el ancho normal a la página. En la entrada en el ducto convergente $(r = R)$, $u_r = u_r(R)$. Si se supone flujo invíscido en todas partes, genere una expresión para u_r como función de r, R y $u_r(R)$ *solamente*. Bosqueje a qué se parecería el perfil de velocidad a radio r, si la fricción no se despreciara (es decir: un flujo real) a la misma razón de flujo volumétrico.

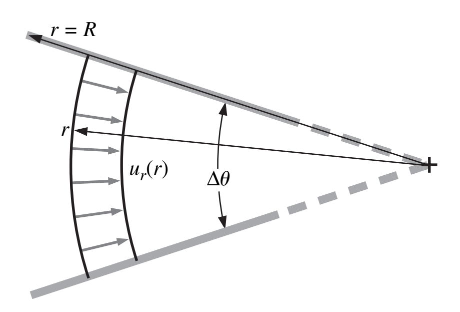


FIGURA P10-45

10-46 En cierta región de flujo bidimensional estacionario incompresible, el campo de velocidad está dado por $\vec{V} = (u, v) = (ax + b)\vec{i} + (-ay + cx)\vec{j}$. Demuestre que esta región de flujo puede considerarse invíscida.

Flujo irrotacional (potencial)

10-47C ¿Qué propiedad de flujo determina si una región de flujo es rotacional o irrotacional? Explíquelo.

10-48 En una región irrotacional de flujo puede escribirse el vector de velocidad como el gradiente de la función potencial escalar, $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$. Las componentes de $\vec{V}$ en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y (u_r, u_θ, u_z), son:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Del capítulo 9, las componentes del vector de vorticidad también pueden escribirse en coordenadas cilíndricas como

$$\zeta_r = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad \zeta_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad \text{y} \quad \zeta_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r u_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

Sustituya las componentes de velocidad en las componentes de vorticidad para demostrar que las tres componentes del vector de vorticidad son, de hecho, cero en una región irrotacional de flujo.

10-49 Sustituya las componentes del vector de velocidad dados en el problema 10-48 en la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Cuando demuestre toda su álgebra, verifique que la ecuación de Laplace es válida en una región irrotacional de flujo.

10-50 Considere el campo de flujo que se produce por una secadora de cabello (Fig. P10-50). Identifique regiones de este campo de flujo que puedan aproximarse como irrotacionales, y

aquellas para las que la aproximación de flujo irrotacional no sería adecuada (regiones de flujo rotacional).

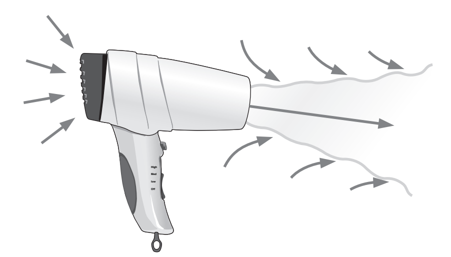


FIGURA P10-50

10-51 Escriba la ecuación de Bernoulli y explique cómo difiere una región invíscida rotacional de flujo de una región irrotacional viscosa de flujo. ¿Cuál caso es más restrictivo (en cuanto a la ecuación de Bernoulli)?

10-52 En la figura P10-52 se bosquejan líneas de corriente en un campo de flujo bidimensional estacionario incompresible. El flujo en la región que se muestra también se aproxima como irrotacional. Bosqueje a qué pueden parecerse unas cuantas curvas equipotenciales (curvas de función potencial constante) en este campo de flujo. Explique cómo llegó a las curvas que bosquejó.

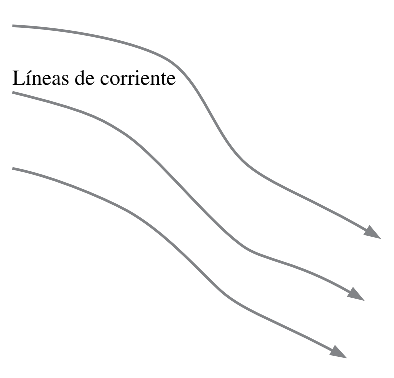


FIGURA P10-52

10-53 En una región irrotacional de flujo, el campo de velocidad puede calcularse sin necesidad de la ecuación de cantidad de movimiento cuando se resuelve la ecuación de Laplace para función potencial de velocidad ϕ y luego resolver para las componentes de $\vec{V}$ a partir de la definición de ϕ, es decir, $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$. Explique el papel de la ecuación de cantidad de movimiento en una región irrotacional de flujo.

10-54 Considere el siguiente campo de velocidad bidimensional estacionario incompresible: $\vec{V} = (u, v) = (ax + b)\vec{i} + (-ay + cx)\vec{j}$. Este campo de flujo ¿es irrotacional? Si es así, genere una expresión para la función potencial. *Respuestas:* Sí, $a(x^2 - y^2)/2 + bx + cy$ + constante

10-55 Un punto sutil, con frecuencia pasado por alto por los estudiantes de mecánica de fluidos (¡e inclusive por sus profesores!), es que una región irrotacional (potencial) de flujo *no* es lo mismo que una región invíscida de flujo (Fig. P10-55). Explique las diferencias y similitudes entre estas dos aproximaciones. Dé un ejemplo de cada una.



FIGURA P10-55

10-56 Considere un campo de velocidad bidimensional estacionario incompresible irrotacional especificado por su función potencial, $\phi = 5(x^2 - y^2) + 2x - 4y$. *a*) Calcule las componentes de velocidad u y v. *b*) Verifique que el campo de velocidad es irrotacional en la región en la que se aplica ϕ. *c*) Genere una expresión para la función de corriente en esta región.

10-57 Considere una región irrotacional planar de flujo en el plano $r\theta$. Demuestre que la función de corriente ψ satisface la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

10-58 En este capítulo se describe flujo irrotacional axisimétrico en términos de coordenadas cilíndricas r y z y componentes de velocidad u_r y u_z. Otra descripción del flujo axisimétrico surge si se usan *coordenadas esféricas* y se establece el eje x como el eje de simetría. Las dos componentes direccionales re-

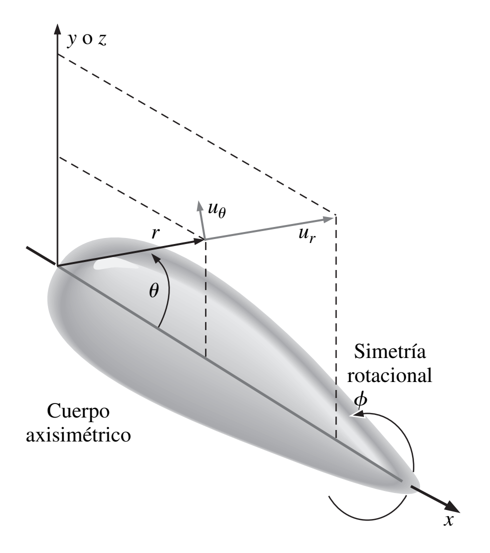


FIGURA P10-58

levantes ahora son r y θ, y sus correspondientes componentes de velocidad son u_r y u_θ. En este sistema coordenado, la posición radial r es la distancia desde el origen, y el ángulo polar θ es el ángulo de inclinación entre el vector radial y el eje de simetría rotacional (el eje x, como se bosqueja en la Fig. P10-58; se muestra una sección que define el plano $r\theta$. Éste es un tipo de flujo bidimensional porque sólo existen dos variables espaciales independientes, r y θ. En otras palabras, una solución de los campos de velocidad y de presión en *cualquier* plano $r\theta$ es suficiente para identificar toda la región de flujo irrotacional axisimétrico. Escriba la ecuación de Laplace para ϕ en coordenadas polares esféricas, válida en regiones de flujo irrotacional axisimétrico (sugerencia: puede consultar un texto de análisis vectorial).

10-59 Demuestre que la ecuación de continuidad para el fluido incompresible y flujo axisimétrico en coordenadas polares esféricas, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial}(u_\theta \operatorname{sen}\theta) = 0$, se satisface idénticamente por medio de una función de corriente definida como $u_r = -\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ y $u_\theta = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$, en tanto ψ sea una función suave de r y θ.

10-60 Considere una corriente uniforme de velocidad V inclinada a un ángulo α (Fig. P10-60). Si supone flujo irrotacional planar incompresible, encuentre la función potencial y la función de corriente. Muestre todo el procedimiento. *Respuestas:* $\phi = Vx \cos\alpha + Vy \operatorname{sen}\alpha$, $\psi = Vy \cos\alpha - Vx \operatorname{sen}\alpha$

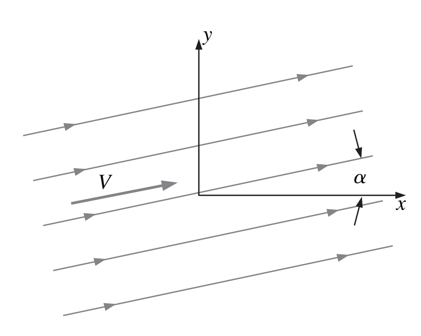


FIGURA P10-60

10-61 Considere una fuente lineal irrotacional de intensidad $\dot{V}/L$en el plano xy o $r\theta$. Las componentes de velocidad son $u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r}$ y $u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$. En este capítulo se comenzó con la ecuación para u_θ para generar expresiones para la función potencial y la función de corriente para la fuente lineal. Repita el análisis, excepto que ahora comience con la ecuación para u_r, y muestre todo el procedimiento.

10-62 Considere un vórtice lineal irrotacional de intensidad Γ en el plano xy o $r\theta$. Las componentes de velocidad son $u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0$ y $u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$. Genere expresiones para la función potencial y la función de corriente para el vórtice lineal, y muestre todo el procedimiento.

10-63 La función de corriente para flujo bidimensional estacionario incompresible sobre un cilindro circular de radio α y velocidad de flujo libre V_∞ es $\psi = V_\infty \operatorname{sen}\theta(r - a^2/r)$ para el caso en el que el campo de flujo se aproxima como irrotacional (Fig. P10-63). Genere una expresión para la función potencial ϕ para ese flujo como función de r y θ, y los parámetros V_∞ y a.

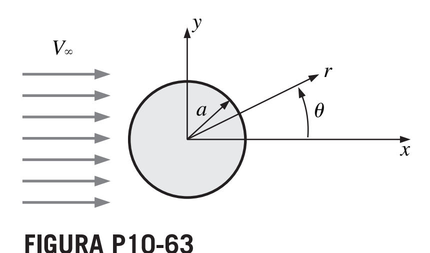


FIGURA P10-63

10-64 ¿Cuál es la paradoja de d'Alambert? ¿Por qué es paradoja?

Capas límite

10-65C En este capítulo se dio una afirmación en el sentido de que la aproximación de capa límite "tiende un puente en la separación" entre la ecuación de Euler y la ecuación de Navier-Stokes. Explíquelo.

10-66C Para cada afirmación, elija si la afirmación es verdadera o falsa, y discuta su respuesta de manera breve. Estas afirmaciones conciernen a una capa límite laminar sobre una placa plana (Fig. P10-66C):

a) En una posición x dada, si el número de Reynolds aumentara, el espesor de la capa límite también aumentaría.

b) Mientras aumenta la velocidad del flujo exterior, también lo hace el espesor de la capa límite.

c) Mientras aumenta la viscosidad del fluido, también lo hace el espesor de la capa **límite**.

d) Mientras aumenta la densidad del fluido, también lo hace el espesor de la capa **límite**.

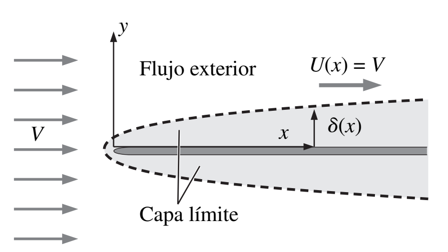


FIGURA P10-66C

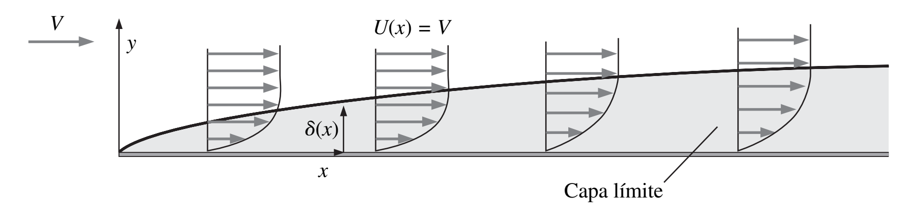


FIGURA P10-68C

10-67C Por lo general se considera que las capas límite ocurren a lo largo de paredes sólidas. Sin embargo, existen otras situaciones de flujo en donde la aproximación de capa límite también es apropiada. Mencione tres de estos flujos y explique por qué es adecuada la aproximación de capa límite.

10-68C En la figura P10-68C se bosqueja una capa límite laminar que crece a lo largo de una placa plana. También se muestran varios perfiles de velocidad y el espesor de la capa límite $\delta(x)$. Bosqueje varias líneas de corriente en este campo de flujo. La curva que representa a $\delta(x)$ ¿es una línea de corriente?

10-69C ¿Qué es un alambre provocador de turbulencia y cuál es su propósito?

10-70 Se tiene aire a 30°C que fluye a una velocidad uniforme de 25.0 m/s a lo largo de una placa plana lisa. Calcule la posición x aproximada a lo largo de la placa, donde la capa límite comienza el proceso de transición hacia turbulencia. Aproximadamente ¿en qué posición x a lo largo de la placa es probable que la capa límite sea totalmente turbulenta? *Respuestas:* 6 a 7 cm, 2 m

10-71I Se tiene agua que fluye sobre la aleta de un pequeño vehículo submarino con una velocidad V = 6.0 mi/h (Fig. P10-71I). La temperatura del agua es de 40°F, y la longitud de la cuerda c de la aleta es de 1.6 ft. La capa de límite sobre la superficie de la aleta ¿es laminar o turbulenta o en transición?

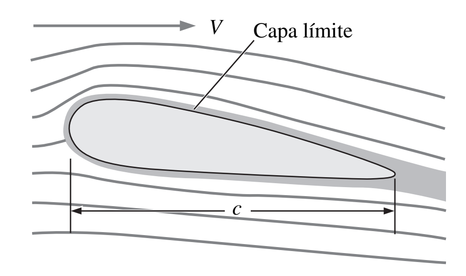


FIGURA P10-71I

10-72 Se tiene aire que fluye paralelo a una señal de límite de velocidad a lo largo de una autopista, con una velocidad V = 5.0 m/s. La temperatura del aire es de 25°C, y el ancho W de la señal paralelo a la dirección del flujo es de 0.45 m. La capa límite sobre la señal ¿es laminar o turbulenta o en transición?

10-73I Se tiene aire que fluye a través de la sección de prueba de un pequeño túnel de viento con velocidad V = 7.5 ft/s. La temperatura del aire es de 80°F, y la longitud de la sección de prueba del túnel de viento es de 1.5 ft. Suponga que el espesor de la capa límite es despreciable antes del comienzo de la sección de prueba. La capa límite a lo largo de la pared de la sección de prueba ¿es laminar o turbulenta o en transición? *Respuesta:* laminar

10-74 La presión estática P se mide en dos posiciones a lo largo de la pared con una capa límite laminar (Fig. P10-74). Las presiones medidas son P_1 y P_2, y la distancia entre las tomas de presión es pequeña en comparación con la dimensión característica de cuerpo ($\Delta x = x_2 - x_1 \ll L$). La velocidad del flujo exterior sobre la capa límite en el punto 1 es U_1. La densidad y viscosidad del fluido son ρ y μ, respectivamente. Genere una expresión aproximada para U_2, la velocidad del flujo exterior sobre la capa límite en el punto 2, en términos δ P_1, P_2, Δx, U_1, ρ, y μ.

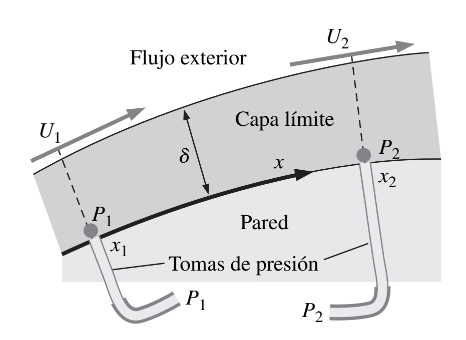


FIGURA P10-74

10-75 Considere dos tomas de presión a lo largo de la pared con una capa límite laminar, como en la figura P10-74. El fluido es aire a 25°C, U_1 = 10.3 m/s y la presión estática P_1 es 2.44 Pa mayor que la presión estática P_2, medida por un transductor de presión diferencial muy sensible. La velocidad del flujo exterior U_2 ¿es mayor que, igual a o menor que la velocidad del flujo exterior U_1? Explique. Estime U_2. *Respuestas:* menor que, 10.0 m/s

10-76 Con sus propias palabras, resuma los cinco pasos del procedimiento de este límite.

10-77 Con sus propias palabras, haga una lista de por lo menos tres "banderas rojas" por observar cuando se realizan cálculos de capa límite laminar.

10-78 Considere la solución de Blasius para una capa límite laminar sobre placa plana. La pendiente adimensional en la pared está dada por la ecuación 8 del ejemplo 10-10. Transforme este resultado en variables físicas y demuestre que la ecuación 9 del ejemplo 10-10 es correcta.

10-79I Para el pequeño túnel de viento del problema 10-73I, suponga que el flujo permanece laminar y estime el espesor, el espesor de desplazamiento y el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite al final de la sección de prueba. Dé sus respuestas en pulgadas, compare los tres resultados y explíquelo.

10-80 Una dimensión de una placa plana rectangular es el doble de la otra. Se tiene aire con velocidad uniforme que fluye paralelo a la placa, y una capa límite laminar se forma en ambos lados de la placa. ¿Cuál orientación —dimensión larga paralela al viento (Fig. P10-80*a*) o dimensión corta paralela al viento (Fig. P10-80*b*)— tiene mayor arrastre? Explíquelo.

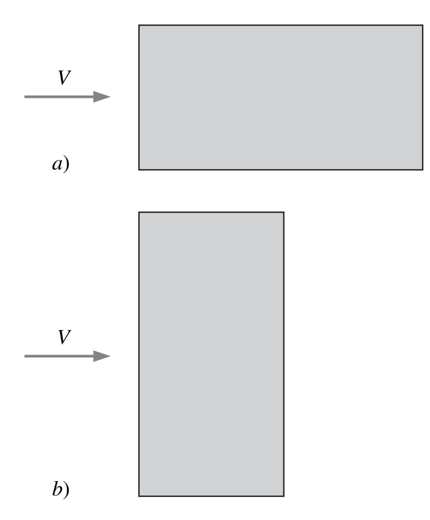


FIGURA P10-80

10-81 En este capítulo se ofrecen dos definiciones de espesor de desplazamiento. Escriba ambas definiciones en sus propias palabras. Para la capa límite laminar creciente sobre una placa plana, ¿cuál es más grande: el espesor de la capa límite δ o el espesor de desplazamiento δ^*? Explíquelo.

10-82 Un túnel de viento de flujo laminar tiene una sección de prueba que mide 40 cm de diámetro y 60 cm de largo. El aire está a 20°C. A velocidad de aire uniforme de 2.0 m/s en la entrada de la sección de prueba, ¿en cuánto acelerará la velocidad del aire de la línea central al final de la sección de prueba? *Respuesta:* Aproximadamente 4 por ciento

10-83 Repita el cálculo del problema 10-82, excepto que ahora la sección de prueba tiene sección transversal cuadrada en vez de redonda, con una sección transversal de 40 cm × 40 cm y una longitud de 60 cm. Compare el resultado con el del problema 10-82 y explíquelo.

10-84 Con la finalidad de evitar interferencia de capa límite, los ingenieros diseñan una "pala de capa **límite**" para pasar rozando la capa límite en un gran túnel de viento (Fig. P10-84). La pala se construye de hoja metálica delgada. El aire está a 20°C y fluye a V = 65.0 m/s. ¿Qué tan alta (dimensión h) debe ser la pala a una distancia corriente abajo x = 1.45 m?

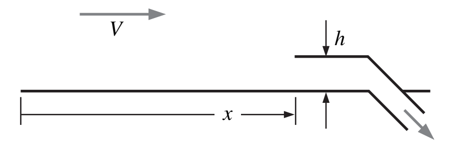


FIGURA P10-84

10-85I Se construye un pequeño túnel de viento axisimétrico de baja velocidad para calibrar anemómetros de hilo calientes. El diámetro de la sección de prueba es de 6.0 in, y su longitud de 10.0 in. El aire está a 70°F. A una velocidad de aire uniforme de 5.0 ft/s en la entrada de la sección de prueba, ¿en cuánto acelerará la velocidad del aire de la línea central al final de la sección de prueba? ¿Qué deben hacer los ingenieros para eliminar esta aceleración?

10-86I Se tiene aire a 70°F que fluye paralelo a una delgada placa plana lisa a 15.5 ft/s. La placa mide 10.6 ft de largo. Determine si la capa límite sobre la placa más probablemente es laminar, turbulenta o algo intermedio (en transición). Compare el espesor de la capa límite al final de la placa para dos casos: *a*) la capa límite es laminar en todas partes y *b*) la capa límite es turbulenta en todas partes. Explíquelo.

10-87 Se tiene aire a 20°C que fluye a V = 5.0 m/s paralelo a una placa plana (Fig. P10-87). El frente de la placa está redondeado, y la placa mide 40 cm de largo. El espesor de la placa es h = 0.75 cm, pero, debido a los efectos de desplazamiento de la capa límite, el flujo afuera de la capa límite "ve" una placa que tiene un espesor aparente más grande. Calcule el espesor aparente de la placa (incluya ambos lados) a una distancia corriente abajo x = 25 cm. *Respuesta:* 3.75 cm

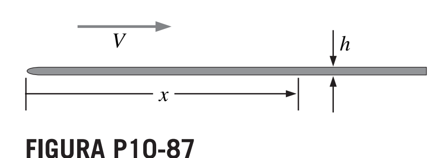


FIGURA P10-87

10-88 Se tiene aire a 20°C que fluye a V = 80.0 m/s sobre una placa plana lisa de longitud L = 17.5 m. Grafique el perfil de capa límite turbulenta en variables físicas (u como función de y) en $x = L$. Compare el perfil generado por la ley de un séptimo de potencia, la ley de logaritmo y la ley de Spalding, si supone que la capa límite es totalmente turbulenta desde el comienzo de la placa.

10-89 Explique la diferencia entre un gradiente de presión *favorable* y uno *adverso* en una capa *límite*. ¿En cuál caso aumenta la presión corriente abajo? ¿Por qué?

10-90 Explique la implicación de un punto de inflexión en un perfil de capa límite. Específicamente, ¿la existencia de un punto de inflexión infiere un gradiente de presión favorable o adverso? Explíquelo.

10-91 Compare separación de flujo para una capa límite laminar con una turbulenta. Específicamente, ¿cuál caso se resiste más a la separación del flujo? ¿Por qué? Con base en su respuesta, explique por qué las pelotas de golf tienen hoyuelos.

10-92 La componente de velocidad en la dirección de flujo estacionario e incompresible con una capa límite laminar de espesor δ sobre placa plana se aproxima mediante la simple expresión lineal $u = Uy/\delta$ para $y < \delta$, y $u = U$ para $y > \delta$ (Fig. P10-92). Genere expresiones para el espesor de desplazamiento y el espesor de cantidad de movimiento como función de δ, con base en esta aproximación lineal. Compare los valores aproximados de δ^*/δ y θ/δ con los valores de δ^*/δ y θ/δ obtenidos a partir de la solución de Blasius. *Respuestas:* 0.500, 0.167

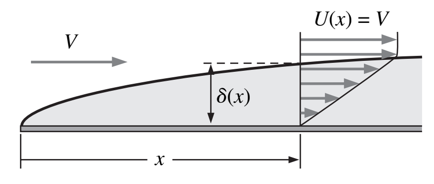


FIGURA P10-92

10-93 Para la aproximación lineal del problema 10-92, use la definición de coeficiente de fricción local y la ecuación integral de Kármán para generar una expresión para δ/x. Compare su resultado con la expresión de Blasius para δ/x. (Nota: necesitará los resultados del problema 10-92 para resolver este problema.)

10-94 El perfil de capa límite de Blasius es una solución exacta de las ecuaciones de capa límite para flujo sobre una placa plana. Sin embargo, es un poco complicado usar los resultados porque los datos aparecen en forma tabular (la solución es numérica). Por lo tanto, con frecuencia se usa una simple aproximación de seno (Fig. P10-94) en vez de la solución de Blasius, es decir, $u(y) \cong U \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)$ para $y < \delta$, y $u = U$ para $y << \delta$, donde d es el espesor de capa límite. Grafique el perfil de Blasius y la aproximación de seno en la misma gráfica, en forma adimensional (u/U contra y/δ) y compare. El perfil de seno ¿es una aproximación razonable?

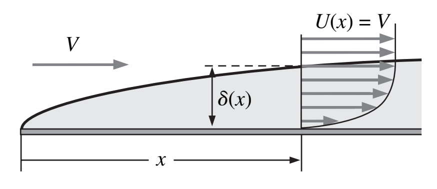


FIGURA P10-94

10-95 La componente de velocidad en la dirección de flujo estacionario e incompresible con una capa límite laminar de espesor δ sobre placa plana se aproxima por medio del perfil de velocidad de seno del problema 10-94. Genere expresiones para el espesor de desplazamiento y espesor de cantidad de movimiento como funciones de δ, con base en esta aproximación de seno. Compare los valores aproximados de δ^*/δ y θ/δ con los valores de δ^*/δ y θ/δ obtenidos a partir de la solución de Blasius.

10-96 Para la aproximación de seno del problema 10-94, use la definición de coeficiente de fricción local y la ecuación integral de Kármán para generar una expresión para δ/x (nota: también necesitará los resultados del problema 10-95 para resolver este problema).

10-97 Compare el *factor de forma H* (definido en la ecuación 10-95) para una capa límite laminar frente a una turbulenta sobre una placa plana, al suponer que la capa límite turbulenta es turbulenta desde el principio de la placa. Explíquelo. Específicamente, ¿por qué supone que a H se le llama "factor de forma"? *Respuestas:* 2.59, 1.25 a 1.30

10-98 Calcule el valor del factor de forma H para el caso límite de una capa límite infinitamente delgada (Fig. P10-98). Este valor de H es el mínimo valor posible.

10-99 Integre la ecuación 5 para obtener la ecuación 6 del ejemplo 10-14, y muestre todo el procedimiento.

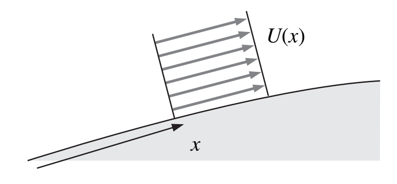


FIGURA P10-98

10-100 Considere una capa límite turbulenta sobre una placa plana. Suponga que sólo se conocen dos aspectos: $C_{f,x} \cong 0.059 \cdot (\mathrm{Re}_x)^{-1/5}$ y $\theta \cong 0.097\delta$. Use la ecuación integral de Kármán para generar una expresión para δ/x y compare su resultado con la columna (b) de la tabla 10-4.

Problemas de repaso

10-101C Para cada afirmación, elija si la afirmación es verdadera o falsa, y explique su respuesta brevemente:

a) La función potencial de velocidad puede definirse para flujos tridimensionales.

b) La vorticidad debe ser cero con la finalidad de definir la función de corriente.

c) La vorticidad debe ser cero con la finalidad de definir la función potencial de velocidad.

d) La función de corriente se puede definir sólo para campos de flujo bidimensionales.

10-102 En este capítulo se comentó la rotación de cuerpo sólido (Fig. P10-102) como un ejemplo de un flujo invíscido que también es rotacional. Las componentes de velocidad son $u_r = 0$, $u_\theta = \omega r$, y $u_z = 0$. Calcule el término viscoso de la componente θ de la ecuación de Navier-Stokes y explíquelo. Verifique que este campo de velocidad, de hecho, es rotacional, al calcular la componente z de vorticidad. *Respuesta:* $\zeta_z = 2\omega$

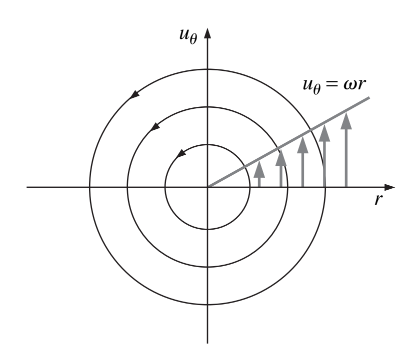


FIGURA P10-102

10-103 Calcule las nueve componentes del tensor de esfuerzo viscoso en coordenadas cilíndricas (vea el capítulo 9) para el campo de velocidad del problema 10-102. Explíquelo.

10-104 En este capítulo se trata el vórtice lineal (Fig. P10-104) como un ejemplo de un campo de flujo irrotacional. Las componentes de velocidad son $u_r = 0$, $u_\theta = \Gamma/(2\pi r)$, y $u_z = 0$. Calcule el término viscoso de la componente θ de la ecuación de Navier-Stokes y explíquelo. Verifique que este campo de velocidad de hecho es irrotacional al calcular la componente z de vorticidad.

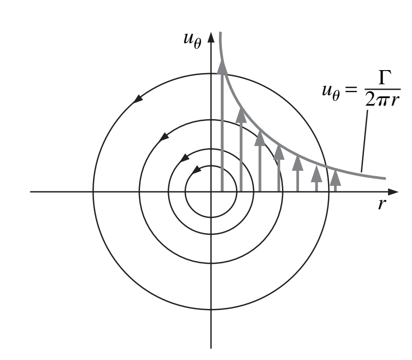


FIGURA P10-104

10-105 Calcule las nueve componentes del tensor de esfuerzo viscoso en coordenadas cilíndricas (vea el capítulo 9) para el campo de velocidad del problema 10-104. Explíquelo.

10-106 Cae agua por una tubería vertical *sólo mediante gravedad*. El flujo entre las posiciones verticales z_1 y z_2 está totalmente desarrollado, y en la figura P10-106 se bosquejan los perfiles de velocidad en estas dos posiciones. Puesto que no hay gradiente de presión forzada, la presión P es constante en todas partes del flujo ($P = P_{atm}$). Calcule la *presión modificada* en las posiciones z_1 y z_2. Bosqueje los perfiles de presión modificada en las posiciones z_1 y z_2. Explíquelo.

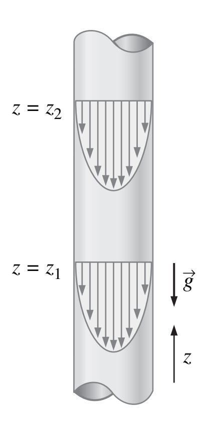


FIGURA P10-106

10-107 Suponga que la tubería vertical del problema 10-106 ahora es *horizontal*. Con la finalidad de lograr la misma razón de flujo volumétrico que la del problema 10-106, debe suministrar un gradiente de presión forzada. Calcule la caída de presión necesaria entre dos posiciones axiales en la tubería que tengan la misma distancia de separación que z_2 y z_1 de la figura P10-106. ¿Cómo cambia la presión modificada P' entre los casos vertical y horizontal?

Problema de diseño y ensayo

10-108 Explique por qué existe un exceso de velocidad significativo para los valores de rango medio del número de Reynolds en los perfiles de velocidad de la Fig. 10-136, pero no para los valores muy pequeños de Re o para los valores muy grandes de Re.

CAPÍTULO

11

FLUJO SOBRE CUERPOS: ARRASTRE Y SUSTENTACIÓN

En el capítulo 8 se consideró el flujo de fluidos adentro de tuberías, en donde se destaca la caída de presión y las pérdidas de carga y sus relaciones con la razón de flujo. En este capítulo se considera el flujo de fluidos sobre cuerpos sumergidos en un fluido, llamado *flujo externo*, y se enfatizan las fuerzas resultantes de sustentación y de arrastre. El flujo externo se caracteriza por una capa límite libremente creciente rodeada por una región de flujo exterior que incluye pequeños gradientes de velocidad y de temperatura.

En los flujos internos, todo el campo de flujo está dominado por efectos viscosos, mientras que, en el flujo externo, los efectos viscosos están confinados a una porción del campo de flujo como son las capas límite y las estelas.

Cuando un fluido se desplaza sobre un cuerpo sólido, ejerce fuerzas de presión normales a la superficie y fuerzas de corte paralelas a la superficie a lo largo de la superficie exterior del cuerpo. Usualmente existe interés en la *resultante* de las fuerzas de presión y de corte que actúan sobre el cuerpo en lugar de los detalles de las distribuciones de estas fuerzas en toda la superficie del cuerpo. La componente de la fuerza de presión y de corte resultante que actúa en la dirección del flujo se llama *fuerza de arrastre* (o sólo *arrastre*), y la componente que actúa normal a la dirección del flujo se llama *fuerza de sustentación* (o sólo *sustentación*).

El capítulo comienza con un estudio del arrastre y la sustentación, y explora los conceptos de arrastre debido a presión, arrastre fricción y separación de flujo. Continúa con los coeficientes de arrastre de varias geometrías bidimensionales y tridimensionales que surgen en la práctica y determina la fuerza de arrastre mediante coeficientes de arrastre determinados experimentalmente. Luego se examina el desarrollo de la capa límite de velocidad en flujo paralelo a una superficie plana, y desarrolla relaciones para el coeficiente de fricción local y el de arrastre para flujo sobre placas planas, cilindros y esferas. Para finalizar, se comenta la sustentación desarrollada por superficies de sustentación y los factores que afectan las características de sustentación de los cuerpos.

OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Tener una comprensión intuitiva de fenómenos físicos como: arrastre, arrastre debido a fricción y a presión, reducción de arrastre y sustentación.
- Calcular la fuerza de arrastre asociada con el flujo sobre geometrías comunes.
- Entender los efectos del patrón de flujo sobre los coeficientes de arrastre relacionados con el flujo sobre cilindros y esferas.
- Entender los fundamentos del flujo sobre superficies de sustentación y calcular las fuerzas de arrastre y de sustentación que actúan sobre las superficies de sustentación.



FIGURA 11-1
En la práctica es común encontrar flujo sobre cuerpos.

11-1 ▪ INTRODUCCIÓN

En la práctica, con frecuencia, ocurre flujo de fluidos sobre cuerpos sólidos y éste causa numerosos fenómenos físicos como la *fuerza de arrastre* que actúa sobre automóviles, líneas de transmisión eléctrica, árboles y ductos submarinos; la *sustentación* desarrollada por las alas de aviones; la *corriente de aire ascendente* de la lluvia, nieve, granizo y partículas de polvo en los vientos fuertes; el transporte de eritrocitos por el flujo sanguíneo; el efecto de arrastre y suministro de gotas de líquido mediante aerosoles; la vibración y el ruido generados por los cuerpos que se mueven en un fluido; y la potencia originada por las turbinas de viento (Fig. 11-1). En consecuencia, el desarrollo de una adecuada comprensión de flujo externo es importante en el diseño de numerosos sistemas de ingeniería como aeronaves, automóviles, edificios, barcos, submarinos y todo tipo de turbinas. Por ejemplo, los automóviles último modelo se han diseñado con énfasis en la aerodinámica. Esto ha resultado en reducciones considerables en el consumo de combustible y el ruido, y notable mejoría en el manejo.

En ocasiones un fluido se mueve sobre un cuerpo estacionario (como el viento que sopla sobre un edificio) y otras veces un cuerpo se mueve a través de un fluido quieto (como un automóvil que se desplaza a través del aire). Estos procesos al parecer diferentes son mutuamente equivalentes; lo que importa es el movimiento relativo entre el fluido y el cuerpo. Estos movimientos se analizan de manera conveniente cuando se fija el sistema coordenado sobre el cuerpo; se les conoce como **flujo sobre cuerpos** o **flujo externo**. Los aspectos aerodinámicos de los diferentes diseños de alas de aviones, por ejemplo, se estudian en un laboratorio cuando se colocan las alas en un túnel de viento y se sopla aire sobre ellas por medio de grandes ventiladores. Además, un flujo se puede clasificar como estacionario o no-estacionario, dependiendo del marco de referencia elegido. Por ejemplo, el flujo alrededor de un avión siempre es no-estacionario respecto al suelo, pero es estacionario respecto a un marco de referencia que se mueve con el avión en condiciones de crucero.

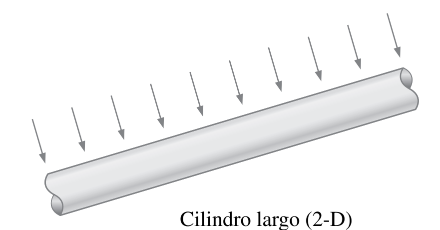
Los campos de flujo y las geometrías para la mayoría de los problemas de flujo externo son demasiado complicados como para resolverse de manera analítica, y en consecuencia se tienen que apoyar en correlaciones basadas en datos experimentales. La disponibilidad de las computadoras de alta velocidad hizo posible realizar rápidamente "experimentos numéricos" cuando se resuelven numéricamente las ecuaciones gobernantes (Cap. 15) y a recurrir a las costosas, tardadas pruebas y experimentaciones sólo en etapas finales del diseño. Estas pruebas se realizan en túneles de viento. H. F. Phillips (1845-1912) construyó el primer túnel de viento en 1894 y midió sustentación y arrastre. Este capítulo se apoya principalmente en relaciones desarrolladas de manera experimental.

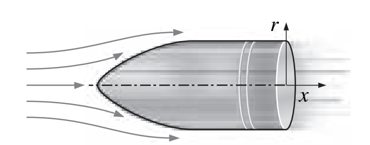
La velocidad del fluido que se aproxima a un cuerpo se llama **velocidad de flujo libre** y se denota con V. También se denota con u_∞. o U_∞ cuando el flujo está alineado con el eje x, ya que u se usa para denotar la componente x de velocidad. La velocidad de fluido varía de cero en la superficie (la condición de no-deslizamiento) hasta el valor de flujo libre lejos de la superficie, y el subíndice "infinito" sirve como recordatorio de que éste es el valor a una distancia donde la presencia del cuerpo no se siente. La velocidad de flujo libre puede variar con la posición y el tiempo (por ejemplo, el viento que sopla sobre un edificio). Pero, por conveniencia, en el diseño y análisis, la velocidad de flujo libre usualmente se supone *uniforme* y *estacionaria*, y esto es lo que se hará en este capítulo.

La forma de un cuerpo influye en el flujo en el cuerpo y el campo de velocidad. Se dice que el flujo sobre un cuerpo es **bidimensional** cuando el cuerpo es muy largo y de sección transversal constante y el flujo es normal al cuerpo. El

viento que sopla sobre una larga tubería perpendicular a su eje es un ejemplo de flujo bidimensional. Note que la componente de velocidad en la dirección axial es cero en este caso, y por lo tanto la velocidad es bidimensional.

La idealización bidimensional es adecuada cuando el cuerpo es suficientemente largo de modo que los efectos laterales son despreciables y el flujo que se aproxima es uniforme. Otra simplificación ocurre cuando el cuerpo tiene simetría rotacional en torno a un eje en la dirección del flujo. En este caso, el flujo también es bidimensional y se dice que es **axisimétrico**. Una bala que perfora el aire es un ejemplo de flujo axisimétrico. En este caso, la velocidad varía con la distancia axial x y la distancia radial r. El flujo sobre un cuerpo que no se puede modelar como bidimensional o axisimétrico, como el flujo sobre un automóvil, es **tridimensional** (Fig. 11-2).


Cilindro largo (2-D)



Bala (axisimétrico)

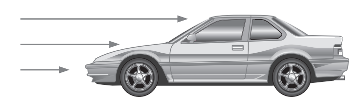

Automóvil (3-D)

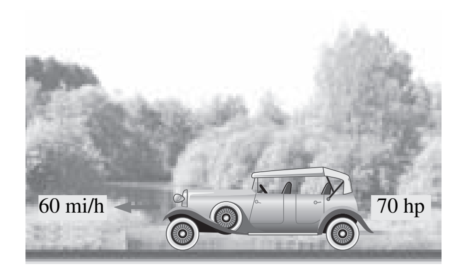
FIGURA 11-2
Flujos bidimensional, axisimétrico y tridimensional.

El flujo sobre los cuerpos también puede clasificarse como **flujo incompresible** (por ejemplo, los flujos sobre automóviles, submarinos y edificios) y **flujo compresible** (por ejemplo, los flujos sobre las aeronaves de gran rapidez, cohetes y misiles). Los efectos de compresibilidad son despreciables a bajas velocidades (flujos con Ma $\lesssim$ 0.3), y estos flujos se pueden tratar como incompresibles. El flujo compresible tratado en el capítulo 12, y los flujos que incluyen cuerpos parcialmente sumergidos con una superficie libre (como un barco que navega en agua) están más allá del ámbito de este texto introductorio.

Los cuerpos sometidos a flujo de fluidos se clasifican como currentilíneos o romos, esto depende de su forma global. Se dice que un cuerpo es **currentilíneo** si se hace un esfuerzo conciso por alinear su forma con las líneas de corriente anticipadas en el flujo. Los cuerpos currentilíneos, como los autos de carreras y los aviones, parecen perfilados y lisos. De otro modo un cuerpo (como un edificio) tiende a bloquear el flujo y se dice que es **romo**. Usualmente es más fácil forzar un cuerpo currentilíneo a través de un fluido, y por lo tanto la aerodinámica ha sido de gran importancia para diseñar vehículos y aeronaves (Fig. 11-3).

11-2 ▪ ARRASTRE Y SUSTENTACIÓN

Una experiencia común es que un cuerpo encuentra cierta resistencia cuando se fuerza a moverse a través de un fluido, especialmente un líquido. Es posible que el lector haya notado que es muy difícil caminar en agua debido a la mayor resistencia que ofrece al movimiento en comparación con el aire. Además, es probable que también haya visto vientos fuertes derribar árboles, líneas de alta tensión e inclusive voltear remolques y haya sentido el intenso “empuje” que el viento ejerce sobre su cuerpo (Fig. 11-4). La misma sensación se experimenta cuando se extiende el brazo por afuera de la ventanilla de un automóvil en movimiento. Un fluido puede ejercer fuerzas y momentos sobre un cuerpo en y alrededor de varias direcciones. La fuerza que un fluido que fluye ejerce sobre un cuerpo en la dirección del flujo se llama **arrastre**. La fuerza de arrastre se puede medir de manera directa simplemente con unir el cuerpo sumergido a un flujo de fluido a un resorte calibrado y medir el desplazamiento en la dirección del flujo (tal como medir el peso con una báscula de resorte). Los dispositivos más modernos para medir arrastre, llamados balanzas de arrastre, usan vigas flexibles fijas con extensómetros para medir el arrastre electrónicamente.



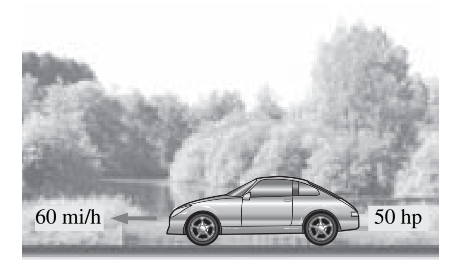
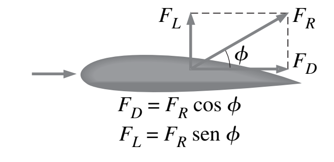


FIGURA 11-3
Es más fácil forzar a través de un fluido un cuerpo currentilíneo que un cuerpo romo.

Usualmente, el arrastre es un efecto indeseable, como la fricción, y siempre se hace el mejor esfuerzo por eliminarlo. La reducción del arrastre está relacionada de manera cercana con la reducción del consumo de combustible en automóviles, submarinos y aeronaves; la seguridad mejorada y la durabilidad de las estructuras expuestas a vientos fuertes; y la reducción del ruido y vibración. Pero en algunos casos el arrastre produce un efecto muy benéfico y se intenta maximizarlo. La fricción, por ejemplo, es un “salvavidas” en los frenos de automóvi-



FIGURA 11-4
Los vientos fuertes derriban árboles, líneas de transmisión de energía eléctrica e inclusive personas como resultado de la fuerza de arrastre.



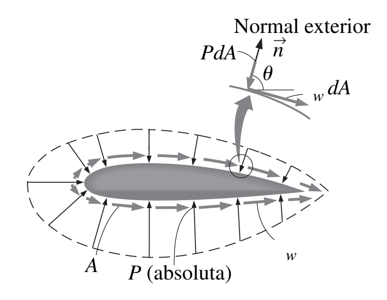


FIGURA 11-5
La presión y las fuerzas viscosas que actúan sobre un cuerpo bidimensional y las resultantes fuerzas de sustentación y arrastre.

les. Del mismo modo, el arrastre es el que hace posible que la gente caiga en paracaídas, que el polen vuele a lugares distantes, y que las personas disfruten las olas del océano y los movimientos relajantes de las hojas de los árboles.

Un fluido en reposo ejerce sólo fuerza de presión normal sobre la superficie de un cuerpo sumergido en él. Sin embargo, un fluido en movimiento también ejerce fuerzas de corte tangenciales sobre la superficie debido a la condición de no-deslizamiento provocada por efectos viscosos. En general, ambas fuerzas tienen componentes en la dirección del flujo, y por lo tanto la fuerza de arrastre se debe a los efectos combinados de la presión y las fuerzas de corte en la dirección del flujo. Las componentes de la presión y las fuerzas de corte en la dirección *normal* al flujo tienden a mover el cuerpo en dicha dirección; su suma se llama **sustentación**.

Para flujos bidimensionales, la resultante de la presión y las fuerzas de corte pueden separarse en dos componentes: una en la dirección del flujo, que es la fuerza de arrastre, y otra en la dirección normal al flujo, que es la sustentación, como se muestra en la figura 11-5. Para flujos tridimensionales, también existe una componente de fuerza lateral en la dirección normal a la página que tiende a mover al cuerpo en dicha dirección.

Las fuerzas de fluido también pueden generar momentos y hacer que el cuerpo rote. El momento alrededor de la dirección del flujo se llama *momento de balanceo*, el momento alrededor de la dirección de sustentación se llama *momento de guiñada*, y el momento alrededor de la dirección de fuerza lateral se llama *momento de cabeceo*. Para cuerpos que tienen simetría en torno al plano sustentación-arrastre como los automóviles, aviones y barcos, la fuerza lateral, el momento de guiñada y el de balanceo son cero cuando el viento y las fuerzas de olas están alineadas con el cuerpo. Lo que permanece para estos cuerpos son las fuerzas de arrastre y sustentación y el momento de cabeceo. Para cuerpos axisimétricos alineados con el flujo, como las balas, la única fuerza ejercida por el fluido sobre el cuerpo es la de arrastre.

La presión y las fuerzas de corte que actúan sobre un área diferencial dA sobre la superficie son PdA y $\tau_w\, dA$, respectivamente. Las fuerzas de arrastre diferencial y de sustentación que actúan sobre dA en flujo bidimensional son (Fig. 11-5):

$$dF_D = -P\, dA \cos\theta + \tau_w\, dA \operatorname{sen}\theta \tag{11–1}$$

y

$$dF_L = -P\, dA \operatorname{sen}\theta - \tau_w\, dA \cos\theta \tag{11–2}$$

donde θ es el ángulo que la normal exterior de dA forma con la dirección de flujo positivo. Las fuerzas totales de arrastre y sustentación que actúan sobre el cuerpo se determinan cuando se integran las ecuaciones 11-1 y 11-2 sobre toda la superficie del cuerpo:

$$\textit{Fuerza de arrastre:}\quad F_D = \int_A dF_D = \int_A (-P\cos\theta + \tau_w \operatorname{sen}\theta)\, dA \tag{11–3}$$

y

$$\textit{Fuerza de sustentación:}\quad F_L = \int_A dF_L = -\int_A (P\operatorname{sen}\theta + \tau_w \cos\theta)\, dA \tag{11–4}$$

Éstas son las ecuaciones que se usan para predecir las fuerzas de arrastre y sustentación netas sobre los cuerpos cuando el flujo se simula en computadora (Cap. 15). Sin embargo, cuando se realizan análisis experimentales, la ecuación 11-3 y la 11-4 no son prácticas ya que las distribuciones detalladas de presión y fuerzas de corte son difíciles de obtener mediante mediciones. Afortunadamente, con frecuencia esta información no es necesaria. Por lo general, todo lo que se

necesita conocer es la fuerza de arrastre resultante y la sustentación que actúa sobre todo el cuerpo, lo que se puede medir directa y fácilmente en un túnel de viento.

Las ecuaciones 11-1 y 11-2 muestran que la fricción (fuerzas de corte en la superficie) y la presión, en general, contribuyen al arrastre y a la sustentación. En el caso especial de una *placa plana* delgada alineada paralela a la dirección del flujo, la fuerza de arrastre depende sólo de la fricción y es independiente de la presión pues $\theta = 90°$. Sin embargo, cuando la placa plana se coloca normal a la dirección del flujo, la fuerza de arrastre depende sólo de la presión y es independiente de la fricción, porque en este caso el esfuerzo de corte actúa en la dirección normal al flujo y $\theta = 0°$ (Fig. 11-6). Si la placa plana se inclina un ángulo relativo a la dirección del flujo, entonces la fuerza de arrastre depende tanto de la presión como del esfuerzo de corte.

A las alas de los aviones se les da una forma y se posicionan de manera específica para generar sustentación con arrastre mínimo. Esto se hace cuando se mantiene un ángulo de ataque durante el crucero, como se muestra en la figura 11-7. Tanto la sustentación como el arrastre son fuertes funciones del ángulo de ataque, como se comenta más adelante en este capítulo. La diferencia de presión entre las superficies superior e inferior del ala genera una fuerza ascendente que tiende a sustentar el ala y por lo tanto al avión al cual está conectada. Para cuerpos esbeltos como las alas, la fuerza de corte actúa casi paralela a la dirección del flujo, y por lo tanto su aportación a la sustentación es pequeña. La fuerza de arrastre para estos cuerpos esbeltos se debe principalmente a las fuerzas de corte (la fricción en la superficie).

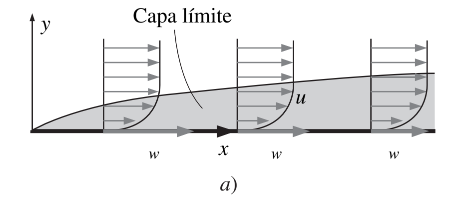
Las fuerzas de arrastre y sustentación dependen de la densidad ρ del fluido, la velocidad corriente arriba V y el tamaño, forma y orientación del cuerpo, entre otras cosas, y no es práctico hacer una lista de estas fuerzas para una diversidad de situaciones. En vez de ello, es conveniente trabajar con parámetros adimensionales adecuados que representen las características de arrastre y sustentación del cuerpo. Estos parámetros son el **coeficiente de arrastre** C_D y el **coeficiente de sustentación** C_L; se definen como:

Coeficiente de arrastre:
$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \qquad \textbf{(11–5)}$$

Coeficiente de sustentación:
$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \qquad \textbf{(11–6)}$$

donde A por lo general es el **área frontal** del cuerpo (el área que se proyecta sobre un plano normal a la dirección del flujo). En otras palabras, A es el área que una persona vería si observara al cuerpo desde la dirección del fluido que se aproxima. El área frontal de un cilindro de diámetro D y longitud L, por ejemplo, es $A = LD$. En cálculos de sustentación de algunos cuerpos delgados, como la superficies de sustentación, A se toma como el **área de planta**, que es el área que una persona observa del cuerpo desde arriba en una dirección normal al cuerpo. Los coeficientes de arrastre y sustentación principalmente son funciones de la forma del cuerpo, pero en algunos casos también dependen del número de Reynolds y la rugosidad de la superficie. El término $\frac{1}{2}\rho V^2$ de las ecuaciones 11-5 y 11-6 es la **presión dinámica**.

Los coeficientes de arrastre y sustentación locales varían a lo largo de la superficie como resultado de los cambios en la velocidad de la capa límite en la dirección del flujo. Existe interés en las fuerzas de arrastre y sustentación para *toda* la superficie que pueden determinarse con los coeficientes *promedio* de arrastre y sustentación. En consecuencia, se presentan correlaciones tanto para coeficientes de arrastre y sustentación locales (que se identifican con el subíndice x) como promedio. Cuando están disponibles las relaciones para coe-



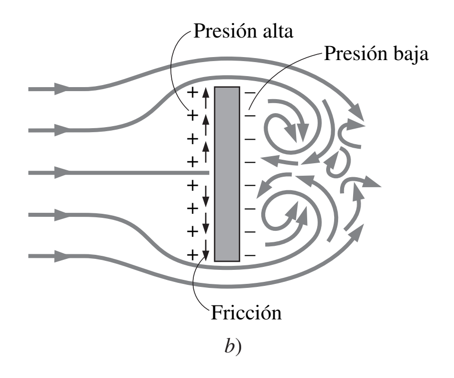


FIGURA 11-6
a) La fuerza de arrastre que actúa sobre una placa plana paralela al flujo depende sólo de la fricción. *b*) La fuerza de arrastre que actúa sobre una placa plana normal al flujo depende sólo de la presión y es independiente de la fricción, que actúa normal al flujo libre.

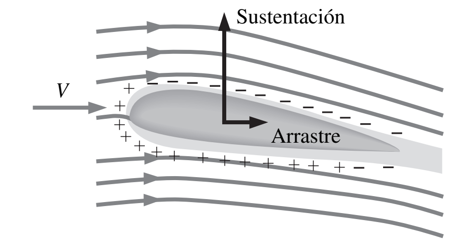
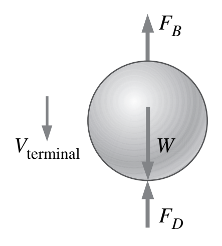


FIGURA 11-7
A las alas de los aviones se les da la forma y posición para generar suficiente sustentación durante el vuelo mientras mantienen el arrastre en un mínimo. Las presiones sobre y bajo la presión atmosférica se indican con signos más y menos, respectivamente.



$F_D = W - F_B$
(No hay aceleración)

FIGURA 11-8
Durante una caída libre, un cuerpo alcanza su *velocidad terminal* cuando la fuerza de arrastre es igual al peso del cuerpo menos la fuerza de flotación.

ficientes de arrastre y sustentación locales para una superficie de longitud L, los coeficientes *promedio* de arrastre y sustentación para toda la superficie pueden determinarse mediante integración a partir de:

$$C_D = \frac{1}{L}\int_0^L C_{D,x}\,dx \tag{11-7}$$

y

$$C_L = \frac{1}{L}\int_0^L C_{L,x}\,dx \tag{11-8}$$

Cuando un cuerpo se suelta en la atmósfera o en un lago, primero acelera bajo la influencia de su peso. La fuerza de arrastre resiste el movimiento del cuerpo, que actúa en la dirección opuesta al movimiento. Conforme aumenta la velocidad del cuerpo, lo mismo hace la fuerza de arrastre. Esto continúa hasta que todas las fuerzas se equilibran unas a otras y la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo (y por lo tanto su aceleración) es cero. Entonces, la velocidad del cuerpo permanece constante durante el resto de su caída si las propiedades del fluido, en la trayectoria del cuerpo, permanecen esencialmente constantes. Ésta es la velocidad máxima que un cuerpo que cae puede alcanzar; se llama **velocidad terminal** (Fig. 11-8). Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que cae son fuerza de arrastre, fuerza de flotación y el peso del cuerpo.

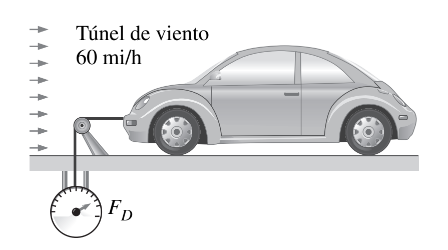


FIGURA 11-9
Esquema para el ejemplo 11-1.

EJEMPLO 11-1 Medición del coeficiente de arrastre de un automóvil

Debe determinarse experimentalmente el coeficiente de arrastre de un automóvil en las condiciones de diseño de 1 atm, 70°F y 60 mi/h, en un gran túnel de viento en una prueba a escala completa (Fig. 11-9). El área frontal del automóvil es de 22.26 ft^2. Si la fuerza que actúa sobre el automóvil en la dirección del flujo se mide en 68 lbf, determine el coeficiente de arrastre de este automóvil.

SOLUCIÓN En un túnel de viento se mide la fuerza de arrastre que actúa sobre un automóvil. Debe determinarse el coeficiente de arrastre del automóvil en condiciones de prueba.

Hipótesis **1** El flujo de aire es estacionario e incompresible. **2** La sección transversal del túnel es lo suficientemente grande como para simular flujo libre sobre el automóvil. **3** El fondo del túnel también se mueve con la velocidad del aire para aproximar condiciones de manejo reales o este efecto es despreciable.

Propiedades La densidad del aire a 1 atm y 70°F es $\rho = 0.07489$ lbm/ft^3.

Análisis La fuerza de arrastre que actúa sobre un cuerpo y el coeficiente de arrastre están dados por:

$$F_D = C_D A \frac{\rho V^2}{2} \qquad \text{y} \qquad C_D = \frac{2F_D}{\rho A V^2}$$

donde A es el área frontal. Al sustituir y notar que 1 mi/h = 1.467 ft/s, se determina que el coeficiente de arrastre del automóvil es:

$$C_D = \frac{2 \times (68 \text{ lbf})}{(0.07489 \text{ lbm/ft}^3)(22.26 \text{ ft}^2)(60 \times 1.467 \text{ ft/s})^2}\left(\frac{32.2 \text{ lbm}\cdot\text{ft/s}^2}{1 \text{ lbf}}\right) = \mathbf{0.34}$$

Discusión Note que el coeficiente de arrastre depende de las condiciones del diseño y su valor puede ser distinto en diferentes condiciones, como el número de Reynolds. Por lo tanto, los coeficientes de arrastre publicados para diversos vehículos pueden compararse significativamente sólo si están determinados en condiciones similares. Esto demuestra la importancia de desarrollar procedimientos de prueba estándar en la industria.

11-3 ▪ ARRASTRE DEBIDO A FRICCIÓN Y A PRESIÓN

Como se mencionó en la Sección 11-2, la fuerza de arrastre es la fuerza neta ejercida por un fluido sobre un cuerpo en la dirección de flujo debida a los efectos combinados de fuerzas de fricción y fuerzas de presión. Con frecuencia es conveniente estudiar cada uno por separado

La parte del arrastre que se debe directamente al esfuerzo de corte de pared τ_w se llama **arrastre de fricción en la superficie** (o *arrastre debido a fricción* $F_{D,\text{fricción}}$), porque lo provocan los efectos de fricción. La parte que se debe directamente a la presión P se llama **arrastre debido a presión** (también llamada *arrastre de forma* porque tiene una enorme dependencia de la forma del cuerpo). Los coeficientes de arrastre debido a fricción y arrastre debido a presión se definen como:

$$C_{D,\text{ fricción}} = \frac{F_{D,\text{ fricción}}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \quad \text{y} \quad C_{D,\text{ presión}} = \frac{F_{D,\text{ presión}}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{11–9}$$

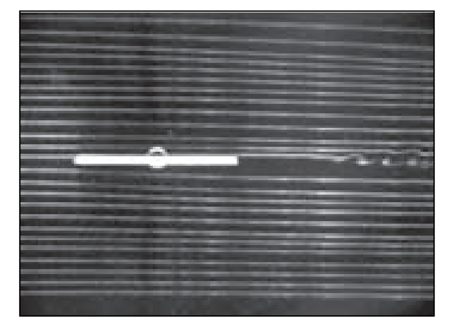
Cuando están disponibles los coeficientes o fuerzas de arrastre debido a fricción y debido a presión, el coeficiente de arrastre total o la fuerza de arrastre pueden determinarse con simplemente sumarlos:

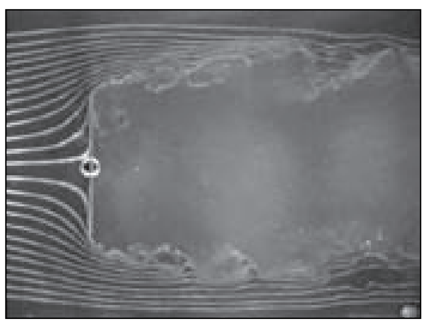
$$C_D = C_{D,\text{ fricción}} + C_{D,\text{ presión}} \quad \text{y} \quad F_D = F_{D,\text{ fricción}} + F_{D,\text{ presión}} \tag{11–10}$$

El *arrastre debido a fricción* es la componente de la fuerza de fricción en la dirección del flujo, y por lo tanto depende de la orientación del cuerpo así como de la magnitud del esfuerzo de corte τ_w. El arrastre debido a fricción es *cero* para una superficie plana normal al flujo, y *máximo* para una superficie plana paralela al flujo, ya que el arrastre debido a fricción en este caso es igual a la fuerza de fricción total sobre la superficie. En consecuencia, para flujo paralelo sobre una superficie plana, el coeficiente de arrastre es igual al *coeficiente de arrastre debido a fricción*, o simplemente al *coeficiente de fricción*. El arrastre debido a fricción es una fuerte función de la viscosidad, y aumenta con viscosidad creciente.

El número de Reynolds es inversamente proporcional a la viscosidad del fluido. En consecuencia, la contribución del arrastre debido a fricción al arrastre total para cuerpos romos es menor a números de Reynolds altos y puede ser despreciable a números de Reynolds mayores. El arrastre en estos casos principalmente se debe a arrastre debido a presión. En especial, éste es el caso para cuerpos enormemente currentilíneos, como las superficies de sustentación. El arrastre debido a fricción también es proporcional al área superficial. Por lo tanto, los cuerpos con área superficial muy grande experimentan un arrastre debido a fricción mayor. Los enormes aviones comerciales, por ejemplo, para ahorrar combustible, reducen su área superficial total, y por lo tanto su arrastre, al retraer las extensiones de sus alas cuando alcanzan altitudes de crucero. El coeficiente de arrastre debido a fricción es independiente de la *rugosidad de la superficie* en flujo laminar, pero es una fuerte función de la rugosidad de la superficie en flujo turbulento, debido a los elementos de rugosidad superficiales que sobresalen de la capa límite. El *coeficiente de arrastre debido a fricción* es análogo al *factor de fricción* en el flujo en tuberías tratado en el capítulo 8, y su valor depende del patrón de flujo.

El arrastre debido a presión es proporcional al área frontal y a la *diferencia* entre las presiones que actúan sobre la parte frontal y posterior del cuerpo sumergido. En consecuencia, el arrastre debido a presión usualmente domina para cuerpos romos, es pequeño para cuerpos currentilíneos como las superficies de sustentación y es cero para delgadas placas planas paralelas al flujo (Fig. 11-10). El arrastre debido a presión se vuelve más significativo cuando la velocidad del fluido es muy alta para que el fluido sea capaz de seguir la cur-





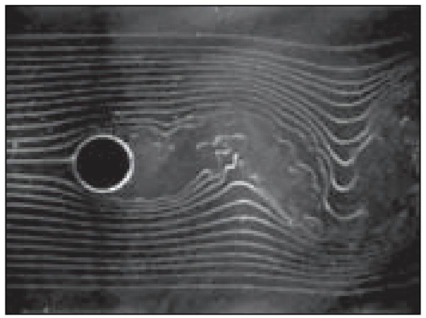


FIGURA 11-10
El arrastre se debe completamente a *arrastre debido a fricción* para una placa plana paralela al flujo; el arrastre se debe por completo a arrastre debido a presión para una placa plana normal al flujo; y el arrastre se debe a *ambos* (pero principalmente a *arrastre debido a presión*) para un cilindro normal al flujo. El coeficiente de arrastre total C_D es más bajo para una placa plana paralela, más alto para una placa plana vertical, e intermedio (pero más cercano al de la placa plana vertical) para un cilindro.
Tomado de G. M. Homsy, et al. (2000).

vatura del cuerpo, y por lo tanto, el fluido *se separa* del cuerpo en algún punto y crea una región de presión muy baja en la parte trasera. El arrastre debido a presión en este caso se debe a la gran diferencia de presión entre los lados frontal y posterior del cuerpo.

Reducción del arrastre mediante cambio de forma del cuerpo para una más currentilínea

La primer idea que viene a la mente para reducir el arrastre es hacer un cuerpo más currentilíneo con la finalidad de disminuir la separación del flujo, y por lo tanto, disminuir el arrastre debido a presión. Inclusive, los vendedores de automóviles puntualizan con rapidez los bajos coeficientes de arrastre de sus vehículos gracias a su forma aerodinámica. Pero, este proceso de cambio de forma del cuerpo tiene efectos contrarios sobre los arrastres debido a presión y a fricción. Disminuye el arrastre debido a presión cuando demora la separación de la capa límite, y por lo tanto, cuando reduce la diferencia de presión entre el frente del cuerpo y la parte posterior y aumenta el arrastre debido a fricción cuando aumenta el área superficial. El resultado final depende de cuál efecto domine. En consecuencia, cualquier estudio de optimización para reducir el arrastre de un cuerpo debe considerar ambos efectos e intentar minimizar la *suma* de los dos, como se muestra en la figura 11-11. El arrastre total mínimo ocurre en $D/L = 0.25$ para la figura 11-11. Para el caso de un cilindro circular con el mismo espesor que el cuerpo currentilíneo de la figura 11-11, el coeficiente de arrastre debe ser alrededor de cinco veces más grande. En consecuencia, es posible reducir el arrastre de un componente cilíndrico a un quinto con el uso de cubierta adecuada.

El efecto de la forma del cuerpo sobre el coeficiente de arrastre puede describirse mejor cuando se consideran cilindros elípticos largos con diferentes relaciones de su dimensión en la dirección del flujo con respecto a su grosor L/D, donde L es la longitud en la dirección del flujo y D es el grosor, como se muestra en la figura 11-12. Note que el coeficiente de arrastre disminuye drásticamente conforme la elipse se adelgaza más. Para el caso especial de $L/D = 1$ (un cilindro circular), el coeficiente de arrastre es $C_D \cong 1$ a este número de Reynolds. Conforme la razón L/D disminuye y el cilindro parece más una placa plana, el coeficiente de arrastre aumenta a 1.9, el valor para una placa plana normal. Note que la curva se vuelve casi plana paralela al flujo para los valores de L/D mayores que aproximadamente 4. En consecuencia, para un diámetro dado D, las formas elípticas con un valor de L/D de más o menos $L/D \cong 4$ por lo general ofrecen un buen ajuste entre el coeficiente de arrastre total y la longitud L.

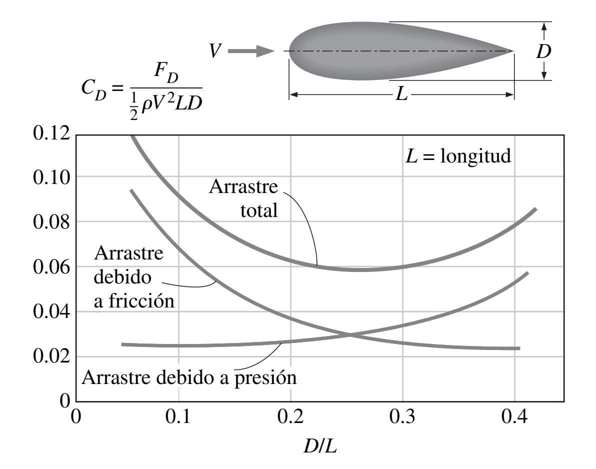


FIGURA 11-11
Variación del coeficiente de arrastre debido a presión, del coeficiente de arrastre debido a fricción y del coeficiente de arrastre total de un cuerpo currentilíneo con variación de razón de su grosor entre su longitud en dirección de flujo para $\mathrm{Re} = 4 \times 10^4$. Note que C_D para superficies de sustentación y otros cuerpos delgados se basa en el área de *planta* en lugar del área frontal.


Tomado de Abbott y von Doenhoff (1959).

La reducción en el coeficiente de arrastre a grandes valores de L/D se debe principalmente a la capa límite que permanece unida a la superficie más tiempo y a la resultante recuperación de presión. El arrastre debido a fricción sobre un cilindro elíptico con un valor de L/D de 4 es despreciable (menor que 2 por ciento del arrastre total a este número de Reynolds).

Conforme el valor de L/D de un cilindro elíptico aumenta al aplanar el cuerpo (es decir, se disminuye D mientras se mantiene L como constante), el coeficiente de arrastre comienza a aumentar y tiende a infinito conforme $L/D \to \infty$ (es decir, conforme la elipse parece una placa plana paralela al flujo). Esto se debe al área frontal, que aparece en el denominador en la definición de C_D, y tiende a cero. Sin embargo, no significa que la fuerza de arrastre aumenta drásticamente (en realidad, la fuerza de arrastre disminuye) conforme el cuerpo se vuelve plano. Así se demuestra que el área frontal es inapropiada para usarse en las relaciones de fuerza de arrastre para cuerpos esbeltos, como las superficies de sustentación delgadas y las placas planas. En estos casos, el coeficiente de arrastre se define sobre la base del *área de planta*, que simplemente es el área superficial para una placa plana paralela al flujo. Esto es bastante adecuado porque, para cuerpos esbeltos, el arrastre se debe casi por completo al arrastre debido a fricción, que es proporcional al área superficial.

El cambio de la forma del cuerpo para una más currentilínea tiene el beneficio agregado de *reducir la vibración y el ruido*. Esto debe considerarse sólo para cuerpos romos que están expuestos a flujo de fluidos de alta velocidad (y por lo tanto a números de Reynolds altos), para los que la separación de flujo es una posibilidad real. No es necesario para cuerpos que físicamente incluyen flujos con números de Reynolds bajos (por ejemplo, flujo de Stokes en el que $Re < 1$), como se comentó en el capítulo 10, porque el arrastre en estos casos casi se debe por completo al arrastre debido a fricción, y el cambio de la forma del cuerpo para una más currentilínea sólo aumentará el área superficial y por lo tanto el arrastre total. En consecuencia, el cambio de forma del cuerpo descuidado en realidad puede aumentar el arrastre en vez de disminuirlo.

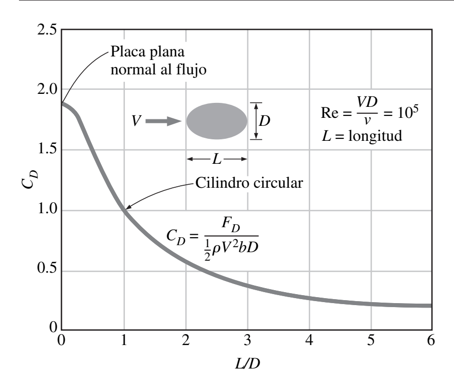


FIGURA 11-12
Variación del coeficiente de arrastre de un largo cilindro elíptico con variación de su valor de L/D. Aquí, C_D se basa en el área frontal bD, donde b es el ancho del cuerpo.
Tomado de Blevins (1984).

Separación de flujo

Cuando se maneja en las autopistas, una medida de seguridad común es frenar en las vueltas cerradas con la finalidad de evitar salirse del camino. Muchos conductores han aprendido del modo difícil que un automóvil se rehusará a obedecer cuando se fuerza a tomar las curvas a excesiva velocidad. Este fenómeno puede verse como “la separación de los autos” de las carreteras. Éste también se observa cuando vehículos a alta velocidad saltan de las colinas. A bajas velocidades, las llantas del vehículo siempre permanecen en contacto con la superficie del camino. Pero, a altas velocidades el vehículo va demasiado rápido para seguir la curvatura del camino y despega en la colina, con lo que pierde contacto con el camino.

Un fluido actúa en gran parte de la misma manera cuando se le fuerza a fluir sobre una superficie curva a altas velocidades. Un fluido asciende por la porción de la superficie curva colina arriba sin problema, pero tiene dificultad en permanecer unido a la superficie colina abajo. A velocidades suficientemente altas, el flujo de fluido se separa por sí mismo de la superficie del cuerpo. A esto se le llama **separación de flujo** (Fig. 11-13). El flujo se puede separar de una superficie, inclusive, si está totalmente sumergido en un líquido o inmerso en un gas (Fig. 11-14). La ubicación del punto de separación depende de varios factores, como el número de Reynolds, la rugosidad de la superficie y el nivel de fluctuaciones en el flujo libre, sin embargo, es difícil predecir exactamente dónde ocurrirá la separación a menos que existan esquinas agudas o cambios abruptos en la forma de la superficie sólida.

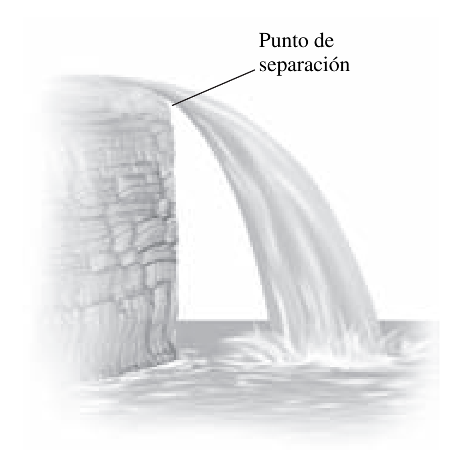


FIGURA 11-13
Separación de flujo en una cascada.

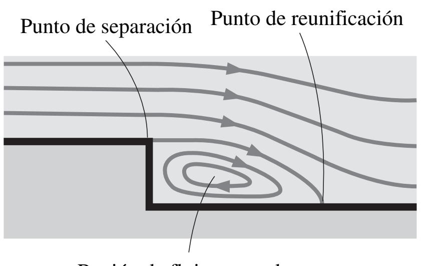


FIGURA 11-14
Separación de flujo sobre un escalón a lo largo de una pared.



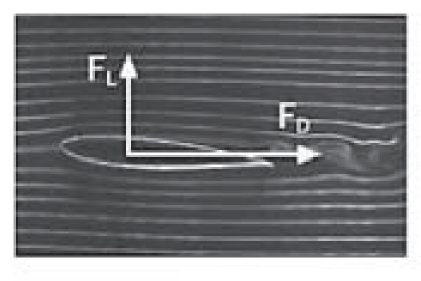
FIGURA 11-15
Separación de flujo sobre una pelota de tenis y la región de estela.
Cortesía de NASA y Cislunar Aerospace, Inc.

Cuando un fluido se separa de un cuerpo, forma una región separada entre el cuerpo y el flujo del fluido. Esta región de baja presión detrás del cuerpo, donde ocurren la recirculación y el flujo de vuelta, se llama **región separada**. Cuanto más grande sea la región separada, mayor será el arrastre debido a presión. Los efectos de la separación de flujo se sienten lejos corriente abajo en forma de velocidad reducida (relativa a la velocidad de flujo corriente arriba). La región de flujo atrás del cuerpo donde se sienten los efectos del cuerpo sobre la velocidad se llama **estela** (Fig. 11-15). La región separada termina donde las dos partes separadas de flujo vuelven a unirse. Por lo tanto, la región separada está en un volumen cerrado, mientras que la estela continúa creciendo detrás del cuerpo hasta que el fluido en la región de estela vuelve a alcanzar su velocidad y el perfil de velocidad de nuevo se vuelve casi plano. Los efectos viscosos y rotacionales son los más significativos en la capa límite, la región separada y la estela.

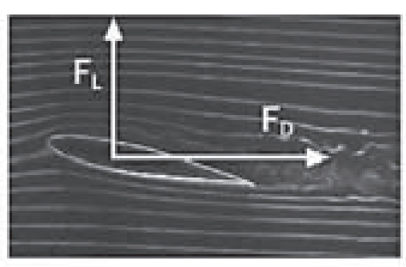
El hecho de la separación no se limita a cuerpos romos. La separación completa sobre toda la superficie posterior también puede suceder en caso de un cuerpo currentilíneo, como el ala de un avión a un **ángulo de ataque** suficientemente grande (casi 15° para la mayoría de las superficies de sustentación), que es el ángulo que el flujo de fluido entrante forma con la **cuerda** (la línea que conecta los dos extremos) del ala. La separación de flujo sobre la superficie superior de un ala reduce la sustentación de manera drástica y puede provocar que el avión **pierda sustentación** o **entre en pérdida**. A esta pérdida se le ha culpado de provocar numerosos accidentes de aviación y empeorar eficiencias en turbomaquinaria (Fig. 11-16).

Note que el arrastre y la sustentación son sumamente dependientes de la forma del cuerpo, y cualquier alteración que provoque el cambio de forma tiene un importante efecto sobre el arrastre y la sustentación. Por ejemplo, la acumulación de nieve y la formación de hielo sobre las alas de los aviones puede cambiar la forma de éstas lo suficiente como para provocar una considerable pérdida de sustentación. Este fenómeno ha causado que muchos aviones pierdan altitud y choquen y, que otros tantos aborten el despeguen. Por lo tanto, la comprobación de acumulación de hielo y nieve sobre componentes cruciales de los aviones se ha convertido en una medida de seguridad rutinaria antes del despegue en climas fríos. Esto es especialmente importante para aviones que han esperado su despegue durante mucho tiempo en la pista de aterrizaje debido al tráfico intenso.

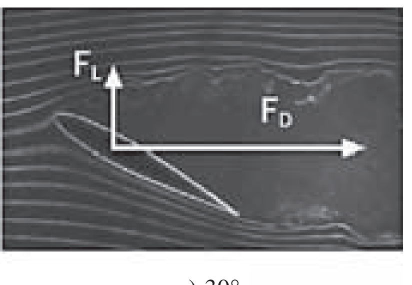
Una consecuencia importante de la separación de flujo es la formación y desprendimiento de partes de fluido circulante, llamados **vórtices**, en la región



a) 5°



b) 15°



c) 30°

FIGURA 11-16
A grandes ángulos de ataque (usualmente mayores que 15°), el flujo se puede separar por completo de la superficie superior de una superficie de sustentación, lo que reduce de manera drástica la sustentación y provoca que la superficie de sustentación pierda ésta.
Tomado de G. M. Homsy, et al. (2000).

de estela. A la generación periódica de estos vórtices corriente abajo se le conoce como **desprendimiento de vórtice**. Por lo general, este fenómeno ocurre durante flujo normal sobre grandes cilindros o esferas para $\text{Re} \geq 90$. Las vibraciones generadas por vórtices cerca del cuerpo pueden causar que éste resuene a niveles peligrosos si la frecuencia de los vórtices está cerca de la frecuencia natural del cuerpo, una situación que debe evitarse en el diseño de equipo expuesto a flujo de fluidos a alta velocidad, como las alas de los aviones y los puentes suspendidos expuestos a vientos fuertes estacionarios.

11-4 ▪ COEFICIENTES DE ARRASTRE DE GEOMETRÍAS COMUNES

El concepto de arrastre tiene importantes consecuencias en la vida diaria, y el comportamiento de arrastre de los diversos cuerpos naturales y fabricados por los humanos se caracteriza por sus coeficientes de arrastre medidos en condiciones de operación normales. Aunque el arrastre es provocado por dos efectos diferentes (fricción y presión), usualmente es difícil determinarlos por separado. Además, en la mayoría de los casos, se está interesado en el arrastre *total* en vez de los componentes de arrastre individual, y por lo general, se reporta el coeficiente de arrastre *total*. La determinación de los coeficientes de arrastre ha sido el tema de numerosos estudios (especialmente experimentales) y en la literatura existe una gran cantidad de datos de coeficientes de arrastre para casi cualquier geometría de interés práctico.

En general, el coeficiente de arrastre depende del *número de Reynolds*, en especial los números de Reynolds por abajo de aproximadamente 10^4. A números de Reynolds mayores, los coeficientes de arrastre para la mayoría de las geometrías en esencia permanecen constantes (Fig. 11-17). Esto se debe a que el flujo a números de Reynolds altos se vuelve totalmente turbulento. Sin embargo, éste no es el caso para cuerpos redondeados como los cilindros circulares y las esferas, como se comenta más adelante en esta sección. Los coeficientes de arrastre reportados usualmente sólo se aplican a flujos de números de Reynolds altos.

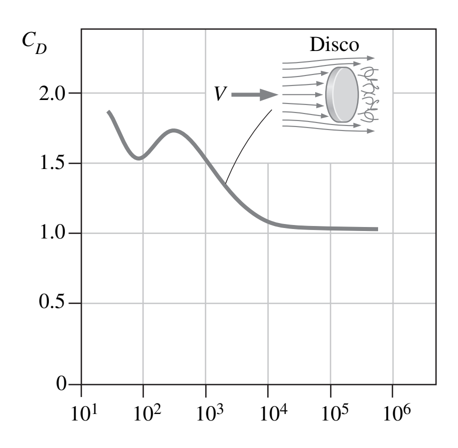


FIGURA 11-17
Los coeficientes de arrastre para la mayoría de las geometrías (pero no todas) en esencia permanecen constantes a números de Reynolds arriba de aproximadamente 10^4.

El coeficiente de arrastre exhibe diferente comportamiento en las regiones bajas (flujos de Stokes), moderada (laminar) y alta (turbulenta) del número de Reynolds. Los efectos inerciales son despreciable en flujos con número de Reynolds bajo ($\text{Re} < 1$), llamados *flujos de Stokes*, y el fluido se enreda suavemente alrededor del cuerpo. En este caso, el coeficiente de arrastre es inversamente proporcional al número de Reynolds, y para una esfera se determina en:

Esfera:
$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} \qquad (\text{Re} \lesssim 1) \tag{11–11}$$

Entonces la fuerza de arrastre que actúa sobre un objeto esférico a números de Reynolds bajos se convierte en:

$$F_D = C_D A \frac{\rho V^2}{2} = \frac{24}{\text{Re}} A \frac{\rho V^2}{2} = \frac{24}{\rho V D/\mu} \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho V^2}{2} = 3\pi\mu V D \tag{11–12}$$

que se conoce como **Ley de Stokes**, en honor del matemático y físico británico G. G. Stokes (1819-1903). Esta relación muestra que, a números de Reynolds muy bajos, la fuerza de arrastre que actúa sobre un objeto esférico es proporcional al diámetro, la velocidad y la viscosidad del fluido. Con frecuencia, esta relación es aplicable a partículas de polvo en el aire y partículas sólidas suspendidas en agua.

Esfera — V, D — $C_D = 24/\text{Re}$

Hemisferio — V, D — $C_D = 22.2/\text{Re}$

Disco circular (normal al flujo) — V, D — $C_D = 20.4/\text{Re}$

Disco circular (paralelo al flujo) — V, D — $C_D = 13.6/\text{Re}$

FIGURA 11-18
Coeficientes de arrastre C_D a bajas velocidades ($\text{Re} \leq 1$ donde $\text{Re} = VD/\nu$ y $A = \pi D^2/4$).

En la figura 11-18 se proporcionan los coeficientes de arrastre para flujos con números de Reynolds bajos que pasan sobre algunas otras geometrías. Note que, a números de Reynolds bajos, la forma del cuerpo no influye de manera importante en el coeficiente de arrastre.

En las Tablas 11-1 y 11-2 se proporcionan los coeficientes de arrastre para varios cuerpos bidimensionales y tridimensionales, para números de Reynolds altos. A partir de estas tablas se pueden hacer varias observaciones acerca del coeficiente de arrastre a números de Reynoldos altos. Antes que todo, la *orientación* del cuerpo en relación con la dirección del flujo tiene una gran influencia en el coeficiente de arrastre. Por ejemplo, el coeficiente de arrastre para flujo sobre un hemisferio es 0.4 cuando la cara esférica enfrenta al flujo, pero aumenta tres veces a 1.2 cuando la cara plana enfrenta al flujo (Fig. 11-19). Esto muestra que la nariz redondeada de una *bala* sirve a otro propósito además de la perforación: reducir el arrastre y por tanto aumentar el rango de alcance del arma.

Para cuerpos romos con esquinas agudas, como puede ser el flujo sobre un bloque rectangular o una placa plana normal al flujo, la separación ocurre en los bordes de las superficies frontal y posterior, sin cambio significativo en el carácter del flujo. En consecuencia, el coeficiente de arrastre de estos cuerpos es casi independiente del número de Reynolds. Note que el coeficiente de arrastre de una larga barra rectangular puede reducirse casi a la mitad de 2.2 a 1.2 cuando se redondean las esquinas.

Un hemisferio en dos orientaciones diferentes para $\text{Re} > 10^4$

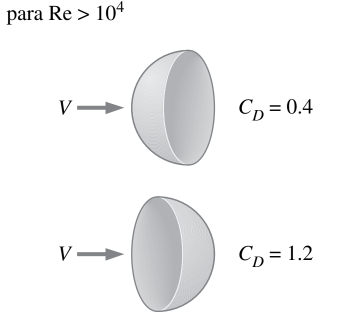


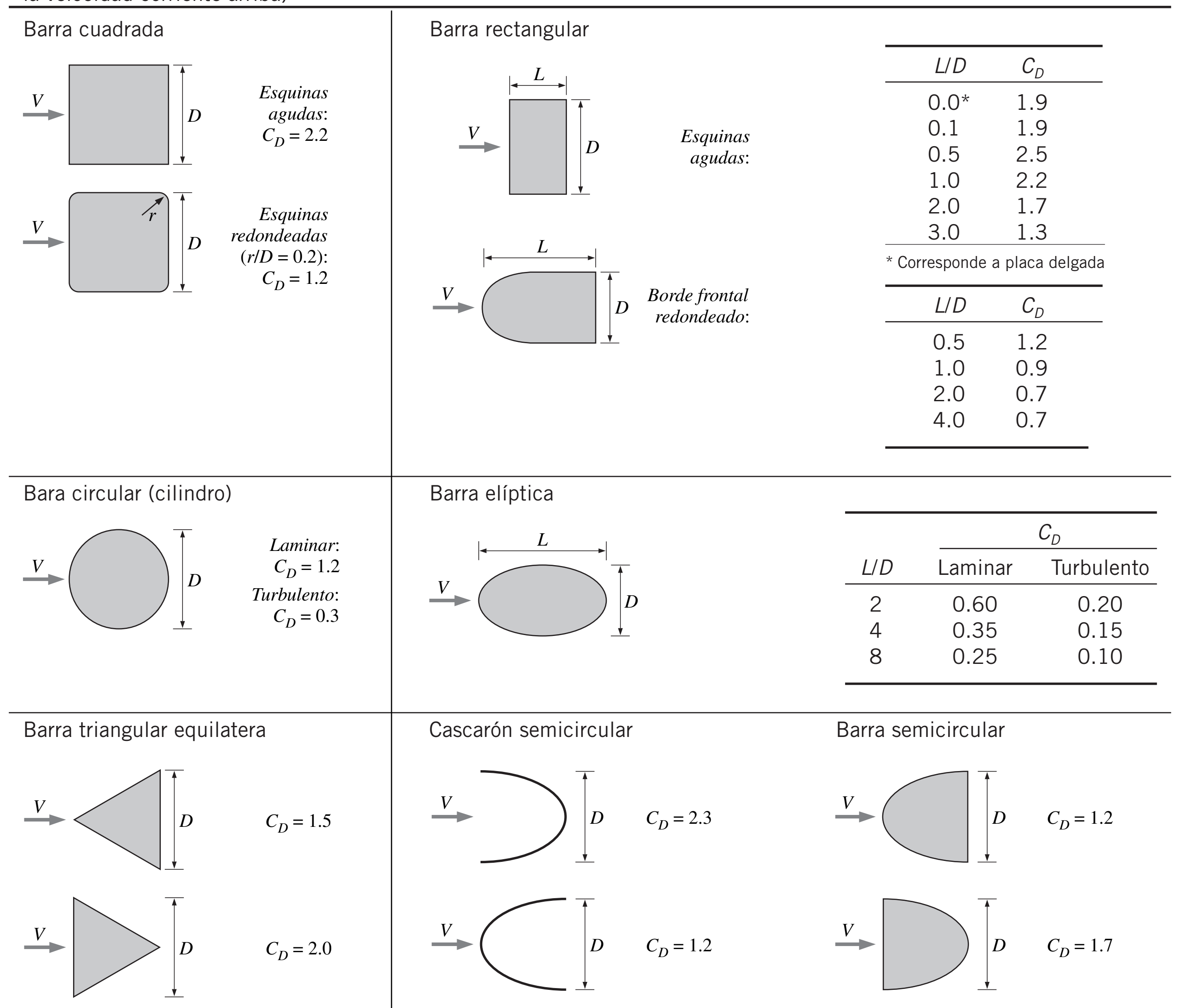
FIGURA 11-19
El coeficiente de arrastre de un cuerpo puede cambiar de manera drástica cuando cambia la orientación del cuerpo (y por lo tanto la forma) relativa a la dirección del flujo.

Sistemas biológicos y arrastre

El concepto de arrastre también tiene importantes consecuencias para los sistemas biológicos. Por ejemplo, los cuerpos de *peces*, en especial los que nadan rápidamente durante grandes distancias (como los delfines), son enormemente currentilíneos para minimizar el arrastre (el coeficiente de arrastre de los delfines con base en el área de su piel mojada es alrededor de 0.0035, comparable con el valor para una placa plana en flujo turbulento). De modo que no es sorprendente que los submarinos se construyan para imitar a los grandes peces. Por otra parte, los peces tropicales con fascinante belleza y elegancia, nadan graciosamente sólo cortas distancias. Obviamente, la gracia, no la alta velocidad y el arrastre, fue la principal consideración en su diseño. Las aves enseñan la lección de reducción del arrastre

TABLA 11-1

Coeficientes de arrastre C_D de varios cuerpos bidimensionales para Re $> 10^4$ con base en el área frontal $A = bD$, donde b es la longitud en la dirección normal a la página (para uso en la relación de fuerza de arrastre $F_D = C_D A \rho V^2/2$ donde V es la velocidad corriente arriba)



Barra rectangular, esquinas agudas:

L/D	C_D
0.0*	1.9
0.1	1.9
0.5	2.5
1.0	2.2
2.0	1.7
3.0	1.3

* Corresponde a placa delgada

Barra rectangular, borde frontal redondeado:

L/D	C_D
0.5	1.2
1.0	0.9
2.0	0.7
4.0	0.7

Barra elíptica:

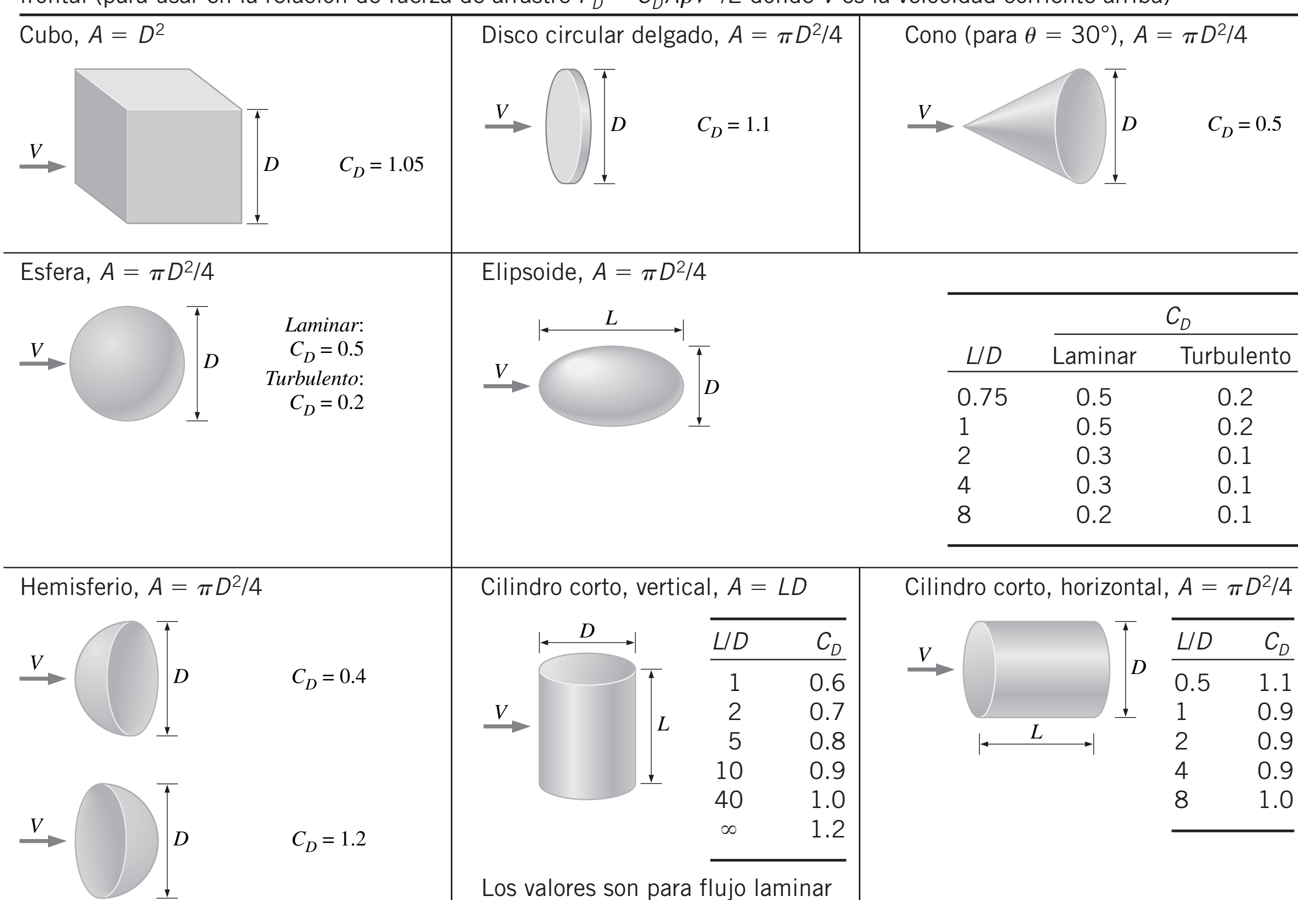
	C_D	
L/D	Laminar	Turbulento
2	0.60	0.20
4	0.35	0.15
8	0.25	0.10

cuando extienden sus picos hacia adelante y doblan sus patas hacia atrás durante el vuelo (Fig. 11-20). Los aviones, que parecen un poco como grandes aves, retraen sus ruedas después de despegar, con la finalidad de reducir el arrastre y por lo tanto el consumo de combustible.

La estructura flexible de las plantas les permite reducir el arrastre a vientos fuertes cuando cambian sus formas. Las grandes hojas planas, por ejemplo, rotan en una forma cónica de bajo arrastre frente a velocidades de viento fuerte, mientras que las ramas de los árboles forman grupos para reducir el arrastre. Los troncos flexibles se doblan bajo la influencia del viento para reducir el arrastre, y el momento de flexión disminuye cuando se reduce el área frontal.

TABLA 11-2

Coeficientes de arrastre representativos C_D para varios cuerpos tridimensionales para Re $> 10^4$, con base en el área frontal (para usar en la relación de fuerza de arrastre $F_D = C_D A \rho V^2/2$ donde V es la velocidad corriente arriba)



Elipsoide:

	C_D	
L/D	Laminar	Turbulento
0.75	0.5	0.2
1	0.5	0.2
2	0.3	0.1
4	0.3	0.1
8	0.2	0.1

Cilindro corto, vertical:

L/D	C_D
1	0.6
2	0.7
5	0.8
10	0.9
40	1.0
∞	1.2

Los valores son para flujo laminar

Cilindro corto, horizontal:

L/D	C_D
0.5	1.1
1	0.9
2	0.9
4	0.9
8	1.0

Si el lector ve los Juegos Olímpicos, quizá ha observado muchos ejemplos de esfuerzo consciente por parte de los competidores para reducir el arrastre. Algunos ejemplos: durante la carrera de 100 m, los corredores mantienen sus dedos juntos y rectos y mueven sus manos paralelas a la dirección de movimiento para reducir el arrastre sobre sus manos. Los nadadores con cabello largo cubren sus cabezas con una cubierta apretada y lisa para reducir el arrastre de la cabeza. También visten trajes de baño de una pieza ajustados. Los jinetes y ciclistas se inclinan hacia adelante tanto como pueden para reducir el arrastre (al reducir tanto el coeficiente de arrastre como el área frontal). Los esquiadores de velocidad hacen lo mismo. En las motocicletas por lo general se usan cubiertas para reducir el arrastre.

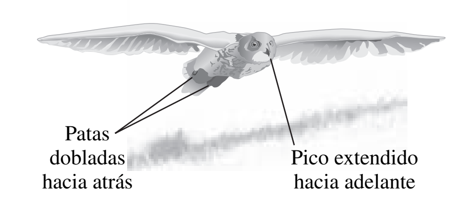


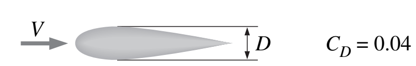
FIGURA 11-20
Las aves enseñan a los humanos una lección acerca de la reducción del arrastre cuando extienden sus picos hacia adelante y doblan sus patas hacia atrás durante el vuelo.

Coeficientes de arrastre de vehículos

El término *coeficiente de arrastre* se usa de manera general en varias áreas de la vida cotidiana. Los fabricantes de automóviles intentan atraer a los consumidores cuando puntualizan los *bajos coeficientes de arrastre* de sus vehículos

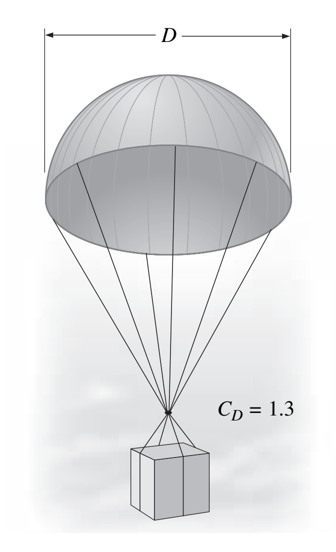
TABLA 11-2 (Continuación)


Cuerpo aerodinámico, $A = \pi D^2/4$



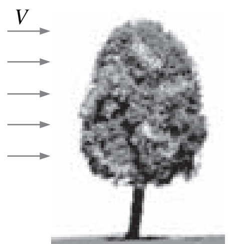
$C_D = 0.04$


Paracaídas, $A = \pi D^2/4$



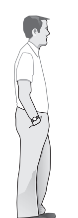
$C_D = 1.3$

Árbol, A = área frontal



V, m/s	C_D
10	0.4–1.2
20	0.3–1.0
30	0.2–0.7

Persona (promedio)



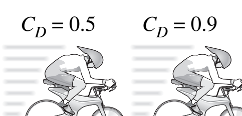
De pie: $C_D A = 9\ \text{ft}^2 = 0.84\ \text{m}^2$

Sentada: $C_D A = 6\ \text{ft}^2 = 0.56\ \text{m}^2$

Bicicletas



Derecho:
$A = 5.5\ \text{ft}^2 = 0.51\ \text{m}^2$
$C_D = 1.1$



Drafting:
$A = 3.9\ \text{ft}^2 = 0.36\ \text{m}^2$
$C_D = 0.50$

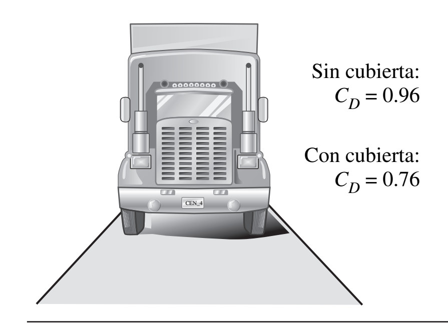


En carrera:
$A = 3.9\ \text{ft}^2 = 0.36\ \text{m}^2$
$C_D = 0.9$



Con cubierta:
$A = 5.0\ \text{ft}^2 = 0.46\ \text{m}^2$
$C_D = 0.12$

Semirremolque, A = área frontal



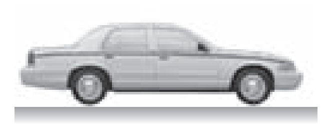
Sin cubierta:
$C_D = 0.96$

Con cubierta:
$C_D = 0.76$

Camioneta, A = área frontal



Minivan:
$C_D = 0.4$



Automóvil de pasajeros:
$C_D = 0.3$

Edificios altos, A = área frontal


$C_D = 1.4$

(Fig. 11-21). El coeficiente de arrastre de los vehículos varía aproximadamente 1.0 para grandes semirremolques, a 0.4 para minivans y 0.3 para automóviles de pasajeros. En general, cuanto más romo sea el vehículo, mayor es el coeficiente de arrastre. Las cubiertas reducen el coeficiente de arrastre de los aparejos tracto-remolque en aproximadamente 20 por ciento cuando se vuelve la superficie frontal más currentilínea. Como regla empírica, el porcentaje de ahorro de combustible debido a la reducción de arrastre es más o menos la mitad del porcentaje de la reducción del arrastre.

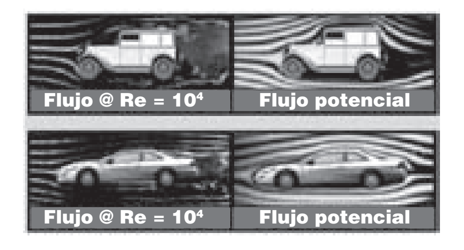


FIGURA 11-21
Las líneas de corriente alrededor de un moderno automóvil, diseñado de manera aerodinámica, recuerdan mucho las líneas de corriente alrededor del automóvil en el flujo potencial ideal (se supone fricción despreciable), excepto cerca de la parte trasera, lo que resulta en un bajo coeficiente de arrastre.
Tomado de G. M. Homsy, et al. (2000).

Cuando el efecto del camino sobre el movimiento del aire no se toma en consideración, la forma ideal de un *vehículo* es básicamente la *lágrima*, con un coeficiente de arrastre de aproximadamente 0.1 para el caso de flujo turbulento. Pero, esta forma necesita modificarse para acomodar varios componentes externos necesarios, como ruedas, espejos, ejes y manijas de puertas. Además, el vehículo debe ser lo suficientemente alto por comodidad y debe haber cierta distancia que lo aparte del camino. Más aún, un vehículo no puede ser muy largo para entrar en los garajes y espacios de estacionamiento. El control del material y los costos de fabricación exigen minimizar o eliminar cualquier volumen "muerto" que no se pueda utilizar. El resultado es una forma que recuerda más una caja que una lágrima, y ésta fue la forma de los primeros automóviles con un coeficiente de arrastre de alrededor de 0.8 en los años de 1920. Esto no era un problema entonces días porque las velocidades eran bajas y el arrastre no se consideraba parte del diseño principal.

Los coeficientes de arrastre promedio de los automóviles cayeron a casi 0.70 en los años de 1940, a 0.55 en la década de 1970, a 0.45 en los años de 1980 y a 0.30 en los de 1990, como resultado de técnicas de fabricación mejoradas para la formación de metal y poner mayor atención a la forma del automóvil y la aerodinámica (Fig. 11-22). El coeficiente de arrastre para los automóviles de carreras armados adecuadamente es casi 0.2; pero, esto se logra después de hacer la comodidad de los conductores una consideración secundaria. Cuando se nota que el límite inferior teórico de C_D es aproximadamente 0.1, y que el valor para los autos de carreras es 0.2, parece que sólo existe un pequeño espacio para mayor mejoría en el coeficiente de arrastre de los autos de pasajeros a partir del valor actual de más o menos 0.3. Para camiones y autobuses, el coeficiente de arrastre puede reducirse todavía más cuando se optimizan los contornos frontal y posterior (mediante redondeo, por ejemplo) en la medida en que sea práctico mientras se mantiene igual la longitud global del vehículo.

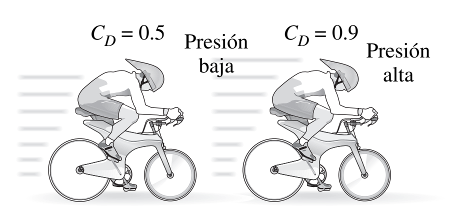


FIGURA 11-22
Este modelo 2005, Toyota Prius, tiene un coeficiente de arrastre de 0.26, uno de los más bajos para un automóvil de pasajeros.
Cortesía de Toyota.

Cuando se viaja en grupo, una manera furtiva de reducir el arrastre es ***drafting (algo semejante a succión)***, un fenómeno conocido por ciclistas y corredores de autos. El *drafting* implica la aproximación de un cuerpo en movimiento a otro en movimiento desde atrás y el cuerpo que se aproxima parece que se succiona hacia la región de baja presión formada en la parte posterior de otro cuerpo en movimiento. El coeficiente de arrastre de un ciclista de carreras, por ejemplo, se puede reducir de 0.9 a 0.5 por medio del drafting, como se muestra en la Tabla 11-2 (Fig. 11-23).

También puede ayudarse a reducir el arrastre de un vehículo, y por lo tanto el consumo de combustible cuando se es un conductor más consciente. Por ejemplo, la fuerza de arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad. Por lo tanto, conducir más allá del límite de velocidad en una autopista no sólo aumenta la posibilidad de recibir una infracción o de sufrir un accidente, sino que también aumenta el consumo de combustible por kilómetro. En consecuencia, conducir a velocidad moderada es seguro y económico. Además, algo que se extienda desde el automóvil, inclusive un brazo, aumenta el coeficiente de arrastre. Conducir con las ventanillas abiertas también aumenta el arrastre y el con-

FIGURA 11-23
Los coeficientes de arrastre de cuerpos que siguen de cerca a otros cuerpos en movimiento pueden reducirse de manera considerable debido al *drafting* (es decir, caer en la región de baja presión que crea el cuerpo de enfrente).



sumo de combustible. A la velocidad en autopista, un conductor puede ahorrar combustible en clima caliente cuando acciona el aire acondicionado en lugar de conducir con las ventanillas abiertas. De manera usual, la turbulencia y el arrastre adicional generados por las ventanillas abiertas consume más combustible que al aire acondicionado.

Superposición

Las formas de muchos cuerpos que se encuentran en la práctica no son simples. Pero, estos cuerpos pueden tratarse convenientemente en cálculos de fuerza de arrastre cuando se consideran como compuestos de dos o más cuerpos simples. Un plato satelital montado sobre un techo con una barra cilíndrica, por ejemplo, puede considerarse como una combinación de un cuerpo hemisférico y un cilindro. Entonces el coeficiente de arrastre del cuerpo puede determinarse aproximadamente cuando se usa **superposición**. Este punto de vista simplista no explica los efectos de los componentes uno sobre otro, y por lo tanto los resultados obtenidos deben interpretarse como corresponde.

EJEMPLO 11-2 Efecto del diseño de espejo en el consumo de combustible de un automóvil

Como parte de los esfuerzos continuos por reducir el coeficiente de arrastre, y por lo tanto mejorar el rendimiento de combustible de los automóviles, el diseño de los espejos retrovisores laterales cambió drásticamente desde una simple placa circular a una forma aerodinámica. Determine la cantidad de combustible y dinero que se ahorra por año como resultado de sustituir un espejo plano de 13 cm de diámetro por uno con una cubierta hemisférica (Fig. 11-24). Suponga que el automóvil recorre 24 mil km al año a una velocidad promedio de 95 km/h. Considere que la densidad y el precio de la gasolina son 0.8 kg/L y $0.60/L, respectivamente; el poder calorífico de la gasolina es de 44 000 kJ/kg; y la eficiencia global del motor es de 30 por ciento.

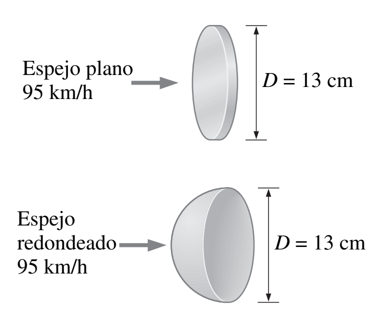


FIGURA 11-24
Esquema para el ejemplo 11-2.

SOLUCIÓN El espejo plano de un automóvil se sustituye con uno que tiene cubierta hemisférica. Debe determinarse la cantidad de combustible y dinero que se ahorra al año como resultado de esta sustitución.

Hipótesis **1** El automóvil recorre 24 mil km al año a una velocidad promedio de 95 km/h. **2** El efecto del cuerpo del automóvil en el flujo alrededor del espejo es despreciable (no interfiere).

Propiedades Se considera que las densidades del aire y la gasolina son 1.20 kg/m^3 y 800 kg/m^3, respectivamente. El poder calorífico de la gasolina está dado en 44 000 kJ/kg. Los coeficientes de arrastre C_D son 1.1 para un disco circular y 0.4 para un cuerpo hemisférico.

Análisis La fuerza de arrastre que actúa sobre un cuerpo se determina a partir de:

$$F_D = C_D A \frac{\rho V^2}{2}$$

donde A es el área frontal del cuerpo, que es $A = \pi D^2/4$ tanto para espejo plano como redondeado. La fuerza de arrastre que actúa sobre el espejo plano es:

$$F_D = 1.1 \frac{\pi(0.13 \text{ m})^2}{4} \frac{(1.20 \text{ kg/m}^3)(95 \text{ km/h})^2}{2} \left(\frac{1 \text{ m/s}}{3.6 \text{ km/h}}\right)^2 \left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = 6.10 \text{ N}$$

Note que trabajo es fuerza por distancia, la cantidad de trabajo realizado para superar esta fuerza de arrastre y la entrada de energía necesaria para una distancia de 24 000 km son:

$$W_{\text{arrastre}} = F_D \times L = (6.10 \text{ N})(24\,000 \text{ km/año}) = 146\,400 \text{ kJ/año}$$

$$E_{\text{entrada}} = \frac{W_{\text{arrastre}}}{\eta_{\text{automóvil}}} = \frac{146\,400 \text{ kJ/año}}{0.3} = 488\,000 \text{ kJ/año}$$

Entonces la cantidad y los costos del combustible que suministra toda esta energía son:

$$\text{Cantidad de combustible} = \frac{m_{\text{combustible}}}{\rho_{\text{combustible}}} = \frac{E_{\text{ent}}/\text{HV}}{\rho_{\text{combustible}}} = \frac{(488\,000 \text{ kJ/año})/(44\,000 \text{ kJ/kg})}{0.8 \text{ kg/L}}$$

$$= 13.9 \text{ L/año}$$

$$\text{Costo} = (\text{cantidad de comb.})(\text{costo unitario}) = (13.9 \text{ L/año})(\$0.60/\text{L}) = \$8.32/\text{año}$$

Esto es: el automóvil usa 13.9 L de gasolina a un costo de $8.32 por año para superar el arrastre generado por un espejo plano que se extiende hacia el lado de un automóvil.

La fuerza de arrastre y el trabajo realizado para superarlo son directamente proporcionales al coeficiente de arrastre. Entonces la reducción porcentual en el consumo de combustible debida a la sustitución del espejo es igual a la reducción porcentual en el coeficiente de arrastre:

$$\text{Razón de reducción} = \frac{C_{D,\text{ plano}} - C_{D,\text{ hemisferio}}}{C_{D,\text{ plano}}} = \frac{1.1 - 0.4}{1.1} = 0.636$$

$$\text{Reducción de combustible} = (\text{razón de reducción})\ (\text{cantidad de combustible})$$

$$= 0.636(13.9 \text{ L/año}) = \mathbf{8.84\ L/año}$$

$$\text{Reducción de costo} = (\text{razón de reducción})\ (\text{costo})$$

$$= 0.636(\$8.32/\text{año}) = \mathbf{\$5.29/año}$$

Dado que un automóvil típico tiene dos espejos retrovisores laterales, el conductor ahorra más de $10 por año en gasolina cuando sustituye los espejos planos por unos hemisféricos.

Discusión Note de este ejemplo que es posible lograr reducciones considerables en arrastre y consumo de combustible al volver aerodinámica la forma de varios componentes y de todo el automóvil. De modo que no es sorprendente que las esquinas agudas sean sustituidas en los modelos automovilísticos recientes con contornos redondeados. Esto también explica por qué los grandes aviones retraen sus ruedas después del despegue y los aviones pequeños usan cubiertas contorneadas alrededor de sus ruedas.

El ejemplo 11-2 es indicativo del esfuerzo que en años recientes se ha puesto en el rediseño de varias partes automovilísticas como las molduras de las ventanillas, las manijas de las puertas, el parabrisas y los bordes frontal y posterior, con la finalidad de reducir el arrastre aerodinámico. Para un automóvil que se desplaza por un camino a un nivel de velocidad constante, la potencia desarrollada por el motor se utiliza para superar la resistencia de rodamiento, la fricción entre los componentes móviles, el arrastre aerodinámico y el manejo del equipo auxiliar. El arrastre aerodinámico es despreciable a velocidades bajas, pero se vuelve significativo a velocidades arriba de más o menos 30 mi/h. La reducción del área frontal de los automóviles (para disgusto de los conductores altos) también ha contribuido a la reducción de arrastre y del consumo de combustible.

11-5 ▪ FLUJO PARALELO SOBRE PLACAS PLANAS

Considere el flujo de un fluido sobre una *placa plana*, como se muestra en la figura 11-25. Las superficies ligeramente contorneadas como los álabes de turbina también se pueden aproximar como placas planas con precisión razonable. La coordenada x se mide a lo largo de la superficie de la placa desde el *borde de entrada* de la placa en la dirección del flujo, y y se mide desde la superficie en la dirección normal. El fluido se aproxima a la placa en la dirección x a una velocidad uniforme V, que es equivalente a la velocidad sobre la placa lejos de la superficie.

Como comentario, se puede considerar que el fluido consiste de capas adyacentes sobrepuestas. La velocidad de las partículas en la primera capa de fluido adyacente a la placa se vuelve cero debido a la condición de no-deslizamiento. Esta capa sin movimiento frena las partículas de la capa de fluido vecina como resultado de la fricción entre las partículas de estas dos capas de fluido adyacentes a diferentes velocidades. Entonces esta capa de fluido frena las moléculas de la siguiente capa, y así sucesivamente. En consecuencia, la presencia de la placa se siente hasta cierta distancia normal δ desde la placa más allá de la cual la velocidad de flujo libre permanece virtualmente invariable. Como resultado, la componente x de velocidad del fluido, u, varía de 0 en $y = 0$ a casi V en $y = \delta$ (Fig. 11-26).

La región del flujo sobre la placa acotada por d en la que se sienten los efectos de las fuerzas cortantes viscosas causadas por la viscosidad del fluido se llama **capa límite de velocidad**. El *grosor de la capa límite d* usualmente se define como la distancia y desde la superficie en la que $u = 0.99V$.

La línea hipotética de $u = 0.99V$ divide al flujo sobre una placa en dos regiones: la **región de capa límite**, en la que los efectos viscosos y los cambios de velocidad son considerables, y la **región de flujo irrotacional**, en la que los efectos de fricción son despreciables y la velocidad permanece constante.

Para flujo paralelo sobre una placa plana, el arrastre debido a presión es cero, y por lo tanto el coeficiente de arrastre es igual al *coeficiente de arrastre debido a fricción*, o simplemente el *coeficiente de fricción* (Fig. 11-27). Esto es:

Placa plana: $$C_D = C_{D,\text{ fricción}} = C_f \qquad \textbf{(11–13)}$$

Cuando el coeficiente de fricción promedio C_f está disponible, la fuerza de arrastre (o fricción) sobre la superficie puede determinarse a partir de:

Fuerza de fricción sobre una placa plana: $$F_D = F_f = \tfrac{1}{2}C_f A\rho V^2 \qquad \textbf{(11–14)}$$

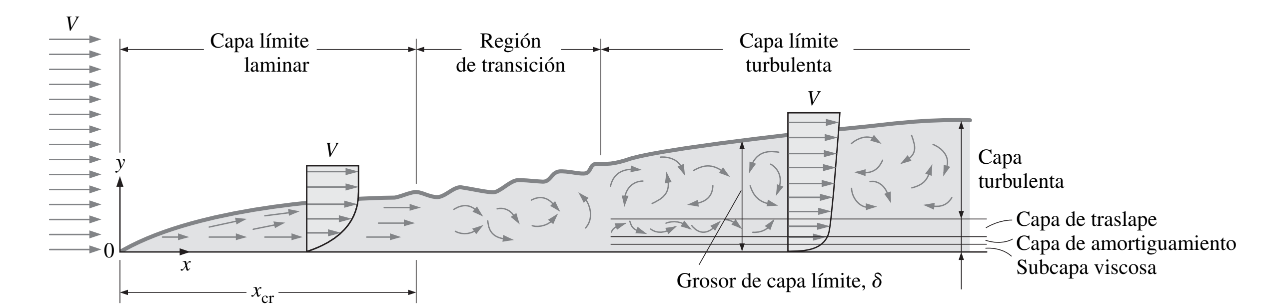


FIGURA 11-25
Desarrollo de la capa límite para flujo sobre una placa plana, y los diferentes patrones de flujo (no a escala).

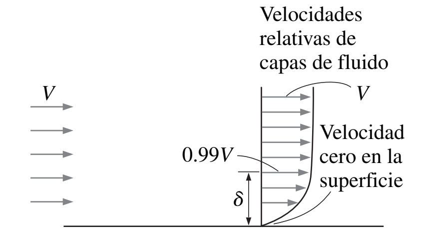


FIGURA 11-26
El desarrollo de una capa límite sobre una superficie se debe a la condición de no-deslizamiento y a la fricción.

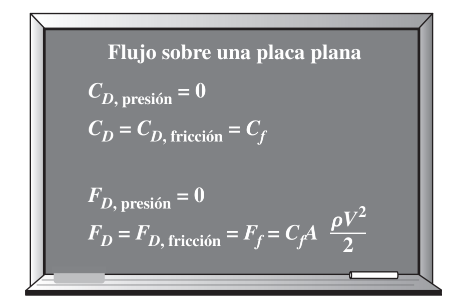


FIGURA 11-27
Para flujo paralelo sobre una placa plana, el arrastre debido a presión es cero, y por lo tanto el coeficiente de arrastre es igual al coeficiente de fricción y la fuerza de arrastre es igual a la fuerza de fricción.

donde *A* es el área superficial de la placa expuesta al flujo de fluidos. Cuando ambos lados de una placa delgada están sujetas a flujo, *A* se vuelve el área total de las superficies superior e inferior. Note que el valor local del coeficiente de fricción $C_{f,\,x}$, en general, varía con la posición a lo largo de la superficie.

En la figura 11-25 también se muestran perfiles de velocidad promedio típicos en flujo laminar y turbulento. Note que el perfil de velocidad en flujo turbulento es mucho más plano que en flujo laminar, con una caída pronunciada cerca de la superficie. Puede considerarse que la capa límite turbulenta consiste de cuatro regiones, caracterizadas por la distancia desde la pared. La muy delgada capa junto a la pared, donde los efectos viscosos son dominantes, es la **subcapa viscosa**. El perfil de velocidad en ésta es casi *lineal*, y el flujo es de líneas de corriente casi paralelas. Junto a la subcapa viscosa está la **capa de amortiguamiento**, en la que los efectos turbulentos se vuelven significativos, pero no obstante el flujo está dominado por efectos viscosos. Arriba de la capa de amortiguamiento está la **capa de traslape**; en ésta los efectos turbulentos son mucho más significativos, pero todavía no son dominantes. Sobre ella está la **capa turbulenta**, donde estos efectos dominan sobre los efectos viscosos. Note que el perfil de velocidad de capa límite turbulenta sobre una placa plana recuerda mucho el perfil de capa límite de flujo turbulento totalmente desarrollado en tuberías.

La transición de flujo laminar a turbulento depende de *la geometría de la superficie*, *rugosidad de la superficie*, *velocidad corriente arriba*, *temperatura de la superficie* y *tipo de fluido*, entre otros factores, y se representa mejor mediante el número de Reynolds. El número de Reynolds a una distancia *x* del borde de entrada de una placa plana se expresa como:

$$\text{Re}_x = \frac{\rho V x}{\mu} = \frac{Vx}{\nu} \qquad \textbf{(11–15)}$$

donde *V* es la velocidad corriente arriba y *x* es la longitud característica de la geometría, que, para una placa plana, es la longitud de la placa en la dirección del flujo. Note que, a diferencia del flujo en tuberías, el número de Reynolds varía para una placa plana a lo largo del flujo, y alcanza $\text{Re}_L = VL/\nu$ al final de la placa. Para cualquier punto sobre una placa plana la longitud característica es la distancia *x* del punto desde el borde de entrada en la dirección del flujo.

Para flujo sobre una placa plana lisa, la transición de laminar a turbulento comienza casi en $\text{Re} \cong 1 \times 10^5$, pero no se vuelve totalmente turbulento antes de que el número de Reynolds alcance valores mucho mayores, usualmente alrededor de 3×10^6 (Cap. 10). En análisis de ingeniería, un valor generalmente aceptado para el número de Reynolds crítico es:

$$\text{Re}_{x,\,\text{cr}} = \frac{\rho V x_{\text{cr}}}{\mu} = 5 \times 10^5$$

El valor real del número de Reynolds crítico en ingeniería para una placa plana puede variar un poco de más o menos 10^5 a 3×10^6, esto depende de la rugosidad de la superficie, el nivel de turbulencia y la variación de presión a lo largo de la superficie, como se comentó con más detalle en el capítulo 10.

Coeficiente de fricción

El coeficiente de fricción para flujo laminar sobre una placa plana se puede determinar teóricamente cuando se resuelven numéricamente las ecuaciones de la conservación de masa y de cantidad de movimiento (Cap. 10). Sin embargo, para flujo turbulento, debe determinarse experimentalmente y expresar mediante correlaciones empíricas.

El coeficiente de fricción local *varía* a lo largo de la superficie de la placa plana como resultado de los cambios en la capa límite de velocidad en la dirección del flujo. Usualmente existe interés en la fuerza de arrastre sobre *toda* la superficie, que puede determinarse cuando se usa el coeficiente de fricción *promedio*. Pero a veces también existe interés en la fuerza de arrastre en cierta posición, y en estos casos es necesario conocer el valor *local* del coeficiente de fricción. Con esto en la mente, se presentan correlaciones para coeficiente de fricción local (que se identifica con el subíndice x) y coeficiente de fricción promedio sobre una placa plana para condiciones de flujo *laminar*, *turbulento* y *combinado (laminar sobre una parte de la placa y turbulento sobre otra)*. Ya disponibles los valores locales, el coeficiente de fricción *promedio* para toda la placa puede determinarse cuando se integra a partir de:

$$C_f = \frac{1}{L}\int_0^L C_{f,x}\,dx \qquad \textbf{(11–16)}$$

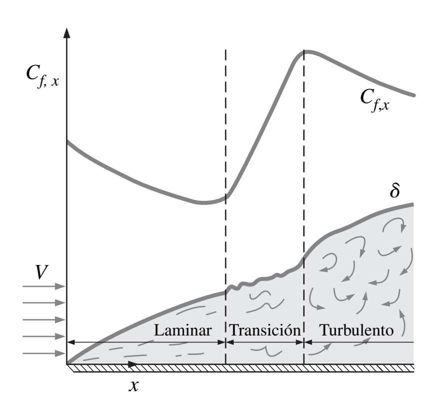


FIGURA 11-28
Variación del coeficiente de fricción local para flujo sobre una placa plana. Note que, en este bosquejo, la escala vertical de la capa límite está demasiado exagerada.

Con base en el análisis, el grosor de la capa límite y el coeficiente de fricción local en la posición x para flujo laminar sobre una placa plana se determinaron en el capítulo 10 como:

$$\textit{Laminar}: \quad \delta = \frac{4.91x}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \quad \text{y} \quad C_{f,x} = \frac{0.664}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}, \quad \mathrm{Re}_x < 5 \times 10^5 \qquad \textbf{(11–17)}$$

Las correspondientes relaciones para flujo turbulento son:

$$\textit{Turbulento}: \quad \delta = \frac{0.38x}{\mathrm{Re}_x^{1/5}} \quad \text{y} \quad C_{f,x} = \frac{0.059}{\mathrm{Re}_x^{1/5}}, \quad 5 \times 10^5 \le \mathrm{Re}_x \le 10^7 \qquad \textbf{(11–18)}$$

donde x es la distancia desde el borde de entrada de la placa y $\mathrm{Re}_x = Vx/\nu$ es el número de Reynolds en la posición x. Note que $C_{f,x}$ es proporcional a $1/\mathrm{Re}_x^{1/2}$ y por tanto a $x^{-1/2}$ para flujo laminar, y es proporcional a $x^{-1/5}$ para flujo turbulento. En cualquier caso, $C_{f,x}$ es infinito en el borde de entrada ($x = 0$) y por lo tanto las ecuaciones 11-17 y 11-18 no son válidas cerca del borde de entrada. En la figura 11-28 se muestra la variación del grosor de la capa límite δ y del coeficiente de fricción $C_{f,x}$ a lo largo de una placa plana. Los coeficientes de fricción locales son mayores en flujo turbulento de lo que pueden ser en flujo laminar debido a la intensa mezcla que ocurre en la capa límite turbulenta. Note que $C_{f,x}$ alcanza sus valores más altos cuando el flujo se vuelve totalmente turbulento y luego disminuye por un factor de $x^{-1/5}$ en la dirección del flujo, como se muestra en la figura.

El coeficiente de fricción *promedio* sobre toda la placa se determina cuando se sustituyen las ecuaciones 11-17 y 11-18 en la ecuación 11-16 y se realizan las integraciones (Fig. 11-29). Se obtiene:

$$\textit{Laminar}: \quad C_f = \frac{1.33}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} \quad \mathrm{Re}_L < 5 \times 10^5 \qquad \textbf{(11–19)}$$

$$\textit{Turbulento}: \quad C_f = \frac{0.074}{\mathrm{Re}_L^{1/5}} \quad 5 \times 10^5 \le \mathrm{Re}_L \le 10^7 \qquad \textbf{(11–20)}$$

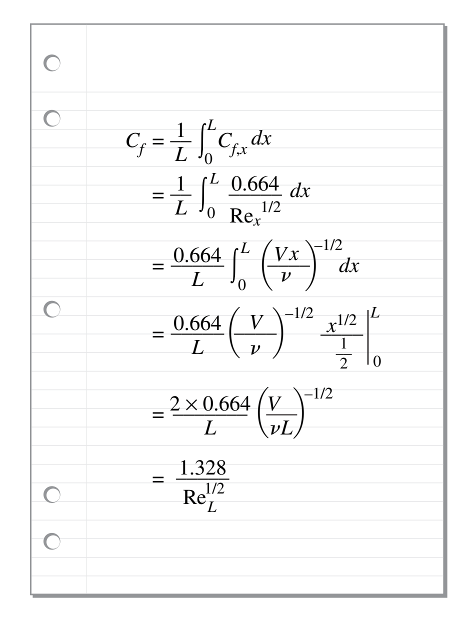


FIGURA 11-29
El coeficiente de fricción promedio sobre una superficie se determina cuando se integra el coeficiente de fricción local sobre toda la superficie. Los valores que se muestran aquí son para capa límite de placa plana laminar.

La primera de estas relaciones proporciona el coeficiente de fricción promedio para toda la placa cuando el flujo es *laminar* sobre *toda* la placa. La segunda relación proporciona el coeficiente de fricción promedio para toda la placa sólo cuando el flujo es *turbulento* sobre *toda* la placa, o cuando la región de flujo laminar de la placa es despreciablemente pequeña en relación con la región de flujo turbulento (es decir: $x_{cr} \ll L$, donde la longitud de la placa x_{cr} sobre la que el flujo es laminar puede determinarse a partir de $\mathrm{Re}_{cr} = 5 \times 10^5 = Vx_{cr}/\nu$).

Rugosidad relativa, ε/L	Coeficiente de fricción, C_f
0.0*	0.0029
1×10^{-5}	0.0032
1×10^{-4}	0.0049
1×10^{-3}	0.0084

* Superficie lisa para Re = 10^7. Otros calculados a partir de la ecuación 11-23 para flujo totalmente rugoso.

FIGURA 11-30
Para flujo turbulento, la rugosidad de la superficie puede causar que el coeficiente de fricción aumente varias veces.

En algunos casos, una placa plana es suficientemente larga para que el flujo se vuelva turbulento, pero no lo suficientemente larga como para ignorar la región de flujo laminar. En estos casos, el coeficiente de fricción *promedio* sobre toda la placa se determina cuando se realiza la integración de la ecuación 11-16 sobre dos partes: la región laminar $0 \leq x \leq x_{cr}$ y la región turbulenta $x_{cr} < x \leq L$ como:

$$C_f = \frac{1}{L}\left(\int_0^{x_{cr}} C_{f,\,x,\,\text{laminar}}\,dx + \int_{x_{cr}}^{L} C_{f,\,x,\,\text{turbulenta}}\,dx\right) \tag{11–21}$$

Note que se incluyó la región de transición con la región turbulenta. De nuevo, cuando se toma el número de Reynolds crítico como $\text{Re}_{cr} = 5 \times 10^5$ y se realizan dichas integraciones después de sustituir las expresiones indicadas, se determina que el coeficiente de fricción *promedio* sobre *toda* la placa es:

$$C_f = \frac{0.074}{\text{Re}_L^{1/5}} - \frac{1\,742}{\text{Re}_L} \qquad 5 \times 10^5 \leq \text{Re}_L \leq 10^7 \tag{11–22}$$

Las constantes en esta relación serán diferentes para diferentes números de Reynolds críticos. Además, se supone que las superficies son *lisas* y que el flujo libre es de muy baja intensidad de turbulencia. Para flujo laminar, el coeficiente de fricción depende sólo del número de Reynolds, y la rugosidad de la superficie no tiene efecto. Sin embargo, para flujo turbulento, la rugosidad de la superficie provoca que el coeficiente de fricción aumente varias veces, hasta el grado que, en el flujo totalmente rugoso, el coeficiente de fricción es una función de la rugosidad de la superficie sola y es independiente del número de Reynolds (Fig. 11-30). Esto es análogo al flujo en tuberías.

Schlichting proporciona la siguiente curva de ajuste de datos experimentales del coeficiente de fricción promedio para este patrón de flujo:

Flujo totalmente rugoso:

$$C_f = \left(1.89 - 1.62 \log \frac{\varepsilon}{L}\right)^{-2.5} \tag{11–23}$$

donde ε es la rugosidad de la superficie y L es la longitud de la placa en la dirección del flujo. En ausencia de una mejor relación, la anterior puede usarse para flujo turbulento en superficies rugosas para $\text{Re} > 10^6$, en especial cuando $\varepsilon/L > 10^{-4}$.

En la figura 11-31 se grafican coeficientes de fricción C_f para flujo paralelo sobre placas planas lisas o rugosas, para flujos laminares o turbulentos. Note que, en flujo turbulento, C_f aumenta varias veces con la rugosidad. También note que C_f es independiente del número de Reynolds en la región totalmente rugosa. Esta gráfica es análoga al diagrama de Moody para flujos en tubería, pero es para la placa plana.

EJEMPLO 11-3 Flujo de aceite caliente sobre una placa plana

Fluye aceite para motor a 40°C sobre una placa plana de 5 m de largo con una velocidad de flujo libre de 2 m/s (Fig. 11-32). Determine la fuerza de arrastre que actúa sobre la placa por unidad de ancho.

SOLUCIÓN Fluye aceite para motor sobre una placa plana. Se debe determinar la fuerza de arrastre por unidad de ancho de la placa.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario e incompresible. **2** El número de Reynolds crítico es $\text{Re}_{cr} = 5 \times 10^5$.
Propiedades La densidad y viscosidad cinemática del aceite para motor a 40°C son $\rho = 876$ kg/m^3 y $\nu = 2.485 \times 10^{-4}$ m^2/s.

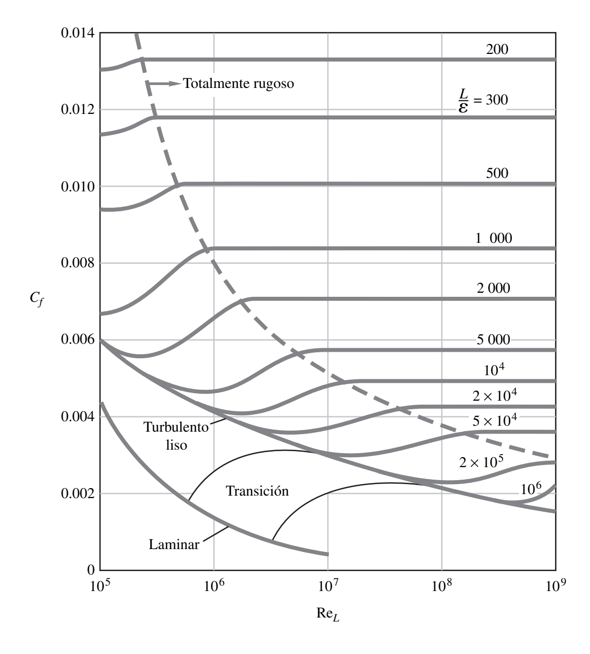


FIGURA 11-31
Coeficiente de fricción para flujo paralelo sobre placas planas lisas o rugosas.
Tomado de White (2003).

Análisis Note que $L = 5$ m, el número de Reynolds al final de la placa es:

$$\text{Re}_L = \frac{VL}{\nu} = \frac{(2 \text{ m/s})(5 \text{ m})}{2.485 \times 10^{-4} \text{ m}^2\text{/s}} = 4.024 \times 10^4$$

que es menor que el número de Reynolds crítico. Por lo tanto, se tiene *flujo laminar* sobre toda la placa, y el coeficiente de fricción promedio es (Fig. 11-29):

$$C_f = 1.328\text{Re}_L^{-0.5} = 1.328 \times (4.024 \times 10^4)^{-0.5} = 0.00662$$

Note que el arrastre debido a presión es cero, y por lo tanto $C_D = C_f$ para flujo paralelo sobre una placa plana, la fuerza de arrastre que actúa sobre la placa por unidad de ancho se convierte en:

$$F_D = C_f A\frac{\rho V^2}{2} = 0.00662(5 \times 1 \text{ m}^2)\frac{(876 \text{ kg/m}^3)(2 \text{ m/s})^2}{2}\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = \mathbf{58.0 \text{ N}}$$

La fuerza de arrastre total que actúa sobre toda la placa puede determinarse cuando se multiplica el valor obtenido por el ancho de la placa.

Discusión La fuerza por unidad de ancho corresponde al peso de una masa de aproximadamente 6 kg. En consecuencia, cuando se aplica a la placa una fuerza igual y opuesta para evitar que se mueva se sentirá cómo se usa la fuerza necesaria para evitar que caiga una masa de 6 kg.

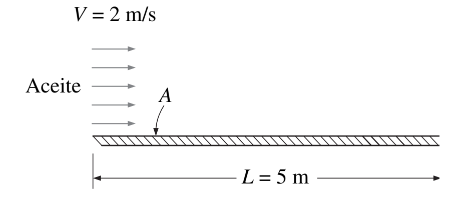


FIGURA 11-32
Esquema para el ejemplo 11-3.

11-6 ▪ FLUJO SOBRE CILINDROS Y ESFERAS

En la práctica con frecuencia se encuentra flujo sobre cilindros y esferas. Por ejemplo, en un intercambiador de calor de tipo de coraza y tubos, los tubos incluyen tanto *flujo interno* en los tubos como *flujo externo* sobre los tubos, y ambos flujos deben considerarse en el análisis del intercambiador de calor. Además, numerosos deportes, como el fútbol sóccer, tenis y golf, incluyen flujo sobre pelotas esféricas.

Se considera que la longitud característica para un cilindro circular o esfera es el *diámetro externo D*. Por lo tanto, el número de Reynolds se define como

$Re = VD/\nu$, donde V es la velocidad uniforme del fluido conforme se aproxima al cilindro o esfera. El número de Reynolds crítico para flujo a través de un cilindro circular o esfera es más o menos $Re_{cr} \cong 2 \times 10^5$. Esto es: la capa límite permanece laminar para casi $Re \lesssim 2 \times 10^5$ y se vuelve turbulenta para $Re \gtrsim 2 \times 10^5$.

El flujo transversal sobre un cilindro muestra complejos patrones de flujo, como se muestra en la figura 11-33. El fluido que se aproxima al cilindro se ramifica, circunda al cilindro y forma una capa límite que envuelve al cilindro. Las partículas de fluido en el plano medio golpean al cilindro en el punto de estancamiento, lo que lleva al fluido a detenerse totalmente y por lo tanto aumenta la presión en este punto. La presión disminuye en la dirección del flujo mientras que la velocidad del fluido aumenta.

A velocidad corriente arriba muy baja ($Re \lesssim 1$), el fluido envuelve totalmente al cilindro y los dos brazos del fluido se encuentran en el lado posterior del cilindro de manera ordenada. Por lo tanto, el fluido sigue la curvatura del cilindro. A velocidades más altas, el fluido inclusive abraza al cilindro en el lado frontal, pero es demasiado rápido para permanecer unido a la superficie conforme se aproxima a la parte superior (o inferior) de éste. Como resultado, la capa límite se desprende de la superficie y forma una región de separación detrás del cilindro. El flujo en la región de estela se caracteriza por la formación de vórtices periódicos y por presiones mucho más bajas que la presión del punto de estancamiento.

La naturaleza del flujo a través de un cilindro o esfera afecta considerablemente el coeficiente de arrastre total C_D. El *arrastre debido a fricción* como el *debido a presión* pueden ser significativos. La alta presión en la vecindad del punto de estancamiento y la baja presión en el lado opuesto en la estela producen una fuerza neta sobre el cuerpo en la dirección del flujo. La fuerza de arrastre se debe principalmente al arrastre debido a fricción a números de Reynolds bajos ($Re < 10$) y a arrastre debido a presión a números de Reynolds altos ($Re > 5\,000$). Ambos efectos son significativos a números de Reynolds intermedios.

En la figura 11-34 se proporcionan los coeficientes de arrastre promedio C_D para flujo transversal sobre un solo cilindro circular liso y una esfera. Las curvas muestran diferentes comportamientos en distintos rangos de números de Reynolds:

- Para $Re \lesssim 1$, se tiene flujo de Stokes (Capítulo 10), y el coeficiente de arrastre disminuye con número de Reynolds creciente. Para una esfera, es $C_D = 24/Re$. No hay separación de flujo en este régimen.
- A aproximadamente $Re = 10$, la separación comienza a ocurrir en la parte posterior del cuerpo con derrame de vórtices que comienza más o menos a $Re \cong 90$. La región de separación aumenta con número de Reynolds creciente hasta alrededor de $Re = 10^3$. En este punto, el arrastre se debe principalmente (más o menos 95 por ciento) al arrastre debido a presión. El coeficiente de arrastre continúa disminuyendo con número de Reynolds creciente en este rango de $10 < Re < 10^3$ (una disminución en el coeficiente de arrastre no

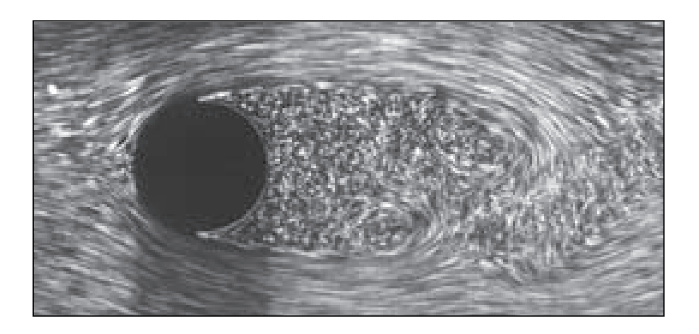


FIGURA 11-33
Separación de capa límite laminar con estela turbulenta; flujo sobre un cilindro circular a $Re = 2\,000$.
Cortesía de ONERA, fotografía de Werlé.

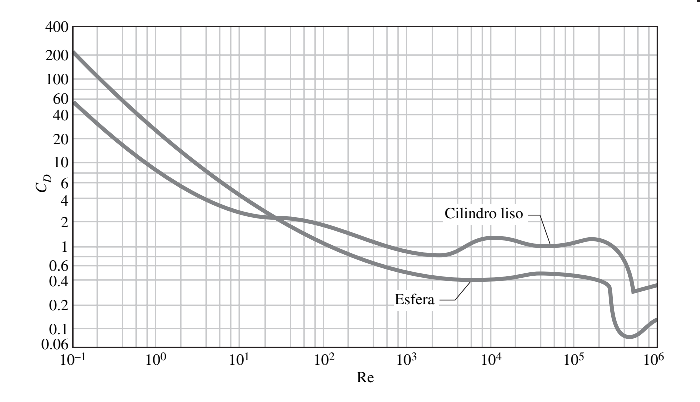
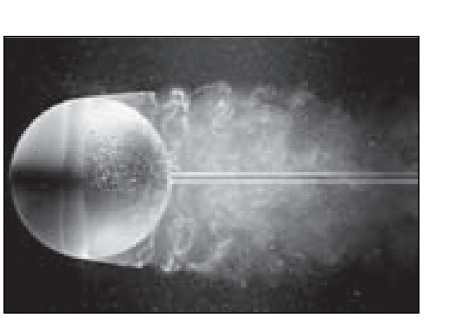


FIGURA 11-34
Coeficiente de arrastre promedio para flujo transversal sobre un cilindro circular liso y una esfera lisa.
Tomado de H. Schlichting, Boundary Layer Theory 7a. *ed. Copyright © 1979 The McGraw-Hill Companies, Inc. Reproducido con autorización.*

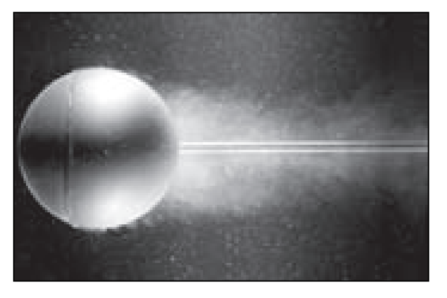
necesariamente indica una disminución en el arrastre. La fuerza de arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad, y el aumento en la velocidad a números de Reynolds mayores usualmente más que compensa la disminución en coeficiente de arrastre).

- En el rango moderado de $10^3 < \text{Re} < 10^5$, el coeficiente de arrastre permanece relativamente constante. Este comportamiento es característico de cuerpos romos. El flujo en la capa límite es laminar en este rango, pero el flujo en la región separada atrás del cilindro o esfera es sumamente turbulento con amplia estela turbulenta.
- Existe una caída súbita en el coeficiente de arrastre en alguna parte en el rango de $10^5 < \text{Re} < 10^6$ (casi 2×10^5). Esta notable reducción en C_D se debe al flujo en la capa límite que se vuelve *turbulento*, que mueve el punto de separación más allá sobre su parte posterior, lo que reduce el tamaño de la estela y por lo tanto la magnitud del arrastre debido a presión. Esto contrasta con los cuerpos currentilíneos que experimentan un aumento en el coeficiente de arrastre (principalmente debido al arrastre por fricción) cuando la capa límite se vuelve turbulenta.

La separación del flujo ocurre aproximadamente en $\theta \cong 80°$ (medido desde el punto de estancamiento frontal de un cilindro) cuando la capa límite es *laminar* y aproximadamente en $\theta \cong 140°$ cuando es *turbulenta* (Fig. 11-35). La demora de separación en el flujo turbulento la provocan las rápidas fluctuaciones del fluido en la dirección transversal, lo que permite que la capa límite turbulenta viaje más lejos a lo largo de la superficie antes que ocurra la separación, lo que resulta en una estela más estrecha y un arrastre debido a presión más pequeño. Recuerde que el flujo turbulento tiene un perfil de velocidad más plano en comparación con el caso laminar, y por lo tanto necesita un gradiente de presión adverso más intenso para superar la cantidad de movimiento adicional cerca de la pared. En el rango de número de Reynolds donde el flujo cambia de laminar a turbulento, inclusive la fuerza de arrastre F_D disminuye conforme la velocidad (y por lo tanto el número de Reynolds) aumenta. Esto causa una súbita disminu-



a)



b)

FIGURA 11-35
Visualización de flujo sobre *a*) una esfera lisa a Re = 15 000 y *b*) una esfera a Re = 30 000 con un alambre provocador de turbulencia. La demora en la separación de la capa límite se aprecia claramente cuando se comparan las dos fotografías.
Cortesía de ONERA, fotografía de Werlé.

ción en el arrastre de un cuerpo que vuela (a veces se le llama *crisis de arrastre*) e inestabilidades en el vuelo.

Efecto de rugosidad de superficie

Como ya se mencionó, en general, la *rugosidad de superficie* aumenta el coeficiente de arrastre en el flujo turbulento. Éste es especialmente el caso para los cuerpos currentilíneos. Sin embargo, para cuerpos romos como un cilindro circular o esfera, un aumento en la rugosidad de la superficie puede en realidad *disminuir* el coeficiente de arrastre, como se muestra en la figura 11-36 para una esfera. Esto se hace cuando se dispara intempestivamente la capa límite en turbulencia a un número de Reynolds más bajo, y por lo tanto cuando se provoca que el fluido se separe más atrás del cuerpo, con lo que se estrecha la estela y se reduce considerablemente el arrastre debido a presión. Esto resulta en un coeficiente de arrastre mucho más pequeño, en cierto rango de número de Reynolds, y por lo tanto en la fuerza de arrastre más pequeña para un cilindro o esfera rugosos comparado con unos lisos de tamaño idéntico, a la misma velocidad. Por ejemplo, a $\text{Re} = 2 \times 10^5$, $C_D \cong 0.1$ para una esfera rugosa con $\varepsilon/D = 0.0015$, mientras que $C_D \cong 0.5$ para una lisa. En consecuencia, el coeficiente de arrastre en ese caso se reduce por un factor de 5 con simplemente volver rugosa la superficie. Sin embargo, note que, a $\text{Re} = 10^6$, $C_D \cong 0.4$ para una esfera muy rugosa, mientras que $C_D \cong 0.1$ para la lisa. Obviamente, volver rugosa la esfera en este caso aumentará el arrastre por un factor de 4 (Fig. 11-37).

El comentario precedente muestra que cuando se hace rugosa la superficie puede usarse en la reducción de arrastre, pero también puede "salir el tiro por la culata" si no se tiene cuidado, especialmente si no se opera en el rango correcto del número de Reynolds. Con esta consideración, las pelotas de golf intencionalmente se hacen rugosas para inducir *turbulencia* a un número de Reynolds más bajo, para aprovechar la *caída* en el coeficiente de arrastre en el establecimiento de la turbulencia en la capa límite (el rango típico de velocidad de las pelotas de golf es de 15 a 150 m/s, y el número de Reynolds es menor que 4×10^5). El número de Reynolds crítico de las pelotas de golf con hoyuelos es alrededor de 4×10^4. La ocurrencia de flujo turbulento a este número de Reynolds reduce el coeficiente de arrastre de una pelota de golf casi por la mitad, como se muestra en la figura 11-36. Para un golpe dado, esto significa una distancia más larga para la pelota. Los golfistas experimentados también le dan un giro durante el golpe, lo que ayuda a que la pelota rugosa desarrolle una sustentación y por lo tanto viaje más alto y más lejos. Un argumento similar puede darse para una pelota de tenis. Sin embargo, para una pelota de tenis de mesa, las distancias son

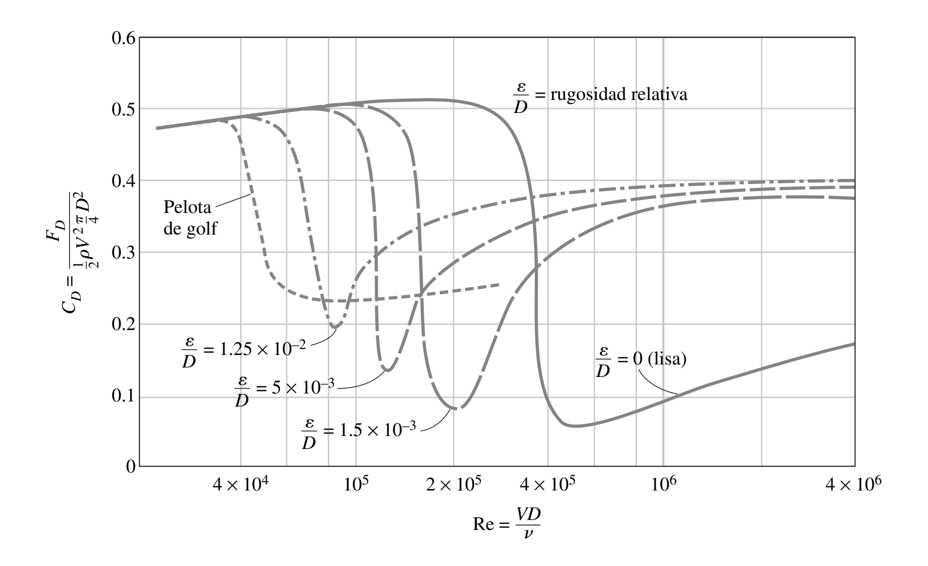


FIGURA 11-36
El efecto de la superficie rugosa en el coeficiente de arrastre de una esfera.
Tomado de Blevins (1984).

muy cortas, y las pelotas nunca alcanzan las velocidades en el rango turbulento. Por lo tanto, las superficies de las pelotas de tenis de mesa se fabrican lisas.

Cuando el coeficiente de arrastre está disponible, la fuerza de arrastre que actúa sobre un cuerpo en el flujo transversal puede determinarse a partir de la ecuación 11-5, donde A es el *área frontal* ($A = LD$ para un cilindro de longitud L y $A = \pi D^2/4$ para una esfera). Debe recordarse que la turbulencia del flujo libre y las perturbaciones de otros cuerpos en el flujo (como en el caso de flujo sobre un banco de tubos) pueden afectar significativamente los coeficientes de arrastre.

	C_D	
Re	Superficie lisa	Superficie rugosa, $\varepsilon/D = 0.0015$
2×10^5	0.5	0.1
10^6	0.1	0.4

FIGURA 11-37
La rugosidad de la superficie puede aumentar o disminuir el coeficiente de arrastre de un objeto esférico; esto depende del valor del número de Reynolds.

EJEMPLO 11-4 **Fuerza de arrastre que actúa sobre una tubería en un río**

Una tubería de 2.2 cm de diámetro exterior debe cruzar un río de 30 m de ancho mientras está totalmente sumergida en el agua (Fig. 11-38). La velocidad de flujo promedio del agua es de 4 m/s y la temperatura del agua es de 15°C. Determine la fuerza de arrastre que el río ejerce sobre la tubería.

SOLUCIÓN Una tubería está sumergida en un río. Debe determinar la fuerza de arrastre que actúa sobre la tubería.

Hipótesis **1** La superficie exterior de la tubería es lisa, de modo que puede usarse la figura 11-34 para determinar el coeficiente de arrastre. **2** El flujo de agua en el río es estacionario. **3** La dirección del flujo de agua es normal a la tubería. **4** No se considera la turbulencia en el flujo del río.

Propiedades La densidad y la viscosidad dinámica del agua a 15°C son $\rho = 999.1$ kg/m^3 y $\mu = 1.138 \times 10^{-3}$ kg/m · s.

Análisis Note que $D = 0.022$ m, el número de Reynolds es:

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{(999.1 \text{ kg/m}^3)(4 \text{ m/s})(0.022 \text{ m})}{1.138 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 7.73 \times 10^4$$

El coeficiente de arrastre que corresponde a este valor es, a partir de la figura 11-34, $C_D = 1.0$. Además, el área frontal para el flujo que pasa por un cilindro es $A = LD$. Entonces, la fuerza de arrastre que actúa sobre la tubería se convierte en:

$$F_D = C_D A \frac{\rho V^2}{2} = 1.0(30 \times 0.022 \text{ m}^2)\frac{(999.1 \text{ kg/m}^3)(4 \text{ m/s})^2}{2}\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$
$$= 5\,275 \text{ N} \cong \mathbf{5\,300\ N}$$

Discusión Note que esta fuerza equivale al peso de una masa de más de 500 kg. Por lo tanto, la fuerza de arrastre que el río ejerce sobre la tubería equivale a colgar un total de más de 500 kg en masa sobre la tubería sostenida en sus extremos separados 30 m. Deben tomarse las precauciones necesarias si la tubería no puede soportar esta fuerza. Si el río fluyera con una velocidad mayor o si las fluctuaciones turbulentas en el río fueran más significativas, la fuerza de arrastre sería inclusive mayor. Entonces, pueden ser significativas las fuerzas *no-estacionarias* sobre la tubería.

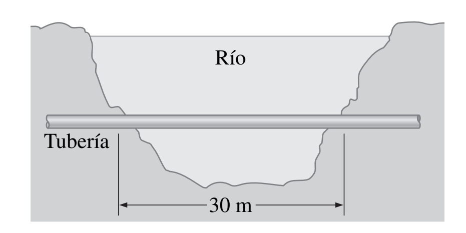


FIGURA 11-38
Esquema para el ejemplo 11-4.

11-7 ▪ SUSTENTACIÓN

La sustentación se definió anteriormente como la componente de la fuerza neta (debido a fuerzas viscosas y de presión) que es perpendicular a la dirección del flujo, y el coeficiente de sustentación se expresó como:

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \qquad \text{(11–6)}$$

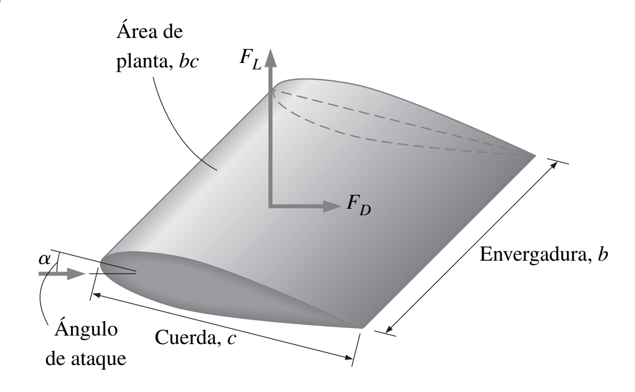


FIGURA 11-39
Definición de varios términos relacionados con una superficie de sustentación.

donde A en este caso es normalmente el *área de planta*, que es el área que una persona vería si observara el cuerpo desde arriba en una dirección normal al cuerpo, y V es la velocidad corriente arriba del fluido (o, de manera equivalente, la velocidad de un cuerpo volador en un fluido en reposo). Para una superficie de sustentación de ancho (o envergadura) b y longitud de cuerda c (la longitud entre los bordes de entrada y de salida), el área de planta es $A = bc$. La distancia entre los dos extremos de un ala o superficie de sustentación se llama **envergadura**. Para una aeronave, la envergadura se considera como la distancia total entre las puntas de las dos alas, que incluye el ancho del fuselaje entre las alas (Fig. 11-39). La sustentación promedio por unidad de área de planta F_L/A se llama **carga alar**, que es simplemente la razón del peso de la aeronave al área de la planta de las alas (porque la sustentación iguala al peso durante el vuelo a altitud constante).

El vuelo del avión se basa en la sustentación, y por lo tanto, entender mejor el fenómeno de la sustentación, así como la mejora de las características de sustentación de los cuerpos ha sido el tema de numerosos estudios. El énfasis de esta sección está en los dispositivos como las *superficies de sustentación* específicamente diseñadas para generar sustentación mientras mantienen el arrastre en un mínimo. Pero, debe considerarse que algunos dispositivos, como los *spoilers* y las *superficies de sustentación invertidas* de los autos de carrera están diseñados para el propósito contrario de evitar la sustentación o inclusive generar sustentación negativa para mejorar la tracción y el control (algunos automóviles pioneros en realidad "despegaban" a altas velocidades como resultado de la sustentación producida, lo que alertó a los ingenieros a encontrar medios para reducir la sustentación en sus diseños).

Para los dispositivos que tienen la finalidad de generar sustentación, como las superficies de sustentación, la aportación de los *efectos viscosos* a la sustentación por lo general es despreciable, porque los cuerpos son aerodinámicos, y la fuerza de corte es paralela a las superficies de estos dispositivos y por lo tanto casi normal a la dirección de sustentación (Fig. 11-40). En consecuencia, en la práctica, puede considerarse que la sustentación se debe por completo a la distribución de presión sobre las superficies del cuerpo, y por lo tanto la forma del cuerpo tiene la influencia principal sobre la sustentación. Entonces, la consideración principal en el diseño de las superficies de sustentación es minimizar la presión promedio en la superficie superior mientras se maximiza en la superficie inferior. Se puede usar la ecuación de Bernoulli como guía para identificar las regiones de alta y baja presión: *la presión es baja en las posiciones donde la velocidad del flujo es alta, y la presión es alta en las po-siciones donde la velocidad del flujo es baja.* Además, la sustentación prácticamente es independiente de la rugosidad de la superficie porque la rugosidad afecta a la fuerza cortante, no a la presión. La aportación de la fuerza cortante a la sustentación, de manera usual, sólo es significativa para cuerpos muy pequeños (ligeros) que

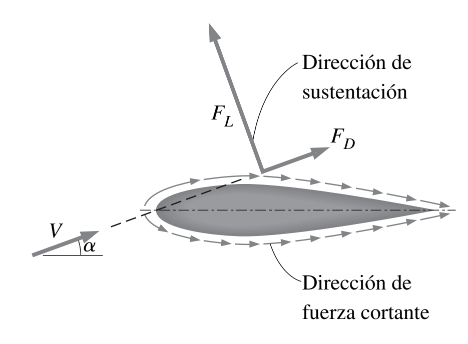
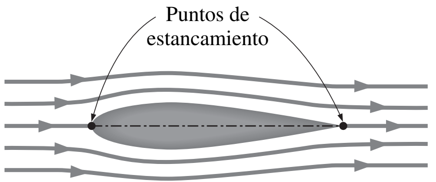
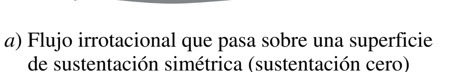
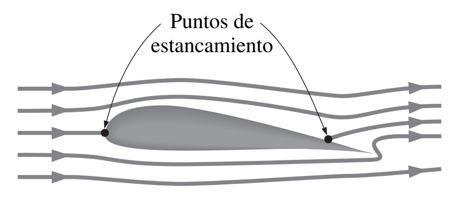


FIGURA 11-40
Para las superficies de sustentación, la aportación de los efectos viscosos es despreciable, por lo general, porque la fuerza cortante es paralela a la superficie y por lo tanto casi normal a la dirección de sustentación.

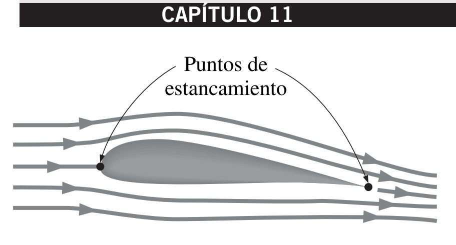




a) Flujo irrotacional que pasa sobre una superficie de sustentación simétrica (sustentación cero)



b) Flujo irrotacional que pasa sobre una superficie de sustentación no-simétrica (sustentación cero)



c) Flujo real que pasa sobre una superficie de sustentación no simétrica (sustentación positiva)

FIGURA 11-41
Flujo irrotacional y flujo real que pasan por superficies de sustentación bidimensionales simétricas y no-simétricas.

pueden volar a velocidades bajas (y por lo tanto a números de Reynolds muy bajos).

Al notar que la aportación de los efectos viscosos a la sustentación es despreciable, el lector debe ser capaz de determinar la sustentación que actúa sobre una superficie de sustentación con simplemente integrar la distribución de presión alrededor de la superficie de sustentación. La presión cambia en la dirección del flujo a lo largo de la superficie, pero en esencia permanece constante a través de la capa límite en una dirección normal a la superficie (Cap. 10). En consecuencia, parece razonable ignorar la capa límite muy delgada sobre la superficie de sustentación y calcular la distribución de presión alrededor de la superficie de sustentación desde la relativamente simple teoría de flujo potencial (cero vorticidad, flujo irrotacional) para que las fuerzas viscosas netas sean cero para el flujo que pasa sobre una superficie de sustentación.

Los campos de flujo que se obtienen a partir de estos cálculos se bosquejan en la figura 11-41 para superficies de sustentación simétricas y no-simétricas cuando se ignora la delgada capa límite. A un ángulo de ataque cero, la sustentación que se produce por la superficie de sustentación simétrica es cero, como se esperaba debido a la simetría, y los puntos de estancamiento están en los bordes de entrada y de salida. Para la superficie de sustentación no-simétrica, que está a un ángulo de ataque pequeño, el punto de estancamiento frontal se movió detrás del borde de entrada, y el punto de estancamiento posterior se desplazó hacia la superficie superior cerca del borde de salida. Es sorprendente que la sustentación producida de nuevo se calcula en cero, una clara contradicción de las observaciones y mediciones experimentales. Obviamente, es necesario modificar la teoría para adaptarla a los fenómenos observados.

La causa de inconsistencia es el punto de estancamiento posterior que se encuentra en la superficie superior en lugar del borde de salida. Esto provoca que el fluido del lado inferior haga casi una vuelta en "U" y fluya alrededor del borde de salida hacia el punto de estancamiento mientras permanece unido a la superficie, lo que es una imposibilidad física porque el fenómeno observado es la separación de flujo en vueltas agudas (imagine un automóvil que intenta dar esta vuelta a alta velocidad). En consecuencia, el fluido del lado inferior se separa suavemente del borde de salida, y el fluido del lado superior responde cuando se empuja el punto de estancamiento posterior corriente abajo. De hecho, el punto de estancamiento en la superficie superior se desplaza hacia el borde de salida. De esta manera las dos corrientes de flujo provenientes de los lados superior e inferior de la superficie de sustentación están en el borde de salida, lo que produce un suave flujo corriente abajo paralelo al borde de salida. La sustentación se genera porque la velocidad del flujo en la superficie superior es mayor, y por lo tanto la presión sobre dicha superficie es menor debido al efecto de Bernoulli.

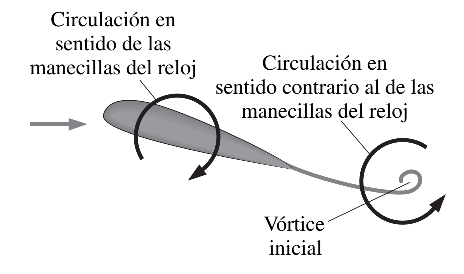


FIGURA 11-42
Poco después de un súbito aumento en el ángulo de ataque, un vórtice inicial en sentido contrario a las manecillas del reloj se desprende de la superficie de sustentación, mientras que aparece circulación en sentido de las manecillas del reloj alrededor de la superficie de sustentación, lo que provoca que se genere sustentación.

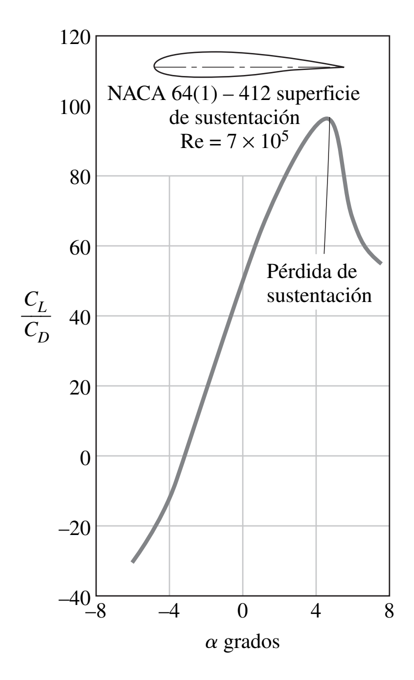


FIGURA 11-43
Variación de la razón de sustentación al arrastre con el ángulo de ataque para una superficie de sustentación bidimensional.
Tomado de Abbott, von Doenhoff y Stivers (1945).

La teoría de flujo potencial y el fenómeno observado pueden reconciliarse del modo siguiente: el flujo comienza a salir como postula la teoría, sin sustentación; pero, la corriente de flujo inferior se separa en el borde de salida cuando la velocidad alcanza cierto valor. Esto fuerza a la corriente superior de fluido separada a cerrarse en el borde de salida, lo que inicia circulación en sentido de las manecillas del reloj alrededor de la superficie de sustentación. Esta circulación en sentido de las manecillas del reloj aumenta la velocidad de la corriente superior mientras disminuye la de la corriente inferior, lo que provoca sustentación. Entonces, corriente abajo, se desprende un **vórtice inicial** de signo opuesto (circulación contra las manecillas del reloj) (Fig. 11-42), y sobre la superficie de sustentación se establece un flujo aerodinámico suave. Cuando se modifica la teoría del flujo potencial al agregar una cantidad adecuada de circulación para mover el punto de estancamiento hacia el borde de salida, se obtiene una excelente concordancia entre la teoría y el experimento, tanto para el campo de flujo como para la sustentación.

Es deseable que las superficies de sustentación generen la mayor sustentación mientras producen el menor arrastre. En consecuencia, una medida de desempeño de las superficies de sustentación es la **razón de sustentación al arrastre**, que es equivalente a la razón del coeficiente de sustentación al coeficiente de arrastre C_L/C_D. Esta información se ofrece cuando se grafica C_L contra C_D para diferentes valores del ángulo de ataque (un diagrama polar sustentación-arrastre) o cuando se grafica la razón C_L/C_D contra el ángulo de ataque. Esto último se hace en la figura 11-43 para un diseño de superficie de sustentación particular. Note que la razón C_L/C_D aumenta con el ángulo de ataque hasta que la superficie de sustentación entra en pérdida, y el valor de la razón de sustentación al arrastre puede ser del orden de 100.

Una manera obvia de cambiar las características de sustentación y de arrastre de una superficie de sustentación es modificar el ángulo de ataque. Por ejemplo, en un avión, todo el avión se inclina para aumentar la sustentación, ya que las alas están fijas en relación con el fuselaje. Otra posibilidad es cambiar la forma de la superficie de sustentación mediante el uso de los *flaps* (aletas) de *bordes de entrada* y *de salida* móviles, como se hace comúnmente en las modernas grandes aeronaves (Fig. 11-44). Los *flaps* se usan para alterar la forma de las alas durante el despegue y el aterrizaje para maximizar la sustentación y permitir que la aeronave aterrice o despegue a bajas velocidades. El aumento en el arrastre durante el despegue y el aterrizaje no es de mayor preocupación debido a los periodos de tiempo implícitos relativamente cortos. Ya en altitud de crucero, los *flaps* se retraen y el ala regresa a su forma "normal" con mínimo coeficiente de arrastre y adecuado coeficiente de sustentación para minimizar el consumo de combustible mientras se vuela a una altitud constante. Note que, inclusive, un pequeño coeficiente de sustentación puede generar gran fuerza de sustentación durante una operación normal, debido a las grandes velocidades de crucero de las aeronaves y a la proporcionalidad de la sustentación al cuadrado de la velocidad de flujo.

En la figura 11-45 se muestran los efectos de los *flaps* sobre los coeficientes de sustentación y de arrastre para una superficie de sustentación. Note que el máximo coeficiente de sustentación aumenta de casi 1.5 para la superficie de


a) *Flaps* extendidos (despegue)


b) *Flaps* retraídos (crucero)

FIGURA 11-44
Cuando se cambia la forma de la superficie de sustentación por medio de *flaps* móviles es posible modificar las características de sustentación y arrastre de una superficie de sustentación durante el despegue y el aterrizaje.
Fotografía de Yunus Çengel.

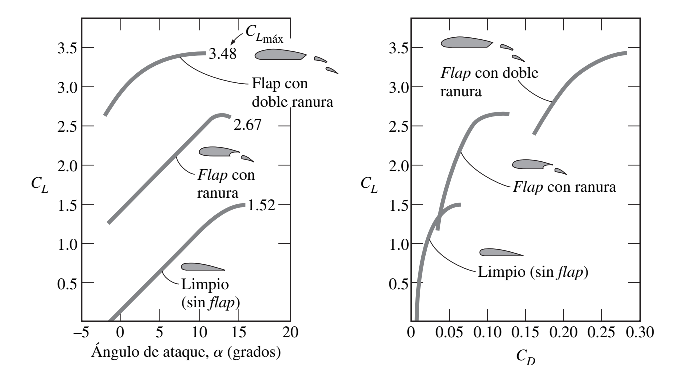


FIGURA 11-45
Efecto de los *flaps* sobre los coeficientes de sustentación y arrastre de una superficie de sustentación.
Tomado de Abbott y von Doenhoff, para NACA 23012 (1959).

sustentación sin *flaps* hasta 3.5 para el caso de *flap* con doble ranura. Pero, note también que el máximo coeficiente de arrastre aumenta alrededor de 0.06 para una superficie de sustentación sin *flaps* hasta más o menos 0.3 para el caso de *flap* de doble ranura. Éste es un aumento de cinco veces en el coeficiente de arrastre, y los motores deben funcionar con mayor potencia para ofrecer el empuje necesario y superar este arrastre. El ángulo de ataque de los *flaps* puede aumentarse para maximizar el coeficiente de sustentación. Además, los bordes de entrada y de salida extienden la longitud de cuerda y por lo tanto alargan el área de ala A. El Boeing 727 usa un *flap* con triple ranura en el borde de salida y una ranura en el borde de entrada.

La velocidad mínima de vuelo puede determinarse a partir del requisito de que el peso total W de la aeronave sea igual a la sustentación y $C_L = C_{L,\,\text{máx}}$. Es decir:

$$W = F_L = \tfrac{1}{2} C_{L,\,\text{máx}}\, \rho V_{\text{mín}}^2 A \qquad \rightarrow \qquad V_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho C_{L,\,\text{máx}} A}} \tag{11–24}$$

Para un peso dado, la velocidad de aterrizaje o despegue se puede minimizar cuando se maximiza el producto del coeficiente de sustentación y el área del ala, $C_{L,\,\text{máx}}A$. Una manera de hacer esto es usar *flaps*, como ya se indicó. Otra es controlar la capa límite, lo que puede lograrse simplemente cuando se dejan secciones de flujo (ranuras) entre los *flaps*, como se muestra en la figura 11-46. Las ranuras se usan para evitar la separación de la capa límite de la superficie superior de las alas y los *flaps*. Esto se hace cuando se permite que el aire se desplace desde la región de alta presión bajo el ala hacia la región de baja presión en la superficie superior. Note que el coeficiente de sustentación alcanza su máximo $C_L = C_{L,\,\text{máx}}$ y la velocidad de vuelo, su mínimo, en condiciones de pérdida de sustentación, que es una región de operación inestable y debe evitarse. Por seguridad, la Administración Federal de Aviación estadounidense (FAA, por sus siglas en inglés) no permite la operación por abajo de 1.2 veces la velocidad de pérdida de sustentación.

Otro detalle que se advierte a partir de esta ecuación es que la velocidad mínima para el despegue o el aterrizaje es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad. Note que la densidad del aire disminuye con la altitud (casi en 15 por ciento a 1 500 m), en los aeropuertos a grandes altitudes, como Denver, se necesitan pistas más largas para ajustarse a las mayores velocidades mínimas de despegue y aterrizaje. La situación se vuelve todavía más crítica en los calurosos días de verano, porque la densidad del aire es inversamente proporcional a la temperatura.

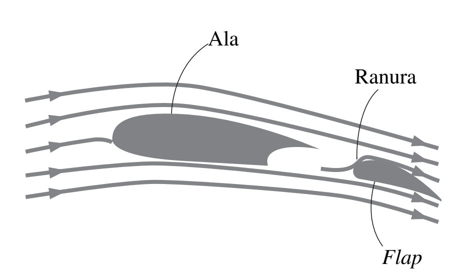


FIGURA 11-46
Una superficie de sustentación con *flap* de una ranura para evitar la separación de la capa límite de la superficie superior y para aumentar el coeficiente de sustentación.

Efectos de los extremos de las alas

Para las alas de los aviones y otras superficies de sustentación de tamaño finito, los efectos en los extremos de las alas se vuelven importantes, debido al escape

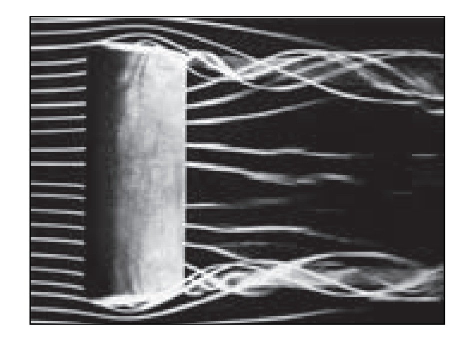


FIGURA 11-47
Vórtices de salida de un ala rectangular con núcleos de vórtices que dejan el borde de salida en las puntas del ala.
Cortesía de The Parabolic Press, Stanford, California. Reproducido con autorización.

de fluido de la superficie inferior a superior. La diferencia de presión entre la superficie inferior (región de presión alta) y la superficie superior (región de presión baja) conduce al fluido en las puntas hacia la superficie superior, mientras que el fluido se barre hacia la parte trasera debido al movimiento relativo entre el fluido y el ala. Esto resulta, en las puntas de ambas alas, en un movimiento de remolino que gira en espiral a lo largo del flujo, llamado **vórtice de extremo**. Los vórtices también se forman a lo largo de la superficie de sustentación entre las puntas de las alas. Estos vórtices distribuidos se reúnen hacia los bordes después de desprenderse de los bordes de salida de las alas y se combinan con los vórtices de extremo para formar dos líneas de poderosos **vórtices de salida** a lo largo de las puntas de las alas (Figs. 11-47 y 11-48). Los vórtices de salida que se generan en los grandes aviones existen durante largo tiempo para largas distancias (arriba de 10 km) antes de que gradualmente desaparezcan debido a disipación viscosa. Estos vórtices y la corriente descendente acompañante son lo suficientemente fuertes para provocar que una pequeña aeronave pierda el control y se voltee si vuela través de la estela de una gran aeronave. Por lo tanto, seguir de cerca a los grandes aviones (dentro de 10 km) representa un peligro verdadero para las aeronaves más pequeñas. Este hecho es un factor de control que gobierna la separación de las aeronaves al despegar, lo que limita la capacidad de vuelo en los aeropuertos. En la naturaleza, este efecto lo usan las aves migratorias para aprovechar sus formaciones en "V", porque utilizan el arrastre ascendente generado por el ave que vuela al frente. Se ha determinado que las aves, en una parvada típica, pueden viajar a sus destinos en formación "V" con un tercio menos de energía. Por la misma razón, de manera ocasional los aviones militares también vuelan en formación "V".

Los vórtices de extremo que interactúan con el flujo libre imponen fuerzas sobre las puntas de las alas en todas direcciones, inclusive en la dirección del flujo. La componente de la fuerza en la dirección del flujo se añade al arrastre; se llama **arrastre inducido**. Entonces, el arrastre total de un ala es la suma del arrastre inducido (efectos tridimensionales) y el arrastre de la superficie de sustentación.

La razón del cuadrado de la envergadura promedio de una superficie de sustentación al área de planta se llama **relación dimensional**. Para una superficie de sustentación con una planta rectangular de cuerda c y envergadura b, se expresa como:

$$AR = \frac{b^2}{A} = \frac{b^2}{bc} = \frac{b}{c} \qquad \textbf{(11–25)}$$

Por lo tanto, la relación dimensional es una medida de qué estrecha es una superficie de sustentación en la dirección del flujo. En general, el coeficiente de sustentación de las alas aumenta mientras el coeficiente de arrastre disminuye



FIGURA 11-48
Un avión fumigador de masas vuela a través de aire con humo para ilustrar los vórtices de extremidad que se producen en las puntas de las alas.
NASA Langley Research Center.

con la relación dimensional creciente. Esto se debe a que una larga ala estrecha (relación dimensional grande) tiene una longitud de punta más corta y por lo tanto pérdidas de punta más pequeñas y arrastre inducido más pequeño que un ala corta y ancha de la misma área de planta. En consecuencia, los cuerpos con grandes relaciones dimensionales vuelan de manera más eficiente, pero tienen menos maniobrabilidad debido a sus grandes momentos de inercia (ya que hay una mayor distancia desde el centro). Los cuerpos con relaciones dimensionales más pequeñas maniobran mejor debido a que las alas están más cerca de la parte central. De este modo, no es sorprendente que los *aviones de caza* (y las aves predadoras como los halcones) tengan alas cortas y anchas, mientras que los *grandes aviones comerciales* (y las aves que planean, como los albatros) tienen alas largas y estrechas.

Los efectos de punta pueden minimizarse cuando se unen **aletas** (**placas extremas)** o ***winglets*** en las puntas de las alas, perpendiculares a la superficie superior. Las aletas funcionan cuando se bloquea parte del escape de fluido alrededor de las puntas de las alas de la superficie interior hacia la superior, lo que resulta una considerable reducción en la intensidad de los vórtices de extremo y el arrastre inducido. Las plumas en las puntas de las alas de las aves se extienden con el mismo propósito (Fig. 11-49).

El desarrollo de superficies de sustentación eficientes (bajo arrastre) fue el tema de intensas investigaciones experimentales en los años 30. Estas superficies de sustentación fueron estandarizadas por el National Advisory Committee for Aeronautics (Comité Consultivo Nacional para Aeronáutica, NACA, ahora la NASA), y se reportaron grandes listas de datos acerca de sus coeficientes de sustentación. En la figura 11-50 se proporciona la variación del coeficiente de sustentación C_L con el ángulo de ataque para dos superficies de sustentación (NACA 0012 y NACA 2412). A partir de esta figura se hacen las siguientes observaciones:

- El coeficiente de sustentación aumenta casi linealmente con el ángulo de ataque α, alcanza un máximo alrededor de $\alpha = 16°$ y luego comienza a disminuir notablemente. Esta disminución de la sustentación con un mayor aumento en el ángulo de ataque se llama *pérdida de sustentación*. Se debe a la separación del flujo y la formación de una amplia región de estela sobre la superficie superior de la superficie de sustentación. La pérdida de sustentación es indeseable porque también aumenta el arrastre.
- En un ángulo de ataque cero ($\alpha = 0°$), el coeficiente de sustentación es cero para superficies de sustentación simétricas, pero es distinto de cero para las

a) Un buitre barbudo con las plumas de sus alas extendidas durante el vuelo.



b) Las aletas se usan en este avión para reducir el arrastre inducido.

FIGURA 11-49

El arrastre inducido se reduce mediante *a*) las plumas en las puntas de las alas de las aves y *b*) las placas extremas u otras aletas en las alas de aviones.

a) © Vol. 44/PhotoDisc. b) Cortesía Schempp-Hirth. Reproducido con permiso.

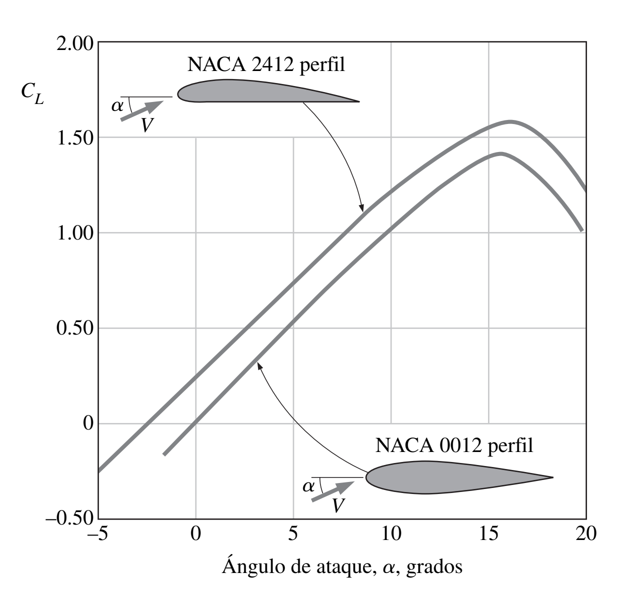


FIGURA 11-50

Variación del coeficiente de sustentación con el ángulo de ataque para una superficie de sustentación simétrica y una no-simétrica.

Tomado de Abbott (1932).

no-simétricas con mayor curvatura en la superficie superior. Por lo tanto, los aviones con perfiles de ala simétricos deben volar con sus alas en ángulos de ataque mayores con la finalidad de producir la misma sustentación.

- El coeficiente de sustentación puede aumentarse varias veces cuando se ajusta el ángulo de ataque (de 0.25 a $\alpha = 0°$, para la superficie de sustentación no-simétrica, hasta 1.25 a $\alpha = 10°$).
- El coeficiente de arrastre también aumenta con el ángulo de ataque, con frecuencia exponencialmente (Fig. 11-51). Por lo tanto, los grandes ángulos de ataque deben usarse con prudencia durante cortos periodos para eficiencia de combustible.

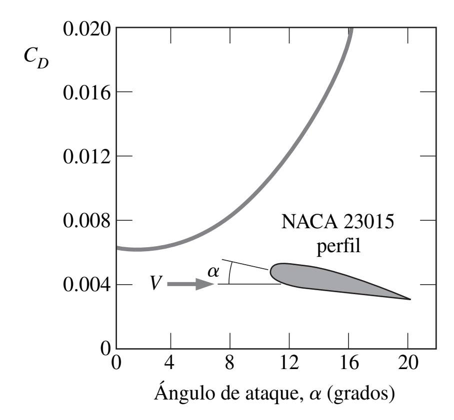
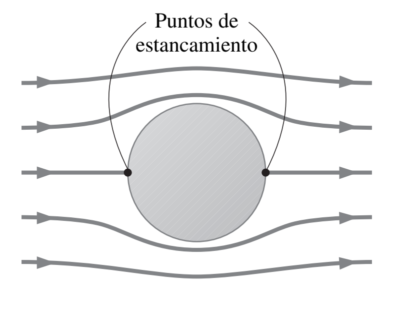


FIGURA 11-51
Variación del coeficiente de arrastre de una superficie de sustentación con el ángulo de ataque.
Yomado de Abbott y von Doenhoff, (1959)

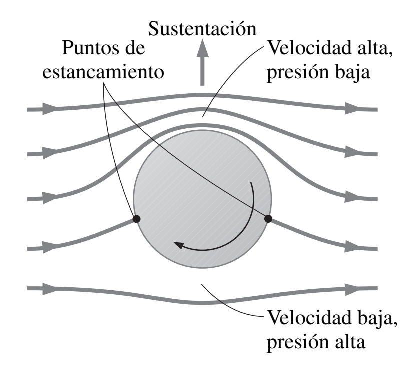
Sustentación generada por rotación

Quizá el lector ha intentado hacer girar una pelota de tenis, o dar un golpe descendente a una pelota de tenis o a una de tenis de mesa cuando da un giro hacia adelante con la finalidad de alterar las características de sustentación y hacer que la pelota siga una trayectoria más deseable y rebote del tiro. Los jugadores de golf, fútbol sóccer y béisbol, también utilizan este efecto en sus juegos. El fenómeno de producir sustentación mediante la rotación de un cuerpo sólido se llama **efecto Magnus**, en honor del científico alemán Heinrich Magnus (1802-1870), quien fue el primero en estudiar la sustentación de los cuerpos rotatorios (Fig. 11-52) para el caso simplificado de flujo irrotacional (potencial). Cuando la pelota no gira, la sustentación es cero debido a la simetría de su parte superior e inferior. Pero, cuando el cilindro rota alrededor de su eje, la superficie de cilindro arrastra consigo el fluido debido a la condición de no-deslizamiento y el campo de flujo refleja la superposición del flujo que gira y del que no gira. Los puntos de estancamiento se desplazan hacia abajo, y el flujo ya no es simétrico con respecto al plano horizontal que pasa a través del centro del cilindro. La presión promedio sobre la mitad superior es menor que la presión promedio en la mitad inferior debido al efecto de Bernoulli, y por lo tanto existe una *fuerza ascendente neta* (sustentación) que actúa sobre el cilindro. Un razonamiento similar puede proporcionarse para la sustentación que se genera sobre una pelota que gira.

En la figura 11-53 se muestra el efecto de la razón de rotación sobre los coeficientes de sustentación y de arrastre de una esfera lisa. Note que el coeficiente de sustentación depende de la razón de rotación, en especial a bajas velocidades angulares. El efecto de la razón de rotación sobre el coeficiente de arrastre es pequeño. La rugosidad también afecta los coeficientes de arrastre y sustentación. En cierto rango del número de Reynolds, la rugosidad produce el efecto deseable de aumentar el coeficiente de sustentación mientras disminuye el coefi-



a) Flujo potencial sobre un cilindro en reposo



b) Flujo potencial sobre un cilindro en rotación

FIGURA 11-52
Generación de sustentación sobre un cilindro circular rotatorio para el caso de flujo potencial “utópico” (el flujo real implica separación de flujo en la región de estela).

ciente de arrastre. Por lo tanto, las pelotas de golf con la cantidad correcta de rugosidad viajan más alto y más lejos que las lisas con el mismo golpe.

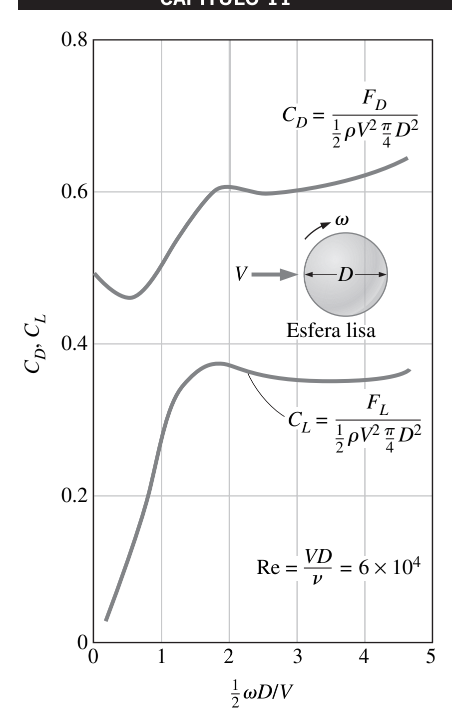


FIGURA 11-53
Variación de los coeficientes de sustentación y de arrastre de una esfera lisa con la razón de rotación adimensional para $\text{Re} = VD/\nu = 6 \times 10^4$.
Tomado de Goldstein, 1938.

EJEMPLO 11-5 Sustentación y arrastre de un avión comercial

Un avión comercial tiene una masa total de 70 000 kg y un área de planta de ala de 150 m^2 (Fig. 11-54). El avión puede alcanzar una velocidad de crucero de 558 km/h y una altitud de crucero de 12 000 m, donde la densidad del aire es de 0.312 kg/m^3. El avión tiene *flaps* de doble ranura para su uso durante el despegue y el aterrizaje, pero vuela con los *flaps* retraídos. Si se supone que las características de sustentación y de arrastre de las alas pueden aproximarse mediante el perfil NACA 23012 (Fig. 11-45), determine *a*) la mínima velocidad de seguridad para despegue y aterrizaje con y sin *flaps* extendidos, *b*) el ángulo de ataque para volar estacionariamente a la altitud de crucero y *c*) la potencia que se necesita suministrar para ofrecer suficiente empuje y superar el arrastre de las alas.

SOLUCIÓN Se proporcionan las condiciones de vuelo de un avión de pasajeros y sus características de ala. Deben determinarse las velocidades mínimas de aterrizaje y de despegue seguros, el ángulo de ataque durante el crucero y la potencia necesaria.
Hipótesis **1** No se considera el arrastre y la sustentación que se producen por otras partes del avión distintas a las alas, como el arrastre del fuselaje. **2** Se supone que las alas son secciones de superficies de sustentación bidimensionales, y que los efectos de las puntas de las alas no se consideran. **3** Las características de sustentación y arrastre de las alas pueden aproximarse mediante el perfil NACA 23012, de modo que es aplicable la figura 11-45. **4** La densidad promedio del aire sobre el suelo es de 1.20 kg/m^3.
Propiedades Las densidades del aire son 1.20 kg/m^3 sobre el suelo y 0.312 kg/m^3 a altitud de crucero. Los máximos coeficientes de sustentación $C_{L,\text{máx}}$ de las alas son 3.48 y 1.52 con y sin *flaps*, respectivamente (Fig. 11-45).
Análisis *a*) El peso y la velocidad de vuelo del avión son:

$$W = mg = (70\,000 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = 686\,700 \text{ N}$$

$$V = (558 \text{ km/h})\left(\frac{1 \text{ m/s}}{3.6 \text{ km/h}}\right) = 155 \text{ m/s}$$

Las velocidades mínimas correspondientes a las condiciones de pérdida de sustentación sin y con *flaps*, respectivamente, se obtienen a partir de la ecuación 11-24:

$$V_{\text{mín }1} = \sqrt{\frac{2W}{C_{L,\text{ máx }1}A}} = \sqrt{\frac{2(686\,700 \text{ N})}{(1.2 \text{ kg/m}^3)(1.52)(150 \text{ m}^2)}\left(\frac{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}{1 \text{ N}}\right)} = 70.9 \text{ m/s}$$

$$V_{\text{mín }2} = \sqrt{\frac{2W}{C_{L,\text{ máx }2}A}} = \sqrt{\frac{2(686\,700 \text{ N})}{(1.2 \text{ kg/m}^3)(3.48)(150 \text{ m}^2)}\left(\frac{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}{1 \text{ N}}\right)} = 46.8 \text{ m/s}$$

Entonces las velocidades "seguras" mínimas para evitar la región de pérdida de sustentación se obtienen al multiplicar los valores anteriores por 1.2:

Sin flaps: $V_{\text{mín 1, segura}} = 1.2V_{\text{mín 1}} = 1.2(70.9 \text{ m/s}) = 85.1 \text{ m/s} = \mathbf{306 \text{ km/h}}$

Con flaps: $V_{\text{mín 2, segura}} = 1.2V_{\text{mín 2}} = 1.2(46.8 \text{ m/s}) = 56.2 \text{ m/s} = \mathbf{202 \text{ km/h}}$

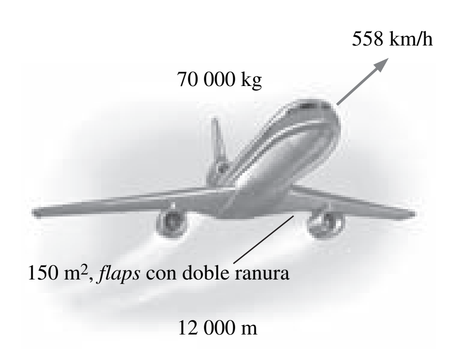


FIGURA 11-54
Esquema para el ejemplo 11-5.

ya que 1 m/s = 3.6 km/h. Note que el uso de los *flaps* permite que el avión despegue y aterrice a velocidades considerablemente menores, y por lo tanto sobre una pista menos larga.

b) Cuando un avión vuela estacionariamente a una altitud constante, la sustentación debe ser igual al peso de la aeronave, $F_L = W$. Entonces el coeficiente de sustentación se determina como:

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = \frac{686\ 700\ \text{N}}{\frac{1}{2}(0.312\ \text{kg/m}^3)(155\ \text{m/s})^2(150\ \text{m}^2)}\left(\frac{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{1\ \text{N}}\right) = 1.22$$

Para el caso sin *flaps*, el ángulo de ataque correspondiente a este valor de C_L se determina a partir de la figura 11-45 como $\alpha \cong$ **10°**.

c) Cuando el avión vuela estacionariamente a una altitud constante, la fuerza neta que actúa sobre la aeronave es cero, y por lo tanto el empuje proporcionado por los motores debe ser igual a la fuerza de arrastre. El coeficiente de arrastre correspondiente al coeficiente de sustentación de crucero de 1.22 se determina a partir de la figura 11-45 como $C_D \cong 0.03$ para el caso sin *flaps*. Entonces la fuerza de arrastre que actúa sobre las alas se vuelve:

$$F_D = C_D A\frac{\rho V^2}{2} = (0.03)(150\ \text{m}^2)\frac{(0.312\ \text{kg/m}^3)(155\ \text{m/s})^2}{2}\left(\frac{1\ \text{kN}}{1\ 000\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$
$$= 16.9\ \text{kN}$$

Note que la potencia es la fuerza por la velocidad (distancia por unidad de tiempo), la potencia necesaria para superar este arrastre es igual al empuje por la velocidad de crucero:

$$\text{Potencia} = \text{empuje} \times \text{velocidad} = F_D V = (16.9\ \text{kN})(155\ \text{m/s})\left(\frac{1\ \text{kW}}{1\ \text{kN}\cdot\text{m/s}}\right)$$
$$= \mathbf{2\ 620\ kW}$$

En consecuencia, los motores deben suministrar 2 620 kW de potencia para superar el arrastre sobre las alas durante el crucero. Para una eficiencia de propulsión de 30 por ciento (es decir, 30 por ciento de la energía del combustible se utiliza para impulsar la aeronave), el avión necesita entrada de energía a una razón de 8 733 kJ/s.

Discusión La potencia determinada es la potencia sólo para superar el arrastre que actúa sobre las alas y no incluye el que actúa sobre las partes restantes del avión (fuselaje, cola, entre otros). En consecuencia, la potencia total necesaria durante el vuelo será mucho mayor. Además, no considera arrastre inducido, que puede ser dominante durante el despegue cuando el ángulo de ataque es alto (la figura 11-45 es para superficie de sustentación bidimensional y no incluye efectos tridimensionales).

EJEMPLO 11-6 Efecto de rotación sobre una pelota de tenis

Una pelota de tenis con masa de 0.125 lbm y un diámetro de 2.52 in se golpea a 45 mi/h con un giro hacia atrás de 4 800 rpm (Fig. 11-55). Determine si caerá o se elevará debido al efecto combinado de gravedad y sustentación debida a la rotación que le aplicaron inmediatamente después de golpearla en el aire a 1 atm y 80°F.

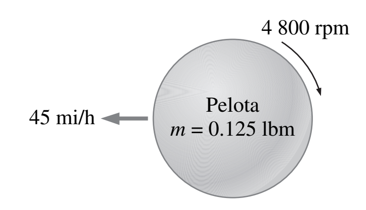


FIGURA 11-55
Esquema para el ejemplo 11-6.

SOLUCIÓN Se golpea una pelota de tenis con un giro hacia atrás. Debe determinarse si caerá o se elevará después del golpe.

Hipótesis **1** Las superficies de la pelota son suficientemente lisas para que se aplique la figura 11-53. **2** La pelota se golpea de forma horizontal de modo que inicia su movimiento horizontalmente.

Propiedades La densidad y viscosidad cinemática del aire a 1 atm y 80°F son $\rho = 0.07350$ lbm/ft^3 y $\nu = 1.697 \times 10^{-4}$ ft^2/s.

Análisis La pelota se golpea de forma horizontal, y por lo tanto normalmente caería bajo el efecto de la gravedad si no estuviera girando. La rotación hacia atrás genera una sustentación y la pelota se elevará si la sustentación es mayor que su peso. La sustentación puede determinarse a partir de:

$$F_L = C_L A \frac{\rho V^2}{2}$$

donde A es el área frontal de la pelota, que es $A = \pi D^2/4$. Las velocidades traslacional y angular de la pelota son:

$$V = (45 \text{ mi/h})\left(\frac{5\,280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}}\right)\left(\frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}}\right) = 66 \text{ ft/s}$$

$$\omega = (4\,800 \text{ rev/min})\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 502 \text{ rad/s}$$

Entonces:

$$\frac{\omega D}{2V} = \frac{(502 \text{ rad/s})(2.52/12 \text{ ft})}{2(66 \text{ ft/s})} = 0.80 \text{ rad}$$

A partir de la figura 11-53, el coeficiente de sustentación correspondiente a este valor es $C_L = 0.21$. Entonces la fuerza de sustentación que actúa sobre la pelota es:

$$F_L = (0.21)\frac{\pi(2.52/12 \text{ ft})^2}{4}\frac{(0.0735 \text{ lbm/ft}^3)(66 \text{ ft/s})^2}{2}\left(\frac{1 \text{ lbf}}{32.2 \text{ lbm} \cdot \text{ft/s}^2}\right)$$
$$= 0.036 \text{ lbf}$$

El peso de la pelota es:

$$W = mg = (0.125 \text{ lbm})(32.2 \text{ ft/s}^2)\left(\frac{1 \text{ lbf}}{32.2 \text{ lbm} \cdot \text{ft/s}^2}\right) = 0.125 \text{ lbf}$$

que es más que la sustentación. En consecuencia, la pelota **caerá** bajo el efecto combinado de gravedad y sustentación debida a la rotación con fuerza neta de 0.125 – 0.036 = 0.089 lbf.

Discusión Este ejemplo demuestra que la pelota puede lanzarse mucho más lejos cuando se le da un giro hacia atrás. Note que un giro en la dirección opuesta tiene el efecto opuesto (sustentación negativa) y acelera su caída al suelo. Además, el número de Reynolds para este problema es 8×10^4, que está suficientemente cerca del valor de 6×10^4 para el que se preparó la figura 11-53.

Además, debe tener en la mente que, no obstante que cierto giro puede aumentar la distancia recorrida por la pelota, existe un giro óptimo que es función del ángulo de lanzamiento; la mayoría de los golfistas ahora están más conscientes. Demasiado giro disminuye la distancia cuando introduce más arrastre inducido.

Ningun comentario acerca de la sustentación y el arrastre sería completo si no se mencionan las aportaciones de Wilbur (1867-1912) y Orville (1871-1948) Wright. Los hermanos Wright verdaderamente son el equipo de ingenieros más impresionante de todos los tiempos. Autodidactas, estuvieron bien informados de la teoría y práctica contemporáneas de la aeronáutica. Ambos coincidieron con otros líderes en el campo y publicaron en revistas técnicas especializadas. Aunque no se les puede dar el crédito por el desarrollo de los conceptos de sus-



FIGURA 11-56
Los hermanos Wright vuelan en Kitty Hawk.
National Air and Space Museum/Smithsonian Institution.

tentación y arrastre, los usaron para lograr el primer vuelo humano impulsado en un artefacto volador más pesado que el aire y controlado (Fig. 11-56). Ellos triunfaron, mientras que otros antes fracasaron; porque evaluaron y diseñaron partes por separado. Antes de los Wright, los experimentadores construían y probaban aviones completos. Aunque intuitivamente atrayente, el proyecto no permitía determinar cómo hacer mejor el artefacto. Cuando un vuelo duraba nada más un momento, se puede solamente adivinar la debilidad del diseño. Así, un nuevo artefacto no necesariamente realizaba algo mejor que su predecesor. Las pruebas simplemente eran un desplome de estómago seguido por otro. Los Wright cambiaron todo eso. Estudiaron cada parte con el uso de modelos a escala y tamaño real en túneles de viento y en el campo. Mucho antes de que los primeros artefactos voladores impulsados se ensamblaran, ellos conocían el área necesaria para mejores formas de alas que soportaran a un avión que transportara a una persona y los caballos de fuerza del motor necesarios para proporcionar un empuje adecuado con una hélice mejorada. No sólo mostraron al mundo cómo volar, también mostraron a los ingenieros cómo usar las ecuaciones que se presentan en este texto para diseñar, inclusive, aeronaves mejores.

RESUMEN

En este capítulo se estudió el flujo de fluidos sobre cuerpos sumergidos, con énfasis en las fuerzas de sustentación y de arrastre resultantes. Un fluido puede ejercer fuerzas y momentos sobre un cuerpo en y alrededor de varias direcciones. La fuerza que un flujo de fluidos ejerce sobre un cuerpo en la dirección del flujo se llama *arrastre*, y la que se ejerce en la dirección normal al flujo se llama *sustentación*. La parte del arrastre que se debe directamente al esfuerzo de corte τ_w se llama *arrastre debido a fricción,* porque lo causan efectos de fricción; la parte que se debe directamente a la presión P se llama *arrastre debido a presión* o *arrastre de forma*, debido a su fuerte dependencia de la forma del cuerpo.

El *coeficiente de arrastre* C_D y el *coeficiente de sustentación* C_L son números adimensionales que representan las características del arrastre y la sustentación de un cuerpo; se definen como;

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \qquad \text{y} \qquad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

donde A usualmente es el *área frontal* (el área que se proyecta sobre un plano normal en la dirección del flujo) del cuerpo. Para placas y superficies de sustentación, se considera que A es el *área de planta*, que es el área que una persona vería cuando observa el cuerpo directamente desde arriba. En general, el coeficiente de arrastre depende del *número de Reynolds*, especialmente para números de Reynolds menores de 10^4. A números de Reynolds altos, los coeficientes de arrastre para la mayoría de las geometrías permanecen esencialmente constantes.

Se dice que un cuerpo es currentilíneo o *aerodinámico* si se hace un esfuerzo consciente por alinear su forma con las líneas de corriente anticipadas en el flujo, con la finalidad de reducir el arrastre. De otro modo, un cuerpo (como el de un edificio) tiende a bloquear el flujo y se dice que es *romo*. A velocidades suficientemente altas, el flujo de fluido se separa de la superficie del cuerpo. Esto se llama *separación de flujo*. Cuando un flujo de fluido se separa del cuerpo se forma una *región separada* entre el cuerpo y el flujo de fluido. La separación también puede ocurrir sobre un cuerpo aerodinámico como un ala de avión a un *ángulo de ataque* suficientemente grande, que es el ángulo que el flujo de fluido entrante forma con la *cuerda* (la línea que conecta los extremos) del cuerpo. La separación de flujo sobre la superficie superior de un ala reduce de manera violenta la sustentación y puede provocar que el avión *pierda sustentación*.

La región de flujo sobre una superficie en donde se sienten los efectos de las fuerzas de corte provocadas por la viscosidad del fluido se llama *capa límite de velocidad* o sólo *capa límite*. El *grosor* de la capa límite, δ, se define como la distancia desde la superficie a la que la velocidad es $0.99V$. La línea hipotética de velocidad $0.99V$ divide al flujo sobre una placa en dos regiones: la *región de capa límite*, donde los efectos viscosos y el cambio de velocidad son considerables, y la *región de flujo exterior irrotacional*, donde los efectos de fricción son despreciables y la velocidad permanece esencialmente constante.

Para flujo externo, el número de Reynolds se expresa como:

$$\text{Re}_L = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

donde V es la velocidad corriente arriba y L es la longitud característica de la geometría, que es la longitud de la placa en la dirección del flujo para una placa plana y el diámetro D para un cilindro o esfera. Los coeficientes de fricción *promedio* sobre una placa plana completa son:

Flujo laminar: $$C_f = \frac{1.33}{\text{Re}_L^{1/2}} \qquad \text{Re}_L < 5 \times 10^5$$

Flujo turbulento: $$C_f = \frac{0.074}{\text{Re}_L^{1/5}} \qquad 5 \times 10^5 \leq \text{Re}_L \leq 10^7$$

Si el flujo se aproxima como laminar hasta el número crítico, en ingeniería, de $\text{Re}_{cr} = 5 \times 10^5$, y luego turbulento más allá

del valor crítico, el coeficiente de fricción promedio sobre toda la placa plana se convierte en:

$$C_f = \frac{0.074}{\text{Re}_L^{1/5}} - \frac{1\,742}{\text{Re}_L} \qquad 5 \times 10^5 \leq \text{Re}_L \leq 10^7$$

Un ajuste de curva de datos experimentales para el coeficiente de fricción promedio en el régimen turbulento totalmente rugoso es:

Superficie rugosa: $$C_f = \left(1.89 - 1.62 \log \frac{\varepsilon}{L}\right)^{-2.5}$$

donde ε es la rugosidad de la superficie y L es la longitud de la placa en la dirección del flujo. En ausencia de una mejor relación, la anterior puede usarse para flujo turbulento sobre superficies rugosas para $\text{Re} > 10^6$, en especial cuando $\varepsilon/L > 10^{-4}$.

En general, la rugosidad de la superficie aumenta el coeficiente de arrastre en flujo turbulento. Sin embargo, para cuerpos romos, como un cilindro circular o esfera, un aumento en la rugosidad de la superficie puede *disminuir* el coeficiente de arrastre. Esto se hace cuando se dispara el flujo en turbulencia a un número de Reynolds menor, y por lo tanto se provoca que el fluido que circunda el cuerpo se cierre más cerca a la superficie por atrás del cuerpo, con lo que se estrecha la estela y se reduce de manera considerable el arrastre debido a presión.

Es deseable que las superficies de sustentación generen la mayor sustentación mientras producen el menor arrastre. En consecuencia, una medida de desempeño de las superficies de sustentación es la *razón de la sustentación al arrastre*, C_L/C_D.

La mínima velocidad segura de vuelo de una aeronave puede determinarse a partir de:

$$V_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho C_{L,\,\text{máx}} A}}$$

Para un peso dado, la velocidad de aterrizaje o de despegue puede minimizarse cuando se maximiza el producto del coeficiente de sustentación y el área del ala, $C_{L,\,\text{máx}}A$.

Para las alas del avión y otras superficies de sustentación de tamaño finito, la diferencia de presión entre las superficies inferior y superior dirigen el fluido a las puntas hacia arriba. Esto forma un remolino que gira, llamado *vórtice de extremo*. Los vórtices de extremo que interactúan con el flujo libre imponen fuerzas sobre las puntas de las alas en todas direcciones, inclusive en la dirección del flujo. La componente de la fuerza en la dirección del flujo se agrega al arrastre y se llama *arrastre inducido*. Entonces, el arrastre total de un ala es la suma del arrastre inducido (efectos tridimensionales) y el arrastre de la superficie de sustentación.

Se observa que la sustentación se desarrolla cuando un cilindro o esfera en un flujo rota a una razón suficientemente alta. El fenómeno de producir sustentación mediante la rotación de un cuerpo sólido se llama *efecto de Magnus*.

En el capítulo 15 se presentan algunos flujos externos, completo con detalles de flujo que incluyen gráficas de campos de velocidad, y que se resuelven por paquetes de dinámica de fluido computacional.

BIBLIOGRAF[IA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. I. H. Abbott. "The Drag of Two Streamline Bodies as Affected by Protuberances and Appendages", *NACA Report* 451, 1932.

2. I. H. Abbott y A. E. von Doenhoff. *Theory of Wing Sections, Including a Summary of Airfoil Data*. Nueva York: Dover, 1959.

3. I. H. Abbott, A. E. von Doenhoff y L. S. Stivers. "Summary of Airfoil Data", *NACA Report* 824, Langley Field, VA, 1945.

4. J. D. Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics,* 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1991.

5. R. D. Blevins. *Applied Fluid Dynamics Handbook*. Nueva York: Van Nostrand Reinhold, 1984.

6. S. W. Churchill y M. Bernstein. "A Correlating Equation for Forced Convection from Gases and Liquids to a Circular Cylinder in Cross Flow", *Journal of Heat Transfer* 99, pp. 300–306, 1977.

7. C. T. Crowe, J. A. Roberson y D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics,* 7a, ed. Nueva York: Wiley, 2001.

8. S. Goldstein. *Modern Developments in Fluid Dynamics*. London: Oxford Press, 1938.

9. J. Happel. *Low Reynolds Number Hydrocarbons*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1965.

10. S. F. Hoerner. *Fluid-Dynamic Drag.* [Publicado por el autor.] Biblioteca del Congreso No. 64, 1966.

11. G. M. Homsy, H. Aref, K. S. Breuer, S. Hochgreb, J. R. Koseff, B. R. Munson, K. G. Powell, C. R. Robertson, S. T. Thoroddsen. *Multi-Media Fluid Mechanics* (CD). Cambridge University Press, 2000.

12. W. H. Hucho. *Aerodynamics of Road Vehicles*. London: Butterworth-Heinemann, 1987.

13. B. R. Munson, D. F. Young y T. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics,* 4a. ed. Nueva York: Wiley, 2002.

14. M. C. Potter y D. C. Wiggert. *Mechanics of Fluids,* 2a. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.

15. C. T. Crowe, J. A. Roberson y D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics,* 7a. ed. Nueva York: Wiley, 2001.

16. H. Schlichting. *Boundary Layer Theory,* 7a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1979.

17. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion.* Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.

18. J. Vogel. *Life in Moving Fluids,* 2a. ed. Boston: Willard Grand Press, 1994.

19. F. M. White. *Fluid Mechanics,* 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2003.

PROYECTOR DE APLICACIONES ■ Reducción del arrastre

Autor invitado: Werner J. A. Dahm, The University of Michigan



FIGURA 11-57
Arreglos de microactuadores que reducen el arrastre en el casco de un submarino. Se muestra la arquitectura del sistema con mosaicos compuestos de celdas unitarias que contienen sensores y actuadores.

Una reducción de sólo un pequeño porcentaje en el arrastre que actúa sobre un vehículo aéreo, un vehículo naval de superficie o un vehículo submarino puede traducirse en una considerable reducción en el peso del combustible y costos de operación, o en aumento en el rango y carga del vehículo. Un medio para lograr esta reducción del arrastre es controlar de manera activa, los vórtices de corriente que ocurren de manera natural en la subcapa viscosa de la capa límite turbulenta en la superficie del vehículo. La delgada subcapa viscosa en la base de cualquier capa límite turbulenta es un poderoso sistema no-lineal capaz de amplificar pequeñas perturbaciones inducidas por el microactuador en grandes reducciones en el arrastre del vehículo. Numerosos estudios experimentales, computacionales y teóricos han demostrado que son posibles reducciones de 15 a 25 por ciento en el esfuerzo de corte cuando se controlan de manera adecuada estas estructuras de subcapa. El desafío es desarrollar grandes arreglos densos de microactuadores que puedan manipular estas estructuras para lograr reducción de arrastre en vehículos aeronáuticos e hidronáuticos prácticos (Fig. 11-57). Las estructuras de subcapa, por lo general, son de cientos de micras, y por lo tanto se adaptan adecuadamente a la escala de *sistemas microelectromecánicos* (MEMS, por sus siglas en inglés).

En la figura 11-58 se muestra un ejemplo de un tipo de este arreglo actuador a microescala con base en el principio electrocinético que potencialmente es adecuado para el control activo de subcapa en vehículos reales. El flujo electrocinético proporciona una manera de mover pequeñas cantidades de fluido en escalas de tiempo muy rápidas en dispositivos muy pequeños. Los actuadores impulsivamente desplazan un volumen fijo de fluido entre la pared y la subcapa viscosa en una manera que contrarresta el efecto de los vórtices de subcapa. Una arquitectura de sistema que se basa en celdas unitarias independientes, apropiada para grandes arreglos de estos microactuadores, ofrece requisitos de procesamiento de control enormemente reducidos dentro de celdas unitarias individuales, que consiste de un número relativamente pequeño de sensores y actuadores individuales. Para desarrollar y producir arreglos de microactuadores electrocinéticos a tamaño real, que puedan satisfacer muchos de los requisitos para el control activo de subcapa de capas límite turbulentas en condiciones de vehículo real, se usa la consideración fundamental de los principios de escalamiento que gobiernan al flujo electrocinético, así como la estructura y dinámica de la subcapa y las tecnologías de microfabricación.

Estos arreglos de actuadores microelectrocinéticos (MEKA, por sus siglas en inglés), cuando se fabrican con sensores de esfuerzo de corte que también se basan en la fabricación de sistemas microelectromecánicos, en el futuro podrían permitir a los ingenieros lograr reducciones notables en el arrastre que actúa sobre vehículos aeronáuticos e hidronáuticos.

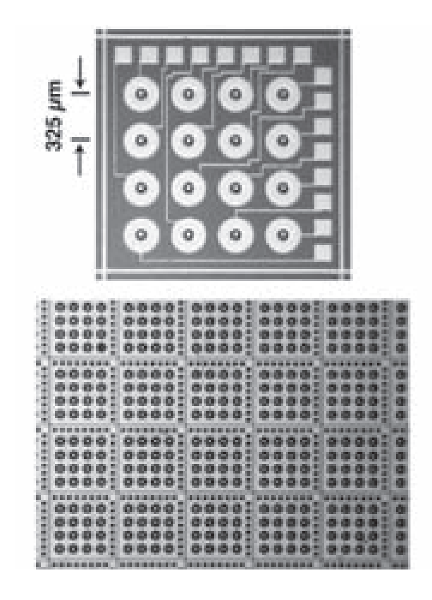


FIGURA 11-58
Arreglo de actuadores microelectrocinéticos (MEKA-5) con 25 600 actuadores individuales a 325 mm de espaciamiento para reducción de arrastre hidronáutico a tamaño real. Acercamiento de una sola celda unitaria (*superior*) y vista parcial del arreglo completo (*inferior*).

Referencias

Diez-Garias, F. J., Dahm, W. J. A. y Paul, P. H., “Microactuator Arrays for Sublayer Control in Turbulent Boundary Layers Using the Electrokinetic Principle,” *AIAA Paper No. 2000-0548*, AIAA, Washington, DC, 2000.

Diez, F. J. y Dahm, W. J. A., “Electrokinetic Microactuator Arrays and System Architecture for Active Sublayer Control of Turbulent Boundary Layers,” *AIAA Journal*, Vol. 41, pp. 1906–1915, 2003.

PROBLEMAS*

Arrastre, sustentación y coeficientes de arrastre

11-1C Explique cuándo un flujo externo es bidimensional, tridimensional y axisimétrico. ¿Qué tipo de flujo es el flujo de aire sobre un automóvil?

11-2C ¿Cuál es la diferencia entre la velocidad corriente arriba y la velocidad de flujo libre? ¿Para qué tipos de flujo estas dos velocidades son iguales?

11-3C ¿Cuál es la diferencia entre cuerpos currentilíneos (aerodinámicos) y romos? Una pelota de tenis ¿es un cuerpo aerodinámico o romo?

11-4C Mencione algunas aplicaciones en las que es deseable un gran arrastre.

11-5C ¿Qué es arrastre? ¿Qué lo provoca? ¿Por qué usualmente se intenta minimizarlo?

11-6C ¿Qué es sustentación? ¿Qué la provoca? ¿Contribuye la fuerza del corte a la sustentación?

11-7C Durante flujo sobre un cuerpo dado se miden la fuerza de arrastre, la velocidad corriente arriba y la densidad del fluido. Explique cómo determinaría el coeficiente de arrastre. ¿Qué área usaría en los cálculos?

11-8C Durante flujo sobre un esbelto cuerpo dado, como un ala, se miden la fuerza de sustentación, la velocidad corriente arriba y la densidad del fluido. Explique cómo determinaría el coeficiente de sustentación. ¿Qué área usaría en los cálculos?

11-9C Defina el área frontal de un cuerpo expuesto a flujo externo. ¿Cuándo es adecuado usar el área frontal en los cálculos de arrastre y sustentación?

11-10C Defina el área de planta de un cuerpo expuesto a flujo externo. ¿Cuándo es adecuado usar el área de planta en los cálculos de arrastre y sustentación?

11-11C ¿Qué es velocidad terminal? ¿Cómo se determina?

11-12C ¿Cuál es la diferencia entre arrastre debido a fricción y arrastre debido a presión? ¿Cuál es más significativo para cuerpos esbeltos como las superficies de sustentación?

11-13C ¿Cuál es el efecto de la rugosidad de superficie sobre el coeficiente de arrastre debido a fricción en flujos laminar y turbulento?

11-14C En general, ¿cómo varía el coeficiente de arrastre con el número de Reynolds a *a*) números de Reynolds bajos y moderados y *b*) a números de Reynolds altos ($Re > 10^4$)?

11-15C Las cubiertas se unen a la parte frontal y trasera de un cuerpo cilíndrico para hacerlo parecer más aerodinámico. ¿Cuál es el efecto de esta modificación sobre *a*) el arrastre debido a fricción, *b*) el arrastre debido a presión y *c*) el arrastre total? Suponga que el número de Reynolds es lo suficientemente alto como para que el flujo sea turbulento para ambos casos.

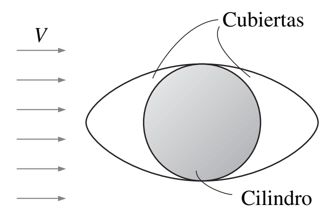


FIGURA P11-15C

11-16C ¿Cuál es el efecto de cambiar la forma de un cuerpo por una más currentilínea sobre *a*) el arrastre debido a fricción y *b*) el arrastre debido a presión? ¿El arrastre total que actúa sobre un cuerpo necesariamente disminuye como resultado de cambiar la forma a una más currentelínea? Explíquelo.

11-17C ¿Qué es la separación de flujo? ¿Qué la provoca? ¿Cuál es el efecto de la separación de flujo sobre el coeficiente de arrastre?

11-18C ¿Qué es el *drafting* (*succión*)? ¿Cómo afecta el coeficiente de arrastre del cuerpo *que experimenta este fenómeno*?

11-19C ¿Cuál automóvil es más probable que tenga mayor rendimiento de combustible: uno con esquinas agudas u otro con contornos que recuerdan una elipse? ¿Por qué?

11-20C ¿Cuál ciclista es más probable que vaya más rápido: uno que mantiene su cabeza y su cuerpo en la posición más erecta u otro que se incline hacia abajo y lleve su cuerpo más cerca de sus rodillas? ¿Por qué?

11-21 En un gran túnel de viento, en una prueba a tamaño real, debe determinarse el coeficiente de arrastre de un automóvil en las condiciones de diseño de 1 atm, 25°C y 90 km/h. La altura y el ancho del automóvil son 1.40 m y 1.65 m, respectivamente. Si la fuerza horizontal que actúa sobre el automóvil se mide en 300 N, determine el coeficiente de arrastre total de este auto. *Respuesta:* 0.35

11-22 Un automóvil se desplaza a una velocidad constante de 80 km/h. Determine la velocidad corriente arriba por usar en un análisis de flujo de fluidos si *a*) el aire es tranquilo, *b*) el viento sopla contra la dirección de movimiento del automóvil a 30 km/h y *c*) el viento sopla en la misma dirección de movimiento del automóvil a 50 km/h.

11-23 La resultante de la fuerza de presión y las fuerzas de corte que actúan sobre un cuerpo se mide en 700 N, y hace 35°

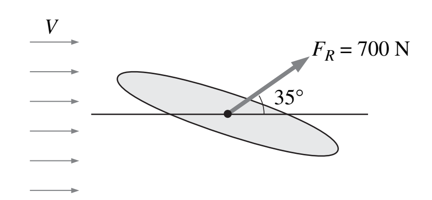


FIGURA P11-23

* Los problemas designados por una "C" son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

con la dirección del flujo. Determine las fuerzas de arrastre y sustentación que actúan sobre el cuerpo.

11-24 Durante un experimento a un número de Reynolds alto, la fuerza de arrastre total que actúa sobre un cuerpo esférico de diámetro $D = 12$ cm expuesto a flujo de aire a 1 atm y 5°C se mide en 5.2 N. El arrastre debido a presión que actúa sobre el cuerpo se calcula, cuando se integra la distribución de presión (medida con sensores de presión a través de la superficie), en 4.9 N. Determine el coeficiente de arrastre debido a fricción de la esfera. *Respuesta:* 0.0115

11-25I Para reducir el coeficiente de arrastre, y en consecuencia mejorar el rendimiento de combustible, debe reducirse el área frontal de un automóvil. Determine la cantidad de combustible y dinero que se ahorra al año como resultado de disminuir el área frontal de 18 a 15 ft^2. Suponga que el automóvil recorre 12 000 mi al año a una velocidad promedio de 55 mi/h. Considere que la densidad y el precio de la gasolina son 50 lbm/ft^3 y \$2.20/gal, respectivamente; la densidad del aire es 0.075 lbm/ft^3, el poder calorífico de la gasolina es de 20 000 Btu/lbm; y la eficiencia global del motor es de 32 por ciento.

11-26I Reconsidere el problema 11-25I. Con el Software EES (o algún otro) investigue el efecto de la variación del área frontal sobre el consumo anual de combustible del automóvil. Varíe el área frontal de 10 a 30 ft^2 en incrementos de 2 ft^2. Tabule y grafique los resultados.

11-27 Una placa de señalamiento circular tiene un diámetro de 50 cm y está expuesta a vientos normales de hasta 150 km/h a 10°C y 100 kPa. Determine la fuerza de arrastre que actúa sobre la placa de señalamiento. También determine el momento de flexión que actúa sobre la base del poste, cuya altura desde el suelo hasta la base de la placa de señalamiento es de 1.5 m. No tome en cuenta el arrastre sobre el poste.

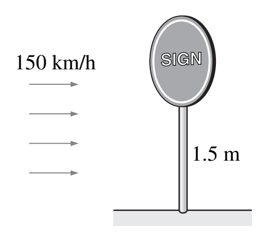


FIGURA P11-27

11-28I La carga del viento es una consideración de primordial importancia en el diseño de los soportes de los anuncios espectaculares, como se pone en evidencia por los muchos anuncios espectaculares que caen durante los vientos fuertes. Determine la fuerza del viento que actúa sobre un anuncio espectacular de 8 ft de alto y 20 ft de ancho, debido a vientos de 90 mi/h en la dirección normal, cuando las condiciones atmosféricas son de 14.3 psia y 40°F. *Respuesta:* 6 684 lbf

11-29 Los taxis, por lo general, llevan letreros con publicidad para obtener ingresos adicionales, pero, también aumentan el costo del combustible. Considere un letrero que consiste de un bloque rectangular de 0.30 m de alto, 0.9 m de ancho y 0.9 m de largo, colocado en la parte superior de un taxi de modo que el letrero tiene una área frontal de 0.3 m por 0.9 m por los cuatro lados. Determine el aumento en el costo de combustible anual de este taxi debido a este letrero. Suponga que el taxi recorre 60 000 km al año a una velocidad promedio de 50 km/h y la eficiencia global del motor es de 28 por ciento. Considere que la densidad, precio unitario y poder calorífico de la gasolina es de 0.75 kg/L, \$0.50/L y 42 000 kJ/kg, respectivamente, y que la densidad del aire es de 1.25 kg/m^3.

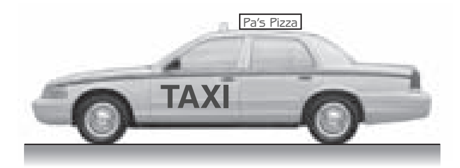


FIGURA P11-29

11-30 Se propone satisfacer las necesidades de agua de un vehículo recreativo (RV) con la instalación de un tanque cilíndrico de 2 m de largo y 0.5 m de diámetro en lo alto de éste. Determine la necesidad adicional de potencia del RV a una velocidad de 95 km/h cuando el tanque se instala de tal modo que sus superficies circulares enfrentan *a*) el frente y la parte posterior y *b*) los lados del RV. Suponga que las condiciones atmosféricas son de 87 kPa y 20°C. *Respuestas: a*) 1.67 kW, *b*) 7.55 kW

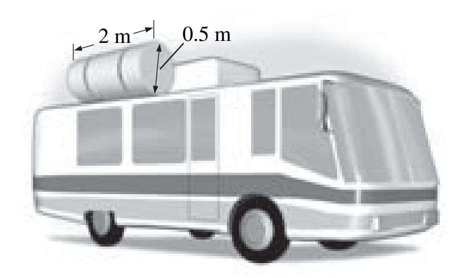


FIGURA P11-30

11-31I A la velocidad de autopista, casi la mitad de la potencia generada por el motor del automóvil se usa para superar el arrastre aerodinámico, y por lo tanto el consumo de combustible es casi proporcional a la fuerza de arrastre en un camino a nivel. Determine el porcentaje de aumento en consumo de combustible de un automóvil por unidad de tiempo cuando una persona que normalmente conduce a 55 mi/h ahora comienza a conducir a 75 mi/h.

11-32 Una esfera plástica de 4 mm de diámetro, cuya densidad es de 1 150 kg/m^3, se libera en el agua a 20°C. Determine la velocidad terminal de la esfera en el agua.

11-33 Durante las fuertes ventiscas, los vehículos altos, como los RV (vehículos recreativos) y los semirremolques, pueden ser lanzados afuera del camino, y los furgones de mercancías de sus rieles, en especial cuando están vacíos y en áreas abiertas. Considere un semirremolque de 5 000 kg que mide 8 m de largo, 2 m de alto y 2 m de ancho. La distancia entre el fondo del camión y el camino es de 0.75 m. Ahora el camión se expone a vientos desde su superficie lateral. Determine la velocidad del viento que lo volteará sobre un lado. Considere que la densidad del aire es de 1.1 kg/m^3 y suponga que el peso está uniformemente distribuido.

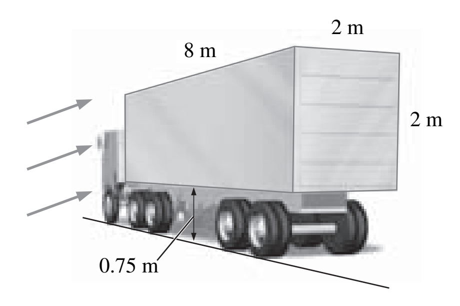


FIGURA P11-33

11-34 Una ciclista que pesa 80 kg desciende en su bicicleta de 15 kg sobre un camino con una pendiente de 12° sin pedalear o frenar. La ciclista tiene un área frontal de 0.45 m^2 y un coeficiente de arrastre de 1.1 cuando no se inclina, y un área frontal de 0.4 m^2 y un coeficiente de arrastre de 0.9 en la posición de carrera. Sin considerar la resistencia de rodamiento ni la fricción en los cojinetes, determine su velocidad terminal para ambas posiciones. Considere que la densidad del aire es de 1.25 kg/m^3. *Respuestas:* 90 km/h, 106 km/h

11-35 Para medir la velocidad del viento, por lo general se usa una turbina (veleta) con dos o cuatro copas hemisféricas huecas conectadas a un pivote. Considere una turbina de viento con dos copas de 8 cm de diámetro con una distancia de centro a centro de 25 cm, como se muestra en la figura P11-35. El pivote está pegado como resultado de algún mal funcionamiento y las copas dejan de rotar. Para una velocidad de viento de 15 m/s y densidad de aire de 1.25 km/m^3, determine el torque máximo que esta turbina aplica sobre el pivote.

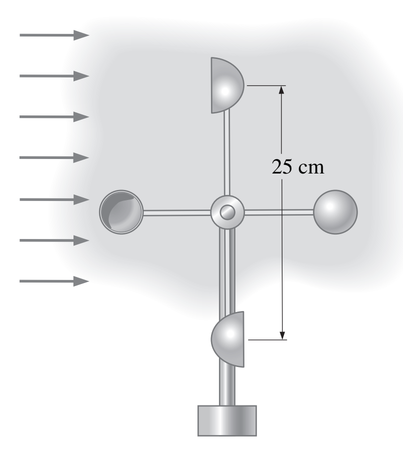


FIGURA P11-35

11-36 Reconsidere el problema 11-35. Con el Software EES (o algún otro) investigue el efecto de la velocidad del viento sobre el torque que se aplica al pivote. Varíe la velocidad del viento de 0 a 50 m/s en incrementos de 5 m/s. Tabule y grafique los resultados.

11-37I Un barco remolca, a 12 ft/s, un tanque esférico de 5 ft de diámetro totalmente sumergido en agua fresca. Si supone flujo turbulento, determine la potencia de remolque necesaria.

11-38 Durante el movimiento estacionario de un vehículo sobre un camino a nivel, la potencia suministrada a las ruedas se usa para superar el arrastre aerodinámico y la resistencia de rodamiento (el producto del coeficiente de resistencia de rodamiento y el peso del vehículo), si supone que la fricción en los cojinetes de las ruedas es despreciable. Considere un automóvil que tiene una masa total de 950 kg, un coeficiente de arrastre de 0.32, un área frontal de 1.8 m^2 y un coeficiente de resistencia de rodamiento de 0.04. La potencia máxima que el motor puede transferir a las ruedas es de 80 kW. Determine *a*) la velocidad a la que la resistencia de rodamiento es igual a la fuerza de arrastre aerodinámico y *b*) la velocidad máxima de este automóvil. Considere que la densidad del aire es de 1.20 kg/m^3.

11-39 Reconsidere el problema 11-38. Con el Software EES (o algún otro) investigue el efecto de la velocidad del automóvil sobre la potencia necesaria para superar *a*) la resistencia de rodamiento, *b*) el arrastre aerodinámico y *c*) sus efectos combinados. Varíe la velocidad del automóvil de 0 a 150 km/h en incrementos de 15 km/h. Tabule y grafique los resultados.

11-40 Un submarino puede tratarse como un elipsoide con un diámetro de 5 m y una longitud de 25 m. Determine la potencia necesaria para cruce horizontal y estacionariamente a 40 km/h a través de agua de mar cuya densidad es de 1 025 km/m^3. También determine la potencia necesaria para remolcarlo en aire cuya densidad es de 1.30 km/m^3. Suponga que el flujo es turbulento en ambos casos.



FIGURA P11-40

11-41 Una mañana se encuentra a un bote de basura, de 0.80 m de diámetro y 1.2 m de alto, volteado debido a vientos fuertes durante la noche. Si se supone que la densidad promedio de la basura en su interior es de 150 kg/m^3, y que la densidad del aire se considera en 1.25 kg/m^3, estime la velocidad del viento durante la noche cuando se volteó el bote. Considere que el coeficiente de arrastre del bote es 0.7. *Respuesta:* 186 km/h

11-42I El coeficiente de arrastre de un vehículo aumenta cuando sus ventanas se bajan y su "quemacocos" se abre. Un auto deportivo tiene un área frontal de 18 ft^2 y un coeficiente de arrastre de 0.32 cuando las ventanas y "quemacocos" están cerrados. El coeficiente de arrastre aumenta a 0.41 cuando el "quemacocos" está abierto. Determine el consumo de potencia adicional del automóvil cuando el "quemacocos" está abierto a *a*) 35 mi/h y *b*) 70 mi/h. Considere que la densidad del aire es de 0.075 lbm/ft^3.

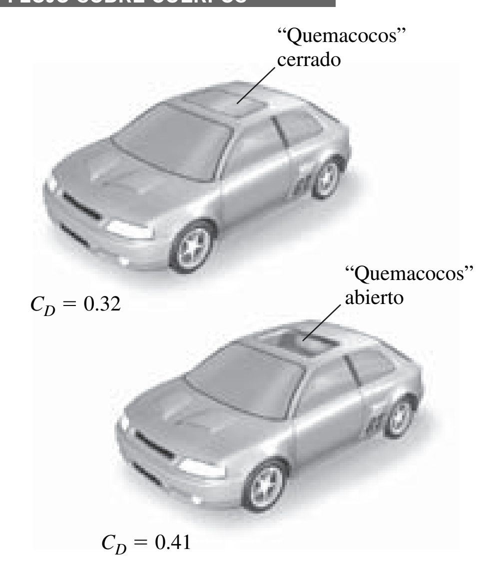


FIGURA P11-42I

Flujo sobre placas planas

11-43C ¿Qué propiedad del fluido causa la formación de la capa límite de velocidad? ¿Cuál es el efecto de la velocidad sobre el grosor de la capa límite?

11-44C ¿Qué representa el coeficiente de fricción en el flujo sobre una placa plana? ¿Qué relación tiene con la fuerza de arrastre que actúa sobre la placa?

11-45C Considere flujo laminar sobre una placa plana. ¿Cómo cambia con la posición el coeficiente de fricción local?

11-46C ¿Cómo se determina el coeficiente de fricción promedio en flujo sobre una placa plana?

11-47I Fluye aceite ligero a 75°F sobre una placa plana de 15 ft de largo con una velocidad de flujo libre de 6 ft/s. Determine la fuerza de arrastre total por unidad de ancho de la placa.

11-48 La presión atmosférica local en Denver, Colorado (elevación 1 610 m), es de 83.4 kPa. El aire a esta presión y a 25°C fluye con una velocidad de 6 m/s sobre una placa plana de 2.5 m × 8 m. Determine la fuerza de arrastre que actúa sobre la superficie superior de la placa si el aire fluye paralelo *a*) al lado de 8 m de largo y *b*) al lado de 2.5 m de largo.

11-49 Durante un día de invierno, se encuentra el viento a 55 km/h, a 5°C y 1 atm que sopla paralelo a una pared de 4 m de alto y 10 m de largo de una casa. Si supone que la superficie de la pared es lisa, determine el arrastre debido a fricción que actúa sobre la pared. ¿Cuál sería su respuesta si la velocidad del viento se duplica? ¿Qué tan real es tratar al flujo sobre las superficies de las paredes como flujo sobre una placa plana? *Respuestas:* 16 N, 58 N

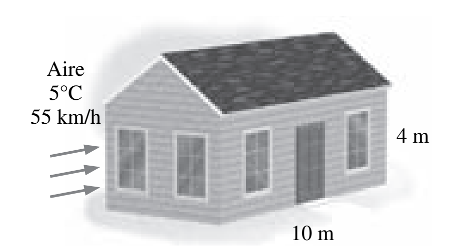


FIGURA P11-49

11-50I Fluye aire a 70°F a 25 ft/s sobre una placa plana de 10 ft de largo. Determine el coeficiente de fricción local a intervalos de 1 ft y grafique los resultados contra la distancia desde el borde de entrada.

11-51 La sección de formación de una planta de plásticos produce una hoja continua de plástico que mide 1.2 m de ancho y 2 mm de grosor a una razón de 15 m/min. La hoja, en ambos lados a lo largo de sus superficies, está expuesta al flujo de aire a una velocidad de 3 m/s normal a la dirección de movimiento de la hoja. El ancho de la sección de enfriamiento por aire es tal que un punto fijo sobre la hoja de plástico pasa a través de dicha sección en 2 s. Con las propiedades del aire a 1 atm y 60°C, determine la fuerza de arrastre que el aire ejerce sobre la hoja de plástico en la dirección del flujo de aire.

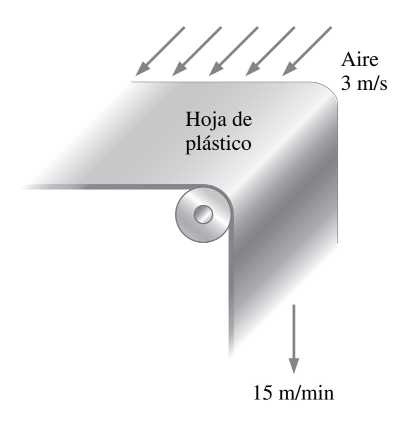


FIGURA P11-51

11-52 La superficie superior del vagón de un tren que avanza a 70 km/h tiene 3.2 m de ancho y 8 m de largo. Si el aire exterior está a 1 atm y 25°C, determine la fuerza de arrastre que actúa sobre la superficie superior del vagón.

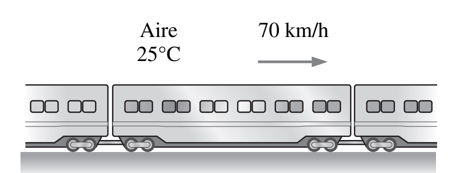


FIGURA P11-52

11-53 El peso de una delgada placa plana de 50 cm × 50 cm de dimensiones se equilibra con un contrapeso que tiene una masa de 2 kg, como se muestra en la figura P11-53. Ahora se enciende un ventilador, y aire a 1 atm y 25°C fluye hacia abajo sobre ambas superficies de la placa con una velocidad de flujo libre de 10 m/s. Determine la masa del contrapeso que se necesita agregar con la finalidad de equilibrar la placa en este caso.

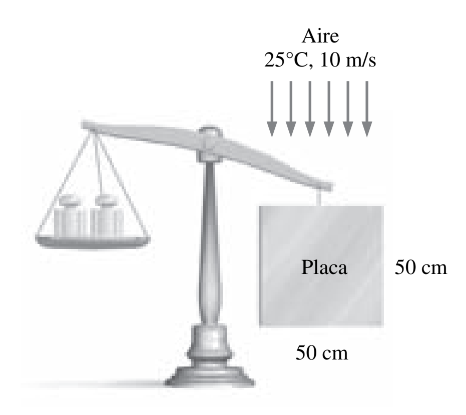


FIGURA P11-53

11-54 Considere flujo laminar de un fluido sobre una placa plana. Ahora se duplica la velocidad de flujo libre del fluido. Determine el cambio en la fuerza de arrastre sobre la placa. Suponga que el flujo permanece laminar. *Respuesta:* Un aumento de 2.83 veces

11-55I Considere un camión refrigerador que viaja a 65 mi/h en una localidad donde la temperatura del aire está a 1 atm y 80°F. Su compartimiento refrigerado puede considerarse como una caja rectangular de 9 ft de ancho, 8 ft de alto y 20 ft de largo. Si supone que el flujo de aire sobre toda la superficie exterior es turbulento y en contacto con la superficie (no hay separación de flujo), determine la fuerza de arrastre que actúa sobre las superficies superior y lateral y la potencia necesaria para superar este arrastre.

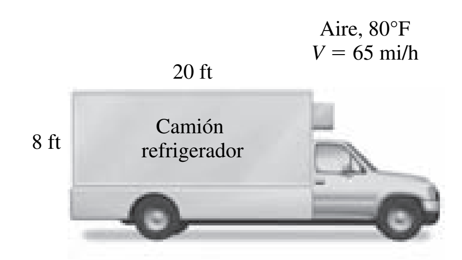


FIGURA P11-55I

11-56I Reconsidere el problema 11-55I. Con el Software EES (o algún otro) investigue el efecto de la velocidad del camión sobre la fuerza de arrastre total que actúa sobre las superficies superior y lateral, y la potencia necesaria para superarla. Varíe la velocidad del camión de 0 a 100 mi/h en incrementos de 10 mi/h. Tabule y grafique los resultados.

11-57 Fluye aire a 25°C y 1 atm sobre una larga placa plana con una velocidad de 8 m/s. Determine la distancia desde el borde de entrada de la placa, donde el flujo se vuelve turbulento, y el grosor de la capa límite en dicha posición.

11-58 Repita el problema 11-57, utilice agua.

Flujo sobre cilindros y esferas

11-59C En flujo sobre cilindros, ¿por qué el coeficiente de arrastre cae súbitamente cuando el flujo se vuelve turbulento? ¿Acaso no se supone que la turbulencia aumenta el coeficiente de arrastre, en vez de disminuirlo?

11-60C En el flujo sobre cuerpos romos como un cilindro, ¿cómo difiere el arrastre debido a presión del arrastre debido a fricción?

11-61C ¿Por qué la separación de flujo en flujo sobre cilindros se demora en caso de flujo turbulento?

11-62I Una tubería de diámetro exterior de 1.2 in atraviesa un río de 105 ft de ancho, mientras está totalmente sumergida en agua. La velocidad de flujo promedio del agua es de 10 ft/s, y la temperatura del agua es de 70°F. Determine la fuerza de arrastre que el río ejerce sobre la tubería. *Respuesta:* 1 320 lbf

11-63 Una larga tubería de vapor de 8 cm de diámetro pasa a través de cierta área abierta a los vientos. Determine la fuerza de arrastre que actúa sobre la tubería por unidad de su longitud cuando el aire está a 1 atm y 5°C y el viento sopla cruzando la tubería con una velocidad de 50 km/h.

11-64I Una persona extiende sus brazos descubiertos hacia el aire que sopla en el exterior a 1 atm y 60°F y 20 mi/h con la finalidad de sentir de cerca la naturaleza. Si se trata el brazo como un cilindro de 2 ft de largo y 3 in de diámetro, determine la fuerza de arrastre sobre ambos brazos. *Respuesta:* 1.02 lbf

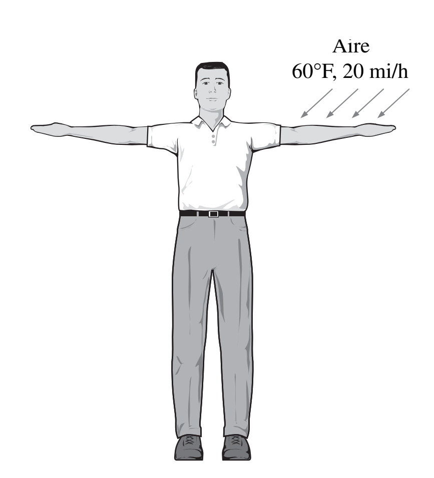


FIGURA P11-64I

11-65 Una línea de transmisión eléctrica de 6 mm de diámetro se expone al viento. Determine la fuerza de arrastre que se ejerce sobre una sección de 120 m de largo de cable durante un día de viento cuando el aire está a 1 atm y 15°C y el viento sopla a través de la línea de transmisión a 40 km/h.

11-66 Considere granizo de 0.8 cm de diámetro que cae libremente en aire atmosférico a 1 atm y 5°C. Determine su velocidad terminal. Considere que la densidad del granizo es de 910 kg/m^3.

11-67 Se observa que una partícula de polvo de 0.1 mm de diámetro, cuya densidad es de 2.1 g/cm^3, está suspendida en el aire a 1 atm y 25°C en un punto fijo. Estime la velocidad ascendente del movimiento del aire en dicha posición. Suponga que se aplica la Ley de Stokes. ¿Es ésta suposición válida? *Respuesta:* 0.62 m/s

11-68 Partículas de polvo de 0.05 mm de diámetro y 1.8 g/cm^3 de densidad están inestables durante vientos fuertes y se elevan a 350 m cuando la situación se calma. Estime cuánto tiempo transcurrirá para que las partículas de polvo caigan de vuelta al suelo en aire tranquilo a 1 atm y 15°C, y sus velocidades. No considere el tiempo transitorio inicial durante el cual las partículas de polvo aceleran a su velocidad terminal, y suponga que se aplica la Ley de Stokes.

11-69 Un tronco cilíndrico de pino (densidad = 513 kg/m^3) de 2 m de largo y 0.2 m de diámetro, es suspendido en posición horizontal por una grúa. Está expuesto a vientos normales de 40 km/h a 5°C y 88 kPa. Sin considerar el peso del cable y su arrastre, determine el ángulo θ que el cable formará con la horizontal y su tensión.

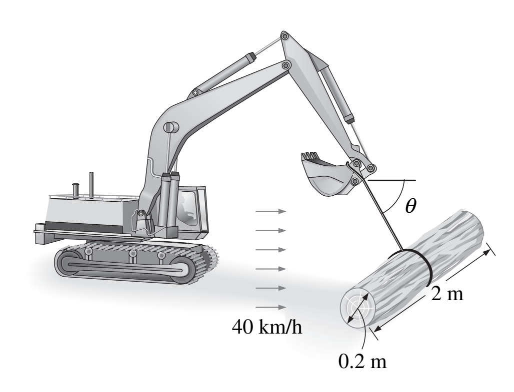


FIGURA P11-69

11-70 Una de las demostraciones populares en los museos de ciencia incluye la suspensión de una pelota de ping pong mediante un chorro ascendente de aire. Los niños se sorprenden porque siempre regresa al centro cuando se empuja con un dedo hacia un lado del chorro. Explique este fenómeno con la ecuación de Bernoulli. También determine la velocidad del aire si la pelota tiene una masa de 2.6 g y un diámetro de 3.8 cm. Suponga que el aire está a 1 atm y 25°C.

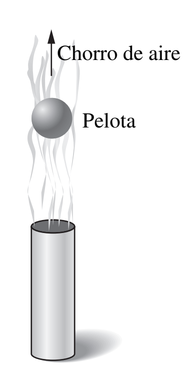


FIGURA P11-70

Sustentación

11-71C ¿Por qué la contribución de los efectos viscosos a la sustentación usualmente son despreciables para las superficies de sustentación?

11-72C Fluye aire y éste pasa a una superficie de sustentación simétrica a un ángulo de ataque cero. *a*) La sustentación y *b*) el arrastre que actúan sobre la superficie de sustentación ¿serán cero o distintas de cero?

11-73C Fluye aire y éste pasa a una superficie de sustentación no-simétrica a un ángulo de ataque cero. *a*) La sustentación y *b*) el arrastre que actúan sobre la superficie de sustentación ¿serán cero o distintas de cero?

11-74C Fluye aire y éste pasa a una superficie de sustentación simétrica a un ángulo de ataque de 5°. *a*) La sustentación y *b*) el arrastre que actúan sobre la superficie de sustentación ¿serán cero o distintas de cero?

11-75C ¿Qué es la pérdida de sustentación? ¿Qué provoca que una superficie de sustentación pierda sustentación? ¿Por qué a las aeronaves comerciales no se les permite volar en condiciones cercanas a la pérdida de sustentación?

11-76C Tanto la sustentación como el arrastre de una superficie de sustentación aumentan con un incremento en el ángulo de ataque. En general, ¿cuál aumenta a una razón mayor, la sustentación o el arrastre?

11-77C ¿Por qué los *flaps* se usan en los bordes de entrada y salida de las alas de los aviones grandes durante el despegue y el aterrizaje? ¿Puede una aeronave despegar o aterrizar sin ellos?

11-78C ¿Cómo afectan los *flaps* a la sustentación y el arrastre de las alas?

11-79C ¿Cuál es el efecto de los vórtices de extremo de ala (la circulación del aire desde la parte inferior de las alas hacia la parte superior) sobre el arrastre y la sustentación?

11-80C ¿Qué es el arrastre inducido sobre las alas? ¿Puede el arrastre inducido minimizarse cuando se usan alas largas y estrechas, o alas cortas y anchas?

11-81C Fluye aire y éste pasa a una pelota esférica. ¿La sustentación que se ejerce sobre la pelota es cero o distinta de cero? Conteste la misma pregunta si la pelota gira.

11-82 Una pelota de tenis con 57 g de masa y 6.4 cm de diámetro se golpea con una velocidad inicial de 92 km/h y un giro hacia atrás de 4 200 rpm. Determine si caerá o se elevará

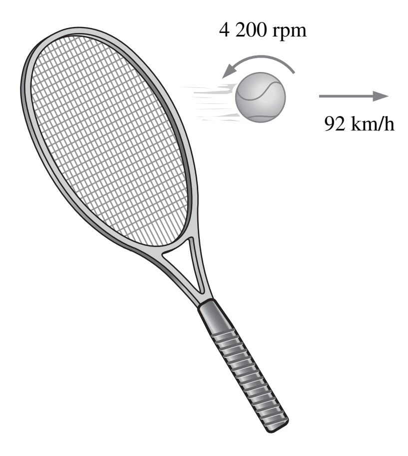


FIGURA P11-82

debido al efecto combinado de la gravedad y la sustentación debida al giro poco después de ser golpeada. Suponga que el aire está a 1 atm y 25°C.

11-83 Considere que una aeronave despega a 190 km/h cuando está totalmente cargada. Si el peso de la aeronave aumenta 20 por ciento como resultado de la sobrecarga, determine la velocidad a la que despegará la aeronave sobrecargada. *Respuesta:* 208 km/h

11-84 Considere un avión cuya velocidad de despegue es de 220 km/h y que tarda 15 s en despegar a nivel del mar. Para un aeropuerto a una elevación de 1 600 m (como Denver), determine *a*) la velocidad de despegue, *b*) el tiempo de despegue y *c*) la longitud de pista adicional necesaria para este avión. Suponga aceleración constante para ambos casos.

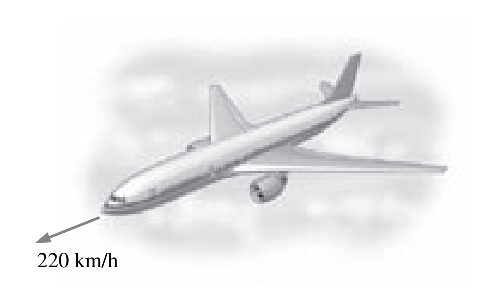


FIGURA P11-84

11-85I Un avión consume combustible a una tasa de 5 gal/min cuando vuela a una altitud constante de 10 000 ft a velocidad constante. Si supone que el coeficiente de arrastre y la eficiencia del motor permanecen iguales, determine la tasa de consumo de combustible a una altitud de 30 000 ft a la misma velocidad.

11-86 Un avión jumbo jet tiene una masa aproximada de 400 000 kg cuando está totalmente cargado con más de 400 pasajeros y despega a una velocidad de 250 km/h. Determine la velocidad de despegue cuando el avión tiene 100 asientos vacíos. Suponga que cada pasajero con equipaje pesa 140 kg y las posiciones de las alas y *flaps* se mantienen iguales. *Respuesta:* 246 km/h

11-87 Reconsidere el problema 11-86. Con el Software EES (o algún otro) investigue el efecto del número de pasajeros sobre la velocidad de despegue de la aeronave. Varíe el número de pasajeros de 0 a 500 en incrementos de 50. Tabule y grafique los resultados.

11-88 Una pequeña aeronave tiene un área de ala de 30 m^2, un coeficiente de sustentación de 0.45 en condiciones de despegue y una masa total de 2 800 kg. Determine *a*) su velocidad de despegue a nivel del mar en condiciones atmosféricas estándar, *b*) la carga del ala y *c*) la potencia requerida para mantener una velocidad de crucero constante de 300 km/h para un coeficiente de arrastre de crucero de 0.035.

11-89 Un pequeño avión tiene una masa total de 1 800 kg y un área de ala de 42 m^2. Determine coeficientes de sustentación y arrastre mientras vuela a una altitud de 4 000 m con una velocidad constante de 280 km/h y que genera 190 kW de potencia.

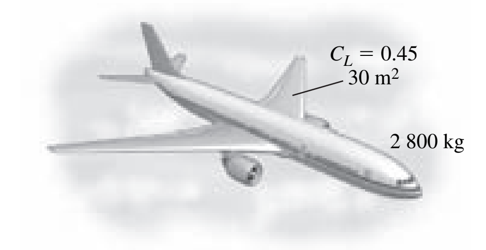


FIGURA P11-88

11-90 La superficie de sustentación NACA 64(1)-412 tiene una razón de sustentación al arrastre de 50 a un ángulo de ataque de 0°, como se muestra en la figura 11-43. ¿En qué ángulo de ataque aumentará esta razón a 80?

11-91 Considere un avión ligero que tiene un peso total de 15 000 N y un área de ala de 46 m^2 y cuyas alas recuerdan la superficie de sustentación NACA 23012 sin *flaps*. Con los datos de la figura 11-45, determine la velocidad de despegue en un ángulo de ataque de 5° a nivel del mar. También determine la velocidad de pérdida de sustentación. *Respuesta:* 94 km/h, 67.4 km/h

11-92 Un avión tiene una masa de 50 000 kg, un área de ala de 300 m^2, un coeficiente de sustentación máximo de 3.2 y un coeficiente de arrastre de crucero de 0.03 a una altitud de 12 000 m. Determine *a*) la velocidad de despegue a nivel del mar, si supone que está 20 por ciento sobre la velocidad de pérdida de sustentación, y *b*) el empuje que los motores deben suministrar para una velocidad de crucero de 700 km/h.

11-93I Una pelota lisa de 2.4 in de diámetro y que rota a 500 rpm, se libera en una corriente de agua a 60°F que fluye a 4 ft/s. Determine las fuerzas de sustentación y arrastre que actúan sobre la pelota cuando acaba de dejarse en el agua.

Problemas de repaso

11-94 Un motor de automóvil puede considerarse como un bloque rectangular de 0.4 m de alto, 0.60 m de ancho y 0.7 m

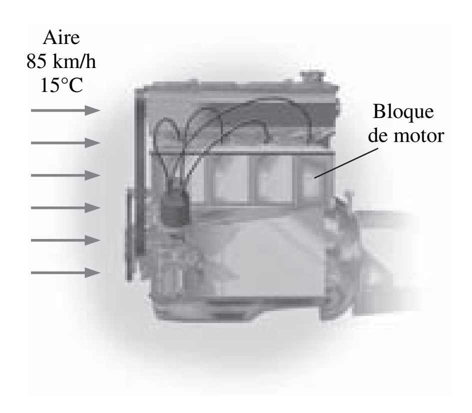


FIGURA P11-94

de largo. El aire ambiente está a 1 atm y 15°C. Determine la fuerza de arrastre que actúa sobre la superficie inferior del bloque del motor mientras el auto viaja a una velocidad de 85 km/h. Suponga que el flujo es turbulento sobre toda la superficie debido a la agitación constante del bloque del motor. *Respuesta:* 0.65 N

11-95 Calcule el grosor de la capa límite en un flujo sobre una placa plana de 2.5 m de largo a intervalos de 25 cm y grafique la capa límite sobre la placa para el flujo de *a*) aire, *b*) agua y *c*) aceite de motor a 1 atm y 20°C a una velocidad corriente arriba de 3 m/s.

11-96I El compartimiento de pasajeros de una minivan que viaja a 60 mi/h en aire ambiente a 1 atm y 80°F puede modelarse como una caja rectangular de 3.2 ft de alto, 6 ft de ancho y 11 ft de largo. El flujo de aire sobre las superficies exteriores puede suponerse turbulento debido a las intensas vibraciones producidas. Determine la fuerza de arrastre que actúa sobre las superficies superior y las dos laterales de la "van" y la potencia necesaria para superarla.

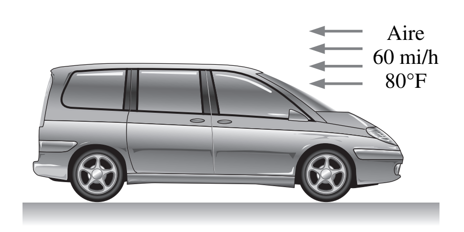


FIGURA P11-96I

11-97 Un tanque esférico de 1 m de diámetro externo se ubica en el exterior a 1 atm y 25°C, y está expuesto a vientos a 35 km/h. Determine la fuerza de arrastre ejercida por el viento sobre el tanque. *Respuesta:* 3.5 N

11-98 Un anuncio publicitario rectangular de 2 m de alto y 4 m de ancho está unido a un bloque rectangular de concreto (densidad = 2 300 k/m^3) de 4 m de ancho y 0.15 de alto, mediante dos postes de 5 cm de diámetro y 4 m de alto (parte expuesta), como se muestra en la figura P11-98. Si debe soportar vientos de 150 km/h desde cualquier dirección, determine *a*) la fuerza de arrastre máxima sobre el anuncio, *b*) la fuerza de arrastre que actúa sobre los postes y *c*) la longitud mínima *L* del bloque de concreto para que el anuncio resista los vientos. Considere que la densidad del aire es de 1.30 kg/m^3.



FIGURA P11-98

11-99 Un bote de plástico cuya superficie inferior se puede aproximar como una superficie plana de 1.5 m de ancho y 2 m de largo, debe desplazarse por el agua a 15°C con velocidad de hasta 30 km/h. Determine el arrastre debido a fricción que el agua ejerce sobre el bote y la potencia necesaria para superarlo.

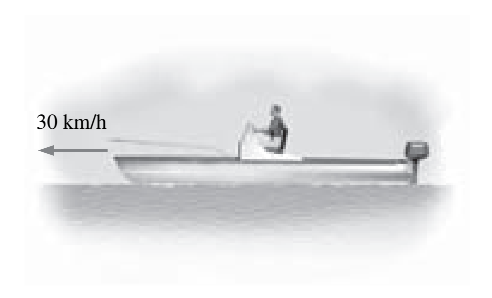


FIGURA P11-99

11-100 Reconsidere el problema 11-99. Con el Software EES (o algún otro), investigue el efecto de la velocidad del bote sobre la fuerza de arrastre que actúa sobre la superficie inferior del bote y la potencia necesaria para superarlo. Varíe la velocidad del bote de 0 a 100 km/h en incrementos de 10 km/h. Tabule y grafique los resultados.

11-101I Un avión comercial tiene una masa total de 15 0 000 lbm y un área de planta de ala de 1 800 ft^2. El avión tiene una velocidad de crucero de 550 mi/h y una altitud de crucero de 38 000 ft, donde la densidad del aire es de 0.0208 lbm/ft^3. El avión tiene *flaps* de doble ranura para usarlos durante el despegue y el aterrizaje, pero vuela con los *flaps* retraídos. Si se supone que las características de sustentación y de arrastre de las alas pueden aproximarse con las propiedades del perfil NACA 23012, determine *a*) la velocidad mínima segura para despegar y aterrizar con y sin *flaps* extendidos, *b*) el ángulo de ataque para volar en vuelo de crucero de manera estacionaria a la altitud de crucero y *c*) la potencia que se necesita suministrar para ofrecer suficiente empuje para superar el arrastre. Considere que la densidad del aire en el suelo es de 0.075 lbm/ft^3.

11-102 Una pelota lisa de 8 cm de diámetro tiene una velocidad de 36 km/h durante un golpe común. Determine el porcentaje de aumento en el coeficiente de arrastre si a la pelota se le da un giro de 3 500 rpm en el aire a 1 atm y 25°C.

11-103 Un paracaidista y su paracaídas de 8 m de diámetro pesan 950 N. Si considera que la densidad promedio del aire es de 1.2 kg/m^3, determine la velocidad terminal del paracaidista. *Respuesta:* 4.9 m/s

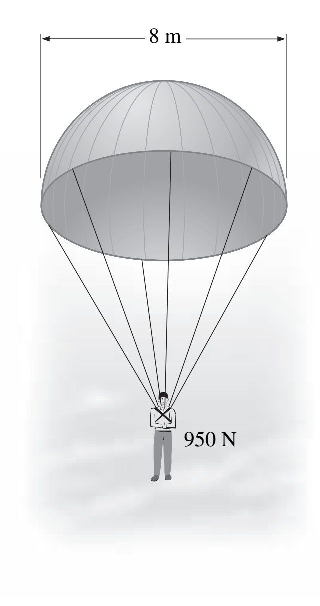


FIGURA P11-103

11-104 Un tracto-remolque de 17 000 kg con área frontal de 9.2 m^2, un coeficiente de arrastre de 0.96, un coeficiente de resistencia de rodamiento de 0.05 (cuando se multiplica el peso de un vehículo por el coeficiente de resistencia de rodamiento proporciona la resistencia de rodamiento), una resistencia de fricción de cojinete de 350 N y una velocidad máxima de 110 km/h sobre un camino a nivel durante un crucero estacionario en clima tranquilo con una densidad de aire de 1.25 kg/m^3. Ahora, se instala una cubierta al frente para suprimir la separación y volver aerodinámico el flujo sobre la superficie superior del tracto-remolque, y el coeficiente de arrastre se reduce a 0.76. Determine la velocidad máxima del tracto-remolque con la cubierta. *Respuesta:* 133 km/h

11-105 La Ley de Stokes puede emplearse para determinar la viscosidad de un fluido cuando se libera dentro de él un objeto esférico y se mide su velocidad terminal en dicho fluido. Esto puede hacerse cuando se grafica la distancia recorrida contra el tiempo y se observa cuando se vuelve lineal la curva. Durante este experimento, una pelota de vidrio de 3 mm de diámetro (r = 2 500 kg/m^3) se suelta en un fluido cuya densidad es de 875 kg/m^3, y la velocidad terminal se mide en 0.12 m/s. Sin considerar los efectos de pared, determine la viscosidad del fluido.

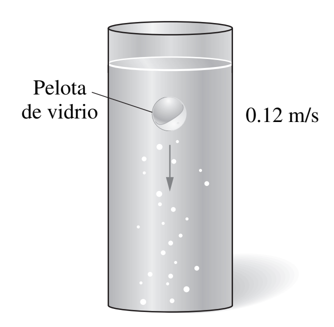


FIGURA P11-105

11-106 Durante un experimento, tres pelotas de aluminio (r_s = 2 600 kg/m^3) que tienen diámetros de 2, 4 y 10 mm, respectivamente, se liberan en un tanque lleno con glicerina a 22°C (ρ_f = 1 274 kg/m^3 y μ = 1 kg/m · s). Se mide que sus velocidades terminales de asentamiento son 3.2, 12.8 y 60.4 mm/s, respectivamente. Compare estos valores con las velocidades predichas por la Ley de Stokes para fuerza de arrastre $F_D = 3\pi\mu DV$, que es válida para números de Reynolds muy bajos (Re $\ll$ 1). Determine el error cometido para cada caso y valore la precisión de la Ley de Stokes.

11-107 Repita el problema 11-106 y considere la forma general de la Ley de Stokes expresada como $F_D = 3\pi\mu DV + (9\pi/16)\rho_s V^2 D^2$.

11-108 Una pequeña pelota de aluminio con D = 2 mm y ρ_s = 2 700 kg/m^3 se libera en un enorme contenedor lleno con aceite a 40°C (ρ_f = 876 kg/m^3 y μ = 0.2177 kg/m · s). Se espera que el número de Reynolds sea pequeño y por lo tanto sea aplicable la Ley de Stokes para fuerza de arrastre $F_D = 3\pi\mu DV$. Demuestre que la variación de velocidad con el tiempo puede expresarse como $V = (a/b)(1 - e^{-bt})$ donde; $a = g(1 - \rho_f/\rho_s)$ y $b = 18\mu/(\rho_s D^2)$. Grafique la variación de la velocidad con el tiempo, y calcule el tiempo que tarda la pelota en alcanzar 99 por ciento de su velocidad terminal.

11-109 Fluye aceite de motor a 40°C sobre una larga placa plana a una velocidad de 4 m/s. Determine la distancia x_{cr} desde el borde de entrada de la placa, donde el flujo se vuelve turbulento; calcule y grafique el grosor de la capa límite sobre una longitud de $2x_{cr}$.

Problemas de diseño y ensayo

11-110 Escriba un ensayo acerca de la historia de la reducción de los coeficientes de arrastre de los automóviles y obtenga los datos del coeficiente de arrastre para algunos modelos recientes de automóviles de los catálogos de los fabricantes de autos.

11-111 Escriba un ensayo acerca de los *flaps* que se usan en los bordes de entrada y salida de las alas de las aeronaves comerciales. Explique cómo los *flaps* afectan los coeficientes de arrastre y sustentación durante el despegue y el aterrizaje.

11-112 Los grandes aviones comerciales cruzan a considerables altitudes (aproximadamente hasta 40 000 ft) para ahorrar combustible. Explique cómo volar a grandes altitudes reduce el arrastre y ahorra combustible. Explique también por qué los aviones pequeños vuelan a altitudes relativamente bajas.

11-113 Numerosos conductores apagan su aire acondicionado y bajan las ventanillas de sus autos con la esperanza de ahorrar combustible. Pero, se afirma que este aparente "enfriamiento gratuito" en realidad aumenta el consumo de combustible del automóvil. Investigue acerca de este tema y escriba un ensayo sobre cuál práctica ahorrará gasolina y en qué condiciones.

CAPÍTULO

12

FLUJO COMPRESIBLE

Hasta ahora hemos limitado nuestra atención principalmente a flujos para los cuales las variaciones de densidad y los efectos de compresibilidad son insignificantes. Sin embargo, en este capítulo se ignora esta limitante y se consideran fluidos que implican cambios importantes en la densidad. Estos flujos llamados *flujos compresibles* se encuentran con frecuencia en dispositivos que incluyen el flujo de gases a altas velocidades. Los flujos compresibles combinan la dinámica de fluidos y la termodinámica, ambas son absolutamente necesarias para el desarrollo de los fundamentos teóricos necesarios. En este capítulo se comentan las relaciones generales asociadas con fluidos compresibles para un gas ideal con calores específicos constantes.

Al inicio del capítulo se introducen los conceptos de *estado de estancamiento*, *velocidad del sonido* y *número de Mach* para flujos compresibles. Las relaciones entre las propiedades estáticas y de estancamiento se desarrollan para flujos isentrópicos de gases ideales, y se expresan en función de la razón de calores específicos y el número de Mach. Se tratan los efectos de los cambios del área en flujos isentrópicos unidimensionales subsónicos y supersónicos. Estos efectos se ilustran considerando el flujo isentrópico a través de *toberas convergentes* y *toberas convergentes-divergentes*. Se estudia el concepto de *ondas de choque* y la variación de las propiedades de flujo a través de ondas de choque normales y oblicuas. Para finalizar, se consideran los efectos de la fricción y la transferencia de calor en flujos compresibles, además se incluyen relaciones para los cambios en las propiedades.

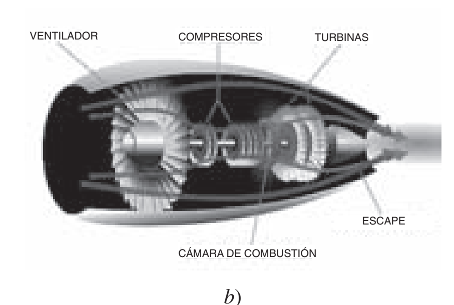
OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Medir las consecuencias de la compresibilidad en un flujo de gas.
- Entender por qué una tobera debe tener una sección divergente para acelerar el gas a velocidades supersónicas.
- Predecir choques y calcular cambios de las propiedades a través de una onda de choque.
- Entender los efectos de la fricción y la transferencia de calor en flujos compresibles.



a)



b)

FIGURA 12-1
Los aviones y los motores de propulsión implican altas velocidades, y por esta razón, al analizarlos, el término de la energía cinética siempre debe tomarse en cuenta.

a) Foto cortesía de NASA, http://lisar.larc.nasa.gov/IMAGES/SMALL/EL-1999-00108.jpeg, y b) cortesía de Pratt and Whitney. Reproducido con permiso.

12-1 ▪ PROPIEDADES DE ESTANCAMIENTO

Cuando se analizan volúmenes de control es muy conveniente combinar la *energía interna* y la *energía de flujo* de un fluido en un solo término: *entalpía*, definida por unidad de masa como $h = u + P/\rho$. Cada vez que la energía cinética y la energía potencial de un fluido son insignificantes, como sucede con frecuencia, la entalpía representa la *energía total* de un fluido. Para flujos a altas velocidades, como los que fluyen en motores de propulsión (Fig. 12-1), la energía potencial del fluido es insignificante, pero la energía cinética no lo es. En tal caso, es conveniente combinar la entalpía y la energía cinética del fluido en un solo término llamado **entalpía de estancamiento** (o **entalpía total**) h_0, definido por unidad de masa como:

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \qquad \text{(kJ/kg)} \tag{12-1}$$

Cuando la energía potencial de un fluido es insignificante, la entalpía de estancamiento representa la *energía total de un flujo de fluido* por unidad de masa. De esta manera se simplifica el análisis termodinámico de flujos a altas velocidades.

En este capítulo se cita como **entalpía estática** la entalpía normal h —cada vez que sea necesario— para distinguirla de la entalpía de estancamiento. Observe que la entalpía de estancamiento es una combinación de las propiedades de un fluido, tal como la entalpía estática. Ambas entalpías son idénticas cuando la energía cinética de un fluido es despreciable.

Considere el flujo estacionario de un fluido a través de un ducto, tal como una tobera, un difusor, o cualquier otro conducto de flujo en el cual el flujo es adiabático y donde no se realiza el trabajo de flecha o trabajo eléctrico, como se muestra en la figura 12-2. Al suponer que el fluido experimenta pequeños cambios o ninguno en su elevación y en su energía potencial, el balance de energía ($\dot{E}_{ent} = \dot{E}_{sal}$) para este dispositivo de flujo estacionario de una entrada y una salida se reduce a:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{12-2}$$

o

$$h_{01} = h_{02} \tag{12-3}$$

Entonces, en ausencia de cualquier interacción de calor y de trabajo, así como de cualquier cambio en la energía potencial, la entalpía de estancamiento de un fluido permanece constante durante un proceso de flujo estacionario. Los flujos a través de toberas y difusores por lo general satisfacen estas condiciones, y cualquier aumento en la velocidad del fluido en estos dispositivos origina un decremento equivalente en la entalpía estática del fluido.

Si el fluido se lleva al reposo, entonces la velocidad del estado 2 es 0 y la ecuación 12-2 es:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 = h_{02}$$

Así, la *entalpía de estancamiento* representa la *entalpía de un fluido cuando se lleva al reposo adiabáticamente.*

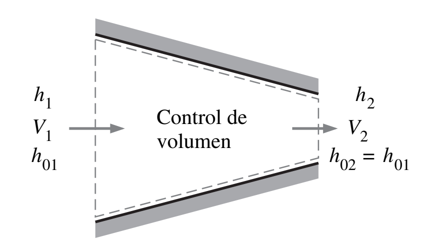


FIGURA 12-2
Flujo estacionario de un fluido a través de un ducto adiabático.

Durante el proceso de estancamiento, la energía cinética de un fluido se convierte en entalpía (energía interna + energía de flujo), la cual da como resultado un aumento en la temperatura y la presión del fluido (Fig. 12-3). Las propiedades de un fluido en estado de estancamiento se llaman **propiedades de estancamiento** (temperatura de estancamiento, presión de estancamiento, densidad de

estancamiento, etc.). El estado de estancamiento y las propiedades de estancamiento se indicarán con el subíndice 0.

El estado de estancamiento se llama **estado de estancamiento isentrópico** cuando el proceso de estancamiento es reversible y adiabático (es decir, isentrópico). La entropía de un fluido permanece constante durante el proceso isentrópico de llevar el fluido al estado de estancamiento. El proceso real (irreversible) y el proceso isentrópico de llevar al reposo un flujo de fluido se ilustra en el diagrama *h-s* de la figura 12-4. Observe que la entalpía de estancamiento del fluido (y la temperatura de estancamiento si el fluido es un gas ideal) es la misma para ambos casos. Sin embargo, la presión de estancamiento real es menor que la presión de estancamiento isentrópica porque la entropía aumenta durante el proceso real de estancamiento como resultado de la fricción del fluido. Con frecuencia, los procesos de estancamiento se aproximan a isentrópicos y a las propiedades de estancamiento isentrópico se les llama simplemente propiedades de estancamiento.

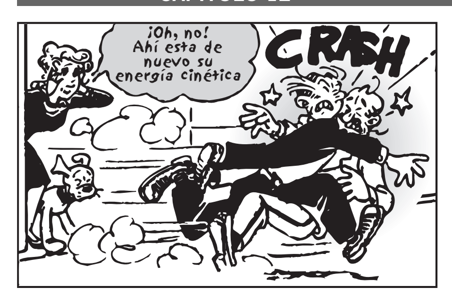


FIGURA 12-3
La energía cinética se convierte en entalpía durante un proceso de estancamiento.
© Reproducido con permiso especial de King Features Syndicate.

Cuando el fluido se aproxima como un *gas ideal* con calores específicos constantes, su entalpía puede reemplazarse por c_pT y la ecuación 12-1 puede expresarse como:

$$c_pT_0 = c_pT + \frac{V^2}{2}$$

o

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} \tag{12-4}$$

En ésta, T_0 se llama **temperatura de estancamiento** (o **temperatura total**), y representa *la temperatura que alcanza un gas ideal cuando se lleva al reposo adiabáticamente*. El término $V^2/2c_p$ corresponde al incremento de la temperatura alcanzado durante tal proceso y se llama **temperatura dinámica**. Por ejemplo, la temperatura dinámica del aire que fluye a 100 m/s es $(100\text{ m/s})^2/(2 \times 1.005\text{ kJ/kg}\cdot\text{K}) = 5.0\text{ K}$. Por lo tanto, cuando el aire a 300 K y 100 m/s se lleva al reposo adiabáticamente (en la punta de la sonda de medición de temperatura, por ejemplo), su temperatura alcanza el valor de estancamiento de 305 K (Fig. 12-5). Observe que para los flujos a bajas velocidades, las temperaturas de estancamiento y estática (o normal) son prácticamente iguales. Pero, para flujos a altas velocidades, la temperatura medida por una sonda en reposo colocada en el fluido (temperatura de estancamiento) puede ser considerablemente mayor que la temperatura estática del fluido.

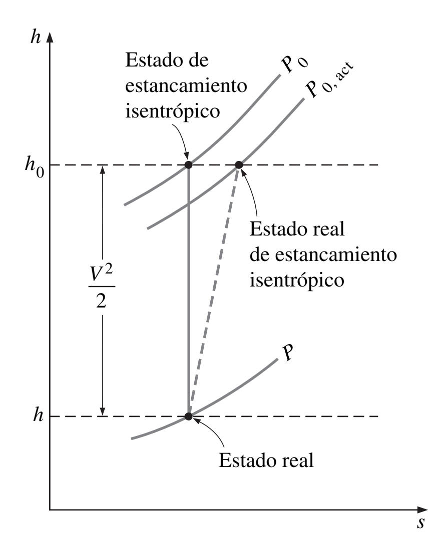


FIGURA 12-4
El estado real, el estado de estancamiento real y el estado de estancamiento isentrópico de un fluido en un diagrama *h-s.*

La presión que alcanza un fluido cuando se lleva al reposo isentrópicamente se llama **presión de estancamiento** P_0. Para un gas ideal con calores específicos constantes, P_0 está relacionado con la presión estática del fluido mediante:

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{k/(k-1)} \tag{12-5}$$

Se observa que $\rho = 1/v$ y al utilizar la relación isentrópica $Pv^k = P_0v_0^k$, el cociente entre la densidad de estancamiento y la densidad estática pueden expresarse como:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(k-1)} \tag{12-6}$$

Cuando se usan entalpías de estancamiento no es necesario referirse a la energía cinética de manera explícita. Entonces el balance de energía $\dot{E}_{ent} = \dot{E}_{sal}$ para el dispositivo de flujo estacionario con una entrada y una salida puede expresarse como:

$$q_{ent} + w_{ent} + (h_{01} + gz_1) = q_{sal} + w_{sal} + (h_{02} + gz_2) \tag{12-7}$$

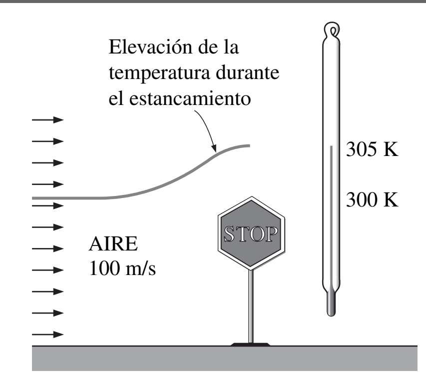


FIGURA 12-5
La temperatura de un gas ideal que fluye a una velocidad V aumenta en $V^2/2c_p$ cuando el gas se lleva al reposo.

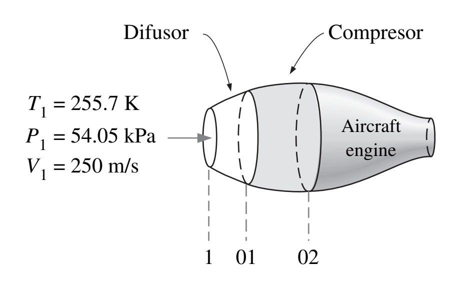


FIGURA 12-6
Esquema para el ejemplo 12-1.

donde h_{01} y h_{02} son las entalpías de estancamiento en los estados 1 y 2, respectivamente. Cuando el fluido es un gas ideal con calores específicos constantes, la ecuación 12-7 se convierte en:

$$(q_{ent} - q_{sal}) + (w_{ent} - w_{sal}) = c_p(T_{02} - T_{01}) + g(z_2 - z_1) \quad \textbf{(12-8)}$$

donde T_{01} y T_{02} son las temperaturas de estancamiento.

Note que los términos de la energía cinética no aparecen explícitamente en las ecuaciones 12-7 y 12-8, pero los términos de la entalpía de estancamiento consideran su contribución.

EJEMPLO 12-1 **Compresión del aire a alta velocidad en un avión**

Un avión vuela a una velocidad de crucero de 250 m/s a una altitud de 5 000 m, donde la presión atmosférica es de 54.05 kPa y la temperatura ambiente del aire es de 255.7 K. El aire ambiente se desacelera primero en un difusor antes de que entre al compresor (Fig. 12-6). Se considera que el difusor y el compresor son isentrópicos. Determine *a*) la presión de estancamiento a la entrada al compresor y *b*) el trabajo que debe realizar el compresor por unidad de masa del aire comprimido si la razón de presiones de estancamiento a la salida y la entrada del compresor es 8.

SOLUCIÓN Aire a alta velocidad entra al difusor y el compresor de un avión. Se determinarán la presión de estancamiento del aire a la entrada del compresor y el trabajo necesario para impulsar el compresor.

Hipótesis **1** El difusor y el compresor son isentrópicos. **2** El aire es un gas ideal con calores específicos constantes e iguales a sus valores en temperatura ambiente.

Propiedades El calor específico a presión constante c_p y la razón de calores específicos k del aire a temperatura ambiente son:

$$c_p = 1.005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \qquad \text{y} \qquad k = 1.4$$

Análisis *a*) En condiciones isentrópicas, la presión de estancamiento a la entrada del compresor (salida del difusor) puede determinarse a partir de la ecuación 12-5. No obstante, primero es necesario encontrar la temperatura T_{01} a la entrada del compresor. Con base en las suposiciones expuestas, T_{01} puede determinarse en la ecuación 12-4:

$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 255.7 \text{ K} + \frac{(250 \text{ m/s})^2}{(2)(1.005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})}\left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}\right)$$
$$= 286.8 \text{ K}$$

De la ecuación 12-5:

$$P_{01} = P_1\left(\frac{T_{01}}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = (54.05 \text{ kPa})\left(\frac{286.8 \text{ K}}{255.7 \text{ K}}\right)^{1.4/(1.4-1)}$$
$$= \mathbf{80.77 \text{ kPa}}$$

La temperatura del aire se incrementaría en 31.1°C y la presión en 26.72 kPa mientras que el aire se desacelera desde 250 m/s hasta velocidad cero. Estos aumentos en la temperatura y la presión del aire se deben a la conversión de la energía cinética en entalpía.

b) Para determinar el trabajo del compresor es necesario conocer la temperatura de estancamiento del aire a la salida del compresor T_{02}. La razón de presiones de estancamiento a través del compresor P_{02}/P_{01} se especifica como 8. Mientras que el proceso de compresión se considere isentrópico, T_{02} puede determinarse a partir de la relación isentrópica del gas ideal (Ec. 12-5):

$$T_{02} = T_{01}\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{(k-1)/k} = (286.8 \text{ K})(8)^{(1.4-1)/1.4} = 519.5 \text{ K}$$

Se ignoran los cambios en la energía potencial y la transferencia de calor, el trabajo consumido por el compresor por unidad de masa del aire comprimido se determina de la ecuación 12-8:

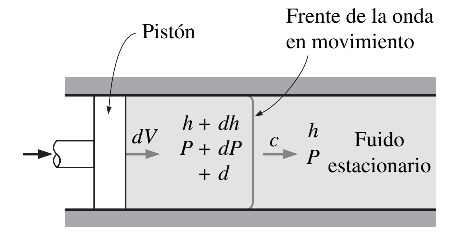
$$\begin{aligned} w_{\text{ent}} &= c_p(T_{02} - T_{01}) \\ &= (1.005\ \text{kJ/kg} \cdot \text{K})(519.5\ \text{K} - 286.8\ \text{K}) \\ &= \mathbf{233.9\ kJ/kg} \end{aligned}$$

De esta manera, el trabajo suministrado al compresor es 233.9 kJ/kg.
Discusión Note que con el uso de las propiedades de estancamiento, automáticamente se justifica cualquier cambio en la energía cinética del flujo de fluido.

12-2 ▪ VELOCIDAD DEL SONIDO Y NÚMERO DE MACH

Un parámetro importante en el estudio de flujo compresible es la **velocidad de sonido** (o **velocidad sónica**), que es la velocidad a la cual una onda de presión infinitesimalmente pequeña viaja a través de un medio. La onda de presión puede ser originada por un pequeño disturbio, el cual crea un ligero aumento en la presión local.

Para obtener la expresión para la velocidad de sonido en un medio, considere un conducto lleno de fluido en reposo, como se muestra en la figura 12-7. Un émbolo colocado en el conducto se mueve a la derecha con una velocidad infinitesimal constante dV y crea una onda sónica. El frente de onda se mueve a la derecha a través del fluido a la velocidad del sonido c y separa el fluido adyacente al pistón que ya está en movimiento del fluido que aún está en reposo. El fluido a la izquierda del frente de onda experimenta un cambio infinitesimal de sus propiedades termodinámicas, mientras que el fluido a la derecha del frente de onda mantiene sus propiedades termodinámicas originales, como se muestra en la figura 12-7.



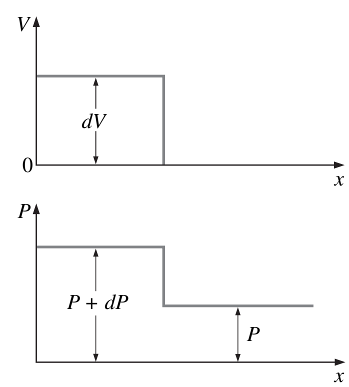


FIGURA 12-7
Propagación de una pequeña onda de presión a lo largo de un ducto.

Para simplificar el análisis, considere un volumen de control que encierra al frente de onda y que se mueve con él, como se muestra en la figura 12-8. Para un observador que viaja con el frente de onda, el fluido a la derecha parecería moverse hacia el frente de onda con una velocidad c y el fluido a la izquierda parecería alejarse del frente de onda con una velocidad $c - dV$. Por supuesto, el observador pensará que el volumen de control que encierra el frente de onda (y a él mismo o ella misma) está en reposo, y el observador es testigo de un proceso estacionario. El balance de masa para este proceso de flujo estacionario de una entrada y una salida puede expresarse como:

$$\dot{m}_{\text{der}} = \dot{m}_{\text{izq}}$$

o

$$\rho A c = (\rho + d\rho)A(c - dV)$$

Al cancelar el área de la sección transversal A y despreciar los términos de orden superior; esta ecuación se reduce a:

$$c\, d\rho - \rho\, dV = 0 \qquad \textbf{(a)}$$

Si no hay transferencia de energía en forma de calor o trabajo a través de las fronteras del volumen de control durante este proceso estacionario, y el cambio en la energía potencial puede despreciarse, entonces el balance de energía para el proceso estacionario $e_{\text{ent}} = e_{\text{sal}}$ se convierte en:

$$h + \frac{c^2}{2} = h + dh + \frac{(c - dV)^2}{2}$$

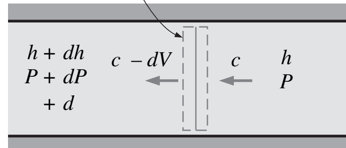


FIGURA 12-8
Volumen de control que se mueve con la pequeña onda de presión en un ducto.

que da como resultado:

$$dh - c\,dV = 0 \qquad \textbf{(b)}$$

donde se ha despreciado el término de segundo orden dV^2. La amplitud de la onda sónica que se presenta normalmente es muy pequeña y no causa ningún cambio apreciable en la presión y la temperatura del fluido. Por eso, la propagación de una onda sónica no es solamente adiabática, también es casi isentrópica. Entonces, la relación termodinámica $T\,ds = dh - dP/\rho$ (vea Çengel, 2002) se reduce a:

$$T\cancelto{0}{ds} = dh - \frac{dP}{\rho}$$

o

$$dh = \frac{dP}{\rho} \qquad \textbf{(c)}$$

Con la combinación de las ecuaciones *a, b* y *c* se obtiene la expresión deseada para la velocidad del sonido como:

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} \qquad \text{a } s = \text{constante}$$

o

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s \qquad \textbf{(12-9)}$$

Se deja como ejercicio al lector demostrar que al usar las relaciones de las propiedades termodinámicas (vea ref. 1), la ecuación 12-9 también puede escribirse como:

$$c^2 = k\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \qquad \textbf{(12-10)}$$

donde k es la razón de calores específicos del fluido. Observe que la velocidad del sonido en un fluido es una función de las propiedades termodinámicas de éste.

Cuando el fluido es un gas ideal ($P = \rho RT$), la diferenciación en la ecuación 12-10 puede hacerse con facilidad para obtener:

$$c^2 = k\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T = k\left[\frac{\partial(\rho RT)}{\partial \rho}\right]_T = kRT$$

o

$$c = \sqrt{kRT} \qquad \textbf{(12-11)}$$

Observe que la constante del gas R tiene valor fijo para un gas ideal en particular y que la razón de calores específicos k de un gas ideal es, a lo mucho, una función de la temperatura, se observa que la velocidad del sonido en un gas ideal dado es función de la temperatura solamente (Fig. 12-9).

Un segundo parámetro importante en el análisis de flujo compresible es el **número de Mach Ma**, llamado así en honor al físico austriaco Ernst Mach (1838-1916). Es el cociente de la velocidad real del fluido (o de un objeto que se mueve en el fluido en reposo) entre la velocidad del sonido en el mismo fluido, en el mismo estado:

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} \qquad \textbf{(12-12)}$$

Observe que el número de Mach depende de la velocidad del sonido, la cual depende del estado del fluido. Por lo tanto, el número de Mach de un avión que

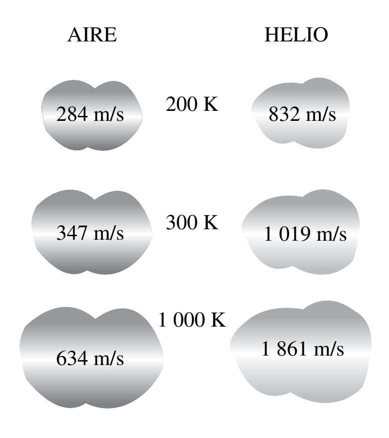
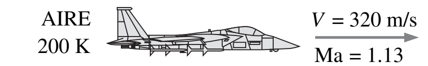


FIGURA 12-9
La velocidad del sonido varía con la temperatura y con el fluido.

vuela a velocidad constante a través de aire quieto puede ser diferente en regiones distintas (Fig.12-10).

Con frecuencia, el régimen de flujos se describe en términos del número de Mach. El flujo se llama **sónico** cuando Ma = 1, **subsónico** cuando Ma < 1, **supersónico** cuando Ma > 1, **hipersónico** cuando Ma ≫ 1 y **transónico** cuando Ma ≅ 1.



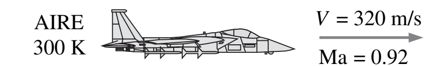


FIGURA 12-10
El número de Mach puede ser diferente a temperaturas distintas, inclusive si la velocidad de vuelo es la misma.

EJEMPLO 12-2 **Número de Mach del aire que entra al difusor**

Se introduce aire en un difusor como se muestra en la figura 12-11 a una velocidad de 200 m/s. Determine *a*) la velocidad del sonido y *b*) el número de Mach a la entrada del difusor cuando la temperatura del aire es de 30°C.

SOLUCIÓN Aire a alta velocidad entra a un difusor. La velocidad del sonido y el número de Mach se determinarán a la entrada del difusor.
Hipótesis El aire en condiciones específicas se comporta como gas ideal.
Propiedades La constante del aire es $R = 0.287$ kJ/kg · K, y la razón de calores específicos a 30°C es 1.4.
Análisis Se observa que la velocidad del sonido en un gas varía con la temperatura, la cual es dada como 30°C.

a) La velocidad del sonido en el aire a 30°C está determinada a partir de la ecuación 12-11:

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{(1.4)(0.287\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(303\text{ K})\left(\frac{1\,000\text{ m}^2/\text{s}^2}{1\text{ kJ/kg}}\right)} = \mathbf{349\text{ m/s}}$$

b) Entonces el número de Mach es:

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} = \frac{200\text{ m/s}}{349\text{ m/s}} = \mathbf{0.573}$$

Discusión El flujo a la entrada del difusor es subsónico ya que Ma < 1.

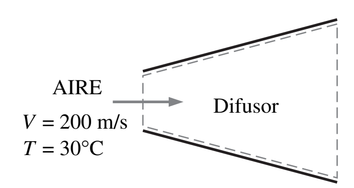


FIGURA 12-11
Esquema para el ejemplo 12-2.

12-3 ▪ FLUJO ISENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL

Durante la circulación de un fluido a través de dispositivos tales como toberas, difusores y los pasajes entre los álabes de las turbinas, las características numéricas de flujo varían principalmente en la dirección del flujo y solamente éste puede aproximarse con buena exactitud como un flujo isentrópico unidimensional. Por lo tanto, esto merece consideración especial. Antes de presentar un comentario formal del flujo isentrópico unidimensional se ilustran algunos aspectos importantes de éste con ejemplo.

EJEMPLO 12-3 **Gas que fluye a través de un ducto convergente-divergente**

Se tiene dióxido de carbono que fluye de manera estacionaria a través de un ducto con área de sección transversal variante, tal como la tobera que se muestra en la figura 12-12, a una razón de flujo de masa de 3 kg/s. El dióxido de carbono entra al ducto con una presión de 1 400 kPa y 200°**C** con una velocidad baja, y se expande en la tobera hasta una presión de 200 kPa. El ducto está diseñado de tal manera que el flujo puede considerarse isentrópico. Determine la densidad, velocidad, área de flujo y número de Mach en cada posición a lo largo del ducto que corresponda a la caída de presión de 200 kPa.

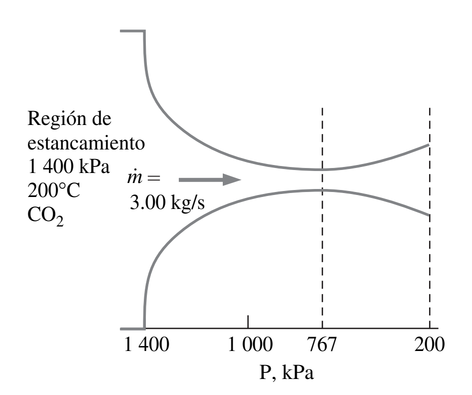


FIGURA 12-12
Esquema para el ejemplo 12-3.

SOLUCIÓN Dióxido de carbono entra a condiciones especificadas a un ducto con área de sección transversal variante. Las propiedades del flujo se determinarán a lo largo del ducto.

Hipótesis **1** El dióxido de carbono es un gas ideal con calores específicos constantes e iguales a sus valores a temperatura ambiente. **2** El flujo a través del ducto es estacionario, unidimensional e isentrópico.

Propiedades Para simplicidad se usa c_p = 0.846 kJ/kg · K y k = 1 289 para realizar los cálculos, los cuales son los valores del calor específico a presión constante y la razón de calores específicos del dióxido de carbono a temperatura ambiente. La constante de gas del dióxido de carbono es R = 0.1889 kJ/kg · K.

Análisis Se observa que la temperatura a la entrada es casi igual a la temperatura de estancamiento porque la velocidad a la entrada es pequeña. El flujo es isentrópico y la temperatura de estancamiento y la presión de estancamiento a lo largo del ducto permanecen constantes. Por lo tanto:

$$T_0 \cong T_1 = 200°\text{C} = 473 \text{ K}$$

y

$$P_0 \cong P_1 = 1\,400 \text{ kPa}$$

Para ilustrar el procedimiento de la solución, se calculan las propiedades en la posición donde la presión es de 1 200 kPa, la primera posición que corresponde a la caída de presión de 200 kPa.

De la ecuación 12-5:

$$T = T_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{(k-1)/k} = (473 \text{ K})\left(\frac{1\,200 \text{ kPa}}{1\,400 \text{ kPa}}\right)^{(1.289-1)/1.289} = 457 \text{ K}$$

A partir de la ecuación 12-4:

$$V = \sqrt{2c_p(T_0 - T)}$$
$$= \sqrt{2(0.846 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(473 \text{ K} - 457 \text{ K})\left(\frac{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^3}{1 \text{ kJ/kg}}\right)}$$
$$= \mathbf{164.5 \text{ m/s}}$$

De la relación del gas ideal:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{1\,200 \text{ kPa}}{(0.1889 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{K})(457 \text{ K})} = \mathbf{13.9 \text{ kg/m}^3}$$

De la relación de la razón de flujo de masa:

$$A = \frac{\dot{m}}{\rho V} = \frac{3 \text{ kg/s}}{(13.9 \text{ kg/m}^3)(164.5 \text{ m/s})} = 13.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = \mathbf{13.1 \text{ cm}^2}$$

De las ecuaciones 12-11 y 12-12:

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{(1.289)(0.1889 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(457 \text{ K})\left(\frac{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}}\right)} = 333.6 \text{ m/s}$$

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} = \frac{164.5 \text{ m/s}}{333.6 \text{ m/s}} = \mathbf{0.493}$$

Los resultados para las otras posiciones correspondientes a la caída de presión especificada se resumen en la Tabla 12-1 y se grafican en la figura 12-13.

Discusión Observe que mientras la presión disminuye, la temperatura y la velocidad del sonido disminuyen mientras que la velocidad del fluido y el número de Mach aumentan en la dirección del flujo. La densidad disminuye lentamente al principio y después rápidamente mientras que la velocidad del fluido aumenta.

TABLA 12-1

Variación de las propiedades de fluido en la dirección del flujo en el ducto descrito en el ejemplo 12-3 para $\dot{m}$ = 3 kg/s = constante

P, kPa	T, K	V, m/s	ρ, kg/m^3	c, m/s	A, cm^2	Ma
1400	473	0	15.7	339.4	∞	0
1200	457	164.5	13.9	333.6	13.1	0.493
1000	439	240.7	12.1	326.9	10.3	0.736
800	417	306.6	10.1	318.8	9.64	0.962
767*	413	317.2	9.82	317.2	9.63	1.000
600	391	371.4	8.12	308.7	10.0	1.203
400	357	441.9	5.93	295.0	11.5	1.498
200	306	530.9	3.46	272.9	16.3	1.946

* 767 kPa es la presión crítica donde el número de Mach es igual a la unidad.

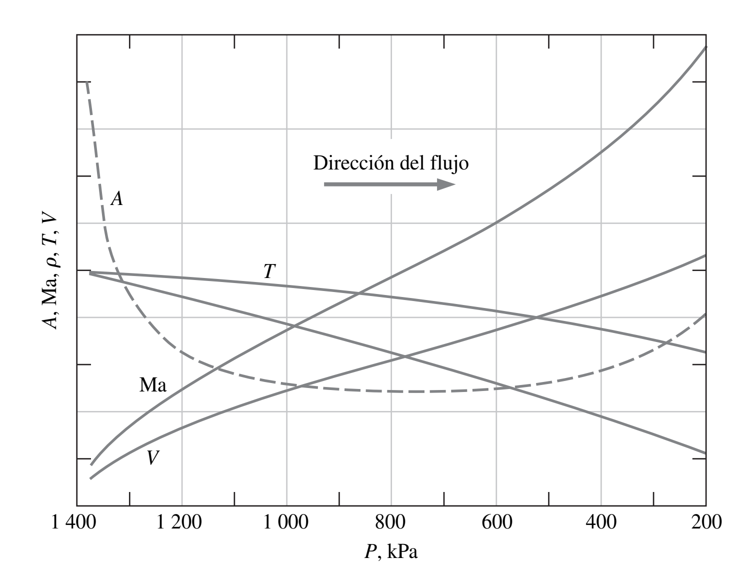


FIGURA 12-13
Variación de las propiedades normalizadas de un fluido y del área de sección transversal en un ducto con la caída de presión de 1 400 a 200 kPa.

Se nota del ejemplo 12-3 que el área de flujo disminuye cuando baja la presión, que cae a un valor crítico de presión al cual el número de Mach es unitario, y entonces el área comienza a aumentar mientras que la presión continúa disminuyendo. El número de Mach es igual a la unidad en la región de menor área de flujo, llamada **garganta** (Fig. 12-14). Se observa que la velocidad del fluido continúa en aumento después de pasar por la garganta, aunque el área de flujo aumenta rápidamente en esta región. Este incremento en la velocidad a través de la garganta se debe a la rápida disminución en la densidad del fluido. El área de flujo del ducto considerada en este ejemplo, primero disminuye y luego aumenta. Estos ductos se llaman **toberas convergente-divergentes**. Se usan para acelerar gases a velocidades supersónicas y no deben confundirse con las *toberas de Venturi* (también llamadas *tubos de Venturi* o *medidores de Venturi*.) usadas estrictamente para flujos incompresibles. La primera vez que se empleó la tobera convergente-divergente fue en 1893, en una turbina de vapor diseñada por el ingeniero sueco, Carl G. B. de Laval (1845-1913); por esta razón, con frecuencia a las toberas convergentes-divergentes se les llama *toberas de Laval*.

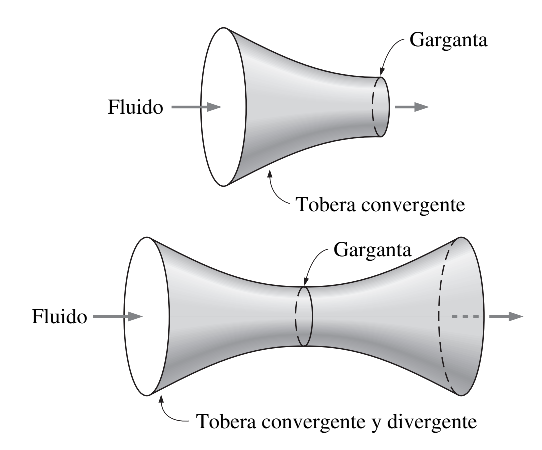


FIGURA 12-14
En una tobera la sección transversal de área más pequeña se llama *garganta*.

Variación de la velocidad de fluido con el área de flujo

El ejemplo 12-3 muestra que son muy complejas las relaciones entre velocidad, densidad y área de flujo en caso de flujos isentrópicos en un ducto. En esta sección se investigan estas relaciones con mayor profundidad, y se establecen relaciones para la variación de las razones de las propiedades estáticas y de estancamiento en función del número de Mach para tales propiedades como presión, temperatura y densidad.

Se comienza esta investigación con la búsqueda de relaciones entre presión, temperatura, densidad, la velocidad, área de flujo y número de Mach para flujos isentrópicos unidimensionales. Se considera el balance de masa para un proceso de flujo estacionario:

$$\dot{m} = \rho A V = \text{constante}$$

Se busca el diferencial y se divide la ecuación resultante entre la razón de flujo de masa y se obtiene:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \qquad \textbf{(12-13)}$$

Al despreciar la energía potencial, el balance de energía para un flujo isentrópico sin interacciones de trabajo puede expresarse de forma diferencial como (Fig. 12-5):

$$\frac{dP}{\rho} + V\,dV = 0 \qquad \textbf{(12-14)}$$

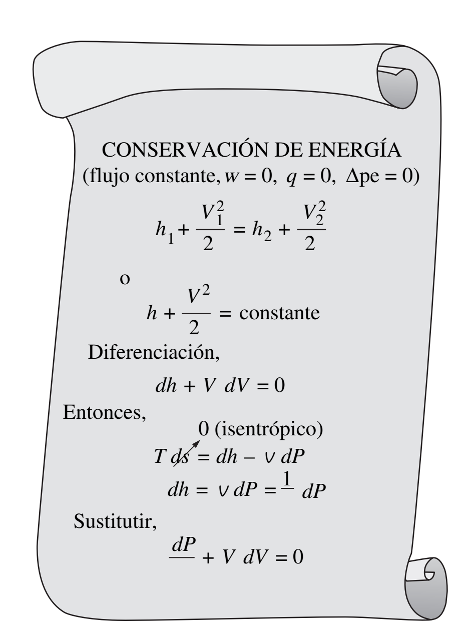


FIGURA 12-15
Obtención de la forma diferencial de la ecuación de energía para un flujo isentrópico estacionario.

Esta relación es también la forma diferencial de la ecuación de Bernoulli cuando se desprecian los cambios en la energía potencial, la cual es una forma de conservación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control de flujo estacionario. Cuando se combinan las ecuaciones 12-13 y 12-14 se tiene:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho}\left(\frac{1}{V^2} - \frac{d\rho}{dP}\right) \qquad \textbf{(12-15)}$$

Se reordena la ecuación 12-9 como $(\partial\rho/\partial P)_s = 1/c^2$ y se sustituye en la ecuación 12-15, que da:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho V^2}(1 - \text{Ma}^2) \qquad \textbf{(12-16)}$$

Ésta es una relación importante para flujo isentrópico en ductos porque describe la variación de la presión en función de la variación del área de flujo. Note que *A*, ρ y *V* son cantidades positivas. Para flujos *subsónicos* (Ma $<$ 1), el tér-

mino $1-\mathrm{Ma}^2$ es positivo; por eso dA y dP deben tener el mismo signo. Esto es, la presión del fluido debe aumentar si el área de flujo del ducto aumenta, y debe disminuir si el área de flujo del ducto disminuye. Por lo tanto, a velocidades subsónicas la presión disminuye en ductos convergentes (toberas aceleradoras subsónicas) y aumenta en ductos divergentes (difusores subsónicos o toberas desaceleradoras subsónicas).

En un *flujo supersónico* ($\mathrm{Ma} > 1$) el término $1-\mathrm{Ma}^2$ es negativo y, por lo tanto, dA y dP deben tener signos opuestos. Esto es, la presión del fluido debe aumentar si el área de flujo del ducto disminuye, y debe disminuir si el área del flujo del ducto aumenta. Por lo tanto, a velocidades supersónicas la presión disminuye en ductos divergentes (toberas aceleradoras supersónicas) y disminuye en ductos convergentes (difusores supersónicos o toberas desaceleradoras supersónicas).

Otra relación importante para el flujo isentrópico de un fluido se obtiene cuando se sustituye $\rho V = -dP/dV$ de la ecuación 12-14 en la ecuación 12-16:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V}(1 - \mathrm{Ma}^2) \tag{12-17}$$

Esta ecuación determina la forma de una tobera aceleradora o de un difusor de flujos isentrópicos subsónicos o supersónicos. Al notar que A y V son cantidades positivas, se llega a la siguiente conclusión:

$$\text{Para flujo subsónico } (\mathrm{Ma} < 1), \quad \frac{dA}{dV} < 0$$

$$\text{Para flujo supersónico } (\mathrm{Ma} > 1), \quad \frac{dA}{dV} > 0$$

$$\text{Para flujo sónico } (\mathrm{Ma} = 1), \quad \frac{dA}{dV} = 0$$

Por lo tanto, la forma apropiada de una tobera depende de la velocidad más alta deseada relativa a la velocidad de sonido. Para acelerar un fluido debe usarse una tobera convergente a velocidades subsónicas y una tobera divergente a velocidades supersónicas. Las velocidades encontradas en la práctica en aplicaciones más comunes están muy por abajo de la velocidad sónica, y así es natural imaginar una tobera aceleradora como un ducto convergente. Sin embargo, la velocidad más alta que puede alcanzarse mediante una tobera convergente es la velocidad sónica, la cual ocurre a la salida de la tobera convergente. Si se extiende aún más una tobera convergente disminuyendo el área de flujo con la esperanza de acelerar el fluido a velocidades supersónicas, como se muestra en la figura 12-16, se tendrá una gran decepción. Ahora, la velocidad sónica ocurrirá a la salida de la extensión convergente, en vez de la sección transversal correspondiente a la salida de la tobera convergente original, y la razón de flujo de masa a través de la tobera convergente extendida disminuirá debido a la reducción del área.

Con base en la ecuación 12-16, la cual es una expresión de los principios de conservación de masa y energía, debe añadirse una sección divergente a una tobera convergente para acelerar el fluido a velocidades supersónicas. El resultado es una tobera convergente-divergente. El fluido pasa primero por una sección subsónica (convergente), donde el número de Mach aumenta mientras que el área de flujo de la tobera disminuye, y entonces alcanza el valor de la unidad en la garganta de la tobera. El fluido continúa acelerándose mientras pasa por una sección supersónica (divergente). Al notar que $\dot{m} = \rho AV$ para un flujo estacionario, se observa que la gran disminución en la densidad hace posible la aceleración en la sección divergente. Un ejemplo de este tipo de flujo es el de gases de combustión calientes a través de una tobera aceleradora en una turbina de gas.

El proceso opuesto ocurre a la entrada de un motor de un avión supersónico. El fluido se desacelera al pasar primero por un difusor supersónico, el cual tiene

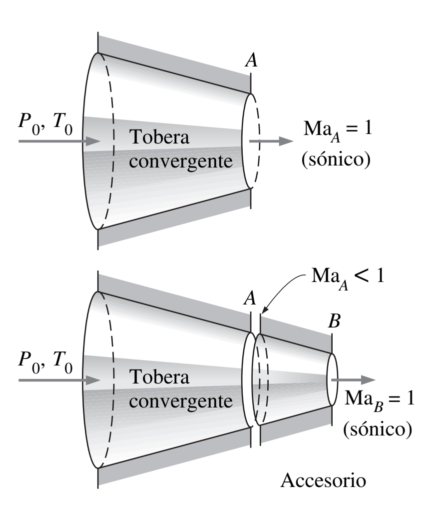


FIGURA 12-16
No pueden alcanzarse velocidades supersónicas al añadir una sección convergente adicional a una tobera convergente. Cuando se hace esto solamente se traslada la sección trasversal sónica corriente abajo y se disminuye la razón del flujo de masa.

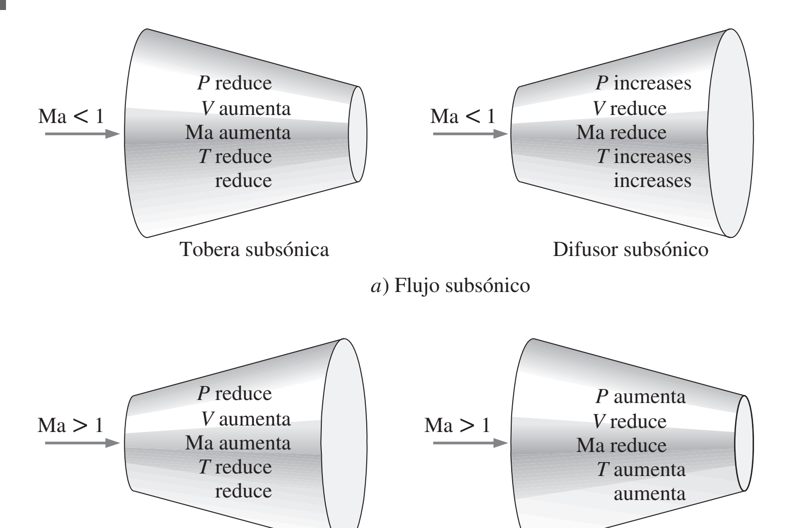


FIGURA 12-17
Variación de las propiedades de flujo en las toberas aceleradoras y toberas desaceleradoras (difusores) subsónicas y supersónicas.

el área que disminuye en la dirección de flujo. En teoría, el flujo alcanza un número de Mach igual a la unidad en la garganta del difusor. Después el fluido se desacelera en un difusor subsónico, el cual tiene un área de flujo que se incrementa en la dirección de flujo como se muestra en la figura 12-17.

Relaciones de propiedades de flujo isentrópico de gas ideal

A continuación se desarrollarán las relaciones entre las propiedades estáticas y las propiedades de estancamiento de un gas ideal en función de la razón de calores específicos k y el número de Mach Ma. Se considera que el flujo es isentrópico y que el gas tiene calores específicos constantes.

La temperatura T de un gas ideal en cualquier lugar en el flujo está relacionada con la temperatura de estancamiento T_0 por medio de la ecuación 12-4:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

o

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{V^2}{2c_pT}$$

Al notar que $c_p = kR/(k - 1)$, $c^2 = kRT$, y $\text{Ma} = V/c$, se observa que:

$$\frac{V^2}{2c_pT} = \frac{V^2}{2[kR/(k-1)]T} = \left(\frac{k-1}{2}\right)\frac{V^2}{c^2} = \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2$$

Se sustituye y se tiene:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2 \qquad \textbf{(12-18)}$$

la cual es la relación deseada entre T_0 y T.

La razón de la presión de estancamiento a la presión estática se obtiene al sustituir la ecuación 12-18 en la ecuación 12-5:

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2\right]^{k/(k-1)} \quad \textbf{(12-19)}$$

La razón de la densidad de estancamiento a la densidad estática se obtiene al sustituir la ecuación 12-8 en la ecuación 12-6:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2\right]^{1/(k-1)} \quad \textbf{(12-20)}$$

Los valores numéricos de T/T_0, P/P_0 y ρ/ρ_0 en función del número de Mach para $k = 1.4$ se dan en la tabla A-13 y son muy útiles para cálculos prácticos de flujo compresible de aire.

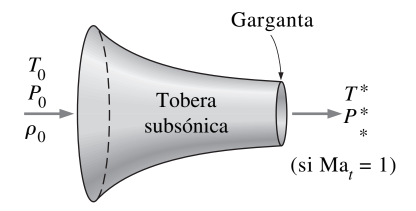
Las propiedades del fluido en una región donde el número de Mach es unitario son llamadas **propiedades críticas**, y las razones expresadas por las ecuaciones 12-18 a la 12-20 se llaman **razones críticas** (Fig. 12-18). Es práctica común en el análisis de flujo compresible representar los valores críticos con un asterisco (*) como superíndice. Se toma Ma = 1 en las ecuaciones 12-18 a la 12-20 y resulta:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad \textbf{(12-21)}$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \quad \textbf{(12-22)}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} \quad \textbf{(12-23)}$$

Estas razones se evalúan para varios valores de k y se indican en la tabla 12-2. Las propiedades críticas de flujo compresible no deben confundirse con las propiedades termodinámicas de las sustancias en el *punto crítico* (tales como la temperatura crítica T_c y la presión crítica P_c).



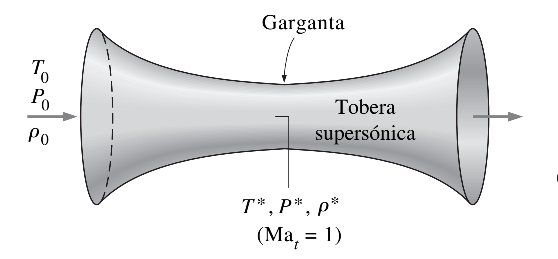


FIGURA 12-18
Cuando $\text{Ma}_t = 1$, las propiedades en la garganta de una tobera se convierten en propiedades críticas.

TABLA 12-2

Razones de presión, temperatura y densidad críticas para el flujo isentrópico de algunos gases ideales

	Vapor sobrecalentado $k = 1.3$	Productos calientes de combustión $k = 1.33$	Aire $k = 1.4$	Gases, monoatómicos $k = 1.667$
$\frac{P^*}{P_0}$	0.5457	0.5404	0.5283	0.4871
$\frac{T^*}{T_0}$	0.8696	0.8584	0.8333	0.7499
$\frac{\rho^*}{\rho_0}$	0.6276	0.6295	0.6340	0.6495

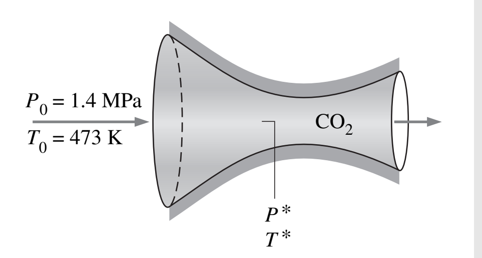


FIGURA 12-19
Esquema para el ejemplo 12-4.

EJEMPLO 12-4 **Temperatura y presión críticas de un flujo de gas**

Calcule la temperatura y presión críticas del dióxido de carbono para el flujo descrito en el ejemplo 12-3 (Fig. 12-19).

SOLUCIÓN Para el flujo tratado en el ejemplo 12-3, debe calcularse la temperatura y presión críticas.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario, adiabático y unidimensional. **2** El dióxido de carbono es un gas ideal con calores específicos constantes.

Propiedades La razón de calores específicos del dióxido de carbono a temperatura ambiente es $k = 1.289$.

Análisis Los cocientes de las temperatura y presión críticas a las de estancamiento se determinan como:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} = \frac{2}{1.289+1} = 0.87337$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{2}{1.289+1}\right)^{1.289/(1.289-1)} = 0.5477$$

Al considerar que la temperatura y la presión de estancamiento son, para el ejemplo 12-3, $T_0 = 473$ K y $P_0 = 1\ 400$ kPa, se obtiene que la temperatura y la presión críticas en este caso son:

$$T^* = 0.87337T_0 = (0.87337)(473\text{ K}) = \mathbf{413\ K}$$

$$P^* = 0.5477P_0 = (0.5477)(1\ 400\text{ kPa}) = \mathbf{767\ kPa}$$

Discusión Observe que estos valores concuerdan con los que se muestran en la tabla 12-1, tal como se esperaba. Asimismo, valores diferentes de éstos en la garganta indicarían que el flujo no es crítico, y que el número de Mach no es unitario.

12-4 ▪ FLUJO ISENTRÓPICO EN TOBERAS

Toberas convergentes o convergente-divergentes se encuentran en numerosas aplicaciones de ingeniería, inclusive en turbinas de gas y de vapor, sistemas de propulsión de aviones, naves espaciales y en sopladores industriales de viento y fuego. En esta sección se consideran los efectos de la **presión del receptor** o

contrapresión (es decir, la presión de la región de la descarga de la tobera, *back pressure* en inglés) sobre la velocidad de salida, la razón del flujo de masa y la distribución de la presión a lo largo de la tobera.

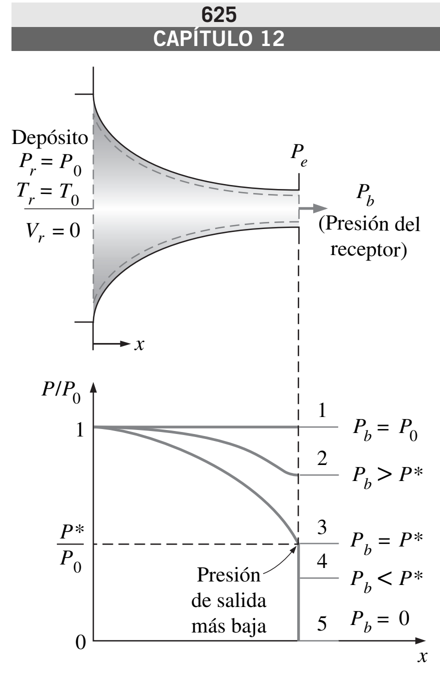


FIGURA 12-20
Efecto de la presión del receptor en la distribución de presión en una tobera convergente.

Toberas convergentes

Considere flujo subsónico a través de una tobera convergente como se muestra en la figura 12-20. La entrada de la tobera está sujeta a un depósito a presión P_r y temperatura T_r. El depósito es lo suficientemente grande como para que la velocidad a la entrada de la tobera sea despreciable. Puesto que la velocidad del fluido en el depósito es cero y el flujo a través de la tobera se aproxima como isentrópico, la presión de estancamiento y temperatura de estancamiento del fluido en cualquier sección transversal de la tobera son iguales a la presión y temperatura del tanque, respectivamente.

Ahora se comenzará a reducir la presión del receptor y se observarán los efectos resultantes sobre la distribución de la presión a lo largo de la tobera, como se muestra en la figura 12-20. Si la presión del receptor P_b es igual a P_1 la cual es igual a P_r entonces no hay flujo y la distribución de presión es uniforme a lo largo de la tobera. Cuando la presión del receptor disminuye hasta tomar el valor de P_2, la presión de salida P_e también cae hasta P_2. Esto origina que la presión a lo largo de la tobera disminuya en la dirección del flujo.

Cuando la presión del receptor se reduce a P_3 (= P^*, la cual es la presión necesaria para aumentar la velocidad del fluido hasta alcanzar la velocidad del sonido en la salida de la garganta de la tobera), el flujo de masa alcanza un máximo valor y se dice que el flujo está **bloqueado** o estrangulado. Además, cuando se reduce la presión del receptor hasta P_4 o más aún, no habrá cambios adicionales en la distribución de presión o cualquier otro cambio alguno a lo largo de la tobera.

En las condiciones del flujo estacionario, la razón del flujo de masa a través de la tobera es constante y puede expresarse como:

$$\dot{m} = \rho A V = \left(\frac{P}{RT}\right) A (\mathrm{Ma}\sqrt{kRT}) = PA\mathrm{Ma}\sqrt{\frac{k}{RT}}$$

Se resuelve T de la ecuación 12-18 y P de la ecuación 12-19 y se sustituye:

$$\dot{m} = \frac{A\mathrm{Ma}P_0\sqrt{k/(RT_0)}}{[1 + (k - 1)\mathrm{Ma}^2/2]^{(k+1)/[2(k-1)]}} \qquad \textbf{(12-24)}$$

Así, la razón del flujo de masa de un fluido particular a través de una tobera es una función de las propiedades de estancamiento del fluido, el área del flujo y el número de Mach. La ecuación 12-24 es válida en cualquier sección transversal, y de esta manera $\dot{m}$ puede evaluarse en cualquier posición a lo largo de la tobera.

Para un área de flujo A y propiedades de estancamiento T_0 y P_0 especificados, la razón máxima del flujo de masa puede determinarse al diferenciar la ecuación 12-24 respecto a Ma e igualar el resultado a cero. Esto da como resultado Ma = 1. Puesto que la única sección dentro de una tobera en donde el número de Mach puede ser unitario, es la sección de área de flujo mínima (la garganta), la razón del flujo de masa a través de una tobera es máximo cuando Ma = 1. Cuando se denota esta área por A^* se obtiene una expresión para el flujo de masa máximo al sustituir Ma = 1 en la ecuación 12-24:

$$\dot{m}_{\text{máx}} = A^*P_0\sqrt{\frac{k}{RT_0}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/[2(k-1)]} \qquad \textbf{(12-25)}$$

Por lo tanto, para un gas ideal en particular, el flujo de masa máximo a través de una tobera con un área de garganta dada se define por la presión de estancamiento y la temperatura de estancamiento a la entrada. El flujo másico puede

controlarse si se cambia la presión de estancamiento y la temperatura de estancamiento, y así una tobera convergente puede usarse como un medidor de flujo. La razón de flujo también puede controlarse, por supuesto, si se varía el área en la garganta. Este principio es muy importante para procesos químicos, aparatos médicos, medidores de flujo, y donde quiera que el flujo de masa de un gas sea conocido y controlado.

Una gráfica de $\dot{m}$ contra P_b/P_0 para una tobera convergente se muestra en la figura 12-21. Se observa que la razón del flujo de masa aumenta cuando disminuye P_b/P_0, alcanza un máximo en $P_b = P^*$, y permanece constante para valores de P_b/P_0 menores que esta razón crítica. También se ilustra en esta figura el efecto de la presión del receptor sobre la presión de salida P_e en la tobera. Se observa que:

$$P_e = \begin{cases} P_b & \text{para } P_b \geq P^* \\ P^* & \text{para } P_b < P^* \end{cases}$$

En resumen, para todas las presiones del receptor menores que la presión crítica P^*, la presión en la salida P_e de una tobera convergente es igual a P^*, el número de Mach en la salida es unitario, y la razón del flujo de masa es la razón de flujo máxima. Debido a que la velocidad del flujo es sónica en la garganta para la razón de flujo máxima, una presión del receptor menor que la presión crítica no puede detectarse en el flujo corriente arriba de la tobera y no afecta la razón de flujo.

Los efectos de la temperatura de estancamiento T_0 y la presión de estancamiento P_0 sobre la razón del flujo de masa a través de una tobera convergente se ilustran en la figura 12-22, donde la razón de flujo de masa se grafica contra la razón de las presiones estática y de estancamiento P_t/P_0. Un incremento en P_0 (o un decremento en T_0) aumentará la razón de flujo de masa a través de una tobera convergente; un decremento en P_0 (o un aumento en T_0) lo hará disminuir. Puede llegarse a la misma conclusión al observar con cuidado las ecuaciones 12-24 y 12-25.

Una relación para la variación del área de flujo A a lo largo de la tobera respecto al área A^* de la garganta puede obtenerse al combinar las ecuaciones 12-24 y 12-25 aplicadas para la misma razón de masa de flujo y propiedades de estancamiento de un fluido particular. Esto lleva a:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\text{Ma}}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right)\right]^{(k+1)/[2(k-1)]} \qquad \textbf{(12-26)}$$

La tabla A-13 proporciona valores de A/A^* en función del número de Mach para el aire ($k = 1.4$). Existe solamente un valor de A/A^* para cada valor del número

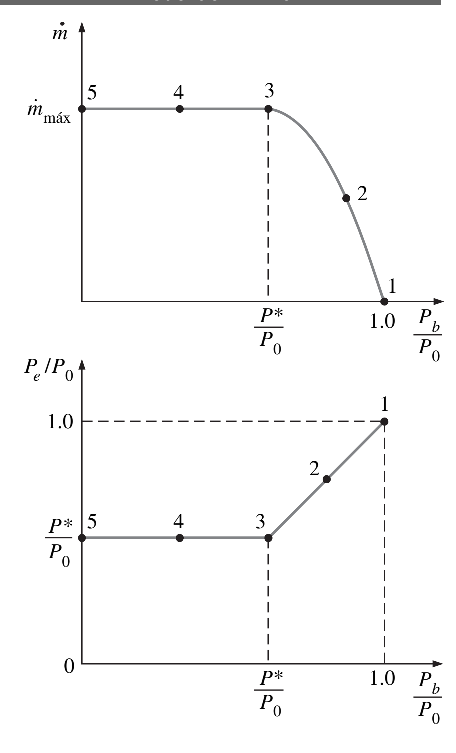


FIGURA 12-21
Efecto de la presión del receptor P_b en la razón del flujo de masa $\dot{m}$ y la presión a la salida P_e de una tobera convergente.

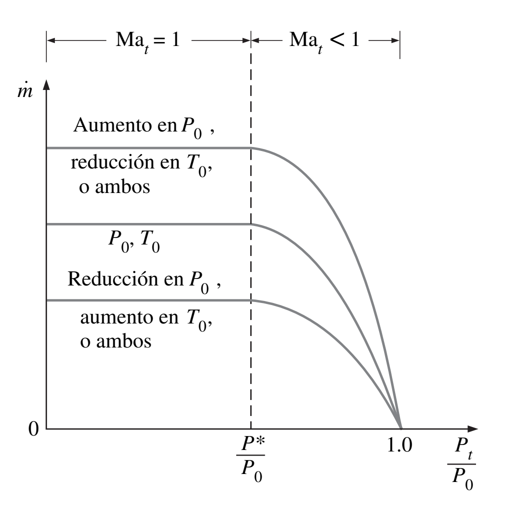


FIGURA 12-22
Variación de la razón de flujo de masa a través de una tobera con propiedades de estancamiento a la entrada.

de Mach, pero hay dos posibles valores de número de Ma para cada valor de A/A^*, un valor correspondiente al flujo subsónico y otro, al flujo supersónico.

Otro parámetro que se utiliza a veces en el análisis de flujo isentrópico unidimensional de gas ideal es Ma*, el cual es la razón de la velocidad local a la velocidad del sonido en la garganta:

$$\text{Ma}^* = \frac{V}{c^*} \tag{12-27}$$

Que puede expresarse también como:

$$\text{Ma}^* = \frac{V}{c}\frac{c}{c^*} = \frac{\text{Ma}\,c}{c^*} = \frac{\text{Ma}\sqrt{kRT}}{\sqrt{kRT^*}} = \text{Ma}\sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

donde Ma es el número de Mach local, T es la temperatura local y T^* es la temperatura crítica. Al expresar T de la ecuación 12-18 y T^*, de la ecuación 12-21 y al sustituir se obtiene:

$$\text{Ma}^* = \text{Ma}\sqrt{\frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2}} \tag{12-28}$$

Los valores de Ma* se dan en función del número de Mach para $k = 1.4$ (Fig. 12-23) en la tabla A-13. Observe que el parámetro Ma* difiere del número de Mach en que Ma* es la velocidad local adimensional respecto a la velocidad sónica en la *garganta*, mientras que Ma es la velocidad local adimensional respecto a la velocidad sónica *local* (recuerde que la velocidad del sonido en una tobera varía con la temperatura y por lo tanto con la posición).

Ma	Ma*	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{\ }{\ _0}$	$\frac{T}{T_0}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.90	0.9146	1.0089	0.5913	⋮	⋮
1.00	1.0000	1.0000	0.5283	⋮	⋮
1.10	1.0812	1.0079	0.4684	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

FIGURA 12-23
Varias razones de propiedades para flujo isentrópico en toberas aceleradoras y desaceleradoras se indican en la tabla A-13 para $k = 1.4$ por conveniencia.

EJEMPLO 12-5 Efecto de la presión del receptor en la razón de flujo de masa

Se tiene aire a 1 MPa y 600 °C que entra a una tobera convergente que se muestra en la figura 12-24, con una velocidad de 150 m/s. Determine la razón del flujo de masa a través de la tobera para un área de la garganta de la tobera de 50 cm² cuando la presión del receptor es *a*) 0.7 MPa y *b*) 0.4 MPa.

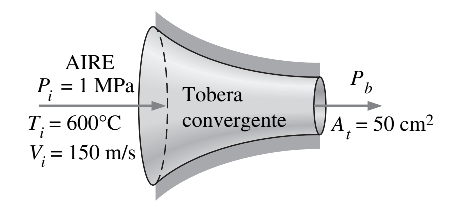


FIGURA 12-24
Esquema del ejemplo 12-5.

SOLUCIÓN Entra aire en una tobera convergente. La razón del flujo de masa del aire a través de la tobera se determinará para diferentes presiones del receptor.

Hipótesis **1** El aire es un gas ideal con calores específicos constantes e iguales a sus valores a temperatura ambiente. **2** El flujo a través de la tobera es estacionario, unidimensional e isentrópico.

Propiedades El calor específico a presión constante y la razón de calores específicos del aire son $c_p = 1.005$ kJ/kg · K y k = 1.4.

Análisis Se usan los subíndices *i* y *t* para representar las propiedades a la entrada de la tobera y la garganta, respectivamente. La temperatura de estancamiento y la presión de estancamiento en la entrada de la tobera se determinan a partir de las ecuaciones 12-4 y 12-5:

$$T_{0i} = T_i + \frac{V_i^2}{2c_p} = 873\text{ K} + \frac{(150\text{ m/s})^2}{2(1.005\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})}\left(\frac{1\text{ kJ/kg}}{1\,000\text{ m}^2/\text{s}^2}\right) = 884\text{ K}$$

$$P_{0i} = P_i\left(\frac{T_{0i}}{T_i}\right)^{k/(k-1)} = (1\text{ MPa})\left(\frac{884\text{ K}}{873\text{ K}}\right)^{1.4/(1.4-1)} = 1.045\text{ MPa}$$

Estos valores de la temperatura de estancamiento y la presión de estancamiento permanecen constantes a lo largo de la tobera ya que el flujo se supone isentrópico. Esto es:

$$T_0 = T_{0i} = 884\text{ K} \qquad \text{y} \qquad P_0 = P_{0i} = 1.045\text{ MPa}$$

La razón de presiones crítica se determina a partir de la tabla 12-2 (o Ec. 12-22) y resulta tener el valor de $P^*/P_0 = 0.5283$.

a) La razón de la presión del receptor para este caso es:

$$\frac{P_b}{P_0} = \frac{0.7 \text{ MPa}}{1.045 \text{ MPa}} = 0.670$$

la cual es mayor que la razón de presión crítica, 0.5283. De esta manera la presión en la sección transversal de la salida de la tobera (o presión en la garganta P_t) es igual a la presión del receptor en este caso. Esto es, $P_t = P_b = 0.7$ Mpa, y $P_t/P_0 = 0.670$. Por lo tanto el flujo no está bloqueado. De la tabla A-13 y con $P_t/P_0 = 0.670$, se lee $\text{Ma}_t = 0.778$ y $T_t/T_0 = 0.892$.

La razón de flujo de masa a través de la tobera puede calcularse a partir de la ecuación 12-24. Pero también puede calcularse paso a paso de la siguiente manera:

$$T_t = 0.892T_0 = 0.892(884 \text{ K}) = 788.5 \text{ K}$$

$$\rho_t = \frac{P_t}{RT_t} = \frac{700 \text{ kPa}}{(0.287 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{K})(788.5 \text{ K})} = 3.093 \text{ kg/m}^3$$

$$V_t = \text{Ma}_t c_t = \text{Ma}_t\sqrt{kRT_t}$$

$$= (0.778)\sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(788.5 \text{ K})\left(\frac{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}}\right)}$$

$$= 437.9 \text{ m/s}$$

Así,

$$\dot{m} = \rho_t A_t V_t = (3.093 \text{ kg/m}^3)(50 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(437.9 \text{ m/s}) = \mathbf{6.77 \text{ kg/s}}$$

b) La razón de la presión del receptor para este caso es:

$$\frac{P_b}{P_0} = \frac{0.4 \text{ MPa}}{1.045 \text{ MPa}} = 0.383$$

la cual es menor que la razón de presión crítica, 0.5283. Por lo tanto, existen condiciones sónicas en el plano de la salida de la tobera (garganta), y Ma = 1. El flujo está bloqueado en este caso y la razón del flujo de masa en la tobera puede calcularse a partir de la ecuación 12-25:

$$\dot{m} = A^*P_0\sqrt{\frac{k}{RT_0}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/[2(k-1)]}$$

$$= (50 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(1\,045 \text{ kPa})\sqrt{\frac{1.4}{(0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(884 \text{ K})}}\left(\frac{2}{1.4+1}\right)^{2.4/0.8}$$

$$= \mathbf{7.10 \text{ kg/s}}$$

ya que $\text{kPa} \cdot \text{m}^2/\sqrt{\text{kJ/kg}} = \sqrt{1\,000}$ kg/s

Discusión Ésta es el flujo de masa máximo a través de la tobera para las condiciones de la entrada a la tobera y su área de la garganta especificadas.

EJEMPLO 12-6 Flujo de gas a través de una tobera convergente

Gas de nitrógeno entra a un ducto con área de sección transversal variante a $T_1 = 400$ K, $P_1 = 100$ kPa y $\text{Ma}_1 = 0.3$. Considere flujo isentrópico estacionario y determine T_2, P_2 y Ma_2 en la sección transversal donde el área de flujo se redujo 20 por ciento.

SOLUCIÓN Gas nitrógeno entra a una tobera convergente. Se determinarán las propiedades a la salida de la tobera.
Hipótesis **1** El nitrógeno es un gas ideal con $k = 1.4$. **2** El flujo a través de la tobera es estacionario, unidimensional e isentrópico.
Análisis El esquema del ducto se muestra en la figura 12-25. Para flujo isentrópico a través del ducto, la razón de área A/A^* (el área de flujo sobre el área de la garganta donde Ma = 1) se da también en la tabla A-13. Con un número inicial de Ma = 0.3, se tiene:

$$\frac{A_1}{A^*} = 2.0351 \qquad \frac{T_1}{T_0} = 0.9823 \qquad \frac{P_1}{P_0} = 0.9395$$

Cuando se reduce el área de flujo 20 por ciento, $A_2 = 0.8A_1$, y

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{A_2}{A_1}\frac{A_1}{A^*} = (0.8)(2.0351) = 1.6281$$

Para este valor de A_2/A^* de la tabla A-13, se tiene:

$$\frac{T_2}{T_0} = 0.9703 \qquad \frac{P_2}{P_0} = 0.9000 \qquad \mathrm{Ma}_2 = 0.391$$

Aquí se ha tomado el número de Mach subsónico para calcular A_2/A^* en vez del supersónico debido a que el ducto es convergente en la dirección de flujo y a la entrada el flujo es subsónico. Puesto que las propiedades de estancamiento permanecen constantes: a lo largo de la tobera para flujo isentrópico, puede escribirse

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T_0}{T_1/T_0} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1\left(\frac{T_2/T_0}{T_1/T_0}\right) = (400\text{ K})\left(\frac{0.9703}{0.9823}\right) = \mathbf{395\ K}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2/P_0}{P_1/P_0} \quad \rightarrow \quad P_2 = P_1\left(\frac{P_2/P_0}{P_1/P_0}\right) = (100\text{ kPa})\left(\frac{0.9000}{0.9395}\right) = \mathbf{95.8\ kPa}$$

las cuales son la temperatura y presión en la sección transversal deseada.
Discusión Observe que la temperatura y presión caen mientras que el fluido se acelera en una tobera convergente.

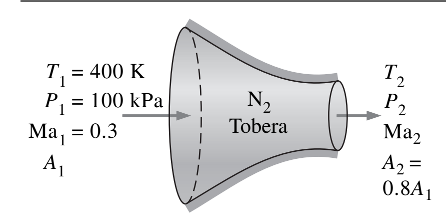


FIGURA 12-25
Esquema del ejemplo 12-6 (no está a escala).

Toberas convergente-divergentes

Cuando se piensa en toberas aceleradoras, por lo general se piensa en ductos de flujo cuya área de sección transversal disminuye en la dirección del flujo. Sin embargo, la mayor velocidad a la cual un fluido puede acelerarse en una tobera convergente se limita a la velocidad sónica (Ma = 1), la cual ocurre en la salida (garganta) de la tobera. La aceleración del fluido a velocidades supersónicas (Ma > 1) puede lograrse solamente al añadir una tobera divergente a la tobera aceleradora subsónica en su garganta. La combinación resultante es una tobera convergente-divergente, la cual es un dispositivo común en aviones supersónicos y cohetes de propulsión (Fig. 12-26).

Forzar un fluido a pasar a través de una tobera convergente-divergente no garantiza que el fluido se acelerará a una velocidad supersónica. De hecho, el fluido puede por sí mismo desacelerarse en la sección divergente en vez de acelerarse si la presión del receptor no está en el rango adecuado. Cómo será el flujo en una tobera se determina por la razón de presiones P_b/P_0. Por lo tanto, para condiciones de la entrada especificadas, el flujo a través de una tobera convergente-divergente está gobernado por la presión del receptor P_b como se explica a continuación.

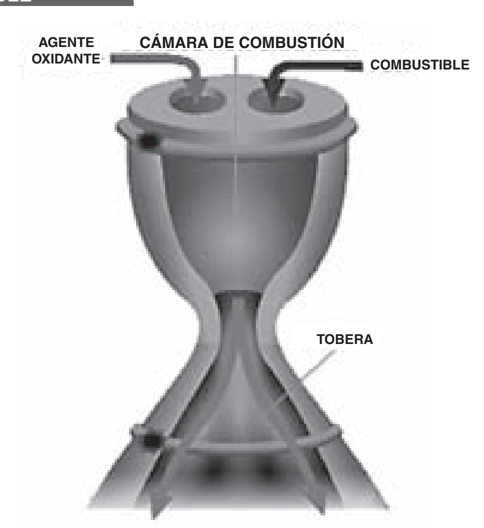




FIGURA 12-26
Las toberas convergente-divergentes son de uso común en cohetes para proporcionar gran fuerza de empuje.
Cortesía de Pratt y Whitney, www.pratt-whitney.com/how.htm. Reproducido con autorización.

Considere la tobera convergente-divergente que se muestra en la figura 12-27. El fluido entra a la tobera con una velocidad muy baja y a una presión de estancamiento P_0. Cuando $P_b = P_0$ (caso *A*), no hay flujo a través de la tobera. Este resultado se espera ya que el flujo en la tobera es conducido por la diferencia de las presiones entre la entrada y la salida de la tobera. A continuación se examina qué sucede cuando disminuye la presión del receptor.

1. Cuando $P_0 > P_b > P_C$, el flujo permanece subsónico a través de la tobera, y el flujo de masa es menor que el del flujo bloqueado. La velocidad del fluido aumenta en la primera sección (convergente) y alcanza un máximo en la garganta (pero Ma < 1). Sin embargo, gran cantidad del aumento en la velocidad se pierde en la segunda sección (divergente) de la tobera, la cual actúa como un difusor. La presión disminuye en la sección convergente, alcanza un mínimo en la garganta, y aumenta a expensas de la disminución de la velocidad en la sección divergente.
2. Cuando $P_b = P_c$, la presión en la garganta se convierte en P^* y el fluido alcanza una velocidad sónica en la garganta. Pero, la sección divergente de la tobera actúa aún como difusor, al desacelerar al fluido a velocidades subsónicas. La razón del flujo de masa que se incrementaba con el decremento en P_b alcanza su máximo valor.

   Debe recordarse que P^* es el valor más pequeño de la presión que puede obtenerse en la garganta, y la velocidad sónica es la máxima velocidad que puede lograrse en una tobera convergente. Entonces, al disminuir aún más la presión del receptor P_b no se tiene influencia alguna del flujo en la parte convergente de la tobera o la razón de flujo de masa a través de la tobera. Sin embargo, esto influye en el tipo del flujo en la sección divergente.
3. Cuando $P_C > P_b > P_E$, el fluido que alcanzó velocidad sónica en la garganta continúa acelerándose a velocidades supersónicas en la sección divergente mientras que la presión disminuye. Sin embargo, esta aceleración cesa repentinamente, cuando una **onda de choque normal** se forma en una sección transversal entre la garganta y el plano de la salida de la tobera, lo que origina una repentina caída en la velocidad a niveles subsónicos y un

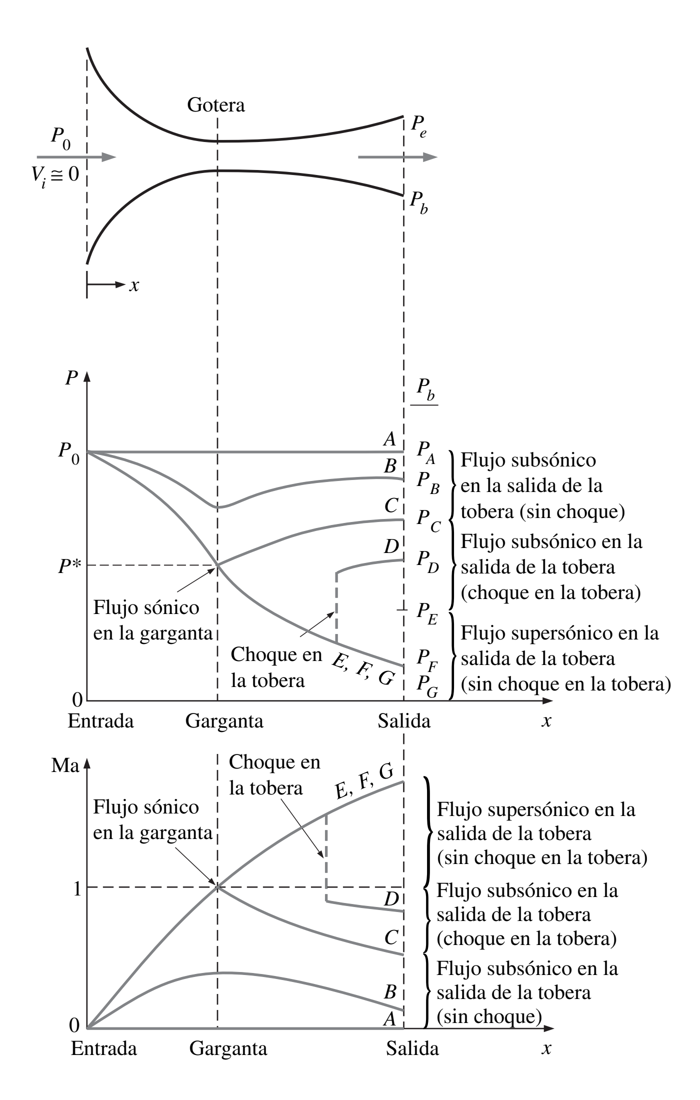


FIGURA 12-27
Efectos de la presión del receptor en el flujo en una tobera convergente-divergente.

repentino incremento en la presión. El fluido, entonces, continúa desacelerándose en la región restante de la tobera convergente-divergente. El flujo a través de una onda de choque es muy irreversible y, por lo tanto, no puede ser aproximado como un flujo isentrópico. El choque normal se aleja de la garganta a medida que P_b disminuye y se aproxima a la salida de la tobera mientras que P_b se aproxima a P_E.

Cuando $P_b = P_E$ se forma una onda de choque normal en el plano de la salida de la tobera. El flujo es supersónico a lo largo de toda la sección divergente de la tobera en este caso, y puede considerarse como isentrópico. No obstante, la velocidad del fluido cae a niveles subsónicos justo antes de abandonar la tobera al atravesar una onda de choque normal. Las ondas de choque normales se analizan en la sección 12-5.

4. Cuando $P_E > P_b > 0$, el flujo en la sección divergente es supersónico, y el fluido se expande a P_F a la salida de la tobera y ninguna onda de choque normal se forma dentro de la tobera. Así, el flujo a través de la tobera puede aproximarse como un flujo isentrópico. Cuando $P_b = P_F$, no ocurren

ningunas ondas de choque dentro o fuera de la tobera. Cuando $P_b < P_F$, unos procesos de mezclado irreversible y ondas de expansión ocurren corriente abajo del plano de salida de la tobera. Sin embargo, cuando $P_b > P_F$, la presión del fluido aumenta de manera irreversible desde P_F a P_b en la región de la estela formada corriente abajo del plano de salida de la tobera y crea las llamadas *ondas de choque oblicuas.*

EJEMPLO 12-7 Flujo de aire a través de una tobera convergente-divergente

Entra aire a una tobera convergente-divergente, como se muestra en la figura 12-28, a 1.0 MPa y 800 K con velocidad despreciable. El flujo es estacionario, unidimensional e isentrópico con $k = 1.4$. Para un número Mach de salida Ma = 2 y una garganta de 20 cm^2 de área, determine *a*) las condiciones de flujo en la garganta, *b*) las condiciones del flujo en el plano de la salida, inclusive el área de la salida, y *c*) la razón de flujo de masa en la tobera.

SOLUCIÓN Fluye aire en un tobera convergente-divergente. Las condiciones del flujo en la garganta y en la salida y la razón de flujo de masa deben determinarse.

Hipótesis **1** El aire es un gas ideal con calores específicos constantes e iguales a sus valores a temperatura ambiente. **2** El flujo a través de la tobera es estacionario, unidimensional e isentrópico.

Propiedades La razón de calores específicos del aire está dada como $k = 1.4$. La constante de gas del aire es 0.287 kJ/kg · K.

Análisis El número de Mach a la salida está dado como 2. Por lo tanto, el flujo debe ser sónico en la garganta y supersónico en la sección divergente de la tobera. Puesto que la velocidad de entrada es insignificante, la presión de estancamiento y la temperatura de estancamiento son las mismas que la temperatura y la presión a la entrada, $P_0 = 1.0$ MPa y $T_0 = 800$ K. Si se supone el comportamiento del aire como un gas ideal, la densidad de estancamiento es:

$$\rho_0 = \frac{P_0}{RT_0} = \frac{1\,000 \text{ kPa}}{(0.287 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{K})(800 \text{ K})} = 4.355 \text{ kg/m}^3$$

a) En la garganta de la tobera Ma = 1, y de la tabla A-13 se lee:

$$\frac{P^*}{P_0} = 0.5283 \qquad \frac{T^*}{T_0} = 0.8333 \qquad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.6339$$

Por lo tanto:

$$P^* = 0.5283P_0 = (0.5283)(1.0 \text{ MPa}) = \mathbf{0.5283 \text{ MPa}}$$
$$T^* = 0.8333T_0 = (0.8333)(800 \text{ K}) = \mathbf{666.6 \text{ K}}$$
$$\rho^* = 0.6339\rho_0 = (0.6339)(4.355 \text{ kg/m}^3) = \mathbf{2.761 \text{ kg/m}^3}$$

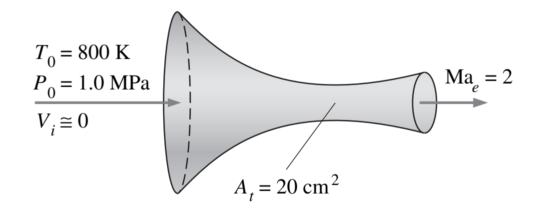


FIGURA 12-28
Esquema para el ejemplo 12-7

También

$$V^* = c^* = \sqrt{kRT^*} = \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(666.6 \text{ K})\left(\frac{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}}\right)}$$

$$= \mathbf{517.5 \text{ m/s}}$$

b) Puesto que el flujo es isentrópico, las propiedades a la salida también pueden calcularse con los datos de la tabla A-13. Para Ma = 2 se lee:

$$\frac{P_e}{P_0} = 0.1278 \quad \frac{T_e}{T_0} = 0.5556 \quad \frac{\rho_e}{\rho_0} = 0.2300 \quad \text{Ma}_e^* = 1.6330 \quad \frac{A_e}{A^*} = 1.6875$$

Así,

$$P_e = 0.1278P_0 = (0.1278)(1.0 \text{ MPa}) = \mathbf{0.1278 \text{ MPa}}$$

$$T_e = 0.5556T_0 = (0.5556)(800 \text{ K}) = \mathbf{444.5 \text{ K}}$$

$$\rho_e = 0.2300\rho_0 = (0.2300)(4.355 \text{ kg/m}^3) = \mathbf{1.002 \text{ kg/m}^3}$$

$$A_e = 1.6875A^* = (1.6875)(20 \text{ cm}^2) = \mathbf{33.75 \text{ cm}^2}$$

y

$$V_e = \text{Ma}_e^* c^* = (1.6330)(517.5 \text{ m/s}) = \mathbf{845.1 \text{ m/s}}$$

La velocidad a la salida de la tobera puede también determinarse a partir de $V_e = \text{Ma}_e c_e$, donde c_e es la velocidad de sonido en las condiciones de salida:

$$V_e = \text{Ma}_e c_e = \text{Ma}_e \sqrt{kRT_e} = 2\sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(444.5 \text{ K})\left(\frac{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}}\right)}$$

$$= 845.2 \text{ m/s}$$

c) Ya que el flujo es estacionario, la razón de flujo de masa del fluido es la misma en todas las secciones de la tobera. Esto puede calcularse usando las propiedades en cualquier sección transversal de la tobera. Al usar las propiedades en la garganta, se encuentra que la razón del flujo de masa es:

$$\dot{m} = \rho^* A^* V^* = (2.761 \text{ kg/m}^3)(20 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(517.5 \text{ m/s}) = \mathbf{2.86 \text{ kg/s}}$$

Discusión Observe que ésta es la razón de flujo de masa más grande posible que puede fluir a través de esta tobera para las condiciones de entrada especificadas.

12-5 ▪ ONDAS DE CHOQUE Y ONDAS DE EXPANSIÓN

Se ha visto que las ondas de propagación de sonido se deben a cambios de presión infinitesimalmente pequeños, y a que éstas viajan a través del medio a la velocidad del sonido. También se ha visto que para algunos valores de presión del receptor ocurren cambios abruptos en las propiedades de los fluidos en una sección muy delgada de una tobera convergente-divergente en condiciones de flujo supersónico y crean una **onda de choque**. Es interesante estudiar las condiciones en las cuales se forman las ondas de choque y cómo afectan al flujo.

Choques normales

Se considera primero a las ondas de choque que ocurren en un plano normal a la dirección de flujo, llamadas **ondas de choque normales**. El proceso de flujo a través de la onda de choque es muy irreversible y *no puede* aproximarse como un proceso isentrópico.

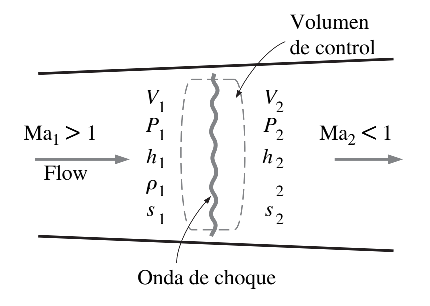


FIGURA 12-29
Volumen de control para el flujo a través de una onda de choque normal.

A continuación seguimos los pasos de Pierre Laplace (1749-1827), G. F. Bernhard Riemman (1826-1866), Willian Rankine (1820-1872), Pierre Henry Hugoniot (1851-1887), Lord Rayleigh (1842-1919) y G. I. Taylor (1886-1975) y desarrollaremos las relaciones para las propiedades de flujo antes y después del choque. Para ello aplicaremos las ecuaciones de la conservación de masa, cantidad de movimiento y energía, así como algunas relaciones entre las propiedades del flujo en el volumen de control que contiene la onda de choque, como se muestra en la figura 12-29. Las ondas de choque normales son extremadamente delgadas, de tal manera que las áreas de flujo entrante al volumen de control y saliente de éste son casi iguales (Fig. 12-30).

Se considera flujo estacionario sin transferencia de calor o interacciones de trabajo y sin cambios de energía potencial. Se denotan las propiedades del flujo inmediatamente corriente arriba de la onda de choque con el subíndice 1 y las propiedades del flujo inmediatamente corriente abajo, con el subíndice 2, y se tiene lo siguiente:

Conservación de masa:
$$\rho_1 A V_1 = \rho_2 A V_2 \tag{12-29}$$

o

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

Conservación de energía:
$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{12-30}$$

o

$$h_{01} = h_{02} \tag{12-31}$$

Conservación de cantidad de movimiento: Al reordenar la ecuación 12-14 e integrarla se obtiene:

$$A(P_1 - P_2) = \dot{m}(V_2 - V_1) \tag{12-32}$$

Incremento de la entropía:
$$s_2 - s_1 \geq 0 \tag{12-33}$$

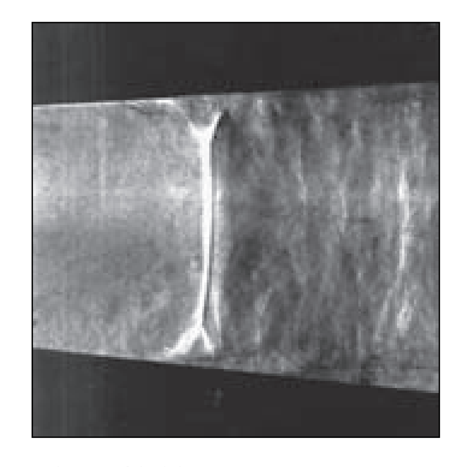


FIGURA 12-30
Imagen de Schlieren (estriograma) de un choque normal en una tobera de Laval. El número de Mach en la tobera corriente arriba (a la izquierda) de la onda de choque es casi 1.3. Las capas límite distorsionan la forma de la onda de choque normal en cercanía a las paredes y llevan el flujo a separarse por abajo de la onda de choque.
Fotografía de G. S. Settles, Penn State University. Reproducido con autorización.

Las relaciones de conservación de masa y energía pueden combinarse en una sola ecuación y graficar en un diagrama *h-s* si se utilizan las relaciones entre las propiedades. La curva resultante se llama **línea de Fanno**, y a lo largo de esta curva se localizan los estados que tienen el mismo valor de entalpía de estancamiento y flujo de masa por unidad de área. De la misma manera, al combinar las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento en una sola ecuación y graficarla en un diagrama *h-s* se obtiene la curva llamada **línea de Rayleigh**. Ambas líneas se muestran en el diagrama *h-s* de la figura 12-13. Como se comprobará más adelante en el ejemplo 12-8, los puntos de máxima entropía sobre estas líneas (puntos *a* y *b*) corresponden a Ma = 1. Los estados sobre la parte superior de las curvas son subsónicos y sobre la parte inferior, supersónicos.

Las líneas de Fanno y de Rayleigh se intersecan en dos puntos (puntos 1 y 2), que representan los dos estados donde las tres ecuaciones de conservación se satisfacen. Uno de éstos (estado 1) corresponde al estado antes del choque, y el otro (estado 2) corresponde al estado después del choque. Se observa que el flujo es supersónico antes del choque y subsónico después. Por lo tanto, el flujo cambiará de supersónico a subsónico si ocurre una onda de choque normal. Cuanto mayor sea el número de Mach antes del choque, más fuerte será el choque. En el caso límite de Ma = 1, la onda de choque simplemente se convierte en una onda de propagación de sonido. Se muestra en la figura 12-31 que la entropía aumenta: $s_2 > s_1$. Esto se espera porque el flujo a través del choque es adiabático, pero irreversible.

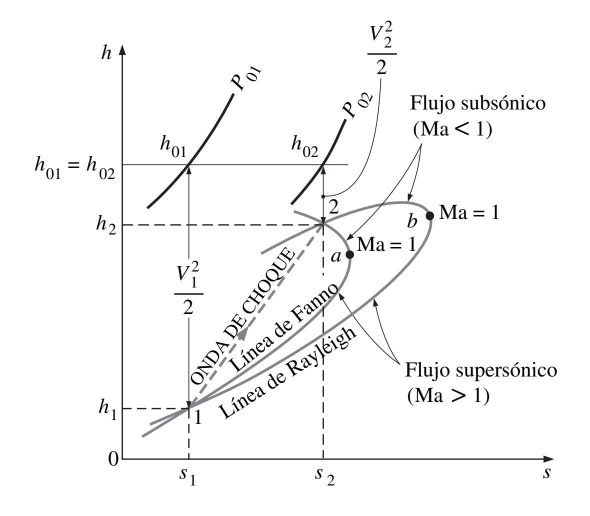


FIGURA 12-31
Diagrama *h-s* para el flujo a través de un choque normal.

El principio de la conservación de energía (Ec. 12-31) exige que la entalpía de estancamiento permanezca constante durante el choque; $h_{01} = h_{02}$. Para gases ideales $h = h(T)$, y así:

$$T_{01} = T_{02} \tag{12-34}$$

Esto significa que la temperatura de estancamiento de un gas ideal también permanece constante durante el choque. Sin embargo, se nota que la presión de estancamiento disminuye durante el choque debido a las irreversibilidades, mientras que la temperatura normal (estática) aumenta drásticamente debido a la conversión de energía cinética en entalpía y causa un gran descenso en la velocidad del fluido (Fig. 12-32).

Ahora se desarrollarán las relaciones entre varias propiedades antes y después del choque para un gas ideal con calores específicos constantes. Una relación para la razón de las temperaturas estáticas T_2/T_1 se obtiene al aplicar la ecuación 12-18 dos veces:

$$\frac{T_{01}}{T_1} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\mathrm{Ma}_1^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{T_{02}}{T_2} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\mathrm{Ma}_2^2$$

Se divide la primera ecuación entre la segunda y al notar que $T_{01} = T_{02}$, se tiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \mathrm{Ma}_1^2(k-1)/2}{1 + \mathrm{Ma}_2^2(k-1)/2} \tag{12-35}$$

A partir de la ecuación de estado del gas ideal:

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} \qquad \text{y} \qquad \rho_2 = \frac{P_2}{RT_2}$$

Se sustituyen éstas en la ley de conservación de masa $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ y al notar que $\mathrm{Ma} = V/c$ y $c = \sqrt{kRT}$, se tiene que:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1} = \frac{P_2\mathrm{Ma}_2c_2}{P_1\mathrm{Ma}_1c_1} = \frac{P_2\mathrm{Ma}_2\sqrt{T_2}}{P_1\mathrm{Ma}_1\sqrt{T_1}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2\left(\frac{\mathrm{Ma}_2}{\mathrm{Ma}_1}\right)^2 \tag{12-36}$$

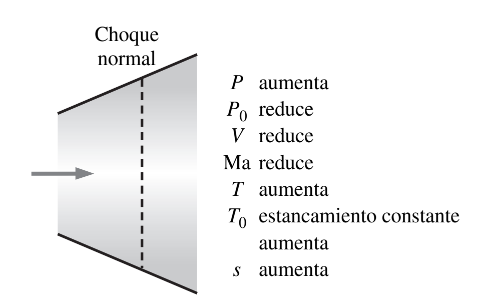


FIGURA 12-32
Variación de las propiedades del flujo a través de un choque normal.

Cuando se combinan las ecuaciones 12-35 y 12.36 se obtiene la razón de presiones a través del choque:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\text{Ma}_1\sqrt{1 + \text{Ma}_1^2(k-1)/2}}{\text{Ma}_2\sqrt{1 + \text{Ma}_2^2(k-1)/2}} \tag{12-37}$$

La ecuación 12-37 es una combinación de las ecuaciones de conservación de la masa y la energía; por lo tanto, es también la ecuación de la línea de Fanno para un gas ideal con calores específicos constantes. Una relación similar para la línea de Rayleigh puede obtenerse si se combinan las ecuaciones de conservación de la masa y la ecuación de cantidad de movimiento. A partir de la ecuación 12-32:

$$P_1 - P_2 = \frac{\dot{m}}{A}(V_2 - V_1) = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2$$

Sin embargo,

$$\rho V^2 = \left(\frac{P}{RT}\right)(\text{Ma}\ c)^2 = \left(\frac{P}{RT}\right)(\text{Ma}\sqrt{kRT})^2 = Pk\ \text{Ma}^2$$

Así,

$$P_1(1 + k\text{Ma}_1^2) = P_2(1 + k\text{Ma}_2^2)$$

o

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2} \tag{12-38}$$

Cuando se combinan las ecuaciones 12-37 y 12-38 se obtiene:

$$\text{Ma}_2^2 = \frac{\text{Ma}_1^2 + 2/(k-1)}{2\text{Ma}_1^2\, k/(k-1) - 1} \tag{12-39}$$

Esta ecuación representa la intersección de las líneas de Fanno y Rayleigh y relaciona el número de Mach corriente arriba del choque al número de Mach corriente abajo del choque.

El choque de ondas no se limita solamente a toberas supersónicas. Este fenómeno también se observa en la entrada del motor de un avión supersónico, donde el aire pasa por un choque y desacelera a velocidades subsónicas antes de entrar al difusor del motor. Las explosiones también producen la propagación de ondas de choque normales muy poderosas que pueden ser muy destructivas (Fig. 12-33).

En la Tabla A-14 se indican razones de varias propiedades de flujo después y antes del choque para un gas ideal con $k = 1.4$. Al revisar esta tabla se encuentra que Ma_2 (el número de Mach después del choque) es siempre menor que 1 y cuanto mayor es el número de Mach supersónico antes del choque, menor es el número de Mach subsónico después del choque. También se observa que la presión estática, la temperatura y la densidad aumentan después del choque, mientras que la presión de estancamiento disminuye.

El cambio de entropía en el choque se obtiene cuando se aplica éste a la ecuación del cambio de entropía de un gas ideal:

$$s_2 - s_1 = c_P \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{P_2}{P_1} \tag{12-40}$$

la cual puede expresarse en términos de k, R y Ma_1 al incluir las relaciones desarrolladas antes en esta sección. La gráfica del cambio de entropía adimensional en el choque normal $(s_2 - s_1)/R$ contra Ma_1 se muestra en la figura 12-34. Puesto que el flujo a través de la onda de choque es adiabático e irreversible, la segunda ley de termodinámica exige que el flujo aumente su entropía al atravesar

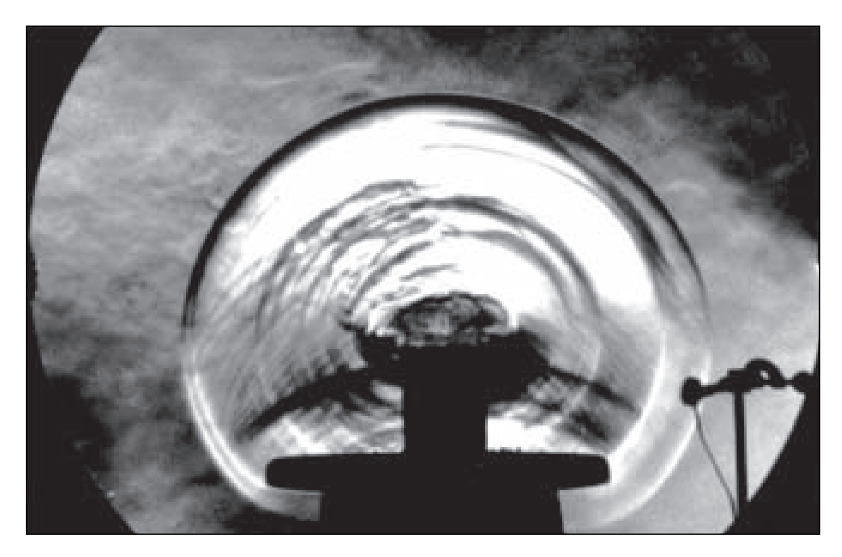


FIGURA 12-33
Imagen de Schlieren (estriograma) de una onda de explosión (onda de choque normal esférica en expansión) producida por un petardo detonado dentro de una lata metálica colocada sobre una base. El choque se expande radialmente hacia fuera en todas las direcciones a velocidad supersónica que disminuye con el radio desde el centro de la explosión. El micrófono en la parte derecha inferior, cuando pasa la onda de choque, registra el cambio repentino en la presión y provoca el destello de unos microsegundos de duración al cual se expone la fotografía.
Fotografía de G. S. Settles, Penn State University. Reproducido con autorización.

la onda de choque. Por lo tanto, una onda de choque no puede existir para valores de Ma_1 menores que la unidad, donde el cambio de entropía sería negativo. Para flujos adiabáticos, las ondas de choque existen solamente para flujos supersónicos, $Ma_1 > 1$.

EJEMPLO 12-8 **Punto de máxima entropía en la línea de Fanno**

Muestre que el punto de máxima entropía en la línea de Fanno (el punto *a* de la figura 12-31) para el flujo adiabático estacionario en un ducto corresponde a la velocidad sónica Ma = 1.

SOLUCIÓN Se mostrará que el punto de máxima entropía en la línea de Fanno para el flujo adiabático estacionario corresponde a la velocidad sónica.
Hipótesis El flujo es estacionario, adiabático y unidimensional.
Análisis En ausencia de cualquier transferencia de calor e interacciones de trabajo y cambios en la energía potencial, la ecuación de energía para el flujo estacionario se reduce a:

$$h + \frac{V^2}{2} = \text{constante}$$

Al diferenciar se obtiene:

$$dh + V\,dV = 0$$

Para una onda de choque muy delgada con el incremento de área insignificante a través de ella, la ecuación de continuidad para el flujo estacionario (conservación de masa) puede expresarse como:

$$\rho V = \text{constante}$$

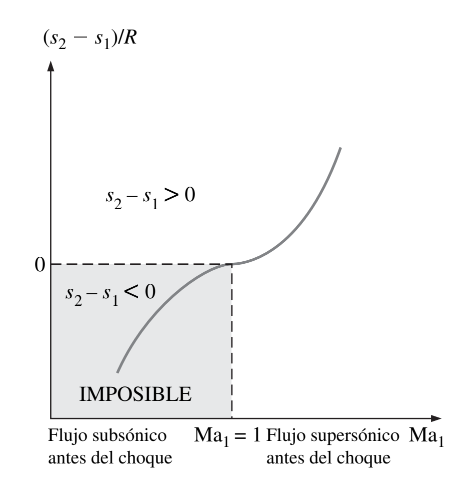


FIGURA 12-34
Cambio de entropía a través del choque normal.

Al diferenciar, se tiene:

$$\rho\, dV + V\, d\rho = 0$$

Cuando se resuelve para *dV* se obtiene:

$$dV = -V\,\frac{d\rho}{\rho}$$

Si se combina ésta con la ecuación de la energía, se tiene:

$$dh - V^2\,\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

la cual es la ecuación para la línea de Fanno en forma diferencial. En el punto *a* (el punto de máxima entropía) $ds = 0$. Entonces, a partir de la segunda relación $T\,ds$ ($T\,ds = dh - v dP$) se tiene que $dh = v\,dP = dP/\rho$. Cuando se sustituye se obtiene:

$$\frac{dP}{\rho} - V^2\,\frac{d\rho}{\rho} = 0 \qquad \text{a } s = \text{constante}$$

Se resuelve para *V*,

$$V = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s^{1/2}$$

la cual es la relación para la velocidad del sonido, ecuación 12-9. Así la comprobación está completa.

EJEMPLO 12-9 Ondas de choque en una tobera convergente-divergente

Si el aire que fluye a través de una tobera convergente-divergente del ejemplo 12-7 experimenta una onda de choque normal en el plano de salida de la tobera (Fig. 12-35), determine lo siguiente: *a*) la presión de estancamiento, la presión estática, la temperatura estática y la densidad estática después del choque; *b*) el cambio de entropía en el choque; *c*) la velocidad a la salida, y *d*) la razón de flujo de masa en la tobera. Considere el flujo estacionario, unidimensional, con $k = 1.4$, e isentrópico desde la entrada a la tobera hasta la onda de choque.

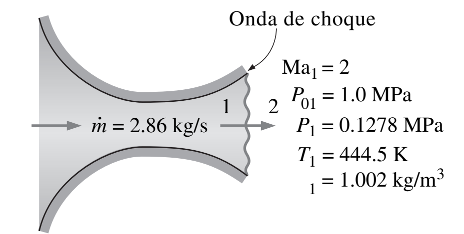


FIGURA 12-35
Esquema para el ejemplo 12-9.

SOLUCIÓN El aire que fluye a través de una tobera convergente-divergente experimenta una onda de choque normal en la salida de la tobera (Fig. 12-35). Se determinará el efecto de la onda de choque en varias propiedades.

Hipótesis **1** El aire es un gas ideal con calores específicos constantes e iguales a sus valores a temperatura ambiente. **2** El flujo a través del difusor es estacionario, unidimensional e isentrópico antes que ocurra el choque. **3** La onda de choque ocurre en el plano de salida.

Propiedades El calor específico a presión constante y la razón de calores específicos del aire son $c_p = 1.005$ kJ/kg · K y $k = 1.4$. La constante de gas del aire es de 0.287 kJ/kg · K.

Análisis *a*) Las propiedades del fluido a la salida de la tobera justo antes de la onda de choque (denotadas por el subíndice 1) se evaluaron en el ejemplo 12-7 como las propiedades a la salida de la tobera y son:

$$P_{01} = 1.0 \text{ MPa} \qquad P_1 = 0.1278 \text{ MPa} \qquad T_1 = 444.5 \text{ K} \qquad \rho_1 = 1.002 \text{ kg/m}^3$$

Las propiedades del fluido después del choque (denotadas por el subíndice 2) se relacionan con aquéllas antes del choque mediante las funciones enlistadas en la tabla A-14. Para $Ma_1 = 2$, se lee:

$$Ma_2 = 0.5774 \qquad \frac{P_{02}}{P_{01}} = 0.7209 \qquad \frac{P_2}{P_1} = 4.5000 \qquad \frac{T_2}{T_1} = 1.6875 \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2.6667$$

Entonces la presión de estancamiento P_{02}, la presión estática P_2, la temperatura estática T_2 y la densidad estática ρ_2 después del choque son:

$$P_{02} = 0.7209P_{01} = (0.7209)(1.0 \text{ MPa}) = \mathbf{0.721\ MPa}$$

$$P_2 = 4.5000P_1 = (4.5000)(0.1278 \text{ MPa}) = \mathbf{0.575\ MPa}$$

$$T_2 = 1.6875T_1 = (1.6875)(444.5 \text{ K}) = \mathbf{750\ K}$$

$$\rho_2 = 2.6667\rho_1 = (2.6667)(1.002 \text{ kg/m}^3) = \mathbf{2.67\ kg/m^3}$$

b) El cambio de entropía en el choque es:

$$s_2 - s_1 = c \ \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{P_2}{P_1}$$

$$= (1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}) \ln(1.6875) - (0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}) \ln(4.5000)$$

$$= \mathbf{0.0942\ kJ/kg \cdot K}$$

Así, la entropía del aire aumenta mientras el flujo experimenta un choque normal, el cual es muy irreversible.

c) La velocidad del aire después del choque puede determinarse a partir de $V_2 = Ma_2c_2$, donde c_2 es la velocidad del sonido en las condiciones de la salida después del choque:

$$V_2 = Ma_2c_2 = Ma_2\sqrt{kRT_2}$$

$$= (0.5774)\sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(750.1 \text{ K})\left(\frac{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}}\right)}$$

$$= \mathbf{317\ m/s}$$

d) La razón del flujo de masa a través de la tobera convergente-divergente con condiciones sónicas en la garganta no afecta por la presencia de las ondas de choque en la tobera. Por lo tanto, la razón del flujo de masa en este caso es la misma que se determinó en el ejemplo 12-7:

$$\dot{m} = \mathbf{2.86\ kg/s}$$

Discusión Este resultado relacionado con el flujo másico puede verificarse fácilmente para cualquier valor del número de Mach considerablemente mayor que la unidad al usar los valores de las propiedades de flujo en la salida del difusor después de la onda de choque.

En el ejemplo 12-9 se ilustra el hecho que la presión de estancamiento y la velocidad disminuyen mientras que la presión, la temperatura y la densidad estáticas, así como la entropía, aumentan en el choque. El aumento en la temperatura del fluido corriente abajo de una onda de choque es de gran importancia para la ingeniería de aviones y naves espaciales porque éste crea problemas de transferencia de calor en los bordes delanteros de las alas y la nariz cónica de vehículos espaciales diseñados para regresar a la Tierra y en los recién propuestos aviones hipersónicos. El sobrecalentamiento, de hecho, originó la trágica pérdida del trasbordador espacial *Columbia* en febrero de 2003 al entrar a la atmósfera terrestre.

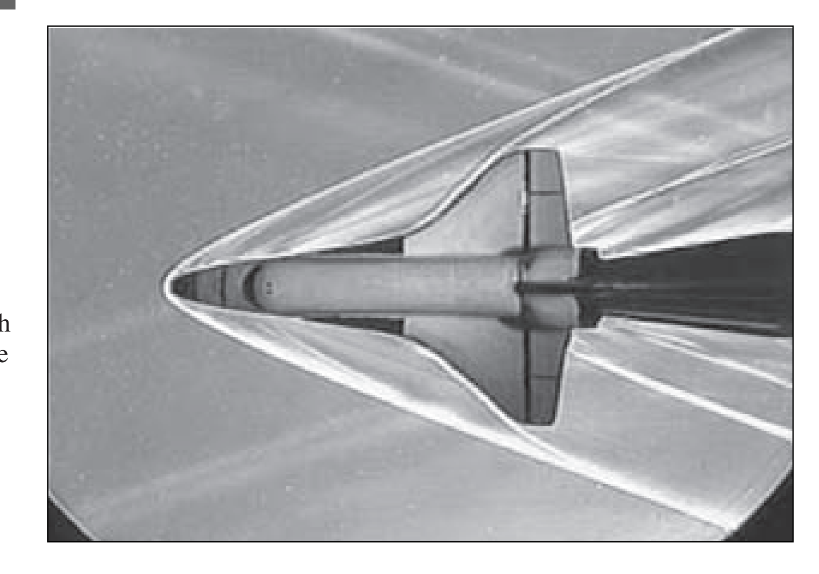


FIGURA 12-36
Imagen de Schlieren (estriograma) de un modelo pequeño del trasbordador espacial *Orbiter* que se prueba a Mach 3 en un túnel de viento supersónico de Penn State Gas Dynamics Lab. Pueden observarse varios *choques oblicuos* en el aire que rodea la nave espacial.

Fotografía de G. S. Settles, Penn State University. Reproducido con autorización.

Choques oblicuos

No todas las ondas de choque son normales (perpendiculares a la dirección de flujo). Por ejemplo, cuando un trasbordador espacial viaja a velocidades supersónicas a través de la atmósfera, produce un complicado patrón de choques que consiste en ondas de choque inclinadas llamadas **ondas de choques oblicuas** (Fig. 12-36). Como puede apreciarse, algunas partes de las ondas de choque oblicuas son curvas, mientras que otras son rectas.

Se considera primero las ondas de choque oblicuas rectas, como las que se producen cuando un flujo supersónico ($Ma_1 > 1$) incide en una delgada cuña bidimensional de semiángulo δ (Fig. 12-37). Puesto que la información acerca de la cuña no puede difundirse corriente arriba en un flujo supersónico, el fluido "no sabe" nada acerca de la cuña hasta que golpea su punta. En este momento, debido a que el fluido no puede pasar *a través* de una cuña, de manera repentina cambia su dirección en un ángulo llamado **ángulo de viraje** o **ángulo de giro** o **ángulo de deflexión** θ. El resultado es una onda de choque oblicua recta que forma un **ángulo de choque** o **ángulo de onda** β, medido con respecto a la dirección del flujo que incide en la cuña (Fig. 12-38). Para que el flujo de masa se conserve, β obviamente debe ser mayor que θ. Puesto que el número de Reynolds para flujos supersónicos es usualmente grande, la capa límite creciente a lo largo de la cuña es muy delgada se desprecian sus efectos. El flujo, por lo tanto, cambia su dirección al mismo ángulo que el semiángulo de cuña; por precisar, el ángulo de deflexión θ es igual al semiángulo θ de la cuña. Si se considera el efecto del espesor de desplazamiento de la capa límite (capítulo 10), el ángulo de deflexión θ del flujo que experimenta el choque oblicuo resulta ser ligeramente mayor que el semiángulo δ.

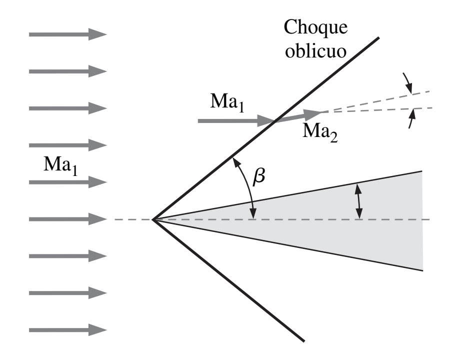


FIGURA 12-37
Onda de choque oblicua con el *ángulo de choque* β provocada por una delgada cuña bidimensional de semiángulo δ. El flujo gira el *ángulo de deflexión* θ corriente abajo del choque, y el número de Mach disminuye.

Igual que en caso de las ondas de choque normales, el número de Mach disminuye en un choque oblicuo, y las ondas de choque oblicuas son posibles solamente si el flujo corriente arriba es supersónico. Sin embargo, a diferencia de las ondas de choque normales, en los cuales el número de Mach corriente abajo es siempre subsónico, Ma_2 corriente abajo de un choque oblicuo puede ser subsónico, sónico o supersónico, esto depende del número de Mach corriente arriba Ma_1 y del ángulo de giro.

Para analizar la onda de choque oblicua recta de la figura 12-38 se separan los vectores de velocidad corriente arriba y corriente abajo de la onda en componentes normal y tangencial a ella, y se considerará un pequeño volumen de control alrededor de la onda. Todas las propiedades del fluido (velocidad, densidad,

presión, etc.) a lo largo de la parte del lado izquierdo inferior del volumen de control ubicada corriente arriba del choque son idénticas a las propiedades a lo largo de la parte del lado izquierdo superior corriente arriba del choque. Lo mismo es válido para las partes de los mismos lados que se ubican corriente abajo del choque. Por lo tanto, las razones del flujo de masa que entra y sale a través de estas caras se cancelan entre sí, y la conservación de masa se reduce a:

$$\rho_1 V_{1,n} A = \rho_2 V_{2,n} A \quad \rightarrow \quad \rho_1 V_{1,n} = \rho_2 V_{2,n} \qquad \textbf{(12-41)}$$

donde A es el área de la superficie de control paralela al choque. Puesto que A es la misma de cada lado del choque, ésta se eliminó de la ecuación 12-41.

Como se esperaría, la componente tangencial de la velocidad (paralela a la onda de choque oblicua) no cambia durante el choque, es decir $V_{1,t} = V_{2,t}$. Esto se comprueba fácilmente al aplicar al volumen de control la componente tangencial de la ecuación de cantidad de movimiento.

Al aplicar la componente normal de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento y al notar que las únicas fuerzas que actúan son las de presión, se tiene:

$$P_1 A - P_2 A = \rho V_{2,n} A V_{2,n} - \rho V_{1,n} A V_{1,n} \quad \rightarrow \quad P_1 - P_2 = \rho_2 V_{2,n}^2 - \rho_1 V_{1,n}^2 \qquad \textbf{(12-42)}$$

Finalmente, puesto que no existe trabajo efectuado por o sobre el volumen de control y no hay transferencia de calor dentro o fuera del volumen de control, la entalpía de estancamiento *no* cambia en un choque oblicuo, y la ley de conservación de la energía da:

$$h_{01} = h_{02} = h_0 \quad \rightarrow \quad h_1 + \frac{1}{2}V_{1,n}^2 + \frac{1}{2}V_{1,t}^2 = h_2 + \frac{1}{2}V_{2,n}^2 + \frac{1}{2}V_{2,t}^2$$

Pero como $V_{1,t} = V_{2,t}$, esta ecuación se reduce a:

$$h_1 + \frac{1}{2}V_{1,n}^2 = h_2 + \frac{1}{2}V_{2,n}^2 \qquad \textbf{(12-43)}$$

Una comparación cuidadosa revela que las ecuaciones de la conservación de masa, cantidad de movimiento y energía (Ecs. 12-41, 12-42 y 12-43) para un choque oblicuo son idénticas a las que se tienen para un choque normal, excepto que están escritas en términos de la componente *normal* de la velocidad. Por lo tanto, las relaciones de choque normal obtenidas previamente se aplican también a choques oblicuos, pero deben escribirse en términos de los números de Mach $Ma_{1,n}$ y $Ma_{2,n}$ normales al choque oblicuo. Esto puede visualizarse fácilmente mediante la rotación de los vectores de velocidad en la figura 12-38 a un ángulo $\pi/2 - \beta$, de tal manera que el choque oblicuo parezca ser vertical (Fig. 12-39). La trigonometría da como resultado:

$$Ma_{1,n} = Ma_1 \operatorname{sen} \beta \qquad \text{y} \qquad Ma_{2,n} = Ma_2 \operatorname{sen}(\beta - \theta) \qquad \textbf{(12-44)}$$

donde $Ma_{1,n} = V_{1,n}/c_1$ y $Ma_{2,n} = V_{2,n}/c_2$. Desde el punto de vista que se muestra en la figura 12-39, se observa lo que parece un choque normal, pero con un flujo tangencial sobrepuesto "para pasear por allí". Así,

> Todas las ecuaciones, tablas, etc., para choques normales se aplican a choques oblicuos, con la condición de que se usen solamente las componentes **normales** del número de Mach.

De hecho, puede pensarse de los choques normales como una especie de choques oblicuos en los cuales el ángulo de choque es $\beta = \pi/2$, o 90°. Se reconoce de manera inmediata que un choque oblicuo puede existir solamente si $Ma_{1,n} > 1$ y $Ma_{2,n} < 1$. Las ecuaciones de choque normal apropiadas para choques oblicuos de un gas ideal se resumen en la figura 12-40 en términos de $Ma_{1,n}$.

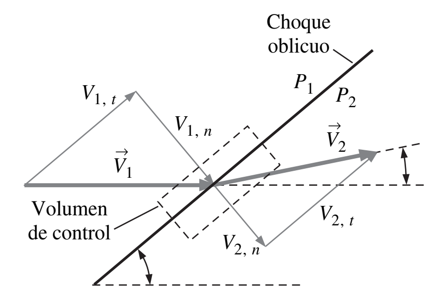


FIGURA 12-38
Vectores de velocidad en un choque oblicuo con un ángulo de onda β y un ángulo de deflexión θ.

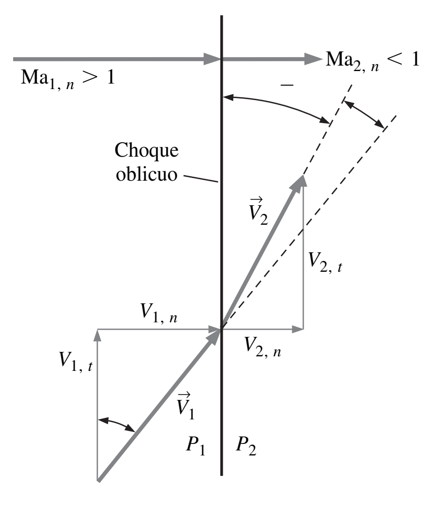


FIGURA 12-39
Los mismos vectores de la figura 12-38, pero rotados en un ángulo $\pi/2 - \beta$, de manera que el choque oblicuo es vertical. Los números de Mach normales $Ma_{n,1}$ y $Ma_{n,2}$ también se presentan en la figura.

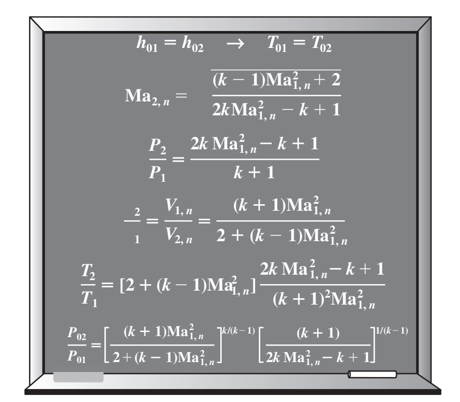


FIGURA 12-40
Relaciones de las propiedades a través de un choque oblicuo de un gas ideal en función de la componente normal del número de Mach corriente arriba $Ma_{1,n}$.

Para el ángulo de onda β y el número de Mach corriente arriba Ma_1 dados, se usa la primera parte de la ecuación 12-44 para calcular $Ma_{1,n}$, y después se usan las tablas para el choque normal (o sus ecuaciones correspondientes) para obtener $Ma_{2,n}$. Si se conociera también el ángulo de deflexión θ, podría calcularse Ma_2 de la segunda parte de la ecuación 12-44. Pero en una aplicación típica, se conoce β o θ, pero no ambos ángulos. Por fortuna, un poco más de transformaciones algebraicas proporcionan una relación entre θ, β y Ma_1. Se comienzan las transformaciones al observar que $\tan \beta = V_{1,n}/V_{1,t}$ y $\tan(\beta - \theta) = V_{2,n}/V_{2,t}$ (Fig. 12-39). Pero como $V_{1,t} = V_{2,t}$. Se combinan estas dos expresiones para obtener:

$$\frac{V_{2,n}}{V_{1,n}} = \frac{\tan(\beta-\theta)}{\tan\beta} = \frac{2+(k-1)Ma_{1,n}^2}{(k+1)Ma_{1,n}^2} = \frac{2+(k-1)Ma_1^2 \operatorname{sen}^2\beta}{(k+1)Ma_1^2 \operatorname{sen}^2\beta} \tag{12-45}$$

donde se utilizó también la ecuación 12-44 y las cuatro ecuaciones de la figura 12-40. Se aplican identidades trigonométricas para $\cos 2\beta$ y $\tan(\beta - \theta)$, por precisar:

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta \qquad \text{y} \qquad \tan(\beta-\theta) = \frac{\tan\beta - \tan\theta}{1+\tan\beta\tan\theta}$$

Después de algunos pasos algebraicos, la ecuación 12-45 se reduce a:

La relación θ-β-Ma:
$$\tan\theta = \frac{2\cot\beta(Ma_1^2 \operatorname{sen}^2\beta - 1)}{Ma_1^2(k+\cos 2\beta)+2} \tag{12-46}$$

La ecuación 12-46 proporciona el ángulo de deflexión θ como función unívoca del ángulo de onda de choque β, la razón de calores específicos k y el número de Mach corriente arriba Ma_1. Para el aire ($k = 1.4$), se grafica θ contra β para varios valores de Ma_1 en la figura 12-41. Llama la atención que esta gráfica se presenta con frecuencia con ejes intercambiados (β contra θ) en libros de texto dedicados a flujos compresibles, puesto que, desde el punto de vista de física del proceso, el ángulo de onda β se determina por el ángulo de deflexión θ.

Puede aprenderse mucho si se estudia la figura 12-41. A continuación se enlistan algunas observaciones:

- En la figura 12-41 se muestra el rango completo de ondas de choque posibles para determinado número de Mach de flujo libre, desde el más débil hasta el más fuerte. Para cualquier valor del número de Mach Ma_1 mayor que 1, el rango de posibles valores de θ y β empieza en $\theta = 0°$ correspondiente a algún valor de β entre 0 y 90°, logra un valor máximo $\theta = \theta_{máx}$ correspondiente a un valor intermedio de β, y después regresa a $\theta = 0°$ para $\beta = 90°$. Los choques oblicuos en línea recta para β o θ fuera de este rango no pueden existir. En $Ma_1 = 1.5$, por ejemplo, los choques oblicuos en línea recta *no pueden* existir en aire con ángulo de choque β menor que casi 42°, o con un ángulo de deflexión θ mayor que casi 12°. Si el semiángulo de la cuña es mayor que $\theta_{máx}$, la onda de choque se curva y separa de la punta de cuña para formar lo que se llama **onda de choque separada** u **onda de proa** (Fig. 12-42). El ángulo de onda β de la onda de choque separada es de 90° en la región alrededor de la punta de la cuña, pero β disminuye a medida de que la onda de choque separada se curva en la dirección corriente abajo. Para el análisis, las ondas de choque separadas son mucho más complicadas que las ondas de choque oblicuas rectas. De hecho, no existen soluciones simples, y la predicción de ondas de choque separadas implica métodos computacionales (Cap. 15).
- Un comportamiento similar de los choques oblicuos se observa en el flujo axisimétrico alrededor de los conos, como en la figura 12-43, aunque la relación θ-β-Ma para flujos axisimétricos difiere de aquella de la ecuación 12-46.

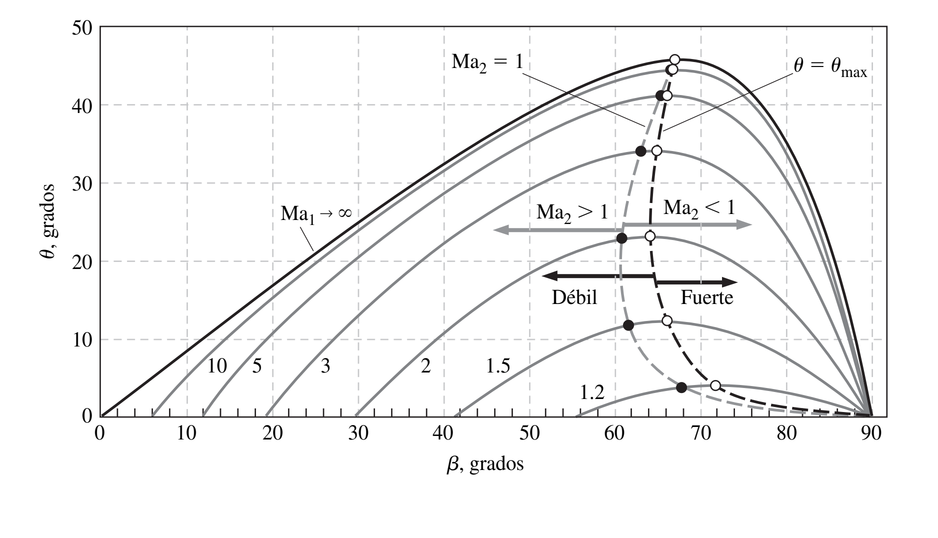


FIGURA 12-41
Dependencia del ángulo de deflexión θ del ángulo de choque β en un choque oblicuo recto para varios valores del número de Mach corriente arriba Ma_1. Los cálculos están realizados para un gas ideal con $k = 1.4$. La línea punteada negra conecta los puntos de máximo ángulo de deflexión ($\theta = \theta_{máx}$). Los *choques oblicuos débiles* están a la izquierda de esta línea, mientras que los *choques oblicuos fuertes* están a la derecha de esta línea. La línea punteada gris conecta puntos en donde el número de Mach corriente abajo es *sónico* ($Ma_2 = 1$). El flujo *supersónico* corriente abajo ($Ma_2 > 1$) está a la izquierda de esta línea, mientras que el flujo *subsónico* corriente abajo ($Ma_2 < 1$) está a la derecha de esta línea.

- Cuando un flujo supersónico incide en un cuerpo romo (*sin* punta afilada), el semiángulo δ de la punta es de 90°, y no puede existir un choque oblicuo no separado de la superficie del cuerpo, cualquiera que sea el número de Mach. De hecho, una onda de choque separada ocurre enfrente de *todos* semejantes cuerpos romos sin nariz (punta) aguda, sin importar si son bidimensionales, axisimétricos, o totalmente tridimensionales. Por ejemplo, una onda de choque separada enfrente del modelo de trasbordador espacial se muestra en la figura 12-36 y enfrente de una esfera, en la figura 12-44.
- Mientras que θ es la función unívoca de Ma_1 y β para un valor dado de k, hay *dos* posibles valores de β para $\theta < \theta_{máx.}$ La línea negra punteada en la figura 12-41 pasa por los puntos correspondientes a valores de $\theta_{máx}$ y divide el rango de las ondas de choque en la región de **ondas de choque oblicuas débiles** (correspondientes al menor valor de β) y la región de **ondas de choque oblicuas fuertes** (correspondientes al mayor valor de β). Para un valor dado de θ, el choque débil es más común y es "preferido" por el flujo a menos que las condiciones de presión corriente abajo sean lo suficientemente drásticas para formar un choque fuerte.
- Para un número de Mach corriente arriba Ma_1 dado, existe un único valor de θ para el cual el número de Mach corriente abajo Ma_2 es exactamente 1. La línea gris punteada en la figura 12-41 pasa por los puntos correspondientes a los valores de $Ma_2 = 1$. A la izquierda de esta línea, $Ma_2 > 1$, y a la derecha de esta línea $Ma_2 < 1$. Las condiciones sónicas corriente abajo suceden en la gráfica en la región de las ondas débiles con valores de θ muy cercanos a $\theta_{máx}$. Por lo tanto, el flujo corriente abajo de un choque oblicuo fuerte es siempre subsónico ($Ma_2 < 1$). El flujo corriente abajo de un choque oblicuo débil permanece supersónico, excepto para un rango estrecho de θ justo por abajo de $\theta_{máx}$, donde éste es subsónico, aunque se le llama choque oblicuo débil.
- Conforme el número de Mach corriente arriba se aproxima al infinito, los choques oblicuos en línea recta se hacen posibles para cualquier β entre 0 y 90°, pero el máximo ángulo de giro para $k = 1.4$ (aire) es de $\theta_{máx} \cong 45.6°$, el cual ocurre a $\beta = 67.8°$. Los choques oblicuos en línea recta con ángulos de giro más grandes que el valor de $\theta_{máx}$ no son posibles, cualquiera que sea el número de Mach.
- Para un valor dado del número de Mach corriente arriba, existen dos ángulos de choque para los cuales *no ocurre el cambio de dirección de flujo* ($\theta = 0°$): el caso fuerte, $\beta = 90°$, corresponde a un *choque normal*, y el caso débil,

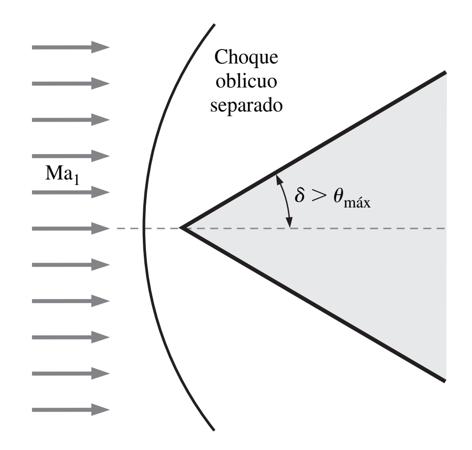


FIGURA 12-42
Una onda de choque oblicua separada ocurre corriente arriba de una cuña bidimensional de semiángulo δ cuando δ es mayor que el máximo ángulo posible de deflexión θ. Un choque de esta clase se llama onda de proa, debido a la semejanza con la ola de agua que se forma en la proa de un barco.

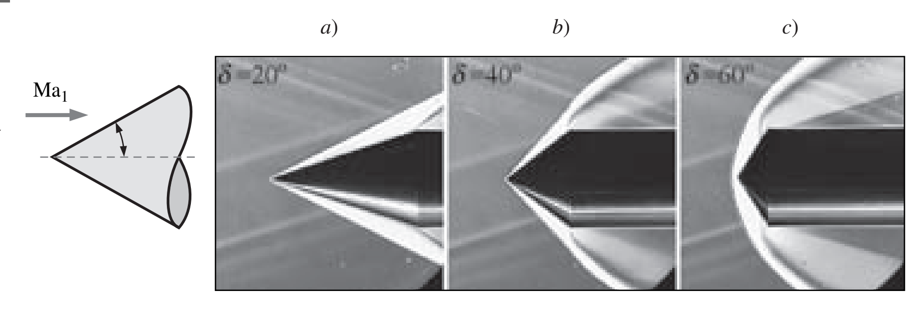


FIGURA 12-43
Vistas fijas de la videografía de Schlieren (imágenes estrioscópicas) que ilustran la separación de una onda de choque oblicua, en aire a Mach 3, del cono debido al incremento de semiángulo δ del cono. En caso de *a*) $\delta = 20°$ y *b*) $\delta = 40°$, el choque oblicuo no se separa, pero para *c*) $\delta = 60°$, el choque oblicuo se ha separado y forma una onda de proa.

Fotografía de G. S. Settles, Penn State University. Reproducido con autorización.

$\beta = \beta_{\text{mín,}}$ corresponde a la onda del choque oblicua más débil posible para este número de Mach dado; esta onda oblicua se llama **onda de Mach**. Las ondas de Mach las ocasionan, por ejemplo, irregularidades muy pequeñas en la superficie de las paredes de un túnel de viento supersónico (se muestran algunas en las figuras 12-26 y 12-43). Las ondas de Mach no tienen efecto alguno en el flujo porque el choque es despreciablemente débil. De hecho, en el caso límite, las ondas de Mach son *isentrópicas*. El ángulo de choque para las ondas de Mach es la función unívoca del número de Mach y está dado por el símbolo μ. No debe confundirse éste con el coeficiente de viscosidad. El ángulo μ se llama **ángulo de Mach** y se encuentra al igualar θ a cero en la ecuación 12-46, resolverla para $\beta = \mu$ y escoger la raíz más pequeña. Se tiene:

Ángulo de Mach: $$\mu = \text{sen}^{-1}(1/\text{Ma}_1) \qquad \textbf{(12-47)}$$

Puesto que la razón de calores específicos aparece solamente en el denominador de la ecuación 12-46, μ es independiente de k. Por lo tanto, puede estimarse el número de Mach de cualquier flujo supersónico simplemente con medir el ángulo de Mach y aplicar la ecuación 12-47.



FIGURA 12-44
Fotografía por sombras de una esfera de $\frac{1}{2}$ in de diámetro en vuelo libre en el aire a Mach = 1.53. El flujo es subsónico atrás de aquella parte de la onda de proa que está delante de la esfera y sobre su superficie hasta casi 45°. Cerca de 90° la capa laminar límite se separa a través de un choque oblicuo y rápidamente se vuelve turbulenta. La estela fluctuante genera un sistema de disturbios débiles que emergen a la segunda onda de choque de "recompresión".

Fotografía de A. C. Charters, as found in Van Dyke, 1982.

Ondas de expansión de Prandtl-Meyer

Ahora se analizan las situaciones en las cuales el flujo supersónico gira en dirección *opuesta*, tal como sucede en la parte superior de una cuña bidimensional que se encuentra a un ángulo de ataque mayor que su semiángulo δ (Fig. 12-45). A este tipo de flujo se le conoce como **flujo de expansión**, mientras que un flujo que produce una onda oblicua puede llamarse **flujo de compresión**. Como ya se vio, el flujo cambia de dirección por la ley de conservación de masa. Sin embargo, a diferencia de un flujo de compresión, un flujo de expansión *no* se obtiene debido a una onda de choque. Por el contrario, aparece una región de expansión continua llamada **abanico de expansión**, formada por un número infinito de ondas de Mach llamadas **ondas de expansión de Prandtl-Meyer**. En otras palabras, el flujo no cambia su dirección repentinamente mediante un choque oblicuo, pero sí *gradualmente*: cada sucesiva onda de Mach gira el flujo en una cantidad infinitesimal. Puesto que cada onda de expansión individual es isentrópica, el flujo que atraviesa todo el abanico de expansión es también isentrópico. El número de Mach corriente abajo de la región de expansión aumenta ($\text{Ma}_2 > \text{Ma}_1$), mientras que la presión, la densidad y la temperatura disminuyen, de la misma manera como esto ocurre en la parte supersónica (de expansión) de una tobera convergente–divergente.

El ángulo de inclinación de las ondas de expansión de Prandtl-Meyer es el ángulo de Mach local μ, como se bosqueja en la figura 12-45. El ángulo de Mach de la primera onda de expansión se determina fácilmente como $\mu_1 =$

$\text{sen}^{-1}(1/\text{Ma}_1)$. Similarmente, $\mu_2 = \text{sen}^{-1}(1/\text{Ma}_2)$, donde debe tenerse cuidado al medir el ángulo con respecto a la *nueva* dirección del flujo corriente abajo de la región de expansión, por precisar, a la dirección paralela a la superficie superior de la cuña de la figura 12-45 si se desprecia la influencia de la capa límite que se forma en la superficie. Pero, ¿cómo se determina Ma_2? Resulta que el ángulo θ de giro de flujo al atravesar el abanico de expansión puede calcularse mediante la integración, al utilizar las relaciones del flujo isentrópico. Para un gas ideal, el resultado es (Anderson, 2003):

Ángulo de giro a través de un abanico de expansión: $$\theta = \nu(\text{Ma}_2) - \nu(\text{Ma}_1) \qquad \textbf{(12-48)}$$

donde $\nu(\text{Ma})$ es un ángulo llamado función de Prandtl-Meyer (no debe confundirse con la viscosidad cinemática):

$$\nu(\text{Ma}) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(\text{Ma}^2-1)}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\text{Ma}^2-1}\right) \qquad \textbf{(12-49)}$$

Observe que $\nu(\text{Ma})$ es un ángulo, y puede calcularse en grados o en radianes. Desde el punto de vista de la física, $\nu(\text{Ma})$ es el ángulo a través del cual el flujo debe expandirse, comenzando con $\nu = 0$ a $\text{Ma} = 1$ para alcanzar un número de Mach supersónico, $\text{Ma} > 1$.

Para encontrar Ma_2 para valores conocidos de Ma_1, k y θ, se calcula $\nu(\text{Ma}_1)$ a partir de la ecuación 12-49, $\nu(\text{Ma}_2)$ a partir de la ecuación 12-48 y luego Ma_2 de la ecuación 12-49, pero el último paso exige resolver la ecuación implícita con respecto a Ma_2. Debido a que no hay transferencia de calor ni interacciones de trabajo, y que el flujo puede aproximarse como un flujo isentrópico en la región de expansión, T_0 y P_0 permanecen constantes, y se usan las relaciones del flujo isentrópico obtenidas previamente para calcular otras propiedades de flujo corriente abajo de la expansión, tales como T_2, ρ_2 y P_2.

Los abanicos de expansión de Prandtl-Meyer también ocurren en flujos supersónicos axialmente simétricos, por ejemplo, en las esquinas y el borde posterior del cuerpo formado al combinar un cono con un cilindro (Fig. 12-46). Interacciones extremadamente complejas y, para algunos de nosotros, muy bellas, que incluyen ambas ondas de choque y de expansión ocurren en el chorro supersónico producido por una tobera "sobreexpandida", como en la figura 12-47. El análisis de estos flujos está fuera de los objetivos de este texto; los lectores interesados pueden consultar libros de texto sobre flujos compresibles como Thompson (1972), Leipmann y Roshko, (2001) y Anderson (2003).

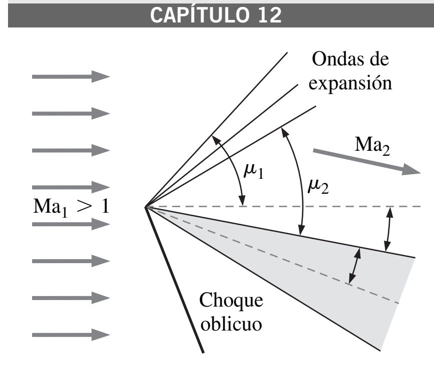


FIGURA 12-45
Un abanico de expansión en la parte superior del flujo formado por una cuña bidimensional a un ángulo de ataque en un flujo supersónico. El flujo gira un ángulo θ, y el número de Mach aumenta a través del abanico de expansión. Se indican los ángulos de Mach corriente arriba y corriente abajo del abanico de expansión. Se muestran para simplicidad solamente tres ondas de expansión, pero de hecho, existe un número infinito de ellas. (Un choque oblicuo se presenta en la parte inferior de este flujo.)

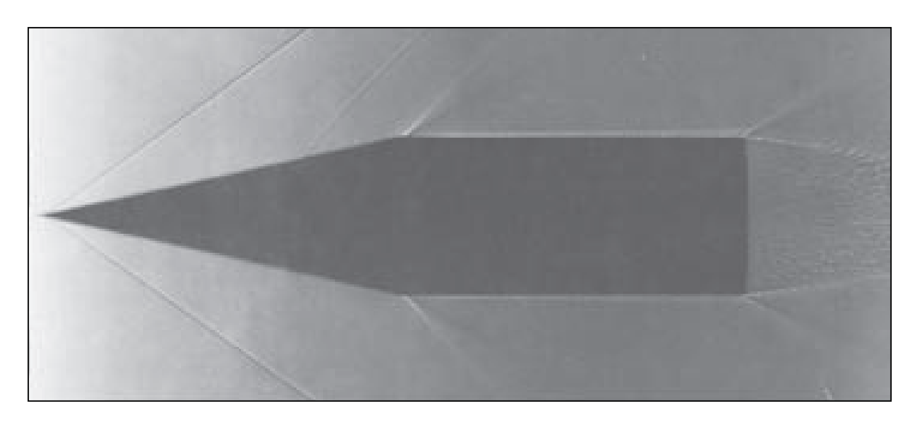


FIGURA 12-46
Un cilindro combinado con el cono de 12.5° de semiángulo en un flujo a número de Mach de 1.84. Las capas límite se vuelven turbulentas a una pequeña distancia corriente abajo de la nariz y generan ondas de Mach que son visibles en esta fotografía por sombras. Las ondas de expansión se ven en las esquinas traseras del cuerpo y en el borde posterior del cono.
Fotografía de A. C. Charters, as found in Van Dyke, 1982.

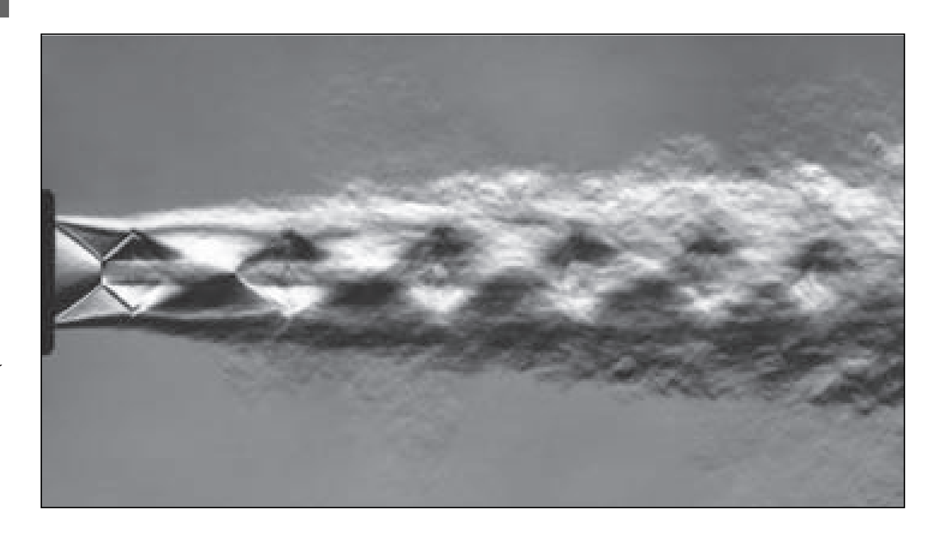


FIGURA 12-47
Las interacciones complejas entre las ondas de choque y las ondas de expansión en un chorro supersónico "sobreexpandido". El flujo se visualiza mediante una interferograma diferencial semejante a una imagen de Schlieren (estriograma).
Fotografía de Julio Srulijes. Reproducido por cortesía de The French-German Research Institute of Saint-Louis, ISL. Reproducido con autorización.

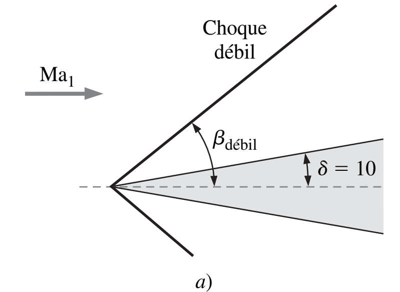
EJEMPLO 12-10 Estimación del número de Mach a partir de las líneas de Mach

Estime el número de Mach de flujo libre corriente arriba del trasbordador espacial de la figura 12-36; parta solamente de la figura. Compare con el valor del número de Mach proporcionado en el texto que acompaña la figura.

SOLUCIÓN Se estimará el número de Mach de una figura y se comparará con el valor conocido.
Análisis Con transportador se mide el ángulo de las líneas de Mach en el flujo libre: $\mu \cong 19°$. El número de Mach se obtiene de la ecuación 12-47,

$$\mu = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\text{Ma}_1}\right) \rightarrow \text{Ma}_1 = \frac{1}{\text{sen } 19°} \rightarrow \text{Ma}_1 = \mathbf{3.07}$$

El número de Mach estimado coincide con el valor experimental 3.0 ± 0.1.
Discusión El resultado es independiente de las propiedades del fluido.



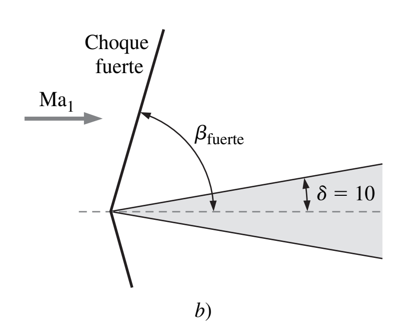


FIGURA 12-48
Dos posibles ángulos de choque oblicuo, *a*) $\beta_{\text{débil}}$ y *b*) β_{fuerte}, provocado por una cuña bidimensional de semiángulo $\delta = 10°$.

EJEMPLO 12-11 Cálculo de onda de choque oblicua

Aire supersónico a $\text{Ma}_1 = 2.0$ y 75.0 kPa incide en una cuña bidimensional de semiángulo $\delta = 10°$ (Fig. 12-48). Calcule los dos posibles ángulos de choque oblicuo $\beta_{\text{débil}}$ y β_{fuerte}, que podrían producirse por esta cuña. Para cada caso, calcule la presión y el número de Mach corriente abajo del choque oblicuo, compare y analice.

SOLUCIÓN Se calcularán el ángulo de choque, el número de Mach y la presión corriente abajo de los choques oblicuos débil y fuerte formados por una cuña bidimensional.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** La capa límite sobre la cuña es muy delgada.
Propiedades El fluido es aire con $k = 1.4$.

Análisis Debido a la suposición 2, el ángulo de deflexión de la onda de choque oblicua es casi igual al semiángulo de la cuña, es decir, $\theta \cong \delta = 10°$. A $\text{Ma}_1 = 2.0$ y $\theta = 10°$, se resuelve la ecuación 12-46 para los dos valores posibles del ángulo de choque oblicuo β: $\boldsymbol{\beta_{\text{débil}} = 39.3°}$ y $\boldsymbol{\beta_{\text{fuerte}} = 83.7°}$. A partir de estos valores se usa la primera parte de la ecuación 12-44 para calcular el número de Mach normal corriente arriba $\text{Ma}_{1,\,n}$:

Choque débil: $$\text{Ma}_{1,\,n} = \text{Ma}_1 \operatorname{sen} \beta \;\rightarrow\; \text{Ma}_{1,\,n} = 2.0 \operatorname{sen} 39.3° = 1.267$$

y

Choque fuerte: $$\text{Ma}_{1,\,n} = \text{Ma}_1 \operatorname{sen} \beta \;\rightarrow\; \text{Ma}_{1,\,n} = 2.0 \operatorname{sen} 83.7° = 1.988$$

Se sustituyen estos valores de $\text{Ma}_{1,\,n}$ en la segunda ecuación de la figura 12-40 para calcular el número de Mach normal corriente abajo $\text{Ma}_{2,\,n}$. Para el choque débil, $\text{Ma}_{2,n} = 0.8032$, y para el choque fuerte, $\text{Ma}_{2,\,n} = 0.5794$. También se calcula la presión corriente abajo para cada caso, usando la tercera ecuación de la figura 12-40, lo cual da como resultado:

Choque débil:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2k\,\text{Ma}_{1,\,n}^2 - k + 1}{k + 1} \;\rightarrow\; P_2 = (75.0 \text{ kPa})\frac{2(1.4)(1.267)^2 - 1.4 + 1}{1.4 + 1} = \mathbf{128\ kPa}$$

y

Choque fuerte:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2k\,\text{Ma}_{1,\,n}^2 - k + 1}{k + 1} \;\rightarrow\; P_2 = (75.0 \text{ kPa})\frac{2(1.4)(1.988)^2 - 1.4 + 1}{1.4 + 1} = \mathbf{333\ kPa}$$

Para finalizar, se usa la segunda parte de la ecuación 12-44 para calcular el número de Mach corriente abajo:

Choque débil: $$\text{Ma}_2 = \frac{\text{Ma}_{2,\,n}}{\operatorname{sen}(\beta - \theta)} = \frac{0.8032}{\operatorname{sen}(39.3° - 10°)} = \mathbf{1.64}$$

y

Choque fuerte: $$\text{Ma}_2 = \frac{\text{Ma}_{2,\,n}}{\operatorname{sen}(\beta - \theta)} = \frac{0.5794}{\operatorname{sen}(83.7° - 10°)} = \mathbf{0.604}$$

Los cambios en el número de Mach y la presión a través del choque fuerte son mayores que los cambios a través del choque débil, como se esperaba.

Discusión Puesto que la ecuación 12-46 es implícita con respecto a *b*, se resuelve mediante algún método numérico que incluye varias iteraciones o con un paquete computacional de resolución de ecuaciones, tal como EES. Para ambos choques oblicuos, débil y fuerte, $\text{Ma}_{1,\,n}$ es supersónico y $\text{Ma}_{2,\,n}$ es subsónico. Sin embargo, Ma_2 es *supersónico* en caso del choque débil, pero *subsónico* en caso del choque fuerte. También pueden utilizarse las tablas de choque normal en lugar de las ecuaciones, pero se pierde precisión.

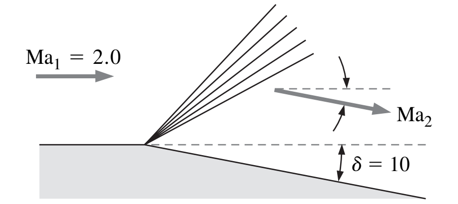


FIGURA 12-49
Abanico de expansión ocasionado por una inclinación repentina de una superficie plana a un ángulo $\delta = 10°$.

EJEMPLO 12-12 Cálculo de la onda de expansión de Prandtl-Meyer

Un flujo de aire supersónico a $\text{Ma}_1 = 2.0$ y 230 kPa fluye paralelo a una superficie plana que abruptamente se inclina hacia abajo en un ángulo de $\delta = 10°$ (Fig. 12-49). Se desprecia cualquier efecto causado por la capa límite formada en la superficie, se calcula el número de Mach Ma_2 y la presión P_2 corriente abajo.

SOLUCIÓN Se calcula el número de Mach y la presión corriente abajo de una región de expansión repentina en la superficie.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** La capa límite en la superficie es muy delgada.

Propiedades El aire es un fluido con $k = 1.4$.

Análisis Debido a la suposición 2, el ángulo de deflexión total del flujo es casi igual al ángulo de inclinación de la superficie, es decir, $\theta \cong \delta = 10°$. Con $\text{Ma}_1 = 2.0$ se resuelve la ecuación 12-49 para la función de Prandtl-Meyer corriente arriba:

$$\nu(\text{Ma}) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(\text{Ma}^2-1)}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\text{Ma}^2-1}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1.4+1}{1.4-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1.4-1}{1.4+1}(2.0^2-1)}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{2.0^2-1}\right) = 26.38°$$

A continuación, se usa la ecuación 12-48 para calcular la función de Prandtl-Meyer corriente abajo:

$$\theta = \nu(\text{Ma}_2) - \nu(\text{Ma}_1) \;\rightarrow\; \nu(\text{Ma}_2) = \theta + \nu(\text{Ma}_1) = 10° + 26.38° = 36.38°$$

Ma_2 se encuentra al resolver la ecuación 12-49, la cual está implícita. Un paquete de resolución de ecuaciones es de gran ayuda. Se obtiene $\text{Ma}_2 = \mathbf{2.385}$. Existen también en Internet las calculadoras de flujo compresible, que resuelven las ecuaciones implícitas de este tipo y las ecuaciones para ambas ondas de choque, oblicuas y normales; por ejemplo, www.aoe.vt.edu/~devenpor/aoe3114/calc.html.

Al usar las relaciones isentrópicas para calcular la presión corriente abajo, se obtiene:

$$P_2 = \frac{P_2/P_0}{P_1/P_0}P_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}_2^2\right]^{-k/(k-1)}}{\left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}_1^2\right]^{-k/(k-1)}}(230\text{ kPa}) = \mathbf{126\text{ kPa}}$$

Debido a que ésta es una onda de expansión, el número de Mach aumenta y la presión disminuye, como se esperaba.

Discusión También podría encontrarse temperatura, densidad, etc., corriente abajo si se emplean las relaciones isentrópicas apropiadas.

12-6 ▪ FLUJO EN DUCTO CON TRANSFERENCIA DE CALOR DE FRICCIÓN DESPRECIABLE (FLUJO DE RAYLEIGH)

Hasta ahora se han limitado las consideraciones principalmente a *flujos isentrópicos*, también llamados *flujos reversibles adiabáticos*, ya que no implican transferencia de calor ni irreversibilidades como fricción. Numerosos problemas de flujo compresible que se encuentran en la práctica incluyen reacciones químicas como combustión, reacciones nucleares, evaporación y condensación, así como aumento de calor o pérdida de éste a través de las paredes del ducto. Estos problemas son difíciles de analizar con exactitud, ya que implican cambios importantes en la composición química durante el flujo, y la conversión de las energías latente, química y nuclear en energía térmica (Fig. 12-50).

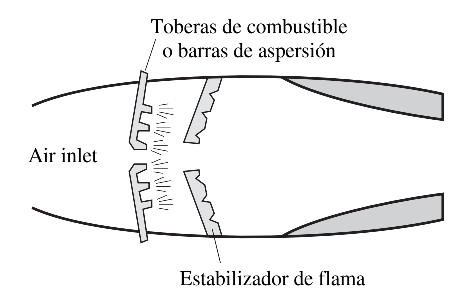


FIGURA 12-50
Numerosos problemas prácticos de flujo compresible implican combustión que puede modelarse como la transferencia de calor al flujo de fluido a través de las paredes del ducto.

Las características esenciales de estos flujos complejos pueden capturarse, sin embargo, por un análisis muy simple al modelar la generación o la absorción de la energía térmica y la transferencia de calor a través de las paredes del ducto a

la misma razón y al despreciar cualquier cambio en la composición química. Este problema simplificado es, no obstante, demasiado complicado para un tratamiento elemental del tema, ya que el flujo puede incluir fricción, variación en el área del ducto y efectos multidimensionales. Esta sección se limita a considerar el flujo unidimensional en un ducto con área de sección transversal constante y con efectos de fricción despreciables.

Considere el flujo unidimensional estacionario de un gas ideal con calores específicos constantes en un ducto de área constante con transferencia de calor, pero con fricción despreciable. Estos flujos se conocen como **flujos de Rayleigh** en honor a Lord Rayleigh (1842-1919). Las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía para el volumen de control que se muestra en la figura 12-51 pueden escribirse de la siguiente manera:

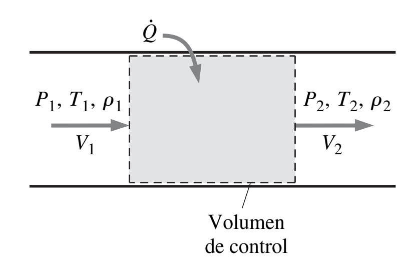


FIGURA 12-51
Volumen de control para el flujo en un ducto de área constante con transferencia de calor y de fricción despreciable.

Ecuación de continuidad Al observar que el área de la sección transversal A del ducto es constante, la relación $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ o $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$ se reduce a:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \tag{12-50}$$

Ecuación de cantidad de movimiento en *x* Al notar que los efectos de la fricción son despreciables y por lo tanto no hay fuerzas de corte, y al considerar que no hay fuerzas externas o de cuerpo, la ecuación de cantidad de movimiento $\sum \vec{F} = \sum_{\text{sal}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta \dot{m} \vec{V}$ en la dirección del flujo (en la dirección x) se convierte en un balance entre las fuerzas de presión estática y la transferencia de cantidad de movimiento. Note que los flujos están a altas velocidades y son turbulentos, por esta razón el factor de corrección del flujo de cantidad de movimiento es casi 1 ($\beta \cong 1$), razón por la cual no se considera. Entonces:

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \ \rightarrow\ P_1 - P_2 = (\rho_2 V_2) V_2 - (\rho_1 V_1) V_1$$

o

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \tag{12-51}$$

Ecuación de la energía El volumen de control no incluye fuerzas de corte, trabajo de flecha o algunos otros tipos de trabajo, y el cambio de la energía potencial es despreciable. Si la razón de transferencia de calor es $\dot{Q}$ y el calor transferido por unidad de masa del fluido es $q = \dot{Q}/\dot{m}$, la ecuación de balance de la energía de flujo estacionario $\dot{E}_{\text{ent}} = \dot{E}_{\text{sal}}$ es:

$$\dot{Q} + \dot{m}\left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right) = \dot{m}\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right) \ \rightarrow\ q + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{12-52}$$

Para un gas ideal con calores específicos constantes, $\Delta h = c_p \, \Delta T$ y así:

$$q = c_p(T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \tag{12-53}$$

o

$$q = h_{02} - h_{01} = c_p(T_{02} - T_{01}) \tag{12-54}$$

Por lo tanto, la entalpía de estancamiento h_0 y la temperatura de estancamiento T_0 cambian en el flujo de Rayleigh (ambas aumentan cuando se transfiere calor al fluido y q es positivo, y ambas disminuyen cuando el calor se transfiere del fluido, por lo tanto, q es negativo).

Cambio de entropía En ausencia de cualquier irreversibilidad tal como la fricción, la entropía de un sistema cambia solamente debido a la transferencia de calor: ésta aumenta con el suministro de calor y disminuye con la

pérdida de calor. La entropía es una propiedad y por lo tanto una función de estado; el cambio de entropía de un gas ideal con calores específicos constantes al pasar del estado 1 al estado 2 está dado por:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \tag{12-55}$$

La entropía del fluido puede aumentar o disminuir en el flujo de Rayleigh, esto depende de la dirección de la transferencia del calor.

Ecuación de estado Note que $P = \rho RT$, las propiedades P, ρ y T del gas ideal en los estados 1 y 2 están relacionadas entre sí por:

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} \tag{12-56}$$

Considere un gas con propiedades conocidas R, k y c_p. Para un estado de entrada 1, las propiedades de entrada P_1, T_1, ρ_1, V_1 y s_1 se conocen. Las cinco propiedades de salida P_2, T_2, ρ_2, V_2, y s_2 pueden determinarse a partir de las ecuaciones 12-50, 12-51, 12-53, 12-55 y 12-56 para cualquier valor especificado del calor transferido q. Cuando la velocidad y la temperatura se conocen, el número de Mach puede determinarse a partir de $\text{Ma} = V/c = V/\sqrt{kRT}$.

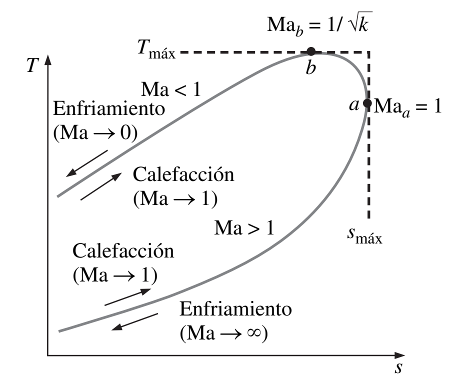


FIGURA 12-52
Diagrama *T-s* para el flujo en un ducto de área constante con transferencia de calor y de fricción despreciable (flujo de Rayleigh).

Obviamente hay un número infinito de posibles estados 2 corriente abajo correspondientes al estado dado corriente arriba 1. Una manera práctica de determinar estos estados corriente abajo es considerar varios valores de T_2, y calcular todas las otras propiedades así como el calor transferido q para cada T_2 a partir de las ecuaciones 12-50 a la 12-56. Se grafican los resultados en un diagrama *T-s* que da una curva que pasa por el estado específico de entrada, como se muestra en la figura 12-52. La gráfica del flujo de Rayleigh en un diagrama *T-s* se llama **línea de Rayleigh**. Pueden hacerse varias observaciones importantes a partir de esta gráfica y de los resultados de los cálculos:

1. Todos los estados que satisfacen las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía así como las relaciones entre las propiedades pertenecen a la línea de Rayleigh. Por lo tanto, para un estado inicial dado, el fluido no puede existir en algún estado corriente abajo que esté fuera de la línea de Rayleigh en un diagrama *T-s*. De hecho, la línea de Rayleigh es el lugar de todos los estados corriente abajo posibles físicamente que corresponden al estado inicial.
2. La entropía aumenta con el suministro de calor al fluido, y así el estado se desplaza a la derecha a lo largo la línea de Rayleigh mientras que se transfiere calor al fluido. El número de Mach es $\text{Ma} = 1$ en el punto a, el cual es el punto de máxima entropía (vea el ejemplo 12-13 para comprobarlo). Los estados sobre la rama superior de la línea de Rayleigh por arriba del punto a son subsónicos, y los estados sobre la rama inferior por abajo del punto a, supersónicos. Un proceso a la derecha sobre la línea de Rayleigh corresponde a la adición de calor, y a la izquierda, al rechazo, cualquiera que sea el valor inicial del número de Mach.
3. El calentamiento aumenta el número de Mach para flujos subsónicos, pero lo disminuye para flujos supersónicos. Durante el calentamiento, el número de Mach de flujo se aproxima a $\text{Ma} = 1$ en ambos casos (desde 0 en flujo subsónico y desde ∞ en flujo supersónico).
4. Es evidente que a partir del balance de energía $q = c_p (T_{02} - T_{01})$ el calentamiento aumenta la temperatura de estancamiento T_0 para ambos flujos, subsónico y supersónico, y el enfriamiento la disminuye. (El valor máximo de T_0 ocurre a $\text{Ma} = 1$.) Esto es también el caso para la temperatura estática T, excepto para el estrecho rango de número de Mach $1/\sqrt{k} < \text{Ma} < 1$ en flujo subsónico (vea el ejemplo 12-13). Ambos,

temperatura y número de Mach aumentan con el calentamiento en flujos subsónicos, pero T alcanza un máximo $T_{máx}$ a Ma = $1/\sqrt{k}$ (la cual es 0.845 para el aire), entonces disminuye. Puede parecer sorprendente que la temperatura del fluido disminuya mientras que se le transfiere calor. Pero no es más sorprendente que el incremento de la velocidad en la parte divergente de una tobera convergente-divergente. El efecto del enfriamiento en esta región lo ocasiona el gran aumento en la velocidad del fluido, y la temperatura decae de acuerdo con la relación $T_0 = T + V^2/2c_p$. Observe también que el calor rechazado en la región $1/\sqrt{k} < \text{Ma} < 1$ causa el incremento en la temperatura del fluido (Fig. 12-53).

5. La ecuación de cantidad de movimiento $P + KV$ = constante, donde $K = \rho V$ = constante (a partir de la ecuación de continuidad) revela que la velocidad y la presión estática tienen tendencias opuestas. Por lo tanto, la presión estática disminuye con el aumento de calor en flujos subsónicos (porque la velocidad y el número de Mach aumentan), pero aumenta con el incremento de calor en flujos supersónicos (porque la velocidad y el número de Mach disminuyen).
6. La ecuación de continuidad ρV = constante indica que la densidad y la velocidad son inversamente proporcionales. Por lo tanto, la densidad disminuye con el calor transferido al fluido en un flujo subsónico (ya que la velocidad y el número de Mach aumentan), pero aumenta con el calor recibido en un flujo supersónico (porque la velocidad y el número de Mach disminuyen).
7. En la mitad izquierda de la figura 12-52, la rama inferior de la línea de Rayleigh está más pronunciada que la rama superior (en términos de s en función de T), lo cual indica que el cambio de entropía correspondiente a un cambio de temperatura especificado (y así, a la cantidad de calor dada) es mayor en un flujo supersónico.

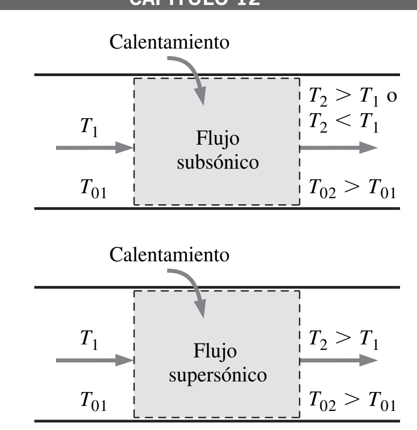


FIGURA 12-53
En proceso de calentamiento, la temperatura del flujo siempre aumenta si el flujo de Rayleigh es supersónico, pero la temperatura puede realmente disminuir si el flujo es subsónico.

Los efectos del calentamiento y del enfriamiento en las propiedades del flujo de Rayleigh se enlistan en la tabla 12-3. Observe que el calentamiento y el enfriamiento tienen efectos opuestos en la mayoría de las propiedades. También observe que la presión de estancamiento disminuye durante el calentamiento y aumenta durante el enfriamiento sin importar que el flujo sea subsónico o supersónico.

TABLA 12-3

Efectos de calentamiento y enfriamiento en las propiedades de flujo de Rayleigh

	Calentamiento		***Enfriamiento***	
Propiedad	Subsónico	Supersónico	Subsónico	Supersónico
Velocidad, V	Aumenta	Disminuye	Disminuye	Aumenta
Número de Mach, Ma	Aumenta	Disminuye	Disminuye	Aumenta
Temperatura de estancamiento, T_0	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Disminuye
Temperatura , T	Aumenta para Ma $< 1/k^{1/2}$ Disminuye para Ma $> 1/k^{1/2}$	Aumenta	Disminuye para Ma $< 1/k^{1/2}$ Aumenta para Ma $> 1/k^{1/2}$	Disminuye
Densidad, ρ	Disminuye	Aumenta	Aumenta	Disminuye
Presión de estancamiento, P_0	Disminuye	Disminuye	Aumenta	Increase
Presión, P	Disminuye	Aumenta	Aumenta	Disminuye
Entropía, s	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Disminuye

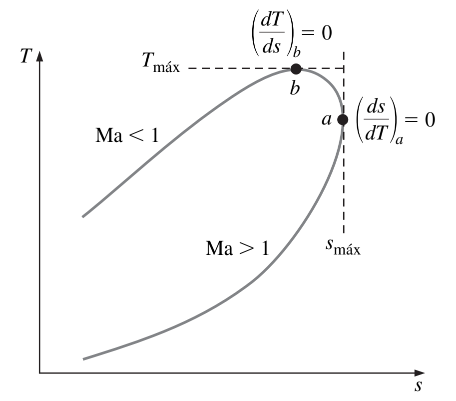


FIGURA 12-54
Diagrama *T-s* del flujo de Rayleigh considerado en el ejemplo 12-13.

EJEMPLO 12-13 Extremos en la línea de Rayleigh

Considérese el diagrama *T-s* del flujo de Rayleigh, como se muestra en la figura 12-54. Con el empleo de las formas diferenciales de las ecuaciones de conservación y las relaciones entre las propiedades, demuestre que el número de Mach en el punto de máxima entropía (punto *a*) es $Ma_a = 1$, y que $Ma_b = 1/\sqrt{k}$ en el punto de máxima temperatura (punto *b*).

SOLUCIÓN Se debe demostrar que $Ma_a = 1$ en el punto de máxima entropía y que $Ma_b = 1/\sqrt{k}$ en el punto de máxima temperatura en la línea de Rayleigh.
Hipótesis Las consideraciones relacionadas con el flujo de Rayleigh son válidas (es decir, el flujo es estacionario, unidimensional, de un gas con propiedades constantes, en un ducto del área de sección transversal constante y con efectos de fricción despreciables).
Análisis Las formas diferenciales de las ecuaciones de continuidad (ρV = constante), cantidad de movimiento [$P + (\rho V)V$ = constante], gas ideal ($P = \rho RT$) y cambio de entalpía ($\Delta h = c_p \, \Delta T$) pueden expresarse como:

$$\rho V = \text{constante} \quad \rightarrow \quad \rho\, dV + V\, d\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \tag{1}$$

$$P + (\rho V)V = \text{constante} \quad \rightarrow \quad dP + (\rho V)\, dV = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{dV} = -\rho V \tag{2}$$

$$P = \rho RT \quad \rightarrow \quad dP = \rho R\, dT + RT\, d\rho \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \tag{3}$$

La forma diferencial de la relación del cambio de entropía (Ec. 12-40) de un gas ideal con calores específicos constantes es:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dP}{P} \tag{4}$$

Se sustituye la ecuación 3 en la ecuación 4, y se tiene:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R\left(\frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}\right) = (c_p - R)\frac{dT}{T} - R\frac{d\rho}{\rho} = \frac{R}{k-1}\frac{dT}{T} - R\frac{d\rho}{\rho} \tag{5}$$

ya que:

$$c_p - R = c_v \quad \rightarrow \quad kc_v - R = c_v \quad \rightarrow \quad c_v = R/(k-1)$$

Se dividen ambos lados de la ecuación 5 por dT y se combina con la ecuación 1:

$$\frac{ds}{dT} = \frac{R}{T(k-1)} + \frac{R}{V}\frac{dV}{dT} \tag{6}$$

Se divide la ecuación 3 entre dv y se combina con las ecuaciones 1 y 2 dadas, y se reordenan los términos:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{T}{V} - \frac{V}{R} \tag{7}$$

Se sustituye la ecuación 7 en la ecuación 6 y se reordena:

$$\frac{ds}{dT} = \frac{R}{T(k-1)} + \frac{R}{T - V^2/R} = \frac{R(kRT - V^2)}{T(k-1)(RT - V^2)} \tag{8}$$

Al poner $ds/dT = 0$ y resolver la ecuación resultante $R(kRT - V^2) = 0$ con respecto a la velocidad V, se obtiene la velocidad en el punto *a*:

$$V_a = \sqrt{kRT_a} \qquad \text{y} \qquad Ma_a = \frac{V_a}{c_a} = \frac{\sqrt{kRT_a}}{\sqrt{kRT_a}} = \mathbf{1} \tag{9}$$

Por lo tanto, existen condiciones sónicas en el punto *a*, y así el número de Mach es 1.

Se pone $dT/ds = (ds/dT)^{-1} = 0$ y cuando se resuelve la ecuación resultante $T(k - 1) \times (RT - V^2) = 0$ se encuentra la velocidad en el punto *b*:

$$V_b = \sqrt{RT_b} \qquad \text{y} \qquad \text{Ma}_b = \frac{V_b}{c_b} = \frac{\sqrt{RT_b}}{\sqrt{kRT_b}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{k}}} \tag{10}$$

Por lo tanto, el número de Mach en el punto *b* es $\text{Ma}_b = 1/\sqrt{k}$. Para el aire k = 1.4 y así $\text{Ma}_b = 0.845$.

Discusión Observe que en el flujo de Rayleigh se alcanzan las condiciones sónicas al valor máximo de entropía, pero la temperatura máxima ocurre en el flujo subsónico.

EJEMPLO 12-14 Efecto de la transferencia de calor en la velocidad del flujo

Inicie con la forma diferencial de la ecuación de la energía y demuestre que la velocidad del flujo aumenta con la adición de calor en un flujo subsónico de Rayleigh, pero disminuye en un flujo supersónico de Rayleigh.

SOLUCIÓN Debe demostrarse que la velocidad del flujo aumenta con la adición de calor en flujo subsónico de Rayleigh y que ocurre lo contrario en flujo supersónico.

Hipótesis **1** Las suposiciones relacionadas con el flujo de Rayleigh son válidas. **2** No hay interacciones de trabajo y los cambios en la energía potencial son despreciables.

Análisis Considere la transferencia de calor al fluido en una cantidad diferencial δq. La forma diferencial de la ecuación de la energía puede expresarse como:

$$\delta q = dh_0 = d\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = c_p\,dT + V\,dV \tag{1}$$

Se divide entre c_pT, se factoriza dV/V y se tiene:

$$\frac{\delta q}{c_pT} = \frac{dT}{T} + \frac{V\,dV}{c_pT} = \frac{dV}{V}\left(\frac{V}{dV}\frac{dT}{T} + \frac{(k-1)V^2}{kRT}\right) \tag{2}$$

donde también se ha usado $c_p = kR/(k - 1)$. Observe que $\text{Ma}^2 = V^2/c^2 = V^2/kRT$ y con la ecuación 7 para dT/dV del ejemplo 12-13 se obtiene

$$\frac{\delta q}{c_pT} = \frac{dV}{V}\left(\frac{V}{T}\left(\frac{T}{V} - \frac{V}{R}\right) + (k-1)\text{Ma}^2\right) = \frac{dV}{V}\left(1 - \frac{V^2}{TR} + k\,\text{Ma}^2 - \text{Ma}^2\right) \tag{3}$$

Se cancelan los dos términos de en medio en la ecuación 3 ya que $V^2/TR = k\,\text{Ma}^2$ se efectúan algunos arreglos y se obtiene la relación deseada:

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_pT}\frac{1}{(1 - \text{Ma}^2)} \tag{4}$$

En el flujo subsónico, $1 - \text{Ma}^2 > 0$ y así el calor transferido y el cambio en la velocidad tienen el mismo signo. Como resultado, el calentamiento del fluido ($\delta q > 0$) aumenta la velocidad del flujo mientras que el enfriamiento disminuye. En el flujo supersónico, sin embargo, $1 - \text{Ma}^2 < 0$ y el calor transferido y el cambio de velocidad tienen signos opuestos. Como resultado, el calentamiento del fluido ($\delta q > 0$) disminuye la velocidad del flujo mientras que el enfriamiento aumenta (Fig. 12-55).

Discusión Observe que en flujos subsónico y supersónico, el calentamiento del fluido tiene el efecto contrario en la velocidad del flujo.

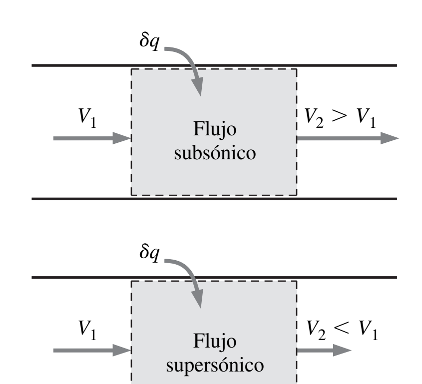


FIGURA 12-55
El proceso de calentamiento aumenta la velocidad en un flujo subsónico, pero la disminuye en un flujo supersónico.

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(k+1)\mathrm{Ma}^2[2+(k-1)\mathrm{Ma}^2]}{(1+k\mathrm{Ma}^2)^2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{k+1}{1+k\mathrm{Ma}^2}\left(\frac{2+(k-1)\mathrm{Ma}^2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

$$\frac{T}{T^*} = \left(\frac{\mathrm{Ma}(1+k)}{1+k\mathrm{Ma}^2}\right)^2$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1+k}{1+k\mathrm{Ma}^2}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{*}{} = \frac{(1+k)\mathrm{Ma}^2}{1+k\mathrm{Ma}^2}$$

FIGURA 12-56
Resumen de las relaciones del flujo de Rayleigh.

Relaciones entre las propiedades para el flujo de Rayleigh

Frecuentemente se desea expresar las variaciones de propiedades en términos del número de Mach Ma. Observe que $\mathrm{Ma} = V/c = V/\sqrt{kRT}$ y así $V = \mathrm{Ma}\sqrt{kRT}$,

$$\rho V^2 = \rho kRT\mathrm{Ma}^2 = kP\mathrm{Ma}^2 \tag{12-57}$$

ya que $P = \rho RT$. Al sustituir en la ecuación de cantidad de movimiento (Ec. 12-51) se tiene que $P_1 + kP_1\mathrm{Ma}_1^2 = P_2 + kP_2\mathrm{Ma}_2^2$, lo cual puede reordenarse como:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1+k\mathrm{Ma}_1^2}{1+k\mathrm{Ma}_2^2} \tag{12-58}$$

Al utilizar nuevamente $V = \mathrm{Ma}\sqrt{kRT}$, la ecuación de continuidad $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ puede expresarse como:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\mathrm{Ma}_2\sqrt{kRT_2}}{\mathrm{Ma}_1\sqrt{kRT_1}} = \frac{\mathrm{Ma}_2\sqrt{T_2}}{\mathrm{Ma}_1\sqrt{T_1}} \tag{12-59}$$

Entonces la relación del gas ideal (Ec. 12-56) se convierte en:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1}\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{1+k\mathrm{Ma}_1^2}{1+k\mathrm{Ma}_2^2}\right)\left(\frac{\mathrm{Ma}_2\sqrt{T_2}}{\mathrm{Ma}_1\sqrt{T_1}}\right) \tag{12-60}$$

Cuando se resuelve la ecuación 12-60 para el cociente de temperaturas T_2/T_1 se tiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\mathrm{Ma}_2(1+k\mathrm{Ma}_1^2)}{\mathrm{Ma}_1(1+k\mathrm{Ma}_2^2)}\right)^2 \tag{12-61}$$

Cuando se sustituye esta relación en la ecuación 12-59, se obtiene la relación para las razones de densidad o de velocidad:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\mathrm{Ma}_1^2(1+k\mathrm{Ma}_2^2)}{\mathrm{Ma}_2^2(1+k\mathrm{Ma}_1^2)} \tag{12-62}$$

Las propiedades de flujo en condiciones sónicas son, usualmente, fáciles de determinar y, por lo tanto, el estado crítico correspondiente a Ma = 1 sirve para el flujo compresible como un conveniente punto de referencia. Al tomar el estado 2 como sónico ($\mathrm{Ma}_2 = 1$ y usar * como superíndice) y el estado 1 como cualquier estado (sin superíndice), las relaciones de las propiedades en las ecuaciones 12-58, 12-61 y 12-62, se reducen a (Fig. 12-56):

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1+k}{1+k\mathrm{Ma}^2} \qquad \frac{T}{T^*} = \left(\frac{\mathrm{Ma}(1+k)}{1+k\mathrm{Ma}^2}\right)^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(1+k)\mathrm{Ma}^2}{1+k\mathrm{Ma}^2} \tag{12-63}$$

Pueden obtenerse relaciones similares para la temperatura de estancamiento y la presión de estancamiento adimensionales:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{T_0}{T}\frac{T}{T^*}\frac{T^*}{T_0^*} = \left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)\left(\frac{\mathrm{Ma}(1+k)}{1+k\mathrm{Ma}^2}\right)^2\left(1+\frac{k-1}{2}\right)^{-1} \tag{12-64}$$

las cuales se simplifican en:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(k+1)\mathrm{Ma}^2[2+(k-1)\mathrm{Ma}^2]}{(1+k\mathrm{Ma}^2)^2} \tag{12-65}$$

También:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{P_0}{P}\frac{P}{P^*}\frac{P^*}{P_0^*} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right)^{k/(k-1)}\left(\frac{1+k}{1+k\text{Ma}^2}\right)\left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{-k/(k-1)} \qquad \textbf{(12-66)}$$

las cuales se simplifican en:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{k+1}{1+k\text{Ma}^2}\left(\frac{2+(k-1)\text{Ma}^2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \qquad \textbf{(12-67)}$$

Las relaciones de las ecuaciones 12-63, 12-65 y 12-67 permiten calcular: presión, temperatura, densidad, velocidad, temperatura de estancamiento y presión de estancamiento, adimensionalmente, para el flujo de Rayleigh de un gas ideal con el valor de k especificado, para cualquier número de Mach dado. Los resultados representativos están dados en forma tabular y de gráfica en la Tabla A-15 para $k = 1.4$.

Flujo de Rayleigh bloqueado

Es evidente desde los comentarios anteriores que el flujo subsónico de Rayleigh en un ducto puede acelerarse mediante calentamiento hasta la velocidad sónica (Ma = 1). ¿Qué ocurre si el fluido continúa calentándose? ¿Continuará el fluido acelerándose a velocidades supersónicas? Un examen de la línea de Rayleigh indica que el fluido en el estado crítico Ma = 1, no puede acelerarse a velocidades supersónicas mediante calentamiento. Por lo tanto, el fluido está *bloqueado* o *estrangulado*. Esto es análogo a la imposibilidad de acelerar un fluido a velocidades supersónicas en una tobera convergente simplemente al extender la sección convergente. Si se continúa calentando el fluido, simplemente se moverá el estado crítico más adelante corriente abajo y se reducirá la razón de flujo, ya que la densidad del fluido en el estado crítico ahora será más pequeña. Por lo tanto, para un estado de entrada dada, el estado crítico correspondiente fija la transferencia de calor máximo posible para un flujo estacionario (Fig. 12-57). Esto es:

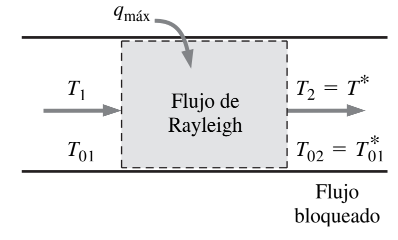


FIGURA 12-57
Para un estado de entrada dado, la transferencia de calor máxima posible ocurre cuando las condiciones sónicas se alcanzan a la salida.

$$q_{máx} = h_0^* - h_{01} = c_p(T_0^* - T_{01}) \qquad \textbf{(12-68)}$$

El calor adicional transferido ocasiona el fenómeno de bloqueo y por lo tanto un cambio en el estado de entrada (la velocidad de entrada disminuye), y el flujo ya no sigue sobre la misma línea de Rayleigh. Cuando se enfría el flujo de Rayleigh subsónico, se reduce su velocidad y el número de Mach se aproxima a cero mientras que la temperatura se aproxima al cero absoluto. Observe que la temperatura de estancamiento T_0 es máxima en el estado crítico Ma = 1.

En un flujo de Rayleigh supersónico, el calentamiento disminuye la velocidad del flujo. El calentamiento mayor del máximo posible simplemente aumenta la temperatura y mueve el estado crítico corriente abajo, lo cual resulta en una reducción del flujo másico del fluido. Puede parecer que es posible enfriar un flujo supersónico de Rayleigh tanto cuanto uno guste, pero resulta que hay un límite. Se toma el límite de la ecuación 12-65 cuando el número de Mach se aproxima al infinito:

$$\text{Lím}_{\text{Ma}\to\infty} \frac{T_0}{T_0^*} = 1 - \frac{1}{k^2} \qquad \textbf{(12-69)}$$

el cual produce $T_0/T_0^* = 0.49$ para $k = 1.4$. Por lo tanto, si la temperatura crítica de estancamiento es 1 000 K, el aire no puede ser enfriado a menos de 490 K en un flujo de Rayleigh. Físicamente esto significa que la velocidad de flujo alcanza el infinito al mismo tiempo que la temperatura alcanza 490 K, lo cual es físicamente imposible. Cuando un flujo no puede permanecer supersónico, el flujo experimenta una onda de choque normal y se convierte en un flujo subsónico.

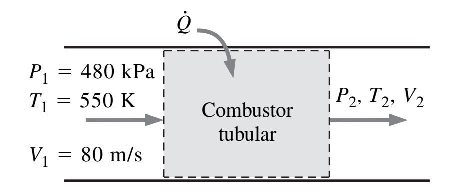


FIGURA 12-58
Esquema del combustor tubular que se analiza en el ejemplo 12-15.

EJEMPLO 12-15 Flujo de Rayleigh en un combustor tubular

Una cámara de combustión consiste de un combustor tubular de 15 cm de diámetro. Aire comprimido entra en los tubos a 550 K, 480 kPa y 80 m/s (Fig. 12-58). Combustible con un valor de poder calorífico de 42 000 kJ/kg se inyecta al aire y se quema a una razón de masas de aire y combustible de 40. Aproxime el proceso de combustión con la transferencia de calor al aire y determine la temperatura, presión, velocidad y número de Mach en la salida de la cámara de combustión.

SOLUCIÓN Se quema combustible en una cámara de combustión tubular con aire comprimido. Se determinarán temperatura, presión, velocidad y número de Mach en la salida.

Hipótesis **1** Las suposiciones relacionadas con el flujo de Rayleigh son válidas (es decir, el flujo es estacionario, unidimensional, de un gas con propiedades constantes, en un ducto del área de sección transversal constante, con efectos de fricción insignificantes). **2** La combustión es completa y el proceso de combustión se sustituye por el proceso de adición de calor, sin considerar el cambio en la composición química del flujo. **3** El aumento en el flujo másico debido a la inyección del combustible es despreciable.

Propiedades Se toman las propiedades del aire como $k = 1.4$, $c_p = 1.005$ kJ/kg · K, y $R = 0.287$ kJ/kg · K.

Análisis La densidad a la entrada y la razón del flujo de masa del aire son:

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{480 \text{ kPa}}{(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(550 \text{ K})} = 3.041 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m}_{\text{aire}} = \rho_1 A_1 V_1 = (3.041 \text{ kg/m}^3)[\pi(0.15 \text{ m})^2/4](80 \text{ m/s}) = 4.299 \text{ kg/s}$$

La razón de flujo de masa de combustible y la razón de transferencia de calor son:

$$\dot{m}_{\text{comb}} = \frac{m_{\text{aire}}}{\text{AF}} = \frac{4.299 \text{ kg/s}}{40} = 0.1075 \text{ kg/s}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}_{\text{comb}}\text{HV} = (0.1075 \text{ kg/s})(42\,000 \text{ kJ/kg}) = 4\,514 \text{ kW}$$

$$q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_{\text{aire}}} = \frac{4\,514 \text{ kJ/s}}{4.299 \text{ kg/s}} = 1\,050 \text{ kJ/kg}$$

La temperatura de estancamiento y el número de Mach a la entrada son:

$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 550 \text{ K} + \frac{(80 \text{ m/s})^2}{2(1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})}\left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}\right) = 553.2 \text{ K}$$

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(550 \text{ K})\left(\frac{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}}\right)} = 470.1 \text{ m/s}$$

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{80 \text{ m/s}}{470.1 \text{ m/s}} = 0.1702$$

La temperatura de estancamiento a la salida, a partir de la ecuación de la energía $q = c_p(T_{02} - T_{01})$, es:

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 553.2 \text{ K} + \frac{1\,050 \text{ kJ/kg}}{1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}} = 1\,598 \text{ K}$$

El valor máximo de la temperatura de estancamiento T_0^* ocurre a Ma = 1, y su valor puede determinarse de la tabla A-15 o a partir de la ecuación 12-65. Para $Ma_1 = 0.1702$ se lee $T_0/T_0^* = 0.1291$. Por lo tanto,

$$T_0^* = \frac{T_{01}}{0.1291} = \frac{553.2\text{ K}}{0.1291} = 4\,284\text{ K}$$

La razón de las temperaturas de estancamiento a la salida y el número de Mach correspondiente, a partir de la tabla A-15, son:

$$\frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{1\,598\text{ K}}{4\,284\text{ K}} = 0.3730 \quad \rightarrow \quad \text{Ma}_2 = \mathbf{0.3142}$$

Las funciones del flujo de Rayleigh correspondientes a los números de Mach en la salida y en la entrada son (tabla A-15):

$$\text{Ma}_1 = 0.1702: \quad \frac{T_1}{T^*} = 0.1541 \quad \frac{P_1}{P^*} = 2.3065 \quad \frac{V_1}{V^*} = 0.0668$$

$$\text{Ma}_2 = 0.3142: \quad \frac{T_2}{T^*} = 0.4389 \quad \frac{P_2}{P^*} = 2.1086 \quad \frac{V_2}{V^*} = 0.2082$$

La temperatura, la presión y la velocidad a la salida son:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{0.4389}{0.1541} = 2.848 \quad \rightarrow \quad T_2 = 2.848T_1 = 2.848(550\text{ K}) = \mathbf{1\,566\text{ K}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2/P^*}{P_1/P^*} = \frac{2.1086}{2.3065} = 0.9142 \rightarrow P_2 = 0.9142P_1 = 0.9142(480\text{ kPa}) = \mathbf{439\text{ kPa}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = \frac{0.2082}{0.0668} = 3.117 \quad \rightarrow \quad V_2 = 3.117V_1 = 3.117(80\text{ m/s}) = \mathbf{249\text{ m/s}}$$

Discusión Observe que, como se esperaba, la temperatura y la velocidad aumentan y la presión disminuye en este flujo de Rayleigh subsónico al calentarlo. Este problema también puede resolverse si se usan las relaciones apropiadas en vez de valores tabulados, las cuales pueden también introducirse en un paquete computacional para obtener las soluciones con computadora.

12-7 ▪ FLUJO ADIABÁTICO EN UN DUCTO CON FRICCIÓN (FLUJO DE FANNO)

La fricción en las superficies, asociada con el flujo a altas velocidades a través de dispositivos cortos con gran área de sección transversal, tales como toberas de gran tamaño, es frecuentemente despreciable, y el flujo a través de estos dispositivos puede aproximarse a uno libre de fricción. Pero la fricción en las superficies es importante y debe considerarse cuando se estudian largos tramos de flujo, tales como ductos largos, especialmente cuando el área de sección transversal es pequeña. En esta sección se considerarán flujos compresibles en ductos de área de sección transversal constante con fricción en las paredes importante, pero insignificante transferencia de calor.

Considere el flujo estacionario, adiabático y unidimensional de un gas ideal con calores específicos constantes en ducto de área de sección transversal constante con efectos de fricción importantes. Estos flujos se llaman **flujos de Fan-**

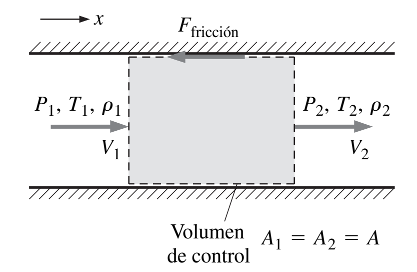


FIGURA 12-59
Volumen de control para un flujo adiabático en un ducto de área constante con fricción.

no. Las ecuaciones de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía para el volumen de control en la figura 12-59 pueden escribirse así:

Ecuación de continuidad Observe que el área de la sección transversal A del ducto es constante (y por lo tanto $A_1 = A_2 = A_c$), la relación $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ o $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$ se reduce a:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad \rightarrow \quad \rho V = \text{constante} \tag{12-70}$$

Ecuación de la cantidad de movimiento en *x* Se denota por $F_{\text{fricción}}$ la fuerza ejercida por la superficie interior en el fluido y se considera que no existen otras fuerzas externas o del cuerpo. La ecuación de cantidad de movimiento $\sum \vec{F} = \sum_{\text{sal}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta \dot{m} \vec{V}$ en la dirección del fluido puede expresarse

$$P_1 A - P_2 A - F_{\text{fricción}} = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \quad \rightarrow \quad P_1 - P_2 - \frac{F_{\text{fricción}}}{A}$$
$$= (\rho_2 V_2) V_2 - (\rho_1 V_1) V_1$$

donde, aunque existe fricción en las paredes, y los perfiles de la velocidad no son uniformes, se aproxima el factor de corrección β de flujo de cantidad de movimiento como $\beta = 1$ para simplicidad porque el flujo es turbulento.

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 + \frac{F_{\text{fricción}}}{A} \tag{12-71}$$

Ecuación de la energía El volumen de control no incluye la transferencia de calor e interacciones de trabajo y el cambio de la energía potencial es despreciable. Entonces la ecuación de balance de la energía para flujo estacionario $\dot{E}_{\text{ent}} = \dot{E}_{\text{sal}}$ es:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad h_{01} = h_{02} \quad \rightarrow \quad h_0 = h + \frac{V^2}{2} = \text{constante} \tag{12-72}$$

Para un gas con calores específicos constantes, $\Delta h = c_p \Delta T$ y así:

$$T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = T_2 + \frac{V_2^2}{2c_p} \quad \rightarrow \quad T_{01} = T_{02} \quad \rightarrow \quad T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} = \text{constante} \tag{12-73}$$

Por lo tanto, la entalpía de estancamiento h_0 y la temperatura de estancamiento T_0 permanecen constantes en el flujo de Fanno.

Cambio de entropía En ausencia de cualquier transferencia de calor, la entropía de un sistema cambia solamente debido a irreversibilidades como la fricción, cuyo efecto siempre aumenta la entropía. Por lo tanto, la entropía del fluido debe aumentar en el flujo de Fanno. El cambio de entropía en este caso equivale al aumento de entropía o generación de entropía, y para un gas ideal con calores específicos constantes se expresa como:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} > 0 \tag{12-74}$$

Ecuación de estado Se observa que $P = \rho RT$, las propiedades P, ρ y T de un gas ideal en los estados 1 y 2 están interrelacionadas por:

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} \tag{12-75}$$

Considere un gas con propiedades conocidas R, k y c_p que fluye en un ducto de área de sección transversal constante A. Para un estado de entrada 1 específico, las propiedades de entrada P_1, T_1, ρ_1, V_1 y s_1 se conocen. Las cinco propiedades a la salidas P_2, T_2, ρ_2, V_2 y s_2 pueden determinarse a partir de las ecuaciones 12-70 a la 12-75 para cualquier valor especificado de la fuerza de fricción $F_{\text{fricción}}$. Cuando se conocen la velocidad y la temperatura, los números de Mach en la entrada y en la salida pueden determinarse a partir de la relación $\text{Ma} = V/c = V/\sqrt{kRT}$.

Obviamente existe un número infinito de posibles estados 2 corriente abajo correspondientes al estado 1 dado corriente arriba. Una manera práctica de determinar estos estados corriente abajo es suponer varios valores de T_2 y calcular, a partir de las ecuaciones 12-70 a la 12-75, el resto de las propiedades y la fuerza de fricción para cada temperatura T_2 supuesta. Se grafican los resultados en un diagrama *T-s*, y se tiene una curva que pasa a través del estado de entrada especificado, como se muestra en la figura 12-60. La gráfica del flujo de Fanno en un diagrama *T-s* se llama **línea de Fanno**. Pueden hacerse varias observaciones importantes de esta gráfica y los resultados de los cálculos:

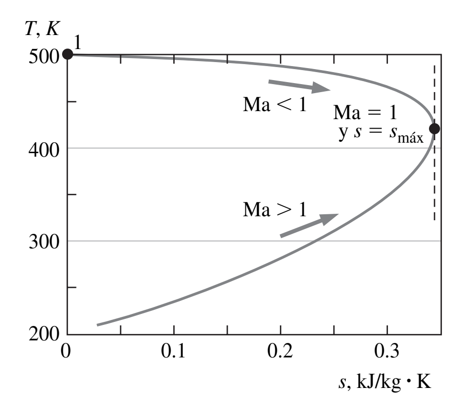


FIGURA 12-60
Diagrama *T-s* para un flujo adiabático con fricción en un ducto de área constante (flujo de Fanno). Los valores numéricos se dan para el aire con $k = 1.4$ a condiciones de entrada $T_1 = 500$ K, $P_1 = 600$ kPa, $V_1 = 80$ m/s y un valor de $s_1 = 0$ asignado.

1. Todos los estados que satisfacen las ecuaciones de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía, así como las relaciones entre las propiedades, están sobre la línea de Fanno. Por lo tanto, para un estado de entrada dado, el fluido no puede existir en cualquier estado corriente abajo fuera de la línea de Fanno en el diagrama *T-s*. De hecho, la línea de Fanno es el lugar de todos los posibles estados corriente abajo correspondientes a un estado inicial. Observe que si no hubiera fricción, las propiedades del flujo permanecerían constantes en el ducto en el flujo de Fanno.
2. La fricción ocasiona un aumento en la entropía, y por lo tanto un proceso siempre sigue a la derecha de la línea de Fanno. En el punto de máxima entropía, el número de Mach es $\text{Ma} = 1$. Todos los estados en la parte superior de la línea de Fanno son subsónicos y todos aquéllos en la parte inferior son supersónicos.
3. La fricción aumenta el número de Mach del flujo de Fanno subsónico, pero disminuye el número de Mach del flujo de Fanno supersónico. El número de Mach tiende hacia la unidad ($\text{Ma} = 1$) en ambos casos.
4. El balance de energía exige que la temperatura de estancamiento $T_0 = T + V^2/2c_p$ permanezca constante en el flujo de Fanno. Pero la temperatura real puede cambiar. La velocidad aumenta y por lo tanto la temperatura disminuye en un flujo subsónico, pero ocurre lo opuesto en un flujo supersónico (Fig. 12-61).
5. La ecuación de continuidad $\rho V =$ constante indica que la densidad y la velocidad son inversamente proporcionales. Por lo tanto, el efecto de la fricción es disminuir la densidad en un flujo subsónico (porque la velocidad y el número de Mach aumentan), pero aumenta la densidad en un flujo supersónico (porque la velocidad y el número de Mach disminuyen).

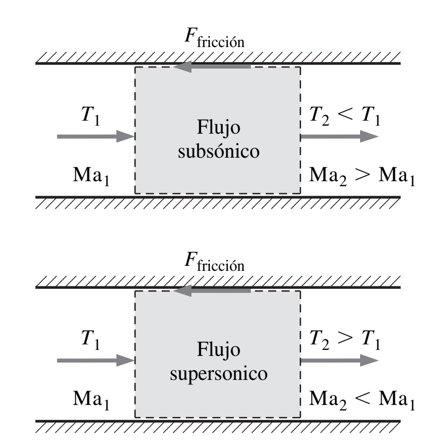


FIGURA 12-61
La fricción ocasiona que el número de Mach aumente y la temperatura disminuya en un flujo de Fanno subsónico, pero sucede lo opuesto en un flujo de Fanno supersónico.

Los efectos de la fricción en las propiedades del flujo de Fanno se muestran en la tabla 12-4. Observe que los efectos de fricción en gran parte de las propiedades en un flujo subsónico son opuestos a aquéllas en un flujo supersónico. Sin embargo, el efecto de la fricción es disminuir siempre la presión de estancamiento, sin importar si el flujo es subsónico o supersónico. La fricción no tiene

TABLA 12-4

Efectos de fricción en las propiedades de flujo de Fanno

Propiedad	Subsónico	Supersónico
Velocidad, V	Aumenta	Disminuye
Número de Mach, Ma	Aumenta	Disminuye
Temperatura de estancamiento, T_0	Constante	Constante
Temperatura, T	Disminuye	Aumenta
Densidad, ρ	Disminuye	Aumenta
Presión de estancamiento, P_0	Disminuye	Disminuye
Presión, P	Disminuye	Aumenta
Entropía, s	Aumenta	Aumenta

efectos en la temperatura de estancamiento, porque la fricción simplemente origina la transformación de energía mecánica en una cantidad equivalente de energía térmica.

Relaciones entre las propiedades del flujo de Fanno

En un flujo compresible es conveniente expresar la variación de las propiedades en términos del número de Mach, y el flujo de Fanno no es la excepción. Sin embargo, el flujo de Fanno implica la fuerza de fricción, la cual es proporcional al cuadrado de la velocidad cuando el factor de fricción es constante. Pero en flujos compresibles, la velocidad varía notablemente a través de éste y, por lo tanto, es necesario realizar un análisis diferencial para considerar la variación de la fuerza de fricción. Se comenzará por obtener las formas diferenciales de las ecuaciones de conservación y las relaciones entre las propiedades.

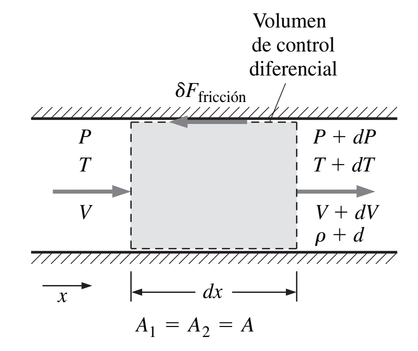


FIGURA 12-62
Volumen de control diferencial para un flujo adiabático en un ducto de área constante con fricción.

Ecuación de continuidad La forma diferencial de la ecuación de continuidad se obtiene diferenciando la relación de continuidad $\rho V =$ constante y mediante algunos arreglos:

$$\rho\, dV + V\, d\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \tag{12-76}$$

Ecuación de la cantidad de movimiento en *x* Se observa que $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = \rho AV$ y $A_1 = A_2 = A$, y al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento $\sum \vec{F} = \sum_{\text{sal}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta \dot{m} \vec{V}$ al volumen de control diferencial de la figura 12-62, se obtiene:

$$PA_c - (P + dP)A - \delta F_{\text{fricción}} = \dot{m}(V + dV) - \dot{m}V$$

donde nuevamente se aproxima el factor de corrección β del flujo de cantidad de movimiento como 1. Esta ecuación se simplifica a:

$$-dPA - \delta F_{\text{fricción}} = \rho AV\, dV \qquad \text{o} \qquad dP + \frac{\delta F_{\text{fricción}}}{A} + \rho V\, dV = 0 \tag{12-77}$$

La fuerza de fricción está relacionada con el esfuerzo cortante en las paredes τ_w y el factor de fricción local f_x mediante la ecuación:

$$\delta F_{\text{fricción}} = \tau_w \, dA_s = \tau_w p \, dx = \left(\frac{f_x}{8}\rho V^2\right)\frac{4A}{D_h}dx = \frac{f_x}{2}\frac{A \, dx}{D_h}\rho V^2 \qquad \textbf{(12-78)}$$

donde dx es la longitud del tramo del flujo, p es el perímetro y $D_h = 4A/p$ es el diámetro hidráulico del ducto (observe que D_h se reduce al diámetro normal D para un ducto de sección transversal circular). Cuando se sustituye:

$$dP + \frac{\rho V^2 f_x}{2D_h}dx + \rho V \, dV = 0 \qquad \textbf{(12-79)}$$

Notando que $V = \text{Ma}\sqrt{kRT}$ y $P = \rho RT$, se tiene que $\rho V^2 = \rho kRT\text{Ma}^2 = kP\text{Ma}^2$ y $\rho V = kP\text{Ma}^2/V$. Se sustituye en la ecuación 12-79,

$$\frac{1}{k\text{Ma}^2}\frac{dP}{P} + \frac{f_x}{2D_h}dx + \frac{dV}{V} = 0 \qquad \textbf{(12-80)}$$

Ecuación de la energía Se observa que $c_p = kR/(k-1)$ y $V^2 = \text{Ma}^2 kRT$, la ecuación de la energía T_0 = constante o $T + V^2/2c_p$ = constante puede expresarse como:

$$T_0 = T\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right) = \text{constante} \qquad \textbf{(12-81)}$$

Al diferenciar y reacomodar términos se tiene:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{2(k-1)\text{Ma}^2}{2+(k-1)\text{Ma}^2}\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \qquad \textbf{(12-82)}$$

la cual es una expresión para el cambio diferencial de la temperatura en términos de un cambio diferencial del número de Mach.

Número de Mach La relación del número de Mach para gases ideales puede expresarse como $V^2 = \text{Ma}^2 kRT$. Al diferenciar y reacomodar términos se obtiene:

$$2V \, dV = 2\text{Ma}kRT \, d\text{Ma} + kR\text{Ma}^2 \, dT \quad \rightarrow \qquad \textbf{(12-83)}$$

$$2V \, dV = 2\frac{V^2}{\text{Ma}}d\text{Ma} + \frac{V^2}{T}dT$$

Al dividir cada término entre $2V^2$ y reacomodar:

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} + \frac{1}{2}\frac{dT}{T} \qquad \textbf{(12-84)}$$

Al combinar las ecuaciones 12-84 y 12-82 se obtiene el cambio de velocidad en términos del número de Mach como:

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} - \frac{(k-1)\text{Ma}^2}{2+(k-1)\text{Ma}^2}\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \quad \text{o} \quad \frac{dV}{V} = \frac{2}{2+(k-1)\text{Ma}^2}\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \qquad \textbf{(12-85)}$$

Gas ideal La forma diferencial de la ecuación del gas ideal se obtiene al diferenciar la ecuación $P = \rho RT$,

$$dP = \rho R \, dT + RT \, d\rho \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \qquad \textbf{(12-86)}$$

Al combinar ésta con la ecuación de continuidad (Ec. 12-76) se tiene:

$$\frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V} \tag{12-87}$$

Al combinar ahora las ecuaciones 12-82 y 12-84 se obtiene:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{2 + 2(k-1)\text{Ma}^2}{2 + (k-1)\text{Ma}^2}\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \tag{12-88}$$

la cual es una expresión para los cambios diferenciales en P con Ma.

Se sustituyen las ecuaciones 12-85 y 12-88 en la ecuación 12-80 y al simplificar términos se obtiene la ecuación diferencial para la variación del número de Mach respecto a x de la siguiente manera:

$$\frac{f_x}{D_h}dx = \frac{4(1-\text{Ma}^2)}{k\text{Ma}^3[2 + (k-1)\text{Ma}^2]}\,d\text{Ma} \tag{12-89}$$

Si se considera que todos los flujos de Fanno tienden a Ma = 1, de nuevo es conveniente utilizar el punto crítico (es decir, el estado sónico) como punto de referencia y expresar las propiedades del flujo en relación con las propiedades del punto crítico, inclusive si el flujo real nunca alcanza el punto crítico. Cuando se integra la ecuación 12-89 desde cualquier estado (Ma = Ma y $x = x$) hasta el estado crítico (Ma = 1 y $x = x_{cr}$) se obtiene:

$$\frac{fL^*}{D_h} = \frac{1-\text{Ma}^2}{k\text{Ma}^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\frac{(k+1)\text{Ma}^2}{2 + (k-1)\text{Ma}^2} \tag{12-90}$$

FIGURA 12-63
La longitud L^* representa la distancia entre la sección dada donde el número de Mach es Ma y la sección real o imaginaria donde el número de Mach es Ma* = 1.

donde f es el factor de fricción promedio entre x y x_{cr}, el cual se considera constante, y $L^* = x_{cr} - x$ es la longitud del ducto necesaria para que el número de Mach alcance a la unidad bajo la influencia de fricción en las paredes. Por lo tanto, L^* representa la distancia entre una sección dada donde el número de Mach es Ma y una sección (imaginaria si el ducto no es lo suficientemente largo para alcanzar Ma = 1) en donde se presentan las condiciones sónicas (Fig. 12-63).

Observe que el valor de fL^*/D_h es fijo para un número de Mach dado y, por lo tanto, los valores de fL^*/D_h pueden tabularse en función de Ma para un k especificado. También se tiene que el valor de la longitud de ducto L^* necesaria para alcanzar las condiciones sónicas (o la "longitud sónica") es inversamente proporcional al factor de fricción. Por lo tanto, para un número de Mach dado, L^* es mayor en ductos con superficies lisas y menor en ductos con superficies rugosas.

La longitud real del ducto L entre dos secciones que tienen números de Mach Ma_1 y Ma_2 puede determinarse a partir de:

$$\frac{fL}{D_h} = \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_1 - \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_2 \tag{12-91}$$

El factor de fricción promedio f, en general, es diferente en distintas partes del ducto. Si se considera a f constante en todo el ducto (incluso en la extensión hipotética del ducto hasta el estado sónico), entonces la ecuación 12-91 se reduce a:

$$L = L_1^* - L_2^* \quad (f = \text{constante}) \tag{12-92}$$

Por lo tanto, la ecuación 12-90 puede usarse para ductos cortos que nunca alcanzan Ma = 1 y también para ductos largos con Ma = 1 en la salida.

El factor de fricción depende del número de Reynolds $\text{Re} = \rho V D_h/\mu$, el cual varía en el ducto, y la rugosidad adimensional ε/D_h de la superficie. Sin embargo, la variación del número de Reynolds es moderada, ya que ρV = constante (debido a la ecuación de continuidad), y cualquier cambio en el número de Rey-

nolds se debe solamente a la variación de la viscosidad con la temperatura. Por lo tanto, es razonable evaluar f a partir del diagrama de Moody o de la ecuación de Colebrook tratada en el capítulo 8 a un valor promedio del número de Reynolds y considerar el factor de fricción constante. Éste es el caso del flujo subsónico, puesto que los cambios de temperatura implícitos son relativamente pequeños. Tratar el factor de fricción para el flujo supersónico está fuera del objetivo de este texto. La ecuación de Colebrook está implícita para f y, por lo tanto, es más conveniente usar la relación explícita de Haaland:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong -1.8 \log\left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7}\right)^{1.11}\right] \tag{12-93}$$

Los números de Reynolds de los flujos compresibles son por lo general altos, y números de Reynolds muy grandes (flujo turbulento totalmente rugoso), el factor de fricción es independiente del número de Reynolds. Para Re $\rightarrow \infty$, la ecuación de Colebrook se reduce a $1/\sqrt{f} = -2.0 \log\left[(\varepsilon/D_h)/3.7\right]$.

Las relaciones para otras propiedades de flujo pueden determinarse de manera similar al integrar las relaciones de dP/P, dT/T y dV/V de las ecuaciones 12-79, 12-82 y 12-85, respectivamente, desde cualquier estado (las propiedades y el número de Ma no se marcan con ningún subíndice) al estado sónico (las propiedades se marcan con el superíndice de asterisco y Ma = 1), con los siguientes resultados (Fig. 12-64):

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{\text{Ma}}\left(\frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2}\right)^{1/2} \tag{12-94}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2} \tag{12-95}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \text{Ma}\left(\frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2}\right)^{1/2} \tag{12-96}$$

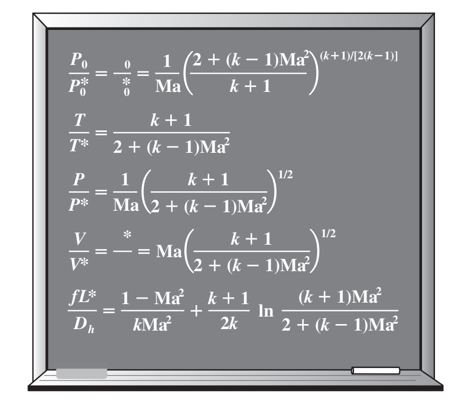


FIGURA 12-64
Resumen de las relaciones del flujo de Fanno.

Una relación similar puede obtenerse para la presión de estancamiento adimensional de la siguiente manera:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{P_0}{P}\frac{P}{P^*}\frac{P^*}{P_0^*} = \left(1+\frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right)^{k/(k-1)}\frac{1}{\text{Ma}}\left(\frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{k-1}{2}\right)^{-k/(k-1)}$$

la cual implica:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1}{\text{Ma}}\left(\frac{2+(k-1)\text{Ma}^2}{k+1}\right)^{(k+1)/[2(k-1)]} \tag{12-97}$$

Observe que la temperatura de estancamiento T_0 es constante para un flujo de Fanno y, por lo tanto, $T_0/T_0^* = 1$ en cualquier lugar del ducto.

Las ecuaciones de la 12-90 a la 12-97 permiten calcular presión, temperatura, densidad, velocidad, presión de estancamiento adimensionales y fL^*/D_h para el flujo de Fanno de un gas ideal con k especificado para cualquier número de Mach dado. Algunos resultados representativos se dan en forma tabular y gráfica en la tabla A-16 para k =1.4.

Flujo de Fanno bloqueado

Es evidente a partir del comentario previo que la fricción provoca el flujo de Fanno subsónico en un ducto de área constante por acelerarse hasta la velocidad sónica, y el número de Mach se convierte exactamente en la unidad a la salida de un ducto de cierta longitud. Esta longitud se llama **longitud máxima**, **longitud sónica** o **longitud crítica**, y se denota por L^*. En este momento surge la curiosidad por conocer qué sucede si se extiende la longitud del ducto a un valor por arriba de L^*. Se tiene la pregunta: ¿se acelerará el flujo hasta alcanzar velocidades supersónicas? La respuesta es un no definitivo porque a Ma = 1 el flujo está en el punto de máxima entropía, y para seguir a lo largo de la línea de Fan-

no a la región supersónica se necesita que la entropía del fluido disminuya, lo cual sería una violación de la segunda ley de la termodinámica (observe que el estado de salida debe permanecer sobre la línea de Fanno para satisfacer todas las leyes de conservación). Por lo tanto, el flujo está bloqueado o estrangulado. Esto de nuevo es análogo al hecho de que no se puede acelerar un gas hasta velocidades supersónicas en una tobera convergente simplemente si se extiende la parte convergente de la tobera. Si se extiende la longitud del ducto por arriba de L^*, simplemente se mueve el estado crítico corriente abajo y se reduce la razón de flujo. Esto origina un cambio en el estado de entrada (la velocidad de entrada disminuye), y el flujo se mueve a una línea de Fanno diferente. Un aumento adicional en la longitud del ducto ocasiona un decremento adicional en la velocidad de entrada y, por lo tanto, en la razón del flujo de masa.

La fricción causa que el flujo de Fanno en un ducto de área constante se desacelere, y el número de Mach tienda a disminuirse hasta la unidad. Por lo tanto el número de Mach a la salida nuevamente es Ma = 1 si la longitud del ducto es L^*, como sucede en un flujo subsónico. Pero a diferencia de un flujo subsónico, un aumento adicional en la longitud del ducto por arriba de L^* no puede bloquear el flujo debido a que éste ya está bloqueado. En cambio, esto origina una onda de choque normal que ocurre en lugar adecuado para que el flujo subsónico que surge después de la onda de choque continúe fluyendo en el ducto y se convierta nuevamente en sónico justo a la salida del ducto (Fig. 12-65). Un aumento en la longitud del ducto todavía mayor traslada la onda de choque corriente arriba, y si se incrementa la longitud, la onda llega a ubicarse a la entrada del ducto. Si se sigue incrementando la longitud aún más, la onda del choque se ubica en la parte divergente de la tobera convergente-divergente que originalmente generó el flujo supersónico, pero la razón del flujo de masa permanece aún sin verse afectada porque la razón del flujo de masa se establece por las condiciones sónicas en la garganta de la tobera y no se cambia a menos que se cambien las condiciones en la garganta.

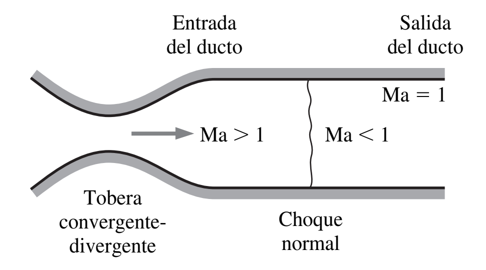


FIGURA 12-65
El flujo de Fanno supersónico es siempre sónico a la salida del ducto. Al extender el ducto, la onda de choque normal se desplaza corriente arriba.

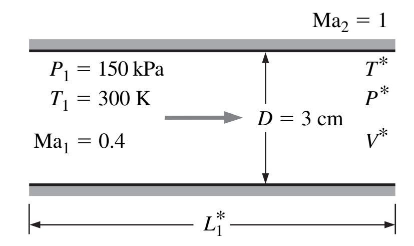


FIGURA 12-66
Esquema para el ejemplo 12-16.

EJEMPLO 12-16 Flujo de Fanno bloqueado

Entra aire en un ducto liso adiabático de 3 cm de diámetro a $\text{Ma}_1 = 0.4$, $T_1 = 300$ K y $P_1 = 150$ kPa (Fig. 12-66). Si el número de Mach en la salida del ducto es 1, determine la longitud del ducto y la temperatura, presión y velocidad a la salida del ducto. Determine también el porcentaje de presión de estancamiento perdida en el ducto.

SOLUCIÓN Entra aire a un ducto adiabático de área constante en un estado especificado y abandona el ducto en el estado sónico. Deben determinarse longitud del ducto, temperatura, presión y velocidad a la salida y el porcentaje de presión de estancamiento perdida.
Hipótesis **1** Las suposiciones relacionadas con el flujo de Fanno son válidas (es decir, el flujo de un gas ideal con propiedades constantes en un ducto adiabático de área de sección transversal constante es estacionario, con fricción). **2** El factor de fricción es constante en el ducto.
Propiedades Se toman las propiedades del aire como $k = 1.4$, $c_p = 1.005$ kJ/kg · K, $R = 0.287$ kJ/kg · K y $\nu = 1.58 \times 10^{-5}$ m²/s.
Análisis Primero se determinarán la velocidad y el número de Reynolds a la entrada:

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(300 \text{ K})\left(\frac{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}}\right)} = 347 \text{ m/s}$$

$$V_1 = \text{Ma}_1 c_1 = 0.4(347 \text{ m/s}) = 139 \text{ m/s}$$

$$\text{Re}_1 = \frac{V_1 D}{\nu} = \frac{(139 \text{ m/s})(0.03 \text{ m})}{1.58 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 2.637 \times 10^5$$

El factor de fricción se determina a partir de la ecuación de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{0}{3.7} + \frac{2.51}{2.637 \times 10^5\sqrt{f}}\right)$$

cuya solución es:

$$f = 0.0148$$

Las funciones del flujo de Fanno correspondientes a la entrada de un número de Mach 0.4 son (tabla A-16):

$$\frac{P_{01}}{P_0^*} = 1.5901 \quad \frac{T_1}{T^*} = 1.1628 \quad \frac{P_1}{P^*} = 2.6958 \quad \frac{V_1}{V^*} = 0.4313 \quad \frac{fL_1^*}{D} = 2.3085$$

Note que * denota las condiciones sónicas, las cuales existen a la salida del ducto, la longitud del ducto, la temperatura, la presión y la velocidad a la salida son:

$$L_1^* = \frac{2.3085D}{f} = \frac{2.3085(0.03 \text{ m})}{0.0148} = \mathbf{4.68 \text{ m}}$$

$$T^* = \frac{T_1}{1.1628} = \frac{300 \text{ K}}{1.1628} = \mathbf{258 \text{ K}}$$

$$P^* = \frac{P_1}{2.6958} = \frac{150 \text{ kPa}}{2.6958} = \mathbf{55.6 \text{ kPa}}$$

$$V^* = \frac{V_1}{0.4313} = \frac{139 \text{ m/s}}{0.4313} = \mathbf{322 \text{ m/s}}$$

Por lo tanto, para el factor de fricción dado, la longitud del ducto debe ser de 4.68 m para que el número de Mach alcance el valor de 1 en la salida del ducto. La fracción de presión de estancamiento P_{01} perdida en el ducto debido a la fricción es:

$$\frac{P_{01} - P_0^*}{P_{01}} = 1 - \frac{P_0^*}{P_{01}} = 1 - \frac{1}{1.5901} = 0.371 \quad \text{o} \quad \mathbf{37.1\%}$$

Discusión Este problema puede resolverse también si se usan relaciones apropiadas en vez de los valores tabulados de las funciones de Fanno. Además, se determinó el factor de fricción a las condiciones de entrada y se consideró que permanece constante en el ducto. Para verificar la validez de esta suposición se calcula el factor de fricción a las condiciones de salida. Se puede mostrar que el factor de fricción en la salida del ducto es 0.0121 y experimenta una caída de 18 por ciento, lo cual es considerable. Por lo tanto, debería repetirse el cálculo usando el valor promedio del factor de fricción (0.0148 + 0.0121)/2 = 0.0135. Esto daría una longitud del ducto L_1^* = 2.3085(0.03m)/0.0135 = **5.13 m**, y este valor es el que debe reportarse como la longitud del ducto.

EJEMPLO 12-17 Condiciones de salida del flujo de Fanno en un ducto

Entra aire a un ducto adiabático de 5 cm de diámetro y de 27 m de longitud a V_1 = 85 m/s, T_1 = 450 K y P_1 = 220 kPa (Fig. 12-67). El valor estimado del factor de fricción promedio del ducto es 0.023. Determine el número de Mach a la salida del ducto y la razón del flujo de masa del aire.

SOLUCIÓN Entra aire, en un estado especificado, a un ducto adiabático de área constante y una longitud dada. Deben determinarse el número de Mach a la salida y la razón de flujo de masa.

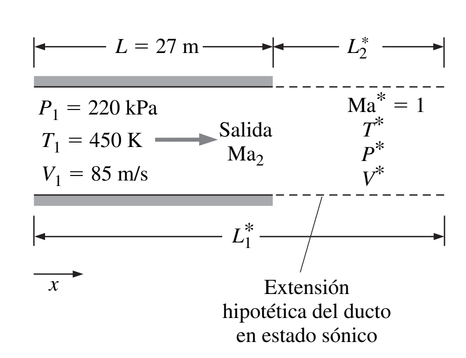


FIGURA 12-67
Esquema para el ejemplo 12-17.

Hipótesis **1** Las suposiciones relacionadas con el flujo de Fanno son válidas (es decir., el flujo de un gas ideal con propiedades constantes en un ducto adiabático de área de sección transversal constante es estacionario, con fricción). **2** El factor de fricción es constante a lo largo del ducto.
Propiedades *Se* toman las propiedades del aire como $k = 1.4$, $c_p = 1.005$ kJ/kg · K y $R = 0.287$ kJ/kg · K.
Análisis Lo primero que es necesario saber es si el flujo está bloqueado a la salida o no. Por lo tanto, primero se determina el número de Mach a la entrada y el valor correspondiente de la función fL^*/D_h:

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(450\text{ K})\left(\frac{1\,000\text{ m}^2/\text{s}^2}{1\text{ kJ/kg}}\right)} = 425\text{ m/s}$$

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{85\text{ m/s}}{425\text{ m/s}} = 0.200$$

A este número de Mach en la tabla A-16 corresponde el valor $(fL^*/D_h)_1 = 14.5333$. Al usar la longitud real del ducto L, se tiene:

$$\frac{fL}{D_h} = \frac{(0.023)(27\text{ m})}{0.05\text{ m}} = 12.42 < 14.5333$$

Por lo tanto, el flujo *no* está bloqueado en la salida y el número de Mach es menor que 1. La función fL^*/D_h para el estado de salida se calcula de la ecuación 12-91:

$$\left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_2 = \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_1 - \frac{fL}{D_h} = 14.5333 - 12.42 = 2.1133$$

El número de Mach correspondiente a este valor de fL^*/D_h es 0.42, que se obtiene de la tabla A-16. Por lo tanto, el número de Mach a la salida del ducto es:

$$\text{Ma}_2 = \mathbf{0.42}$$

La razón del flujo de masa del aire se determina a partir de las condiciones de entrada:

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{220\text{ kPa}}{(0.287\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(450\text{ K})}\left(\frac{1\text{ kJ}}{1\text{ kPa}\cdot\text{m}^3}\right) = 1.703\text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m}_{\text{aire}} = \rho_1 A_1 V_1 = (1.703\text{ kg/m}^3)\left[\pi(0.05\text{ m})^2/4\right](85\text{ m/s}) = \mathbf{0.284\text{ kg/s}}$$

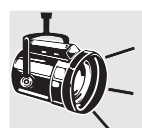
Discusión Observe que se necesita un ducto de 27 m de longitud para que el número de Mach aumente de 0.2 a 0.42, pero solamente 4.6 m de longitud para que aumente de 0.42 a 1. Por lo tanto, el número de Mach aumenta mucho más rápido en la cercanía a las condiciones sónicas.

Para tener una visión más completa, se determinará la longitud L^* correspondiente a los valores de fL^*/D_h a la entrada y la salida del ducto. Observe que f se consideró constante a lo largo de todo el ducto, las longitudes máximas (o sónicas) a la entrada y la salida del ducto son:

$$L_{\text{máx, 1}} = L_1^* = 14.5333\frac{D_h}{f} = 14.5333\frac{0.05\text{ m}}{0.023} = 31.6\text{ m}$$

$$L_{\text{máx, 2}} = L_2^* = 2.1133\frac{D_h}{f} = 2.1133\frac{0.05\text{ m}}{0.023} = 4.59\text{ m}$$

(o, $L_{\text{máx, 2}} = L_{\text{máx, 1}} - L = 31.6 - 27 = 4.6$ m). Por lo tanto, el flujo alcanzaría las condiciones sónicas a la salida si se añadiera un ducto de 4.6 m de longitud al ducto existente.



PROYECTOR DE APLICACIONES ■ Ondas de choque/interacción de las capas límite

Autor invitado: Gary S. Settles, *The Pennsylvania State University*

Las ondas de choque y las capas límite son fenómenos más incompatibles en la naturaleza. Las capas límite, tal como se describieron en el capítulo 10, son susceptibles para separar los perfiles aerodinámicos dondequiera que ocurran gradientes de presión adversos. Por otro lado, las ondas de choque producen gradientes de presión adversos muy fuertes, puesto que un aumento finito en la presión estática ocurre a través de una onda de choque a lo largo de una distancia extremadamente corta. Por lo tanto, cuando una capa límite encuentra una onda de choque, un patrón complicado de flujo se forma y las capas límite con frecuencia se separan de la superficie a la cual estaban adheridas.

Existen casos importantes en vuelos de alta velocidad y en pruebas en túneles de viento, donde estos conflictos son inevitables. Por ejemplo, un avión comercial con motores de propulsión opera en el vuelo de crucero al límite inferior del régimen de flujo transónico, donde el flujo de aire sobre sus alas llega a ser supersónico y después regresa a ser subsónico a través de una onda de choque normal (Fig. 12-68). Si dicho avión vuela considerablemente más rápido y supera el número de Mach para el cual fue diseñado, ocurren serios disturbios aerodinámicos debido a las interacciones de las ondas de choque y las capas límite que causan la separación de flujo de las alas. Este fenómeno limita la velocidad de aviones comerciales en todo el mundo. Algunos aviones militares están diseñados para evitar este límite y volar a velocidades supersónicas, pero las interacciones entre las ondas de choque y las capas límite son, no obstante, factores limitantes en la entrada de aire a los motores de propulsión.

La interacción de una onda de choque y una capa límite es un tipo de *interacción viscosa-invíscida*, en la cual el flujo viscoso de la capa límite enfrenta una onda de choque esencialmente invíscida generada en el flujo libre. La capa límite se vuelve más lenta y más gruesa debido al choque, y puede separarse. La onda de choque, sin embargo, se bifurca cuando ocurre la separación del flujo (Fig. 12-69). Cambios mutuos en la onda de choque y en la capa límite continúan hasta que se alcanzan las condiciones de equilibrio. Dependiendo de las condiciones de frontera, la interacción puede variar en dos o tres dimensiones y puede ser estacionaria o no-estacionaria.

Es difícil analizar un flujo con interacciones tan fuertes, y no existen soluciones simples. Además, en muchos de los problemas de interés práctico la capa límite en estudio es turbulenta. Mediante métodos computacionales modernos pueden predecirse numerosas características de estos flujos a partir de la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes para los números de Reynolds promediados obtenida por una supercomputadora. Los experimentos en túneles de viento tienen un papel importante en la orientación y validación de estos cálculos. No obstante la interacción entre una onda de choque y una capa límite se ha convertido en uno de los problemas de investigación de mayor interés en la dinámica de fluidos contemporánea.

Referencias

Knight, D. D. *et al.*, “Advances in CFD Prediction of Shock Wave Turbulent Boundary Layer Interactions”, *Progress in Aerospace Sciences* 39(2-3), pp. 121-184, 2003.

Alvi, F. S. y Settles, G. S., “Physical Model of the Swept Shock Wave/Boundary-Layer Interaction Flowfield”, *AIAA Journal* 30, pp. 2252-2258, septiembre 1992.



FIGURA 12-68
Onda de choque normal sobre el ala de un avión comercial de propulsión L-1011 en vuelo transónico que se hizo visible por la distorsión de la imagen de las nubes a baja altitud sobre el Océano Pacífico que se ven en el fondo de la fotografía.
U.S. Govt. Fotografía de Carla Thomas, NASA Dryden Research Center.

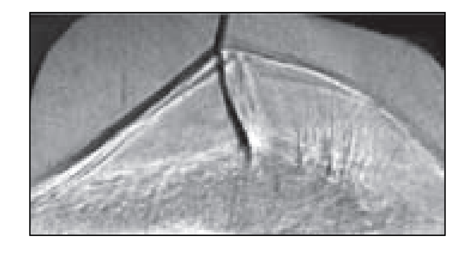


FIGURA 12-69
Fotografía por sombras de interacción a Ma de 3.5 generada por una aleta colocada sobre una placa plana. La onda de choque oblicua generada por la aleta (en la parte superior de la imagen) se bifurca en forma de una λ por abajo de la cual la capa límite se separa y se enrolla. El flujo de aire al atravesar esta λ por arriba de la zona de separación forma un “chorro” supersónico que se curva hacia abajo e incide en la superficie. Para visualizar este flujo de interacción tridimensional se necesita una técnica óptica especial conocida como fotografía por sombras cónicas.
Fotografía de F. S. Alvi y G. S. Settles.

RESUMEN

En este capítulo se examinaron los efectos de la compresibilidad en un flujo de gas. Cuando se tratan flujos compresibles, es conveniente combinar la entalpía y la energía cinética del fluido en un solo término llamado *entalpía de estancamiento* (o *entalpía total*) h_0, definida como:

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$

Las propiedades de un fluido en estado de estancamiento son llamadas *propiedades de estancamiento* y se indican con un subíndice 0. La *temperatura de estancamiento* de un gas ideal con calores específicos constantes es:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

la cual representa la temperatura que un gas ideal debe obtener si se lleva al reposo adiabáticamente. Las propiedades de estancamiento de un gas ideal están relacionadas con las propiedades estáticas del fluido mediante:

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{k/(k-1)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(k-1)}$$

La velocidad a la cual una onda infinitesimal de presión se propaga a través de un medio es *la velocidad del sonido*. Para un gas ideal se expresa como:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{kRT}$$

El *número de Mach* es la razón de la velocidad real del fluido respecto a la velocidad del sonido en el mismo estado:

$$\text{Ma} = \frac{V}{c}$$

Un flujo se llama *sónico* cuando Ma = 1, *subsónico* cuando Ma < 1 y *supersónico* cuando Ma > 1, *hipersónico* cuando Ma >> 1 y *transónico* cuando Ma ≅ 1.

Las toberas cuya área de flujo disminuye en la dirección del flujo, se llaman toberas *convergentes*. Aquéllas cuya área de flujo primero disminuye y después aumenta se llaman *toberas convergente-divergentes*. El vez de menor área de flujo en una tobera se llama *garganta*. La velocidad máxima a la cual un fluido puede acelerarse en una tobera convergente es la velocidad sónica. Acelerar un fluido a velocidades supersónicas es posible solamente en toberas convergente-divergentes. En todas las toberas convergentes-divergentes supersónicas, la velocidad de flujo en la garganta es la velocidad del sonido.

Las razones de las propiedades de estancamiento y estáticas para gases ideales con calores específicos constantes pueden expresarse en términos del número de Mach como:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2$$

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\text{Ma}^2\right]^{k/(k-1)}$$

y

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \left(\frac{\text{k}-1}{2}\right)\text{Ma}^2\right]^{1/(k-1)}$$

Cuando Ma = 1, las razones de las propiedades estáticas y de estancamiento para temperatura presión y densidad se llaman *razones críticas* y se denotan por un * como superíndice:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \qquad \frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

y

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\text{k}+1}\right)^{1/(\text{k}-1)}$$

La presión fuera del plano de salida de una tobera se llama *presión del receptor* o *contrapresión*. Para todas las presiones del receptor menores que P^*, la presión en el plano de salida de una tobera convergente es igual a P^*, el número de Mach en el plano de salida es igual a 1 y la razón del flujo de masa es máxima (de bloqueo o de estrangulamiento).

En cierto rango de las presiones del receptor, el fluido que alcanza la velocidad sónica en la garganta de una tobera convergente-divergente y que se acelera a velocidades supersónicas en la parte divergente de la tobera, experimenta un *choque normal* que causa un aumento repentino en la temperatura y la presión, y una caída en la velocidad hasta alcanzar niveles subsónicos. El flujo que atraviesa una *onda de choque* es muy irreversible y por lo tanto no puede aproximarse como flujo isentrópico. Las propiedades de un gas ideal con calores específicos constantes antes (subíndice 1) y después (subíndice 2) de un choque se relacionan mediante:

$$T_{01} = T_{02} \qquad \text{Ma}_2 = \sqrt{\frac{(k-1)\text{Ma}_1^2 + 2}{2k\text{Ma}_1^2 - k + 1}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + \text{Ma}_1^2(k-1)}{2 + \text{Ma}_2^2(k-1)}$$

y

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \text{k}\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2} = \frac{2\text{k}\text{Ma}_1^2 - k + 1}{k+1}$$

Estas ecuaciones también son válidas para un choque oblicuo, pero la componente del número de Mach *normal* al choque oblicuo se usa en vez del número de Mach.

El flujo unidimensional estacionario de un gas ideal con calores específicos constantes en un ducto de área constante con transferencia de calor y de fricción despreciable, se llama *flujo de Rayleigh*. Las relaciones entre las propiedades y las curvas para un flujo de Rayleigh están en la tabla A-15. El calor transferido en el flujo de Rayleigh puede determinarse a partir de:

$$q = c_p(T_{02} - T_{01}) = c_p(T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$$

El flujo estacionario, adiabático, con fricción, de un gas ideal con calores específicos constantes en un ducto de área constante se llama *flujo de Fanno*. La longitud del ducto necesaria para que el número de Mach alcance la unidad bajo la influencia de la fricción en las paredes del ducto se denota por L^* y se expresa como:

$$\frac{fL^*}{D_h} = \frac{1 - \text{Ma}^2}{k\text{Ma}^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1)\text{Ma}^2}{2 + (k-1)\text{Ma}^2}$$

donde f es el factor de fricción promedio. La longitud del ducto entre dos secciones donde los números de Mach son Ma_1 y Ma_2 se determina de:

$$\frac{fL}{D_h} = \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_1 - \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_2$$

En un flujo de Fanno, la temperatura de estancamiento T_0 permanece constante. Otras relaciones entre las propiedades y las curvas para el flujo de Fanno se dan en la tabla A-16.

Este capítulo proporciona una visión de los flujos compresibles de tal manera que motive al lector a profundizar en su estudio de este tema tan interesante. Algunos flujos compresibles se analizarán en el capítulo 15 mediante dinámica de fluidos computacional.

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. J. D. Anderson, *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*, 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 2003.
2. Y. A. Çengel y M. A. Boles, *Thermodynamics: An Engineering Approach,* 4a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 2002.
3. H. Cohen, G. F. C. Rogers y H. I. H. Saravanamuttoo. *Gas Turbine Theory*, 3a. ed., Nueva York: Wiley, 1987.
4. W. J. Devenport. Compressible Aerodynamic Calculator, http://www.aoe.vt.edu/~devenpor/aoe3114/calc.html.
5. R. W. Fox y A. T. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics*, 5a. ed., Nueva York: Wiley, 1999.
6. H. Liepmann y A. Roshko. *Elements of Gas Dynamics*, Dover Publications, Mineola, NY, 2001.
7. C. E. Mackey, responsible NACA officer and curator. *Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow.* NACA Report 1135, http://naca.larc.nasa.gov/reports/1953/naca-report-1135/.
8. A. H. Shapiro, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, vol. 1, Nueva York: Ronald Press Company, 1953.
9. P. A. Thompson. *Compressible-Fluid Dynamics*, Nueva York: McGraw-Hill, 1972.
10. United Technologies Corporation. *The Aircraft Gas Turbine and Its Operation*, 1982.
11. Van Dyke, 1982.
12. F. M. White, *Fluid Mechanics*, 5a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 2003.

PROBLEMAS*

Propiedades de estancamiento

12-1C Un avión vuela a una alta velocidad de crucero en el aire inmóvil. ¿Cómo difiere la temperatura del aire en la punta de la nariz de la nave en relación con la temperatura del aire a una distancia del avión?

12-2C ¿Cómo y por qué se define la entalpía de estancamiento h_0?, ¿qué tan diferente es de la entalpía normal (o estática)?

12-3C ¿Qué es la temperatura dinámica?

12-4C En aplicaciones de aire acondicionado, la temperatura se mide insertando una sonda en el flujo. Así, la sonda mide la temperatura de estancamiento. ¿Puede esto originar algún error importante?

12-5 Determine la temperatura de estancamiento y la presión de estancamiento del aire que fluye a 44 kPa, 245.9 K y 470 m/s. *Respuestas:* 355.8 K, 160.3 kPa

12-6 Aire a 300 K fluye en un ducto a una velocidad de: *a*) 1, *b*) 10, *c*) 100 y *d*) 1 000 m/s. Determine la temperatura que una sonda en reposo colocada dentro del ducto registrará para cada caso.

12-7 Calcule la temperatura de estancamiento y la presión de estancamiento para las siguientes sustancias que fluyen en un ducto: *a*) helio a 0.25 MPa, 50°C y 240 m/s; *b*) nitrógeno a 0.15 MPa, 50°C y 300 m/s, y *c*) vapor de agua a 0.1 MPa, 350°C y 480 m/s.

12-8 Entra aire a un compresor a una presión de estancamiento de 100 kPa y temperatura de estancamiento de 27°C, y se comprime a una presión de estancamiento de 900 kPa. Considerando que el proceso de compresión es isentrópico, determi-

*Los problemas designados por una “C” son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una “I” están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

ne la potencia consumida por el compresor para una razón de flujo de masa de 0.02 kg/s. *Respuesta:* 5.27 kW

12-9E Fluye vapor de agua a través de un dispositivo a una presión de estancamiento de 120 psia, a una temperatura de estancamiento de 700 °F, y a una velocidad de 900 ft/s. Al suponer el comportamiento de un gas ideal, determine la presión estática y la temperatura del vapor en este estado.

12-10 Los productos de combustión entran a una turbina de gas a una presión de estancamiento de 1.0 MPa y una temperatura de estancamiento de 750°C, y expanden a una presión de estancamiento de 100 kPa. Si para los productos de combustión $k = 1.33$ y $R = 0.287$ kJ/kg · K, y si el proceso de expansión puede aproximarse como un proceso isentrópico, determine la potencia desarrollada por la turbina por unidad de flujo másico.

12-11 Fluye aire a través de un dispositivo tal que la presión de estancamiento es de 0.6 MPa, la temperatura de estancamiento es de 400°C, y la velocidad es de 570 m/s. Determine la presión estática y la temperatura del aire en este estado. *Respuestas:* 518.6 K, 0.23 MPa

Velocidad del sonido y número de Mach

12-12C ¿Qué es el sonido?, ¿cómo se genera?, ¿cómo se propaga?, ¿pueden las ondas sónicas propagarse en el vacío?

12-13C ¿Es realista considerar que la propagación de las ondas de sonido es un proceso isentrópico? Explíquelo.

12-14C La velocidad sónica en un medio específico ¿es una cantidad constante, o cambia de acuerdo con el cambio de las propiedades del medio? Explíquelo.

12-15C En qué medio viaja más rápido una onda de sonido ¿en aire frío o en aire caliente?

12-16C En qué medio viaja más rápido una onda de sonido para una temperatura dada: ¿aire, helio o argón?

12-17C En qué medio viaja más rápido una onda de sonido ¿en aire a 20°C y 1 atm o en aire a 20°C y 5 atm?

12-18C ¿El número de Mach permanece constante para gas que fluye a velocidad constante? Explíquelo.

12-19 Determine la velocidad del sonido en aire a *a*) 300 K y *b*) 1 000 K. Determine también el número de Mach de un avión que vuela a una velocidad constante de 240 m/s para ambos casos.

12-20 Entra dióxido de carbono a una tobera adiabática a 1 200 K a una velocidad de 50 m/s y abandona la tobera a 400 K. Considerando calores específicos constantes e iguales a sus valores a temperatura ambiente, determine el número de Mach *a*) en la entrada y *b*) en la salida de la tobera. Evalúe la precisión de la suposición de calores específicos constantes. *Respuestas: a*) 0.0925, *b*) 3.73

12-21 Entra nitrógeno a un intercambiador de calor de flujo estacionario a 150 kPa, 10°C y 100 m/s, y recibe calor en una cantidad de 120 kJ/kg mientras fluye en el intercambiador de calor. El nitrógeno sale del intercambiador a 100 kPa con una velocidad de 200 m/s. Determine el número de Mach del nitrógeno en la entrada y en la salida del intercambiador de calor.

12-22 Considere el comportamiento de un gas ideal y determine la velocidad del sonido en refrigerante-134a a 0.1 MPa y 60°C.

12-23 El aerobús A-340 tiene un peso de despegue máximo de casi 260 000 kg, 64 m de longitud, 60 m de envergadura de ala a ala, velocidad de crucero máxima de 945 km/h, capacidad para 271 pasajeros, altitud de crucero máxima de 14 000 m, y alcance máximo de 12 000 km. La temperatura del aire en la altitud de crucero es casi de −60°C. Determine el número de Mach de este avión para las condiciones límite indicadas.

12-24I Fluye vapor de agua a través de un dispositivo a una presión de 120 psia, temperatura de 700° F, y velocidad de 900 ft/s. Determine el número de Mach del vapor de agua en este estado considerando el comportamiento de gas ideal con $k = 1.3$. *Respuesta:* 0.441

12-25I EES Reconsidere el problema 12-24I. Use el Software EES (u otro) y compare los números de Mach de flujo de vapor de agua sobre un rango de temperaturas de 350 a 700° F. Grafique el número de Mach en función de la temperatura.

12-26 El proceso isentrópico para un gas ideal se expresa como Pv^k = constante. Use la ecuación de este proceso y la definición de la velocidad del sonido (Ec. 12-9) y obtenga la expresión para la velocidad del sonido de un gas ideal (Ec. 12-11).

12-27 Se expande aire isentrópicamente desde 1.5 MPa y 60°C a 0.4 MPa. Calcule la razón de la velocidad del sonido inicial a la final. *Respuesta:* 1.21

12-28 Repita el problema 12-27, pero con gas helio.

12-29I Se expande aire de manera isentrópica desde 170 psia y 200° F a 60 psia. Calcule la razón de la velocidad del sonido inicial a la final. *Respuesta:* 1.16

Flujo isentrópico unidimensional

12-30C Considere una tobera convergente con velocidad sónica en la salida. Se reduce el área de salida mientras las condiciones en la entrada permanecen constantes. ¿Qué sucederá con *a*) la velocidad de salida y con *b*) la razón del flujo de masa a través de la tobera?

12-31C Un gas inicialmente a velocidad supersónica, entra en un ducto convergente adiabático. Explique cómo esto afecta a *a*) la velocidad, *b*) la temperatura, *c*) la presión y *d*) la densidad del fluido.

12-32C Un gas inicialmente a velocidad supersónica entra en un ducto divergente adiabático. Discuta cómo esto afecta a *a*) la velocidad, *b*) la temperatura, *c*) la presión y *d*) la densidad del fluido.

12-33C Un gas inicialmente a velocidad subsónica entra en un ducto convergente adiabático. Explique cómo esto afecta a *a*) la velocidad, *b*) la temperatura, *c*) la presión y *d*) la densidad del fluido.

12-34C Un gas inicialmente a velocidad subsónica entra en un ducto divergente adiabático. Explique cómo esto afecta a *a*)

la velocidad, *b*) la temperatura, *c*) la presión y *d*) la densidad del fluido.

12-35C Un gas con presión de estancamiento y temperatura de estancamiento especificadas se acelera hasta Ma = 2 en una tobera convergente-divergente y hasta Ma = 3 en otra tobera. ¿Qué puede decirse acerca de las presiones en las gargantas de estas dos toberas?

12-36C ¿Es posible acelerar un gas a una velocidad supersónica en una tobera convergente?

12-37 Entra aire a una tobera convergente-divergente a una presión de 1.2 MPa con velocidad despreciable. ¿Cuál es la presión mínima que puede obtenerse en la garganta de la tobera?

12-38 Entra helio a una tobera convergente-divergente a 0.7 MPa, 800 K y 100 m/s. ¿Cuáles son la temperatura y la presión más bajas que pueden obtenerse en la garganta de la tobera?

12-39 Calcule la temperatura crítica, la presión y la densidad de *a*) aire a 200 kPa, 100°C y 250 m/s, y *b*) helio a 200 kPa, 40°C y 300 m/s.

12-40 Dióxido de carbono a 800 kPa y 400 K inicialmente inmóvil se acelera isentrópicamente hasta un número de Mach de 0.6. Determine la temperatura y la presión del dióxido de carbono después de esta aceleración. *Respuestas:* 380 K, 636 kPa

12-41 Aire a 200 kPa, 100°C y número de Mach Ma = 0.8 fluye en un ducto. Calcule la velocidad, la presión de estancamiento, la temperatura de estancamiento y la densidad de estancamiento del aire.

12-42 Reconsidere el problema 12-41. Use el software EES (u otro), estudie el efecto de los números de Mach en el rango de 0.1 a 2 sobre la velocidad y la presión de estancamiento, la temperatura de estancamiento y la densidad de estancamiento del aire. Grafique cada parámetro en función del número de Mach.

12-43E Aire a 30 psia, 212° F y número de Mach Ma = 0.8 fluye en un ducto. Calcule la velocidad y la presión de estancamiento, la temperatura de estancamiento y la densidad de estancamiento del aire. *Respuestas:* 1016 ft/s, 758 R, 45.7 psia, 0.163 lbm/ft^3

12-44 Un avión se diseña para volar a un número de Mach Ma = 1.4, a 8 000 m de altitud, donde la temperatura atmosférica es de 236.15 K. Determine la temperatura de estancamiento en el borde delantero del ala.

Flujo isentrópico en toberas

12-45C Considere un flujo subsónico en un tobera convergente con condiciones de entrada fijas. ¿Cuál es el efecto de la caída de presión del receptor a la presión crítica sobre *a*) la velocidad de salida, *b*) la presión de salida y *c*) la razón del flujo de masa a través de la tobera?

12-46C Considere un flujo subsónico en un tobera convergente con condiciones específicas en la entrada y presión crítica en la salida de la tobera. ¿Cuál es el efecto de la caída de presión del receptor hasta la presión crítica sobre *a*) la velocidad de salida, *b*) la presión de salida y *c*) la razón del flujo de masa a través de la tobera?

12-47C Considere que una tobera convergente y una convergente-divergente tienen la misma área en la garganta. Para las mismas condiciones de entrada, ¿cómo compararía las razones de flujo de masa a través de estas dos toberas?

12-48C Considere un gas que fluye a través de una tobera convergente con condiciones de entrada especificadas. Se sabe que la mayor velocidad que puede alcanzar un fluido a la salida de la tobera es la velocidad sónica, que es el punto para el cual el flujo de masa en la tobera es máximo. Si fuera posible alcanzar velocidades hipersónicas a la salida de la tobera, ¿cómo afectaría este hecho a la razón del flujo de masa en la tobera?

12-49C ¿Cómo difiere el parámetro Ma* del número de Mach Ma?

12-50C ¿Qué sucedería si se intentara desacelerar un fluido supersónico mediante una tobera divergente?

12-51C ¿Qué sucedería si se intentara acelerar aún más un fluido supersónico con una tobera divergente?

12-52C Considere el flujo isentrópico de un fluido en una tobera convergente-divergente con velocidad subsónica en la garganta. ¿Cómo afecta la parte divergente de la tobera a *a*) la velocidad, *b*) la presión y *c*) la razón del flujo de masa del fluido?

12-53C ¿Es posible acelerar un fluido a velocidades supersónicas al tener en la garganta una velocidad diferente de la sónica? Explíquelo.

12-54 Explique por qué la razón de flujo másico máximo por unidad de área para un gas ideal dado depende solamente de $P_0/\sqrt{T_0}$. Para un gas ideal con k = 1.4 y R = 0.287 kJ/kg · K, encuentre la constante a tal que $\dot{m}/A^* = aP_0/\sqrt{T_0}$.

12-55 Para un gas ideal obtenga la expresión para la razón de la velocidad del sonido a Ma = 1 a la velocidad del sonido correspondiente a la temperatura de estancamiento, c^*/c_0.

12-56 Un gas ideal en un proceso de flujo estacionario, adiabático y reversible fluye en un conducto que primero converge y luego diverge. Para un flujo subsónico a la entrada bosqueje la variación de la presión, velocidad y número de Mach a lo largo de la longitud del conducto cuando el número de Mach en la mínima área del conducto es igual a la unidad.

12-57 Repita el problema 12-56, pero con un flujo supersónico a la entrada.

12-58 Entra aire a una tobera a 0.2 MPa, 350 K, y velocidad de 150 m/s. Considere flujo isentrópico y determine la presión y la temperatura del aire en la posición donde la velocidad del aire es igual a la del sonido. ¿Cuál es la razón del área en esta posición al área de la entrada? *Respuestas:* 301.0 K, 0.118 MPa, 0.629

12-59 Repita el problema 12-58, pero considere que la velocidad en la entrada es despreciable.

12-60I Entra aire a una tobera a 30 psia, 630 R y velocidad de 450 ft/s. Suponga flujo isentrópico y determine la presión y la

temperatura del aire en la posición donde la velocidad del aire es igual a la del sonido. ¿Cuál es la razón del área en esta posición al área de la entrada? *Respuestas:* 539 k, 17.4 psia, 0.574

12-61 Entra aire a una tobera convergente-divergente a 0.8 MPa con una velocidad despreciable. Suponga flujo isentrópico y determine la presión del receptor que produzca el valor del número de Mach a la salida de la tobera de 1.8. *Respuesta:* 0.139 MPa

12-62 Entra nitrógeno a una tobera convergente-divergente a 700 kPa y 400 K con velocidad despreciable. Determine la velocidad, la presión, la temperatura y la densidad críticas en la tobera.

12-63 Un gas ideal con $k = 1.4$ fluye en una tobera en la cual el número de Mach es de 2.4 en una sección transversal de 25 cm^2 de área. Suponga flujo isentrópico y determine el área de flujo en la posición donde el número de Mach es 1.2.

12-64 Repita el problema 12-63, pero para un gas ideal con $k = 1.33$.

12-65 Entra aire a una tobera convergente a 900 kPa y 400 K con velocidad despreciable. El área de la garganta de la tobera es de 10 cm^2. Considere flujo isentrópico y calcule y grafique la presión a la salida, la velocidad a la salida y la razón del flujo de masa contra la presión del receptor P_b para el rango $0.1 \geq P_b \geq 0.9$ MPa.

12-66 Reconsidere el problema 12-65. Use el Software EES (u otro) y resuelva el problema para las condiciones de entrada de 1 MPa y 1 000 K.

12-67I Entra aire a un tobera convergente-divergente de un túnel de viento supersónico a 150 psia y 100° F con velocidad baja. El área de la sección de prueba es igual al área de la salida de la tobera, la cual es de 5 ft^2. Calcule la presión, la temperatura, la velocidad y el flujo de masa en la sección de prueba para un número de Mach Ma = 2. Explique por qué el aire debe estar muy seco (sin humedad) para esta aplicación. *Respuestas:* 19.1 psia, 311 R, 1 729 ft/s, 1 435 lbm/s

Ondas de choque y ondas de expansión

12-68C ¿Puede una onda de choque formarse en la sección convergente de una tobera convergente-divergente? Explíquelo.

12-69C ¿Qué representan los estados sobre la línea de Fanno y la línea de Rayleigh? ¿Qué representan los puntos de intersección de estas dos curvas?

12-70C ¿Puede el número de Mach de un fluido ser mayor que 1 después de un choque normal? Explíquelo.

12-71C ¿Cómo afecta un choque normal *a*) a la velocidad del fluido, *b*) a la temperatura estática, *c*) a la temperatura de estancamiento, *d*) a la presión estática y *e*) a la presión de estancamiento?

12-72C ¿Cómo ocurre un choque oblicuo? ¿En qué difieren los choques oblicuos de los choques normales?

12-73C Para que ocurra un choque oblicuo, ¿debe ser supersónico el flujo corriente arriba? ¿Debe ser subsónico el flujo corriente abajo de un choque oblicuo?

12-74C Se dice que un choque oblicuo puede analizarse como un choque normal con la condición que la componente normal de la velocidad (normal a la superficie de onda de choque) se use en el análisis. ¿Está de acuerdo?

12-75C Considere que un flujo de aire se aproxima a la punta de una cuña bidimensional y experimenta un choque oblicuo. ¿En qué condiciones la onda de choque oblicua se separa de la punta de la cuña y forma una onda de proa?, y ¿cuál es el valor numérico del ángulo de choque de la onda separada en su parte que está enfrente de la punta de la cuña?

12-76C Considere que un flujo supersónico incide en la nariz redondeada de un avión. El choque oblicuo que se forma frente a la nariz ¿será una onda de choque separada o una onda que toque la nariz del avión?

12-77C ¿Son aplicables las relaciones isentrópicas de gases ideales para flujos que atraviesan *a*) ondas de choque normales, *b*) ondas de choque oblicuas y *c*) ondas de expansión de Prandtl-Meyer?

12-78 Para un gas ideal que atraviesa un choque normal, desarrolle una relación para V_2/V_1 en términos de k, Ma_1 y Ma_2.

12-79 Entra aire en un tobera convergente-divergente de un túnel de viento supersónico a 1 MPa y 300 K con una velocidad pequeña. Si ocurre un choque normal en el plano de salida de la tobera a Ma = 2, determine: presión, temperatura, número de Mach, velocidad y presión de estancamiento después de la onda de choque. *Respuestas:* 0.575 MPa, 281 K, 0.577, 194 m/s, 0.721 MPa

12-80 Entra aire en un tobera convergente-divergente con velocidad baja a 2.0 MPa y 100°C. Si el área de salida de la tobera es 3.5 veces el área de la garganta, ¿cuál debe ser la presión del receptor para producir un choque normal en el plano de salida de la tobera? *Respuesta:* 0.661 MPa

12-81 ¿Cuál debe ser la presión del receptor en el problema 12-80 para que ocurra un choque normal en la posición donde el área de la sección transversal es el doble del área de la garganta?

12-82 Aire que fluye en una tobera de una manera estacionaria experimenta un choque normal a un número de Mach de Ma = 2.5. Si la presión y la temperatura del aire son 61.64 kPa y 262.15 K, respectivamente, corriente arriba del choque, calcule: presión, temperatura, velocidad, número de Mach y presión de estancamiento corriente abajo del choque. Compare estos resultados con los obtenidos para el helio que experimenta el choque normal en las mismas condiciones.

12-83 Calcule el cambio de entropía del aire en resultado de onda de choque del problema 12-82.

12-84I Aire que fluye en una tobera de una manera estacionaria experimenta un choque normal a un número de Mach de Ma = 2.5. Si la presión y la temperatura del aire son 10.0 psia y 440.5 R, respectivamente, corriente arriba del choque, calcule: presión, temperatura, velocidad, número de Mach y presión de estancamiento corriente abajo del choque. Compare estos resultados con los obtenidos para el helio que experimenta el choque normal en las mismas condiciones.

12-85I Reconsidere el problema 12-84. Use el software EES (u otro) y estudie los efectos para ambas sustancias de aire y helio que fluyen de manera estacionaria en una tobera cuando ocurre un choque a un número de Mach en el rango $2 < Ma_1 < 3.5$. Además de la información solicitada, calcule el cambio de entropía del aire y el helio en el choque normal. Tabule estos resultados en una tabla paramétrica.

12-86 Entra aire a un choque normal a 22.6 kPa, 217 K y 680 m/s. Calcule: presión de estancamiento, número de Mach corriente arriba del choque, presión, temperatura, velocidad, número de Mach y presión de estancamiento corriente abajo del choque.

12-87 Calcule el cambio de entropía del aire al atravesar la onda de choque del problema 12-86 *Respuesta:* 0.155 kJ/kg · K

12-88 Calcule y grafique el cambio de entropía del aire debido a un choque normal para números de Mach corriente arriba entre 0.5 y 1.5 en incrementos de 0.1. Explique por qué las ondas de choque normales pueden ocurrir solamente para números de Mach corriente arriba mayores que 1.

12-89 Considere un flujo de aire que se aproxima a la nariz de una cuña bidimensional a un número de Mach de 5. Use la figura 12-41 y determine el ángulo de choque mínimo y el máximo ángulo de deflexión que una onda de choque oblicua recta puede tener.

12-90 Aire a 60 kPa, 240 K y un número de Mach de 3.4 incide en una cuña bidimensional de semiángulo de 12°. Determine los dos posibles ángulos de choque oblicuo, $\beta_{\text{débil}}$ y β_{fuerte}, que podrían provocarse por esta cuña. Para cada caso calcule presión, temperatura y número de Mach corriente abajo del choque oblicuo.

12-91 Considere un flujo supersónico de aire en condiciones corriente arriba de 70 kPa y 260 K y número de Mach de 2.4 que incide en una cuña bidimensional de semiángulo de 10°. Si el eje de la cuña se inclina 25° respecto a la dirección de flujo de aire corriente arriba, determine: número de Mach, presión y temperatura corriente abajo en la región por encima de la cuña. *Respuestas:* 3.105, 23.8 kPa, 191 K

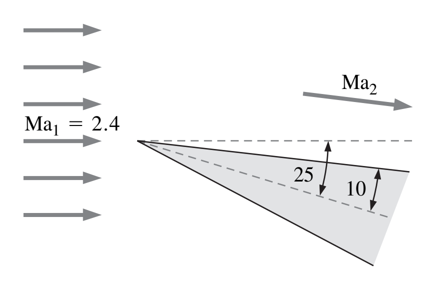


FIGURA P12-91

12-92 Reconsidere el problema 12-91. Determine el número de Mach, la presión y la temperatura corriente abajo en la región por abajo de la cuña, para un choque oblicuo con un número de Mach corriente arriba de 5

12-93I Aire a 8 psia, 20° F y un número de Mach de 2.0 es forzado a girar hacia arriba debido a una rampa que forma un ángulo de 8° con la dirección de flujo. Como resultado, se forma un choque oblicuo débil. Determine: ángulo de choque, número de Mach, presión y temperatura después del choque.

12-94 Aire que fluye a P_1 = 40 kPa, T_1 = 280 K y Ma_1 = 3.6 es forzado a experimentar una expansión al girar 15°. Determine: número de Mach, presión y temperatura del aire después de la expansión. *Respuestas:* 4.81, 8.31 kPa, 179 K

12-95I Aire que fluye a P_1 = 6 psia, T_1 = 480 R y Ma_1 = 2.0 es forzado a experimentar una compresión al girar 15°. Determine: número de Mach, presión y temperatura del aire después de la compresión.

Flujo en ducto con transferencia de calor de fricción despreciable (flujo de Rayleigh)

12-96C ¿Cuál es el rasgo característico del flujo de Rayleigh?, ¿cuáles son las suposiciones principales asociadas con el flujo de Rayleigh?

12-97C Sobre un diagrama *T-s* de flujo de Rayleigh, ¿qué representan los puntos sobre la línea de Rayleigh?

12-98C ¿Cuál es el efecto en la entropía producido por el aumento de calor y el calor perdido en el flujo de Rayleigh?

12-99C Considere un flujo subsónico de Rayleigh de aire a un número de Mach de 0.92. Se transfiere calor al fluido y el número de Mach aumenta a 0.95. La temperatura *T* del fluido ¿aumenta, disminuye o permanece constante en este proceso?, ¿qué sucede con la temperatura de estancamiento T_0?

12-100C ¿Cuál es el efecto del calentamiento del fluido en la velocidad de flujo en caso de un flujo de Rayleigh subsónico? Conteste la misma pregunta, pero para un flujo de Rayleigh supersónico.

12-101C Considere un flujo subsónico de Rayleigh que se acelera a la velocidad sónica (Ma = 1) en la salida del ducto debido al calentamiento. Si se continúa calentando al fluido, ¿cómo será el flujo a la salida del ducto: supersónico, subsónico o permanecerá sónico?

12-102 Considere una cámara de combustión tubular de un diámetro de 12 cm. Entra aire al tubo a 500 K, 400 kPa y 70 m/s. Se quema combustible con poder calorífico de 39 000 kJ/kg al inyectarlo al aire. Si el número de Mach a la salida es 0.8, determine la razón de flujo de masa a la cual se quema el combustible y la temperatura a la salida. Considere una combustión completa y desprecie el aumento de flujo de masa debido a la inyección del combustible.

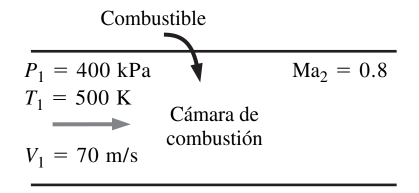


FIGURA P12-102

12-103 Entra aire a un ducto rectangular a P_1 = 420 kPa, T_1 = 300 K y Ma_1 = 2. Se transfiere calor al aire en una cantidad

de 55 kJ/kg mientras que fluye a través del ducto. Desprecie las pérdidas por fricción y determine la temperatura y el número de Mach a la salida del ducto. *Respuestas:* 386 K, 1.64

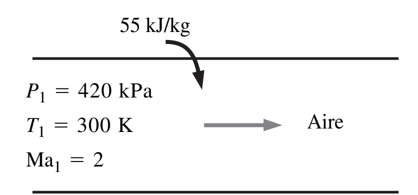


FIGURA P12-103

12-104 Repita el problema 12-103 considerando que el aire se enfría a una cantidad de 55 kJ/kg.

12-105 Se calienta aire mientras fluye subsónicamente en un ducto. Cuando la cantidad de calor transferido alcanza un valor de 60 kJ/kg, se observa que el flujo se bloquea, y que la velocidad y la presión estática medidas a la salida son de 620 m/s y 270 kPa. Desprecie las pérdidas por fricción y determine: velocidad, temperatura estática y presión estática a la entrada del ducto.

12-106I Fluye aire con fricción despreciable en un ducto de 4 pulgadas de diámetro a una razón de 5 lbm/s. La temperatura y la presión a la entrada son P_1 = 30 psia, T_1 = 800 R y el número de Mach a la salida es Ma_2 = 1. Determine la razón de transferencia de calor y la caída de presión para este ducto.

12-107 Entra aire a un ducto sin fricción a V_1 = 70 m/s, T_1 = 600 K y P_1 =350 kPa. Si se deja que la temperatura de salida T_2 varíe desde 600 hasta 5 000 K, evalúe el cambio de entropía a intervalos de 200 K y dibuje la línea de Rayleigh en un diagrama *T-s*.

12-108I Se calienta aire mientras que fluye en un ducto cuadrado de 4 × 4 in con fricción despreciable. En la entrada, el aire está a V_1 =260 ft/s, T_1 = 550 K y P_1 =700 R. Determine la razón a la cual debe trasferirse calor al aire para bloquear el flujo en la salida del ducto y el cambio de entropía del aire en este proceso.

12-109 Aire comprimido al salir del compresor de un motor de propulsión entra a una cámara de combustión a Ma_1 = 0.2, T_1 = 550 K y P_1 = 600 kPa, a una razón de 0.3 kg/s. Al quemar combustible se transfiere calor al aire a una razón de 200 kJ/s mientras éste fluye en un ducto con fricción despreciable. Determine el número de Mach a la salida del ducto y la disminución en la presión de estancamiento $P_{01} - P_{02}$ en este proceso. *Respuestas:* 0.319, 21.8 kPa

12-110 Repita el problema 12-109, pero para una razón de transferencia de calor de 300 kJ/s.

12-111 Entra gas argón a un ducto cuya área de sección transversal es constante, a Ma_1 = 0.2, T_1 = 400 K y P_1 = 320 kPa y a una razón de 0.8 kg/s. Desprecie las pérdidas por fricción, y determine la máxima razón de transferencia de calor al argón que no causaría la reducción de su flujo másico.

12-112 Considere un flujo supersónico de aire en un ducto de 6 cm de diámetro con fricción despreciable. Entra aire al ducto a Ma_1 = 1.8, T_{10} = 600 K y P_{01} = 210 kPa, y se desacelera debido al calentamiento. Determine la máxima temperatura hasta la cual puede calentarse el aire mediante adición de calor tal que el flujo másico permanezca constante.

Flujo adiabático en un ducto con fricción (flujo de Fanno)

12-113C ¿Cuál es el rasgo característico del flujo de Fanno?

12-114C En un diagrama *T-s* del flujo de Fanno, ¿qué representan los puntos sobre la línea de Fanno?

12-115C ¿Cuál es el efecto de la fricción en la entropía del fluido en el flujo de Fanno?

12-116C Considere un flujo subsónico de Fanno de aire con un número de Mach a la entrada de 0.70. Si el número de Mach aumenta a 0.90 en la salida del ducto como resultado de la fricción, ¿aumentarán, disminuirán o permanecerán constantes las siguientes cantidades *a*) temperatura de estancamiento T_0, *b*) presión de estancamiento P_0 y *c*) entropía *s* del fluido?

12-117C Considere un flujo supersónico de Fanno de aire con un número de Mach en la entrada de 1.8. Si el número de Mach disminuye a 1.2 en la salida del ducto como resultado de la fricción, ¿aumentarán, disminuirán o permanecerán constantes las siguientes cantidades *a*) temperatura de estancamiento T_0, *b*) presión de estancamiento P_0 y *c*) entropía *s* del fluido?

12-118C ¿Cuál es el efecto de la fricción en velocidad de flujo en caso del flujo de Fanno?

12-119C Considere un flujo de Fanno subsónico acelerado a la velocidad sónica (Ma = 1) en la salida del ducto como resultado de la fricción. Si la longitud del ducto se aumenta más, el flujo en la salida ¿será supersónico, subsónico o permanecerá sónico? La razón de flujo de masa ¿aumentará, disminuirá o permanecerá constante como resultado del aumento en la longitud del ducto?

12-120C Considere un flujo de Fanno supersónico desacelerado a la velocidad sónica (Ma = 1) en la salida del ducto como resultado de la fricción. Si la longitud del ducto se aumenta más, el flujo en la salida ¿será supersónico, subsónico o permanecerá sónico? La razón de flujo de masa ¿aumentará, disminuirá o permanecerá constante como resultado del aumento en la longitud del ducto?

12-121 Entra aire a un ducto adiabático de 5 cm de diámetro a Ma_1 = 0.2, T_1 = 400 K y P_1 = 200 kPa. El factor de fricción

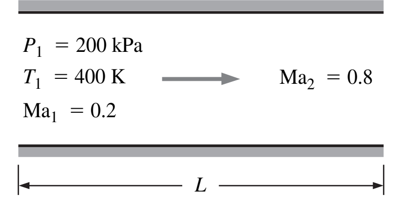


FIGURA P12-121

de Mach a la salida del ducto es 0.8, determine: longitud del ducto, temperatura, presión y velocidad a la salida del ducto.

12-122 Entra aire a un ducto adiabático de 15 m de longitud y 4 cm de diámetro a V_1 = 70 m/s, T_1 = 500 K y P_1 =300 kPa. El factor de fricción promedio para el ducto se estima como 0.023. Determine el número de Mach a la salida del ducto, la velocidad de salida y la razón del flujo de masa del aire.

12-123 Aire a T_0=290 K y P_0=95 kPa de una manera estacionaria se extrae de la habitación mediante una bomba de vacío a través de un tubo adiabático de 1 cm de diámetro y 50 cm de longitud equipada con boquilla convergente a la entrada. El flujo en su tramo correspondiente a la boquilla puede considerarse como el flujo isentrópico, y el factor de fricción promedio para este ducto se toma de 0.018. Determine el flujo másico máximo de aire que puede extraerse a través de este tubo y el número de Mach a la entrada del tubo. *Respuestas:* 0.0136 kg/s, 0.523

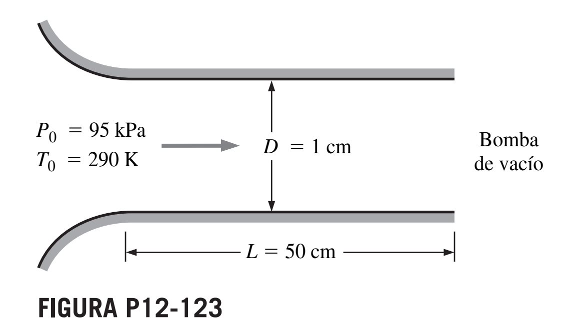


FIGURA P12-123

12-124 Repita el problema 12-123, pero para un factor de fricción de 0.025 y un tubo de 1 m de longitud.

12-125 Entra aire a un ducto adiabático de 5 cm de diámetro y 4 m de longitud a Ma_1 = 2.8 , T_1 = 380 K y P_1 = 80 kPa. Se observa que ocurre un choque normal a una distancia de 3 m de la entrada. Tome el factor de fricción promedio como 0.007 y determine: velocidad, temperatura y presión a la salida del ducto. *Respuestas:* 572 m/s, 813 K, 328 kPa

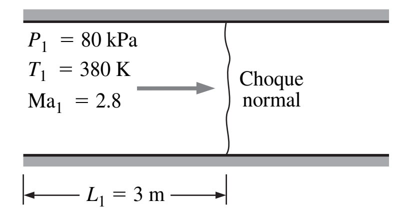


FIGURA P12-125

12-126I Gas helio con k = 1.667 entra en un ducto de 6 in de diámetro a Ma_1 =0.2, T_1 = 600 R y P_1 = 60 psia. Para un factor de fricción promedio de 0.025, determine la longitud máxima del ducto que no ocasionará reducción en la razón del flujo de masa del helio. *Respuesta:* 291 ft

12-127 Entra aire a un ducto adiabático de 20 cm de diámetro a las siguientes condiciones de entrada V_1 = 150 m/s, T_1 = 500 K y P_1 =200 kPa. Para un factor de fricción de 0.014, determine la longitud del ducto desde la entrada hasta la sección transversal donde la velocidad es el doble de la velocidad de entrada. Determine también la caída de presión en este tramo del tubo.

12-128I Fluye aire en un ducto de 6 in de diámetro y 50 in de longitud cuyas condiciones de entrada son V_1 = 500 ft/s, T_{01} = 650 R y P_1 = 50 psia. Para un factor de fricción promedio de 0.02, determine: velocidad, temperatura y presión a la salida del ducto.

12-129 Considere un flujo de aire subsónico a través de un ducto de 10 cm de diámetro con condiciones en la entrada Ma_1 =0.1, T_1 = 330 K y P_1 = 180 kPa. Tome un factor de fricción promedio de 0.02 y determine la longitud del ducto necesaria para acelerar el flujo a un número de Mach igual a la unidad. Calcule también la longitud del ducto a intervalos del número de Mach de 0.1 para 0.1 ≤ Ma ≤ 1. Explique los resultados.

12-130 Entra gas argón con k = 1.667, c_p = 0.5203 kJ/kg · K y R = 0.2081 kJ/kg · K a un ducto de 8 cm de diámetro a V_1 = 70 m/s, T_1 = 520 K y P_1 =350 kPa. Tome el factor de fricción promedio como 0.005 y deje que la temperatura T_2 varíe desde 540 K a 400 K, evalúe el cambio de entropía a intervalos de 10 K y dibuje la línea de Fanno en un diagrama *T-s*.

Problemas de repaso

12-131 El aire en una llanta de automóvil se mantiene a una presión de 220 kPa (manométrica) en un ambiente donde la presión atmosférica es 94 kPa. El aire en la llanta está a la temperatura del ambiente de 25°C. Se produce un agujero en la llanta de 4 mm de diámetro como resultado de un accidente. Considere un flujo isentrópico y determine la razón de flujo de masa inicial del aire a través del agujero.

12-132 La fuerza de empuje que desarrolla el motor de un Boeing 777 es casi de 380 kN. Considere flujo bloqueado en las toberas y determine la razón de flujo de masa del aire a través de la tobera. Tome las condiciones del ambiente como 295 K y 95 kPa.

12-133 Una sonda de medición de temperatura que está en reposo e insertada en un ducto en el cual el aire fluye a 250 m/s, registra 85°C. ¿Cuál es la temperatura real del aire?

12-134 Entra nitrógeno a un intercambiador de calor de flujo estacionario a 150 kPa, 10°C y 100 m/s, y recibe calor en una cantidad de 150 kJ/kg mientras que fluye a través de él. El nitrógeno sale del intercambiador de calor a 100 kPa con una velocidad de 200 m/s. Determine: presión de estancamiento y temperatura de estancamiento del nitrógeno a la entrada y salida del intercambiador de calor.

12-135 Encuentre una expresión para la velocidad del sonido con base en la ecuación de estado de Van der Waals $P = RT(v - b) - a/v^2$. Use la expresión obtenida, determine la velocidad del sonido en dióxido de carbono a 50°C y 200 kPa y compare el resultado obtenido al suponer el comportamiento de gas ideal. Las constantes de Van der Waals para el dióxido de carbono son a = 364.3 kPa · m^6/kmol^2 y b = 0.0427 m^3/kmol.

12-136 Obtenga la ecuación 12-10 a partir de la ecuación 12-9 y use la regla cíclica y las relaciones de las propiedades termodinámicas $\frac{c_p}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P$ y $\frac{c_v}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v$.

12-137 Para gases ideales que experimentan el proceso de flujos isentrópicos, obtenga expresiones para P/P^*, T/T^* y ρ/ρ^* como funciones de k y Ma.

12-138 Use las ecuaciones 12-4, 12-13 y 12-14, y verifique que para el flujo estacionario de gases ideales $dT_0/T = dA/A + (1 - \text{Ma}^2)\, dV/V$. Explique los efectos del calentamiento y los cambios de área en la velocidad de un gas ideal en un flujo estacionario para *a*) flujo subsónico y *b*) flujo supersónico.

12-139 Un avión subsónico vuela a una altitud de 3 000 m donde las condiciones atmosféricas son 70.109 kPa y 268.65 K. Una sonda de Pitot estática mide la diferencia entre la presión de estancamiento y la estática que resulta ser de 22 kPa. Calcule la velocidad del avión y el número de Mach de vuelo. *Respuestas:* 209 m/s, 0.637

12-140 Grafique en seguida el parámetro de flujo de masa $\dot{m}\sqrt{RT_0}/(AP_0)$ contra el número de Mach para $k = 1.2$, 1.4 y 1.6 en el rango de $0 \leq \text{Ma} \leq 1$.

12-141 Entra gas helio a una tobera a 0.8 MPa, 500 K y con una velocidad de 120 m/s. Considere un flujo isentrópico y determine la presión y la temperatura del helio en una sección donde la velocidad sea igual a la velocidad del sonido. ¿Cuál es la razón del área de esta sección al área de entrada?

12-142 Repita el problema 12-141, pero considere que la velocidad de entrada es despreciable.

12-143 Entra aire a 0.9 MPa y 400 K a una tobera convergente con una velocidad de 180 m/s. El área de la garganta es de 10 cm². Considere un flujo isentrópico, y calcule y grafique la razón del flujo de masa a través de la tobera, la velocidad de salida, el número de Mach a la salida y la razón de la presión de salida a la presión de estancamiento contra la razón de la presión del receptor a la presión de estancamiento para un rango de presiones del receptor de $0.9 \geq P_b \geq 0.1$ MPa.

12-144 Vapor de agua a 6.0 MPa y 700 K entra en una tobera convergente con velocidad despreciable. El área de la garganta de la tobera es de 8 cm². Considere un flujo isentrópico y grafique la presión de salida, la velocidad de salida y la razón de flujo de masa a través de la tobera contra la presión del receptor P_b, para $6.0 \geq P_b \geq 3.0$ MPa. Trate al vapor de agua como un gas ideal con $k = 1.3$, $c_p = 1.872$ kJ/kg · K y $R = 0.462$ kJ/kg · K.

12-145 Encuentre la expresión para la razón de la presión de estancamiento después de la onda de choque a la presión estática antes de la onda de choque como función de k y del número de Mach corriente arriba de la onda de choque Ma_1.

12-146 Entra nitrógeno a una tobera convergente-divergente a 700 kPa y 300 K con una velocidad despreciable y experimenta un choque normal en una sección donde el número de Mach es Ma = 3.0. Calcule lo siguiente: presión, temperatura, velocidad, número de Mach y presión de estancamiento corriente abajo del choque. Compare estos resultados con los resultados para el aire que experimenta un choque normal en las mismas condiciones.

12-147 Una avión vuela a un número de Mach $\text{Ma}_1 = 0.8$ a una altitud de 7 000 m donde la presión es de 41.1 kPa y la temperatura es de 242.7 K. El aire al salir del difusor que está a la entrada del motor, tiene un número de Mach $\text{Ma}_2 = 0.3$. Para una razón de flujo de masa de 65 kg/s determine el aumento en la presión estática a través del difusor y el área de salida.

12-148 Se expande helio en una tobera desde 1 MPa, 500 K, y una velocidad despreciable hasta 0.1 MPa. Calcule las área de la garganta y de la salida para una razón de flujo de masa de 0.25 kg/s, al suponer que el flujo es isentrópico. ¿Por qué esta tobera debe ser convergente-divergente? *Respuestas:* 3.51cm², 5.84 cm².

12-149I Se expande helio en una tobera desde 150 psia, 900 R y velocidad despreciable hasta 15 psia. Calcule las áreas de la garganta y de la salida para una razón de flujo de masa de 0.2 lbm/s, al suponer que el flujo es isentrópico. ¿Por qué esta tobera debe ser convergente-divergente?

12-150 Use el software EES y las relaciones en la tabla A-13, calcule las funciones de flujo compresible unidimensional para un gas ideal con $k = 1.667$ y presente sus resultados al duplicar la tabla A-13.

12-151 Use el software EES y la relaciones en la tabla A-14, calcule las funciones de choque normal unidimensional para un gas ideal con $k = 1.667$ y presente sus resultados al duplicar la tabla A-14.

12-152 Considere una mezcla equimolar de oxígeno y nitrógeno. Determine: temperatura, presión y densidad críticas para una temperatura de estancamiento de 800 K y una presión de estancamiento de 500 kPa.

12-153 Use el software EES (u otro) y determine la forma de una tobera convergente-divergente para aire que fluye a una razón de flujo de masa de 3 kg/s si las condiciones de estancamiento a la entrada son 1 400 kPa y 200°C. Considere que el flujo es isentrópico. Repita el cálculo a los intervalos de 50 kPa de la caída de presión hasta la presión a la salida de 100 kPa. Grafique la tobera a la escala. Calcule y grafique también el número de Mach en la tobera.

12-154 Use el software EES y las relaciones dadas en la tabla A-13 y calcule las funciones de flujo unidimensional isentrópico compresible al variar el número de Mach corriente arriba desde 1 hasta 10 en incrementos de 0.5 para aire con $k = 1.4$.

12-155 Repita el problema 12-154, pero para metano con $k = 1.3$.

12-156 Use el software EES y la relaciones en la tabla A-14 y genere las funciones de choque normal unidimensional al variar el número de Mach corriente arriba desde 1 hasta 10 en incrementos de 0.5 para aire con $k = 1.4$.

12-157 Repita el problema 12-156, pero para metano con $k = 1.3$.

12-158 Se extrae aire de una habitación a $T_0 = 300$ K y $P_0 = 100$ kPa mediante una bomba de vacío a través de un tubo adiabático de 3 cm de diámetro y 2 m de longitud, equipado con boquilla convergente en la entrada. El flujo en la sección de la tobera puede considerarse como isentrópico. La presión estática es de 97 kPa en la entrada del tubo y de 55 kPa en la salida de éste. Determine lo siguiente: razón del flujo de masa del aire a través del ducto, velocidad del aire en la salida del ducto y factor de fricción promedio para el ducto.

12-159 Entra aire a un tubo adiabático de 4 cm de diámetro en condiciones de entrada $Ma_1 = 2.2$, $T_1 = 250$ K y $P_1 = 80$ kPa y sale con el número de Mach $Ma_2 = 1.8$. Tome el factor de fricción promedio de 0.03 y determine la velocidad, temperatura y presión a la salida.

12-160 Se enfría aire mientras fluye a través de un ducto de 20 cm de diámetro. Las condiciones de entrada son $Ma_1 = 1.2$, $T_{01} = 350$ K y $P_{01} = 240$ kPa y el número de Mach a la salida es $Ma_2 = 2.0$. Al despreciar los efectos de fricción determine la razón de enfriamiento del aire.

12-161 Se calienta aire mientras fluye subsónicamente a través de un ducto cuadrado de 10 cm × 10 cm de dimensiones. Las propiedades del aire en la entrada se mantienen a $Ma_1 = 0.4$, $T_1 = 360$ K y $P_1 = 400$ kPa durante todo el tiempo. Al despreciar las pérdidas por fricción, determine la razón máxima de transferencia de calor al aire en el ducto sin afectar las condiciones de entrada. *Respuesta:* 1 958 kW

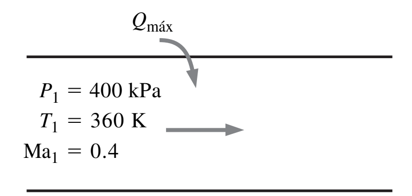


FIGURA P12-161

12-162 Repita el problema 12-161, pero para helio.

12-163 Se acelera aire mientras se calienta en un ducto con fricción despreciable. Entra aire con $V_1 = 100$ m/s, $T_1 = 400$ K y $P_1 = 35$ kPa y sale a un número de Mach $Ma_2 = 0.8$. Determine el calor transferido al aire, en kJ/kg. Determine también la cantidad máxima de transferencia de calor sin reducir la razón de flujo de masa del aire.

12-164 Aire en condiciones sónicas y temperatura y presión estáticas de 500 K y 420 kPa, respectivamente, es acelerado hasta un número de Mach de 1.6 al enfriarlo mientras fluye a través de un ducto con área de sección transversal constante. Despreciando los efectos de la fricción, determine la transferencia de calor del aire necesaria, en kJ/kg. *Respuesta:* 69.8 kJ/kg

12-165 Gases de combustión con una razón de calores específicos promedio $k = 1.33$ y constante de gas $R = 0.280$ kJ/kg · K entran a un ducto adiabático de 10 cm de diámetro con condiciones a la entrada $Ma_1 = 2$, $T_1 = 510$ K y $P_1 = 180$ kPa. Si ocurre un choque normal en una sección a 2 m desde la entrada, determine la velocidad, la temperatura y la presión a la salida del ducto. Tome el factor de fricción promedio como 0.010.

12-166 Considere un flujo de aire supersónico a través de un ducto adiabático de 18 cm de diámetro con condiciones en la entrada $Ma_1 = 3$, $T_1 = 530$ K y $P_1 = 80$ kPa. Tome el factor de fricción promedio como 0.03 y determine la longitud del ducto necesaria para desacelerar el flujo a un número de Mach igual a 1. Calcule también la longitud del ducto a intervalos del número de Mach de 0.25 y grafique la longitud del ducto contra el número de Mach para $1 \leq Ma \leq 3$. Explique el resultado.

12-167 Fluye aire a través de un ducto adiabático de 6 cm de diámetro con condiciones en la entrada $V_1 = 120$ m/s, $T_1 = 400$ K, $P_1 = 100$ kPa y un número de Mach a la salida $Ma_2 = 1$. Para estudiar el efecto de la longitud del ducto en la razón del flujo de masa y la velocidad de entrada, se extiende el ducto hasta que duplique su longitud mientras que P_1 y T_1 permanecen constantes. Tome el factor de fricción promedio como 0.02 y calcule la razón del flujo de masa y la velocidad a la entrada para varias longitudes de extensión y grafíquelas contra las longitudes de extensión. Explique los resultados.

12-168 En flujo compresible, las mediciones de velocidad con sonda de Pitot pueden ser excesivamente erróneas si se usan las relaciones desarrolladas para flujo incompresible. Por lo tanto, es esencial que las relaciones para flujo compresible se usen cuando se evalúa la velocidad a partir de las mediciones con sonda de Pitot. Considere un flujo supersónico de aire a través de un canal. Un medidor insertado dentro del flujo ocasiona una onda de choque que ocurre corriente arriba del medidor, y se miden la presión de estancamiento y la temperatura de estancamiento como 620 KPa y 340 K, respectivamente. Si la presión estática corriente arriba es 110 kPa, determine la velocidad de flujo.

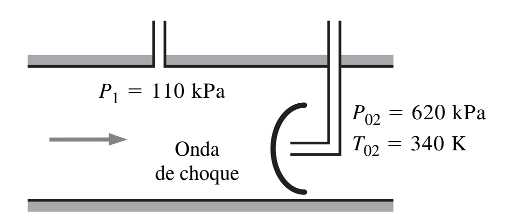


FIGURA P12-168

Problemas de diseño y ensayo

12-169 Pregunte si hay un túnel de viento supersónico en su universidad. Si lo ha, obtenga las dimensiones del túnel de viento y las temperaturas y presiones así como el número de Mach en varias secciones durante su operación. ¿Para qué experimentos típicos se usa el túnel de viento?

12-170 Suponga que tiene un termómetro y un dispositivo para medir la velocidad del sonido en un gas. Explique cómo puede determinar la fracción molar de helio en una mezcla de gas de helio y aire.

12-171 Diseñe un túnel de viento cilíndrico de 1 m de longitud cuyo diámetro sea de 25 cm y que opere a un número de Mach de 1.8. Entra aire atmosférico al túnel de viento a través de una tobera convergente-divergente, en la cual el aire se acelera a una velocidad supersónica. El aire sale del túnel de viento a través de un difusor convergente-divergente en el cual el aire se desacelera a una velocidad muy baja antes de entrar a la sección del ventilador. Desprecie cualquier irreversibilidad. Especifique las presiones y las temperaturas en varias secciones así como la razón de flujo de masa del aire a las condiciones de flujo estacionario. ¿Por qué con frecuencia es necesario deshumedecer el aire antes que entre al túnel de viento?

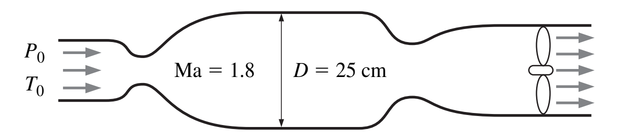


FIGURA P12-171

CAPÍTULO

13

FLUJO EN CANAL ABIERTO

El *flujo en canal abierto* implica que el flujo en el canal está abierto a la atmósfera, pero el flujo en conducto es también el flujo en canal abierto si el líquido no cubre el conducto por completo, y, por lo tanto, hay una superficie libre. El flujo en tuberías que se analiza en el capítulo 8 incluye conductos cerrados llenos con líquido o gas. Sin embargo, un flujo en canal abierto implica sólo líquido (usualmente agua o agua residual) expuesto a un gas (por lo general aire, el cual se encuentra a la presión atmosférica).

El flujo en tuberías se conduce por una diferencia de presión, mientras que el flujo en canal abierto se conduce de manera natural por gravedad. El flujo del agua en un río, por ejemplo, se conduce por la diferencia de elevación entre río corriente arriba y río corriente abajo. La razón de flujo en un canal abierto está establecida por el balance dinámico entre gravedad y fricción. La inercia del flujo de un líquido también se vuelve importante en flujos inestables. La superficie libre coincide con la línea de gradiente hidráulico (LGH, HGL, por sus siglas en inglés) y la presión es constante a lo largo de la superficie libre. La altura de una superficie libre desde el fondo del canal y todas las dimensiones de la sección transversal del flujo a lo largo del canal no se conoce *a priori* y cambia con la velocidad promedio del flujo. La presión en un canal varía hidrostáticamente en la dirección vertical cuando el flujo en el canal es estable y está totalmente desarrollado .

En este capítulo se presentan los principios de un flujo en canal abierto y las correlaciones implícitas para flujos unidimensionales estacionarios en canales de secciones transversales comunes. Para obtener información más detallada acerca del tema se incluyen algunos en las referencias.

Objetivos

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Entender cómo difieren los flujos en canales abiertos de los flujos en tuberías.
- Aprender los diferentes regímenes de flujo en canales abiertos y sus características.
- Predecir si los saltos hidráulicos ocurren a lo largo del flujo, y calcular la fracción de energía que se disipa en éstos.
- Aprender cómo las razones de flujo en canales abiertos se miden con el empleo de compuertas o vertederos.

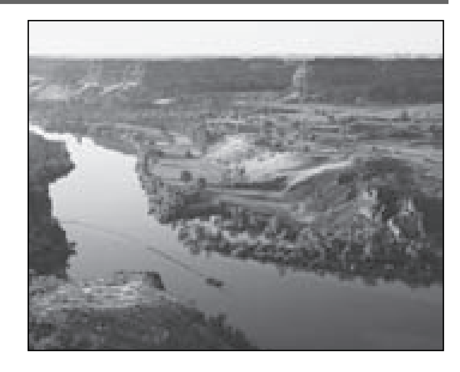


FIGURA 13-1
Los canales de flujo abierto naturales y los hechos por el hombre se caracterizan por una superficie libre abierta a la atmósfera
© Vol. 16/PhotoDisc.

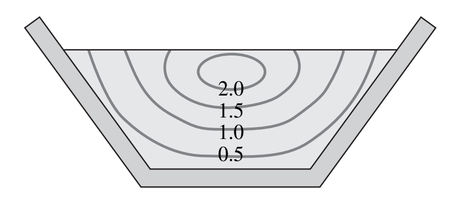


FIGURA 13-2
Curvas típicas de velocidad relativa constante en un canal abierto de sección transversal trapezoidal.

13-1 ▪ CLASIFICACIÓN DE FLUJOS EN CANALES ABIERTOS

El *flujo en un canal abierto* se refiere al flujo de un líquido en canales abiertos respecto a la atmósfera o en un conducto parcialmente lleno y se caracteriza por la presencia de una interfase líquido-gas, llamada *superficie libre* (Fig. 13-1). La mayoría de los flujos naturales encontrados en la práctica, como los de agua en riachuelos, ríos e inundaciones además de cunetas a los lados de carreteras, estacionamientos o techos, son también flujos en canales abiertos. Los sistemas de flujo en canal abierto hechos por el hombre incluyen sistemas de irrigación, alcantarillas, desagües y cunetas, y el diseño de estos sistemas es un área importante de aplicación de la ingeniería.

En un canal abierto, la velocidad del flujo es cero sobre las superficies laterales y en el fondo del canal debido a la condición de no deslizamiento, y máxima a la mitad del plano de la superficie libre (cuando existe un flujo secundario significante, como en canales no circulares, la máxima velocidad ocurre abajo de la superficie libre en algún lugar entre 25 por ciento de profundidad como se muestra en la figura 13-2). Además, la velocidad del flujo varía en la dirección de éste en la mayoría de los casos. Por lo tanto, la distribución de la velocidad (y en consecuencia el flujo) en canales abiertos es en general tridimensional. Sin embargo, en la práctica de la ingeniería las ecuaciones están escritas en términos de la velocidad promedio en secciones transversales del canal. Debido a que la velocidad promedio varía solamente con la distancia x en la dirección del flujo, V es una variable **unidimensional**. La unidimensionalidad hace posible resolver problemas importantes de la vida real de manera simple por cálculos a mano, y se restringe en este capítulo a tratar flujos con velocidad promedio unidimensional. A pesar de su sencillez, las ecuaciones unidimensionales dan resultados de buena precisión y se aplican comúnmente en la práctica.

La condición de no deslizamiento en las paredes de un canal causa los gradientes de velocidad y el esfuerzo de corte τ_w se desarrolla a lo largo de las superficies mojadas del canal. El esfuerzo de corte τ_w varía a lo largo del perímetro mojado en la sección transversal dada y ofrece resistencia al flujo. La magnitud de esta resistencia depende de la viscosidad del fluido como también del gradiente de velocidad en las paredes del canal.

Los flujos en canales abiertos se clasifican también como estacionarios o no estacionarios. Se dice que un flujo es **estacionario** si no cambia con el tiempo en una posición dada. La cantidad representativa en flujos en canales abiertos es la **profundidad del flujo** (o la velocidad promedio), la cual podría variar a lo largo del canal. Se considera que el flujo es *estacionario* si la profundidad del flujo no varía con el tiempo en cualquier lugar dado a lo largo del canal (aunque éste podría variar de un lugar a otro). De otra manera, es *no estacionario*. En este capítulo se tratan solamente los casos de flujos estacionarios.

Flujos uniforme y variado

El flujo en canales abiertos también se clasifica como *uniforme* o *no uniforme* (también llamado *variado*), esto depende de cómo la profundidad del flujo y (la distancia de la superficie libre desde el fondo del canal medido en la dirección vertical) varía a lo largo del canal. Se dice que el flujo en un canal es **uniforme** si la profundidad del flujo (y por tanto la velocidad promedio) se mantiene constante. De otra manera, el flujo es **no uniforme o variado**, lo cual indica que la profundidad varía con la distancia en la dirección del flujo. Las condiciones del flujo uniforme comúnmente se encuentran en la práctica en tramos largos y rectos de canales con pendiente y sección transversal constantes.

En canales abiertos de pendiente y sección transversal constantes, el líquido acelera hasta que la pérdida de carga debida a los efectos de fricción se iguala a la caída de elevación. El líquido en este punto alcanza su velocidad final y se establece un flujo uniforme. El flujo se mantiene uniforme siempre que la pendiente, la sección transversal y la rugosidad del canal no tengan algún cambio. La profundidad del flujo en flujos uniformes se llama **profundidad normal** y_n, la cual es un parámetro característico importante para flujos en canales abiertos (Fig. 13-3).

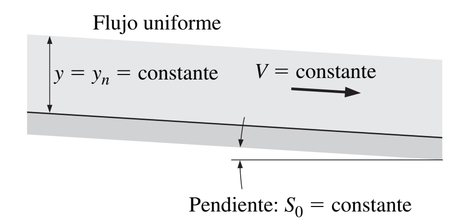


FIGURA 13-3
Para el flujo uniforme en un canal abierto, la profundidad de flujo y y la velocidad de flujo promedio V permanecen constantes.

La presencia de una obstrucción en el canal, como una compuerta, o un cambio de la pendiente o de sección transversal, ocasiona que la profundidad del flujo cambie y en consecuencia el flujo se convierta en **variado** o **no uniforme**. Estos flujos variados son comunes en canales naturales o hechos por el hombre como ríos, sistemas de irrigación y canales de desagüe. El flujo variado se llama **flujo de variación rápida (FVR, RVF** por sus siglas en inglés) si la profundidad del flujo cambia considerablemente sobre una distancia relativamente corta en la dirección del flujo (como el paso del flujo de agua a través de una compuerta parcialmente abierta o sobre las cascadas o caídas) y **flujo de variación gradual (FVG, GVF** por sus siglas en inglés**)** si la profundidad del flujo cambia gradualmente en una distancia larga a lo extenso del canal. Una región de flujo de variación gradual por lo general ocurre entre las regiones de un flujo de variación rápida y un flujo uniforme, como se muestra en la figura 13-4.

En flujos de variación gradual se puede trabajar con la velocidad promedio unidimensional, tal y como se trabaja con ella en flujos uniformes. Sin embargo, la velocidad promedio no siempre es la más útil o el parámetro más apropiado para flujos de variación rápida. Por lo tanto, el análisis de flujos de variación rápida es bastante complicado, en especial cuando el flujo es no estacionario (como el rompimiento del oleaje en la playa). Para una razón de flujo conocida, la altura del flujo en una región de flujo de variación gradual (el perfil de la superficie libre) en un canal abierto en específico, puede determinarse en un modo de paso a paso, cuando se empieza por analizar en la sección transversal donde las condiciones del flujo se conocen, y se evalúa la perdida de carga, la caída de elevación y la velocidad promedio para cada paso.

Flujos laminares y turbulentos en canales

Como el flujo en tuberías, el flujo en un canal abierto puede ser laminar, de transición o turbulento, esto depende del valor del **número de Reynolds** expresado como:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V R_h}{\mu} = \frac{V R_h}{\nu} \tag{13-1}$$

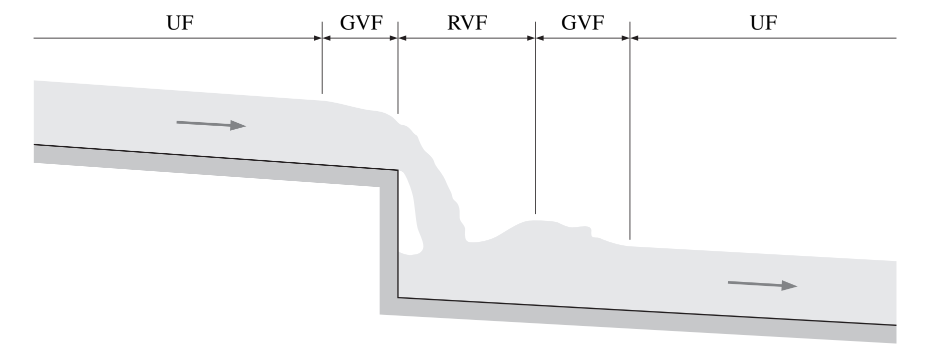


FIGURA 13-4
Flujo uniforme (FU, UF por sus siglas en inglés), flujo de variación gradual (FVG, GVF por sus siglas en inglés), y flujo de variación rápida (FVR, RVF por sus siglas en inglés) en un canal abierto.



FIGURA 13-5
La relación entre el radio hidráulico y el diámetro hidráulico no es lo que se podría esperar.

Aquí V es la velocidad promedio del líquido, ν es la viscosidad cinemática y R_h es el **radio hidráulico** definido como la razón entre el área de la sección transversal del flujo A_c y el perímetro mojado p:

Radio hidráulico: $$R_h = \frac{A_c}{p} \qquad \text{(m)} \tag{13-2}$$

Si se considera que con frecuencia los canales abiertos vienen con secciones transversales irregulares, el radio hidráulico sirve como la longitud característica y da uniformidad al tratamiento de canales abiertos. También, el número de Reynolds es constante para toda la sección del flujo uniforme de un canal abierto.

Puede suponerse que los radios hidráulicos podrían definirse como la mitad de los diámetros hidráulicos, pero éste no es el caso por desgracia. Como se recuerda, el diámetro D_h, para un flujo en una tubería se define como $D_h = 4\,A_c\,/p$, así que el diámetro hidráulico es simplemente el diámetro de tubería en caso de tuberías circulares. Sin embargo, la relación entre radio hidráulico y diámetro hidráulico se vuelve:

Diámetro hidráulico: $$D_h = \frac{4A_c}{p} = 4R_h \tag{13-3}$$

Así, se ve que el radio hidráulico es de hecho *una cuarta parte* veces en vez de la mitad del diámetro hidráulico (figura 13-5).

Por lo tanto, un número de Reynolds basado en el radio hidráulico es *una cuarta parte* del número de Reynolds basado en el diámetro hidráulico como la longitud característica. Así que no sería ninguna sorpresa que el flujo sea laminar para $\text{Re} \lesssim 2\,000$ en caso de flujos en tubería, pero para $\text{Re} \leq 500$ en caso de flujos en canal abierto. También, el flujo en un canal abierto es, por lo general, turbulento para $\text{Re} \gtrsim 2\,500$ y de transición para $500 \lesssim \text{Re} \lesssim 2\,500$. El flujo laminar se encuentra cuando una delgada capa de agua (como el agua que corre por cunetas de carreteras o estacionamientos) fluye a baja velocidad.

La viscosidad cinemática del agua a 20ºC es 1.00×10^{-6} m^2/s, y la velocidad promedio de flujo en canales abiertos es usualmente arriba de 0.5 m/s. También, el radio hidráulico es, por lo general, mayor que 0.1 m. Por lo tanto, el número de Reynolds asociado con el flujo del agua en canales abiertos es usualmente mayor de 50 000, así que el flujo es casi siempre turbulento.

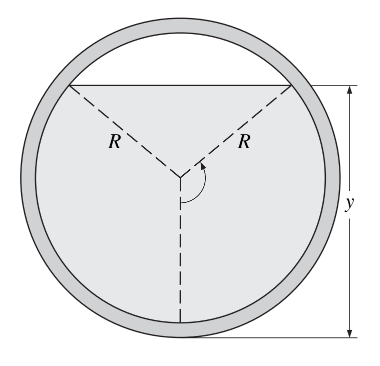
Note que el perímetro mojado incluye los lados y el fondo del canal que están en contacto con el líquido, esto no incluye la superficie libre y las partes de los lados expuestas al aire. Por ejemplo, el perímetro mojado y el área de flujo de sección transversal de un canal rectangular de altura h y de anchura b conteniendo agua de una profundidad y son $p = b + 2y$ y $A_c = yb$, respectivamente, Entonces:

Canal rectangular: $$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{yb}{b + 2y} = \frac{y}{1 + 2y/b} \tag{13-4}$$

Otro ejemplo sería el radio hidráulico de un flujo de drenaje de agua a una profundidad y de un estacionamiento de ancho b, entonces:

Capa líquida de grosor y: $$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{yb}{b + 2y} \cong \frac{yb}{b} \cong y \tag{13-5}$$

ya que $b \gg y$. Por lo tanto, el radio hidráulico para el flujo de una capa de líquido sobre una superficie larga es simplemente el grueso de la capa de líquido.

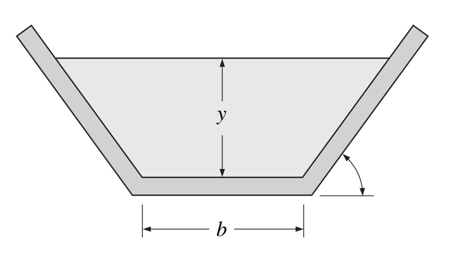


$A_c = R^2(\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta)$

$p = 2R\theta$

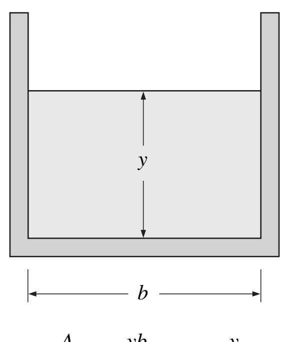
$R_h = \dfrac{A_c}{p} = \dfrac{\theta - \text{sen}\,\theta\cos}{2}R$

a) Canal circular (θ in rad)



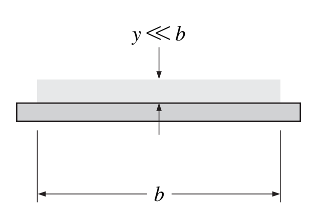
$R_h = \dfrac{A_c}{p} = \dfrac{y(b + y/\tan\theta)}{b + 2y/\text{sen}}$

b) Canal trapezoidal



$R_h = \dfrac{A_c}{p} = \dfrac{yb}{b + 2y} = \dfrac{y}{1 + 2y/b}$

c) Canal rectangular



$R_h = \dfrac{A_c}{p} = \dfrac{yb}{b + 2y} \cong \dfrac{yb}{b} \cong y$

d) Película líquida de grosor *y*

FIGURA 13-6
Relaciones de radios hidráulicos para varias geometrías de canal abierto.

13-2 ▪ NÚMERO DE FROUDE Y VELOCIDAD DE ONDA

El flujo en canal abierto se clasifica como *subcrítico* o *tranquilo*, *crítico*, y *supercrítico* o *rápido*, esto depende del valor del número de Froude adimensional que se trata en el capítulo 7 y se define como:

Número de Froude:
$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL_c}} = \frac{V}{\sqrt{gy}} \quad \textbf{(13-6)}$$

donde g es la aceleración gravitacional, V es la velocidad promedio del liquido en la sección transversal, y L_c es la longitud característica, la cual se toma como la profundidad del flujo y para canales rectangulares anchos. El número de Froude es un parámetro importante que gobierna el tipo del flujo en canales abiertos. El flujo se clasifica como:

$\text{Fr} < 1$ Flujo subcrítico o tranquilo

$\text{Fr} = 1$ Flujo crítico **(13-7)**

$\text{Fr} > 1$ Flujo supercrítico o rápido

Flujo compresible	Fluido en canal abierto
$Ma = V/c$	$Fr = V/c_0$
$Ma < 1$ Subsónico	$Fr < 1$ Subcrítico
$Ma = 1$ Sónico	$Fr = 1$ Crítico
$Ma > 1$ Supersónico	$Fr > 1$ Supercrítico

V = velocidad de flujo
$c = \sqrt{kRT}$ = velocidad del sonido (gas ideal)
$c_0 = \sqrt{gy}$ = velocidad de onda (líquido)

FIGURA 13-7
Analogía entre el número de Mach en un flujo compresible y el número de Froude en un flujo de canal abierto.

Esto se parece a la clasificación de flujos compresibles respecto al número de Mach, subsónico para Ma < 1, sónico para Ma = 1, y supersónico para Ma > 1 (figura 13-7). En efecto, el denominador del número de Froude tiene la dimensión de la velocidad, y éste representa la velocidad c_o en el cual una pequeña alteración viaja sobre un líquido inmóvil, como se mostrará en otra sección. Por lo tanto, en analogía con el número de Mach, el número de Froude se expresa como *la razón de la velocidad del flujo respecto a la velocidad de onda,* $Fr = V/c_o$, justo como el número de Mach se expresa como la razón de la velocidad del flujo respecto a la velocidad de sonido, $Ma = V/c$.

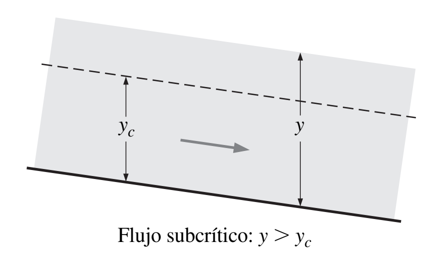
Es posible pensar también que el número de Froude puede ser la raíz cuadrada de la razón de la fuerza de inercia (o dinámica) respecto a la fuerza de gravedad (o peso). Esto se demuestra cuando se multiplican ambos, numerador y denominador del cuadrado del número de Froude V^2/gL_c por ρA, donde ρ es la densidad y A es un área representativa, lo cual resulta:

$$\mathrm{Fr}^2 = \frac{V^2}{gL_c}\frac{\rho A}{\rho A} = \frac{2(\frac{1}{2}\rho V^2 A)}{mg} \propto \frac{\text{Fuerza de inercia}}{\text{Fuerza de gravedad}} \qquad \textbf{(13-8)}$$

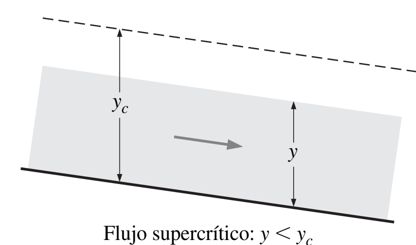
Aquí L_cA representa el volumen, ρL_cA es la masa de volumen de este fluido y mg es el peso. El numerador es dos veces la fuerza de inercia $\frac{1}{2}\rho V^2 A$, y puede pensarse ésta como la presión dinámica $\frac{1}{2}\rho V^2$ por el área de sección transversal A.

Por lo tanto, el flujo en un canal abierto es dominado por las fuerzas de inercia en un flujo rápido y por las fuerzas de gravedad en flujos tranquilos.

Por consiguiente, a *velocidades de flujo lentas* (Fr < 1), una pequeña alteración viaja corriente arriba (con una velocidad $c_o - V$ relativa al observador en reposo) y afecta las condiciones de flujo corriente arriba. Éste se llama flujo **tranquilo** o **subcrítico**. Pero, a *velocidades de flujo altas* (Fr > 1), una pequeña alteración no puede viajar corriente arriba (de hecho, la onda es llevada corriente abajo con una velocidad $V - c_o$ relativa al observador en reposo) así que las condiciones de flujo corriente arriba no pueden ser influidas por las condiciones de flujo corriente abajo. Éste se llama flujo **rápido** o **supercrítico**, y el flujo en este caso es controlado por las condiciones corriente arriba. Por lo tanto, una onda superficial viaja corriente arriba cuando Fr < 1, y es arrastrada corriente abajo cuando Fr > 1, y parece congelada sobre la superficie cuando Fr = 1. También, la velocidad de la onda superficial se incrementa con la profundidad del flujo y, y una alteración sobre la superficie se propaga más rápido en canales profundos que en canales poco profundos.



Flujo subcrítico: $y > y_c$



Flujo supercrítico: $y < y_c$

FIGURA 13-8
Definiciones de flujo subcrítico y flujo supercrítico en términos de la profundidad crítica.

Se considera el flujo de un líquido en un canal rectangular abierto a la atmósfera de un área de sección transversal A_c con una razón de flujo volumétrico $\dot{V}$. Cuando el flujo es crítico, Fr = 1 y la velocidad promedio del flujo es $V = \sqrt{gy_c}$, donde y_c es la **profundidad crítica**. Note que $\dot{V} = A_cV = A_c\sqrt{gy_c}$, la profundidad puede expresarse como:

Profundidad crítica (caso general):
$$y_c = \frac{\dot{V}^2}{gA_c^2} \qquad \textbf{(13-9)}$$

Para un canal rectangular de ancho b se tiene $A_c = by_c$, y la relación de la profundidad crítica se reduce a:

Profundidad crítica (canal rectangular):
$$y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2}\right)^{1/3} \qquad \textbf{(13-10)}$$

La profundidad del líquido es $y > y_c$ para flujos subcríticos y $y < y_c$ para flujos supercríticos (figura 13-8).

Como en el caso de un flujo compresible, un líquido puede acelerarse desde subcrítico hasta supercrítico. Por supuesto, éste puede desacelerar desde un flujo

supercrítico hasta un subcrítico, pero éste puede suceder cuando se experimenta un choque. El choque en este caso se llama **salto hidráulico**, el cual corresponde a un *choque normal* en un flujo compresible. Por lo tanto, la analogía entre un canal abierto y el flujo compresible es evidente.

Velocidad de ondas superficiales

Todos estamos familiarizados con las ondas formadas sobre superficies libres del océano, lagos, ríos y hasta en las albercas. Las ondas superficiales pueden ser muy altas, como las que se ven en los océanos o aquellas que apenas se notan. Algunas son suaves, otras se rompen en la superficie. Es necesario un entendimiento básico del movimiento de onda para el estudio de ciertos aspectos del flujo en un canal abierto, y aquí se presenta una breve descripción. Un detallado tratamiento del movimiento de onda puede encontrarse en numerosos libros escritos sobre el tema.

Un parámetro importante en el estudio del flujo en un canal abierto, es la **velocidad de onda** c_0, la cual es la velocidad de una pequeña alteración que viaja sobre un líquido. Considere un canal largo y ancho, que inicialmente contiene un líquido inmóvil de altura y. El extremo del canal avanza a la velocidad δV, generando una onda superficial de altura δy que se propaga a una velocidad c_o dentro de un líquido inmóvil, como se muestra en la figura 13-9*a*

Ahora considere un volumen de control que rodee el frente de la onda y que se mueva con ésta, como se muestra en la figura 13-9*b*. Para un observador que viaja con el frente de onda, el líquido de su derecha parece moverse hacia el frente de onda con una velocidad c_0 y el líquido de su izquierda parece alejarse del frente de onda con una velocidad de $c_0 - \delta V$. Por supuesto el observador pensaría que el volumen de control que rodea el frente de onda (y a él o ella) está en reposo, y que él o ella es testigo de un proceso de flujo estacionario.

El balance de la masa de flujo estacionario $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ (o ecuación de continuidad) para el volumen de control de ancho b puede expresarse como:

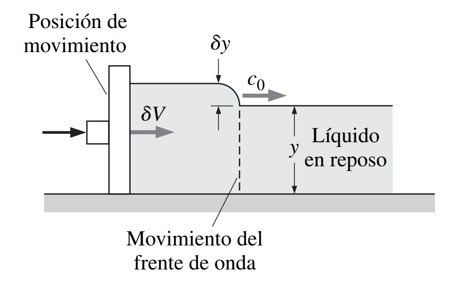
$$\rho c_0 yb = \rho(c_0 - \delta V)(y + \delta y)b \qquad \rightarrow \qquad \delta V = c_0 \frac{\delta y}{y + \delta y} \tag{13-11}$$

Pueden formularse las siguientes hipótesis: 1) La velocidad es casi constante a través del canal y los factores de corrección de cantidad de movimiento de flujo (β_1 y β_2) son iguales a uno, 2) la distancia a través de la onda es corta y por lo tanto la fricción en el fondo de la superficie y la resistencia del aire en la parte de arriba son despreciables, 3) los efectos dinámicos son despreciables y por lo tanto la presión en el liquido varía hidrostáticamente; en términos de presión manométrica, $P_{1,\text{ prom}} = \rho g h_{1,\text{ prom}} = \rho g(y/2)$ y $P_{2,\text{ prom}} = \rho g h_{2,\text{ prom}} = \rho g(y + \delta y)/2$, 4) la razón de flujo de masa es constante: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho c_0 yb$, y 5) no hay fuerzas externas o fuerzas de cuerpo y, por lo tanto, las únicas fuerzas que actúan sobre el volumen de control en la dirección horizontal x son las fuerzas de presión. Entonces, la ecuación de cantidad de movimiento $\sum \vec{F} = \sum_{\text{sal}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta \dot{m} \vec{V}$ en la dirección x se convierte en un balance entre las fuerzas de presión hidrostática y la transferencia de cantidad de movimiento:

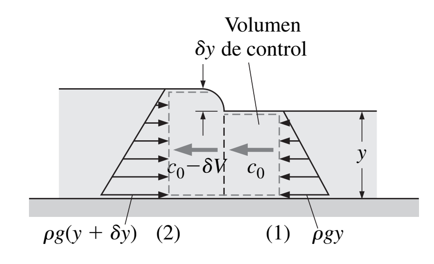
$$P_{2,\text{ prom}} A_2 - P_{1,\text{ prom}} A_1 = \dot{m}(-V_2) - \dot{m}(-V_1) \tag{13-12}$$

Note que tanto la velocidad promedio de entrada como la de salida son negativas, porque están en la dirección negativa de x. Se sustituye:

$$\frac{\rho g(y + \delta y)^2 b}{2} - \frac{\rho g y^2 b}{2} = \rho c_0 yb(-c_0 + \delta V) - \rho c_0 yb(-c_0) \tag{13-13}$$



a) Generación y propagación de una onda



b) Volumen de control relacionado con el observador que viaja junto con la onda, con la distribución de presión manométrica mostrada

FIGURA 13-9
Generación y análisis de una onda en un canal abierto.

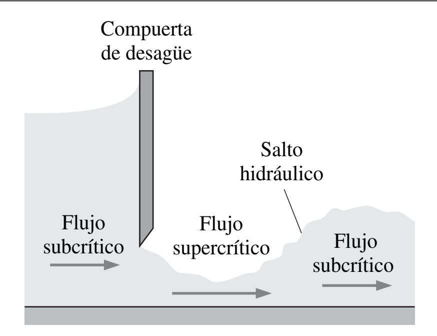


FIGURA 13-10
Flujo supercrítico a través de una compuerta.



a)



b)

FIGURA 13-11
Se puede observar un salto hidráulico en un plato cuando *a*) está colocado hacia arriba, pero no cuando *b*) está colocado hacia abajo.
Fotografía por Abel Po-Ya Chuang. Reproducido con permiso

o

$$g\left(1 + \frac{\delta y}{2y}\right)\delta y = c_0\,\delta V \tag{13-14}$$

Al combinar las ecuaciones de cantidad de movimiento y de continuidad y reordenar los términos se tiene:

$$c_0^2 = gy\left(1 + \frac{\delta y}{y}\right)\left(1 + \frac{\delta y}{2y}\right) \tag{13-15}$$

Por lo tanto, la velocidad de onda c_0 es proporcional a la altura de la onda δy. Para las ondas superficiales infinitesimales, $\delta y \ll y$ y así:

Ondas superficiales infinitesimales: $$c_0 = \sqrt{gy} \tag{13-16}$$

Por lo tanto, la velocidad de ondas superficiales infinitesimales es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del líquido. Note otra vez que este análisis es válido sólo para cuerpos de agua de poca profundidad, así como los que se encuentran en canales abiertos. De otra manera, la velocidad de la onda es independiente de la profundidad del líquido en aguas profundas, como los océanos. La velocidad de onda también puede determinarse del balance de energía, en vez de la ecuación de cantidad de movimiento, combinado con la ecuación de continuidad. Note que las ondas finalmente disminuyen por los efectos de viscosidad que se descuidan en este análisis. También, para un flujo en canal de sección transversal no rectangular, en el cálculo del número de Froude, en vez de la profundidad del flujo y, debe utilizarse la **profundidad hidráulica** definida como $y_h = A_c/L_t$ donde L_t es el *ancho de la parte superior* de la sección transversal del flujo. Para un canal circular lleno a la mitad, por ejemplo, la profundidad hidráulica es $y_h = (\pi R^2/2)/2R = \pi R/4$.

Por experiencia se sabe que cuando se arroja una piedra a un lago, las ondas concéntricas que se propagan en todas direcciones se desvanecen después de alguna distancia. Cuando una piedra se tira a un río, el frente de onda corriente arriba se desplaza corriente arriba si el flujo es tranquilo o subcrítico ($V < c_0$), y lo hace corriente abajo si el flujo es rápido o supercrítico ($V > c_0$), y se mantiene en reposo en lugares donde se forma un flujo crítico ($V = c_0$).

Se preguntará el lector por qué se pone mucha atención si el flujo es subcrítico o supercrítico. La razón es que este fenómeno influye notablemente en el flujo. Por ejemplo, la piedra en un lecho de un río puede causar que el nivel del agua en este lugar se incremente o disminuya, dependiendo si el flujo es subcrítico o supercrítico. También, el nivel del líquido baja gradualmente en la dirección del flujo en flujos subcríticos y puede ocurrir un repentino levantamiento del nivel del líquido, llamado salto hidráulico, en flujos supercríticos. ($\mathrm{Fr} > 1$) al mismo tiempo que el flujo desacelera hasta alcanzar velocidades subcríticas ($\mathrm{Fr} < 1$).

Este fenómeno puede ocurrir corriente abajo de una compuerta de desagüe, figura 13-10. El líquido se aproxima a la compuerta con una velocidad subcrítica, pero el nivel del liquido corriente arriba es suficientemente alto para acelerar la velocidad del líquido a un nivel supercrítico mientras éste pasa por la compuerta (como el flujo de gas que pasa en una tobera convergente-divergente). Pero, si la sección del canal corriente abajo no tiene la inclinación suficiente, no puede mantener su velocidad supercrítica, y el líquido saltará a un nivel más alto con un área de sección transversal más grande y, por lo tanto, a una velocidad subcrítica más baja. Para finalizar, los flujos en ríos, canales y sistemas de irrigación son usualmente subcríticos. Pero el flujo en compuertas y desbordes es usualmente supercrítico.

Puede crear un bello salto hidráulico la siguiente ocasión que lave platos (Fig. 13-11). Deje que el agua que sale del grifo golpee el centro de un plato. Mien-

tras que el agua se dispersa radicalmente, su profundidad disminuye y el flujo se vuelve supercrítico. Finalmente un salto hidráulico ocurre, el cual se observa como un repentino incremento en la profundidad del agua. ¡Inténtelo!

13-3 ▪ ENERGÍA ESPECÍFICA

Considere el flujo de un líquido en un canal en una sección transversal donde la profundidad del flujo es y, la velocidad promedio del flujo V, y la elevación relativa del fondo del canal a algún nivel de referencia dado z. Por sencillez, se ignora la variación de la velocidad del líquido a lo largo la sección transversal y se supone que la velocidad debe ser V en todas partes. La energía mecánica total del líquido en un canal en términos de carga se expresa como (Fig. 13-12):

$$H = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = z + y + \frac{V^2}{2g} \qquad \textbf{(13-17)}$$

en donde z es *la carga de elevación*, $P/\rho g = y$ es *la carga de presión manométrica* y $V^2/2g$ es la *carga dinámica o de velocidad*. La energía total en la ecuación 13-17 no es una representación realista de la energía verdadera de un fluido que fluye ya que el nivel de referencia que se eligió para la elevación y por tanto el valor de la carga de elevación z es un tanto arbitrario. La energía intrínseca del fluido a través de la sección transversal puede expresarse con mayor realidad si se toma como punto de referencia el fondo del canal y de esa manera $z = 0$ en ese punto. Entonces, la energía mecánica total del fluido en términos de la carga será la suma de la carga de presión y la carga dinámica. La suma de la carga de presión y la carga dinámica de un líquido en un canal abierto se llama **energía específica** E_s, y se expresa como (Bakhmeteff, 1932):

$$E_s = y + \frac{V^2}{2g} \qquad \textbf{(13-18)}$$

como se muestra en la figura 13-12.

Considere el flujo en un canal abierto con un ancho constante b. Se observa que si el flujo volumétrico del fluido es $\dot{V} = A_c V = ybV$, la velocidad promedio del flujo puede expresarse de la siguiente manera:

$$V = \frac{\dot{V}}{yb} \qquad \textbf{(13-19)}$$

Al sustituirlo en la ecuación 13-18, la energía específica puede expresarse de la siguiente manera:

$$E_s = y + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y^2} \qquad \textbf{(13-20)}$$

Esta ecuación es muy instructiva porque muestra la variación de la energía específica respecto a la profundidad del flujo. Durante flujos estacionarios en un canal abierto la razón de flujo es constante, y una gráfica E_s contra y para constantes $\dot{V}$ y b está dada en la figura 13-13. A partir de esta figura se observa lo siguiente:

- La distancia desde un punto en el eje vertical y, a la curva, representa la energía específica correspondiente a este valor de profundidad y. La parte entre la línea $E_s = y$ y la curva corresponden a la carga dinámica (o energía cinética) del líquido, y la parte restante, a la carga de presión (o energía del flujo).
- La energía específica tiende a infinito cuando $y \to 0$ (debido a que la velocidad se aproxima a infinito), y se vuelve igual a la profundidad del flujo y para valores grandes de y (debido a que la velocidad y en consecuencia la

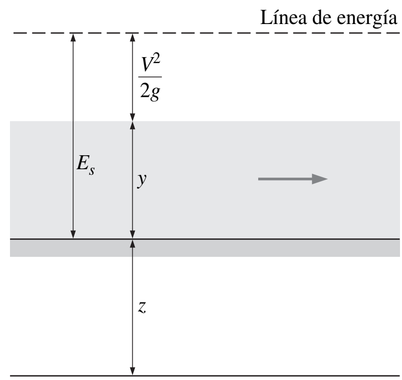


FIGURA 13-12
La energía específica E_s de un líquido en un canal abierto es la energía mecánica total relativa al fondo del canal.

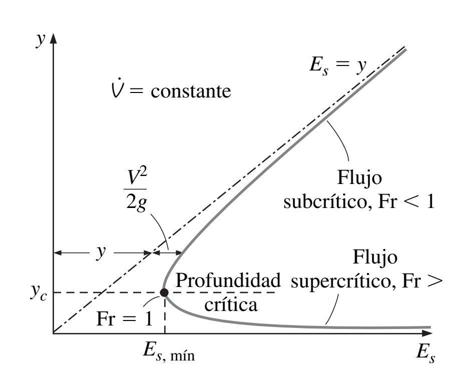


FIGURA 13-13
Variación de la energía específica E_s respecto a la profundidad y para una razón de profundidad especificada.

energía cinética se vuelven muy pequeñas). La energía específica alcanza un valor mínimo $E_{s,\text{mín}}$ en un punto intermedio, llamado **punto crítico**, caracterizado por la **profundidad crítica** y_c y la **velocidad crítica** V_c. La energía específica mínima también se llama **energía crítica**.

- Existe una energía específica mínima $E_{s,\text{mín}}$ necesaria para mantener el flujo volumétrico $\dot{V}$ dado. En consecuencia, la energía específica E_s no puede tener el valor abajo de $E_{s,\text{ mín}}$ para un flujo volumétrico $\dot{V}$ dado.
- Una línea horizontal intercepta la curva de la energía específica solamente en un punto, así que un valor fijo de la profundidad del flujo corresponde a un valor fijo de la energía específica. Esto es de esperarse, puesto que la velocidad tiene valor fijo cuando $\dot{V}$, b y y se especifican. Sin embargo, para $E_s > E_{s,\text{mín}}$, una línea vertical intercepta la curva en dos puntos, indicando que un fluido puede tener dos profundidades diferentes (y por tanto dos velocidades diferentes) correspondientes a un valor fijo de energía específica. Esas dos profundidades se llaman **profundidades alternas**. Para flujos a través de compuerta de desagüe con pérdida de fricción despreciable (así que $E_s =$ constante), la profundidad más alta corresponde al flujo corriente arriba, y la profundidad más baja corresponde al flujo corriente abajo.
- Un pequeño cambio en la energía específica cerca del punto crítico causa gran diferencia entre las profundidades alternas y podría causar una violenta fluctuación en el nivel del flujo. Por lo tanto, las operaciones cerca del punto crítico deben evitarse en el diseño de canales abiertos.

El valor de la energía específica mínima y la profundidad crítica en donde éste ocurre, pueden determinarse si se diferencia E_s de la ecuación 13-20 respecto a y para constantes b y $\dot{V}$ y estableciendo que la derivada sea igual a cero:

$$\frac{dE_s}{dy} = \frac{d}{dy}\left(y + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y^2}\right) = 1 - \frac{\dot{V}^2}{gb^2y^3} = 0 \quad \textbf{(13-21)}$$

Se resuelve para y, la cual es la profundidad del flujo crítico y_c, se tiene:

$$y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2}\right)^{1/3} \quad \textbf{(13-22)}$$

La razón de flujo en un punto crítico puede expresarse como $\dot{V} = y_c b V_c$. Al sustituir, la velocidad crítica se determina para ser:

$$V_c = \sqrt{gy_c} \quad \textbf{(13-23)}$$

la cual es la velocidad de onda. El número de Froude en este punto es:

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gy}} = \frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 \quad \textbf{(13-24)}$$

que indica que *el punto de la energía específica mínima es efectivamente el punto crítico, y el flujo se convierte en crítico cuando la energía específica alcanza su valor mínimo*.

Se supone que el flujo es subcrítico en velocidades de flujo más bajas y por lo tanto en profundidades de flujo más altas (la rama más alta de la curva), supercrítico en velocidades de flujo más altas y por lo tanto en profundidades del flujo más bajas (la rama más baja de la curva), y crítico en el punto crítico (el punto de la energía específica mínima).

Al notar que $V_c = \sqrt{gy_c}$, la energía específica mínima (o crítica) puede expresarse sólo en términos de la profundidad crítica como:

$$E_{s,\text{ mín}} = y_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_c + \frac{gy_c}{2g} = \frac{3}{2}y_c \quad \textbf{(13-25)}$$

En flujos uniformes la profundidad del flujo y la velocidad del flujo, y por tanto la energía específica, permanecen constantes desde que $E_s = y + V^2/2g$. La pérdida de la carga se debe a la caída en la elevación (el canal está inclinado hacia abajo en la dirección del flujo). Sin embargo, en un flujo no uniforme la energía específica podría incrementarse o disminuir, dependiendo de la pendiente del canal y sus pérdidas por fricción. Por ejemplo, si la caída en la elevación a lo largo de un tramo del flujo es mayor que la pérdida de carga a lo largo de este tramo, entonces la energía específica aumenta en una cantidad igual a la diferencia entre la caída de la elevación y la pérdida de carga. El concepto de la energía específica se convierte en un recurso particularmente útil cuando se estudian flujos variados.

EJEMPLO 13-1 Tipo del flujo y profundidad alterna

El agua fluye de manera estacionaria en un canal abierto de 0.4 m de ancho a una razón de 0.2 m^3/s (Fig. 13-14). Si la profundidad es de 0.15 m, determine la velocidad y si el flujo es subcrítico o supercrítico. También determine la profundidad alterna del flujo si el tipo de flujo cambiara.

SOLUCIÓN Se considera el flujo del agua en un canal abierto rectangular. El tipo de flujo, la velocidad del flujo y la profundidad alterna también se determinarán.
Hipótesis La energía específica es constante.
Análisis La velocidad promedio del flujo se determina por:

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{yb} = \frac{0.2 \text{ m}^3/\text{s}}{(0.15 \text{ m})(0.4 \text{ m})} = \mathbf{3.33 \text{ m/s}}$$

La profundidad crítica para este flujo es:

$$y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{(0.2 \text{ m}^3/\text{s})^2}{(9.81 \text{ m/s}^2)(0.4 \text{ m})^2}\right)^{1/3} = 0.294 \text{ m}$$

Por lo tanto, el flujo es **supercrítico** porque la profundidad real del flujo $y =$ 0.15m, y $y < y_c$. Otra manera de determinar el tipo del flujo es con el cálculo del número de Froude.

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gy}} = \frac{3.33 \text{ m/s}}{\sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(0.15 \text{ m})}} = 2.75$$

Otra vez, el flujo es supercrítico ya que Fr > 1. La energía específica para las condiciones dadas es:

$$E_{s1} = y_1 + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y_1^2} = (0.15 \text{ m}) + \frac{(0.2 \text{ m}^3/\text{s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.4 \text{ m})^2(0.15 \text{ m})^2} = 0.7163 \text{ m}$$

Entonces, la profundidad alterna se determina po $E_{s1} = E_{s2}$ y es:

$$E_{s2} = y_2 + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y_2^2} \quad \rightarrow \quad 0.7163 \text{ m} = y_2 + \frac{(0.2 \text{ m}^3/\text{s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.4 \text{ m})^2y_2^2}$$

Al resolver para y_2 se obtiene que la profundidad alterna es $y_2 =$ **0.69 m**. Por lo tanto, si el tipo del flujo cambiara de supercrítico a subcrítico mientras se mantuviera una energía específica constante, la profundidad del flujo aumentaría de 0.15 m a 0.69 m.
Discusión Note que si el agua experimentara un salto hidráulico con energía específica constante (la pérdida por fricción fuera igual a la caída en la elevación), la profundidad del flujo se incrementaría a 0.69 m, al considerar por supuesto que las paredes del canal serían suficientemente altas.

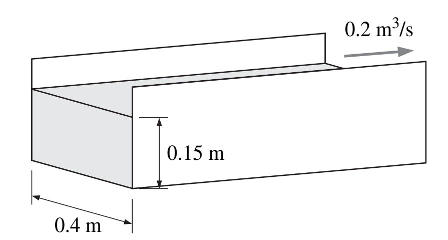


FIGURA 13-14
Esquema para el ejemplo 13-1.

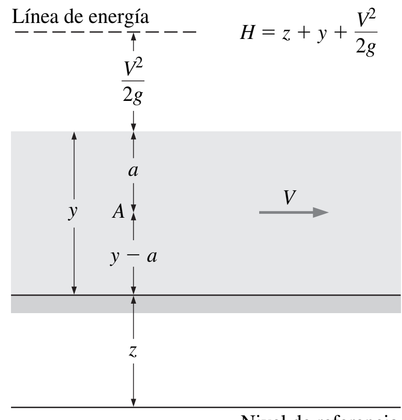


FIGURA 13-15
Energía total de un líquido que fluye en un canal abierto.

13-4 ▪ ECUACIONES DE ENERGÍA Y CONTINUIDAD

Los flujos en canales abiertos incluyen líquidos cuyas densidades son casi constantes y por lo tanto la conservación de masa del flujo estacionario unidimensional o ecuación de continuidad puede expresarse de la siguiente manera:

$$\dot{V} = A_c V = \text{constante} \tag{13-26}$$

Ése es el producto de la sección transversal del flujo y la velocidad promedio del flujo permanece constante a través del canal. La ecuación de continuidad entre dos secciones a lo largo del canal se expresa como:

Ecuación de continuidad:
$$A_{c1}V_1 = A_{c2}V_2 \tag{13-27}$$

la cual es idéntica a la ecuación de continuidad de flujo estacionario de líquido en una tubería. Note que ambas, la sección transversal y la velocidad promedio del flujo pueden variar a lo largo del flujo, pero como se establece, su producto permanece constante.

Para determinar la energía total del flujo de un líquido en un canal abierto relativamente al nivel de referencia, como se muestra en la figura 13-15, se considera un punto A en el líquido a una distancia a de la superficie libre (y así una distancia $y - a$ desde el fondo del canal). Al notar que la elevación, la presión (presión hidrostática relativa a la superficie libre) y la velocidad en el punto A son $z_A = z + (y - a)$, $P_A = \rho g a$ y $V_A = V$, respectivamente, la energía total del líquido en términos de la carga es:

$$H_A = z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = z + (y - a) + \frac{\rho g a}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = z + y + \frac{V^2}{2g} \tag{13-28}$$

la cual es independiente de la ubicación del punto A en la sección transversal. Por lo tanto, la energía mecánica total de un líquido en cualquier sección transversal de un canal abierto puede expresarse en términos de carga como:

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g} \tag{13-29}$$

donde y es la profundidad del flujo, z es la elevación del fondo de un canal y V es la velocidad promedio del flujo. Entonces la ecuación de energía aplicada al flujo unidimensional en un canal abierto entre la sección corriente arriba 1 y la sección corriente abajo 2 puede escribirse de la siguiente manera:

Ecuación de energía:
$$z_1 + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L \tag{13-30}$$

La pérdida de carga h_L debida a efectos de fricción se expresa semejante al flujo en tuberías como:

$$h_L = f\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g} = f\frac{L}{R_h}\frac{V^2}{8g} \tag{13-31}$$

en donde f es el factor de fricción promedio y L es la longitud del canal entre la sección 1 y 2. La relación $D_h = 4R_h$ debe observarse cuando se use el radio hidráulico en vez del diámetro hidráulico.

El flujo en canales abiertos se conduce por la gravedad, y por lo tanto un canal típico está ligeramente cuesta abajo. La pendiente del fondo del canal se expresa de la siguiente manera:

$$S_0 = \tan\alpha = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} \cong \frac{z_1 - z_2}{L} \tag{13-32}$$

donde α es el ángulo del fondo del canal respecto a la horizontal. En general, la pendiente del fondo S_0 es muy pequeña, y por tanto el fondo del canal es casi

horizontal. Por lo tanto, $L \approx x_2 - x_1$, donde x es la distancia en la dirección horizontal. También, la profundidad del flujo y medida en la dirección vertical puede considerarse como la profundidad normal del canal con un error despreciable.

Si el fondo del canal es recto y la pendiente del fondo es constante, la caída vertical entre las secciones 1 y 2 puede expresarse como $z_1 - z_2 = S_0L$. Entonces la ecuación de la energía (Ecuación 13-30) se convierte en

Ecuación de energía:
$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + S_0L = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L \qquad \textbf{(13-33)}$$

Esta ecuación tiene la ventaja de ser independiente del nivel de referencia de elevación.

En el diseño de sistemas de canales abiertos, la pendiente del fondo se selecciona de tal manera que provee una caída adecuada de elevación para vencer la pérdida de carga de fricción y en consecuencia el flujo se mantenga a una razón de flujo deseada. Por lo tanto, hay una conexión cercana entre la pérdida de carga y la pendiente del fondo y por ello tiene sentido expresar la pérdida de carga como la pendiente (o la tangente de un ángulo). Esto se hace cuando se define una **pendiente de fricción** como:

Pendiente de fricción:
$$S_f = \frac{h_L}{L} \qquad \textbf{(13-34)}$$

Entonces, la ecuación de energía puede escribirse de la siguiente manera:

Ecuación de energía:
$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + (S_f - S_0)L \qquad \textbf{(13-35)}$$

Note que la pendiente de fricción es igual a la pendiente del fondo cuando la pérdida de carga es igual a la caída de elevación. Esto es $S_f = S_0$ cuando $h_L = z_1 - z_2$.

La figura 13-16 también muestra la línea de energía, la cual es una distancia $z + y + V^2/2g$ (energía mecánica total de un líquido expresada como una carga) sobre el nivel de referencia horizontal. La línea de energía por lo general reinclina como el mismo canal, resultado de las pérdidas por fricción; la caída vertical es igual a la pérdida de carga h_L. Note que si no hay pérdida de carga, la línea de energía será horizontal aun cuando el canal no lo sea. Las cargas de elevación y de velocidad ($z + y$ y $V^2/2g$) serán capaces de convertirse una en la otra durante el flujo en este caso, pero la suma permanecería constante.

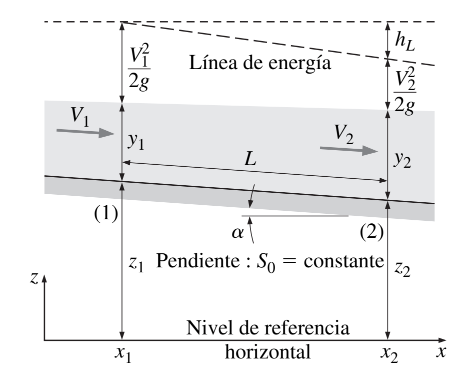


FIGURA 13-16
La energía total de un líquido en dos secciones de un canal abierto.

13-5 ▪ FLUJO UNIFORME EN CANALES

Se mencionó en la Sección 13-1 que un flujo en un canal se llama *flujo uniforme* si la profundidad del flujo (y la velocidad promedio de flujo ya que $\dot{V} = A_cV =$ en flujo estacionario) permanece constante. Las condiciones de un flujo uniforme se encuentran, por lo común, en canales largos y rectos con una pendiente, y una sección transversal constantes y un revestimiento de las superficies del canal homogéneo. En el diseño de canales abiertos es muy deseable tener flujos uniformes en la mayoría de los sistemas ya que significa tener un canal de altura constante, lo cual es más fácil de diseñar y construir.

La profundidad del flujo en flujos uniformes se le llama **profundidad normal** y_n y a la velocidad promedio del flujo, **velocidad de flujo uniforme** V_o. El flujo permanece uniforme mientras la pendiente, la sección transversal y la rugosidad de la superficie del canal no tengan algún cambio (Fig. 13-17). Cuando la pendiente del fondo aumenta, la velocidad del flujo aumenta y la profundidad del flujo disminuye. Por lo tanto, un nuevo flujo uniforme se establece con una nue-

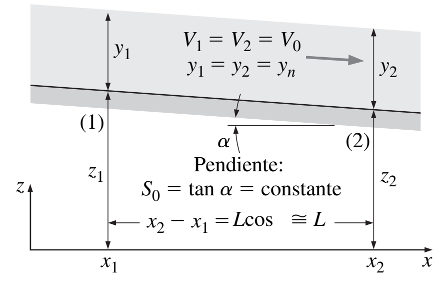


FIGURA 13-17
En un flujo uniforme, la profundidad de flujo y, la velocidad de flujo promedio V, y la pendiente de fondo S_0 permanecen constantes, y la pérdida de carga es igual a la pérdida de elevación, $h_L = z_1 - z_2 = S_fL = S_0L$.

va (más baja) profundidad. Lo contrario ocurre si la pendiente del fondo disminuye.

En caso del flujo en canal abierto de pendiente S_0, sección transversal A_c, y el factor de fricción f constantes, se alcanza la velocidad final y en consecuencia el flujo uniforme se establece cuando la pérdida de la carga se iguala a la caída de elevación. Por lo tanto:

$$h_L = f\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g} \quad \text{o} \quad S_0 L = f\frac{L}{R_h}\frac{V_0^2}{8g} \tag{13-36}$$

ya que $h_L = S_0 L$ en un flujo uniforme y $D_h = 4R_h$. Cuando se resuelve la segunda relación para V_0, la velocidad del flujo uniforme y la razón de flujo se determinan de la siguiente manera

$$V_0 = C\sqrt{S_0 R_h} \quad \text{y} \quad \dot{V} = CA_c\sqrt{S_0 R_h} \tag{13-37}$$

donde

$$C = \sqrt{8g/f} \tag{13-38}$$

se llama **coeficiente de Chezy**. Las ecuaciones 13-37 y el coeficiente C, son nombrados en honor al ingeniero francés Antoine Chezy (1718-1798), quien fue el primero en proponer una relación similar hacia 1769. El coeficiente de Chezy es una cantidad dimensional, y su valor varía desde 30 $m^{1/2}/s$ para canales pequeños con superficies rugosas hasta 90 $m^{1/2}/s$ para canales largos con superficies lisas (o de 60 $ft^{1/2}/s$ hasta 160 $ft^{1/2}/s$ en unidades inglesas).

El coeficiente de Chezy puede determinarse de manera directa con la ecuación 13-38; primero se determina el factor de fricción f como se hace en caso de flujo en tubería en el capítulo 8 con ayuda del diagrama de Moody o la ecuación de Colebrook para el flujo totalmente rugoso (Re $\to \infty$),

$$f = [2.0 \log(14.8R_h/\varepsilon)]^{-2} \tag{13-39}$$

donde ε es la rugosidad de superficies de canal promedio. Note que el flujo en un canal abierto usualmente es turbulento, y el flujo está *totalmente desarrollado* al momento cuando el flujo uniforme se establece. Por lo tanto, es razonable usar el factor de fricción para flujo turbulento totalmente desarrollado. También en números de Reynolds grandes, las curvas del factor de fricción correspondientes a la rugosidad relativa especificada son casi horizontales, y por lo tanto el factor de fricción es independiente del número de Reynolds. El flujo en esa región se llama *flujo turbulento totalmente rugoso.*

Desde que surgieron las ecuaciones de Chezy, numerosos investigadores han realizado esfuerzos considerables para desarrollar las relaciones empíricas para la velocidad promedio y el flujo volumétrico más simples. La ecuación de uso más generalizado la desarrolló independientemente el francés Philippe Gaspard Gauckler (1826-1905) en 1868 y el irlandés Robert Manning (1816-1897) en 1889.

Ambos observaron que la constante en la ecuación de Chezy puede expresarse de la siguiente manera:

$$C = \frac{a}{n}R_h^{1/6} \tag{13-40}$$

donde n se llama **coeficiente de Manning**, cuyo valor depende de la rugosidad de la superficie del canal. Cuando se sustituye en las ecuaciones 13-37, se tienen las siguientes relaciones empíricas conocidas como **ecuaciones de Manning** (también referidas como las **ecuaciones de Gauckler y Manning** ya que las propusieron primero Philippe Gaspard Gauckler) para la velocidad promedio y la razón del flujo:

Flujo uniforme: $$V_0 = \frac{a}{n} R_h^{2/3} S_0^{1/2} \quad \text{y} \quad \dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} \qquad \textbf{(13-41)}$$

El factor a es una constante dimensional cuyo valor en unidades SI es a = 1 m $^{1/3}$/s. Note que 1 m = 3.2808 ft, su valor en unidades inglesas es:

$$a = 1\ \text{m}^{1/3}/\text{s} = (3.2808\ \text{ft})^{1/3}/\text{s} = 1.486\ \text{ft}^{1/3}/\text{s} \qquad \textbf{(13-42)}$$

Note que la pendiente del fondo S_0 y el coeficiente de Manning n son cantidades adimensionales, y en unidades SI, las ecuaciones 13-41 proporcionan la velocidad en m/s y la razón de flujo en m^3/s, cuando R_h se expresa en m (las unidades correspondientes en unidades inglesas son ft/s y ft^3/s cuando R_h se expresa en ft).

Experimentalmente se han determinado valores de n que se indican en la Tabla 13-1, para numerosos canales naturales y artificiales. En este texto se proporcionan tablas más extensas . Note que el valor en n varía desde 0.010 para un canal de vidrio hasta 0.150 para un plano inundado cargado con árboles (15 veces más que para un canal de vidrio). Existe considerable incertidumbre en el valor de n, especialmente en canales naturales, como debe esperarse, porque ningún canal es exactamente igual a otro. La dispersión puede ser 20 por ciento o más. El coeficiente n depende también del tamaño y forma del canal como también de la rugosidad de su superficie.

TABLA 13-1

Valores promedios del coeficiente de Manning n para un flujo de agua en canales abiertos*

Tomado de Chow (1959).

Material de las paredes del canal	n
A. Canales recubiertos artificialmente de	
Vidrio	0.010
Cobre	0.011
Acero liso	0.012
Acero pintado	0.014
Acero remachado	0.015
Hierro fundido	0.013
Concreto acabado	0.012
Concreto no acabado	0.014
Madera aplanada	0.012
Madera no aplanada	0.013
Azulejo	0.014
Ladrillo	0.015
Asfalto	0.016
Metal corrugado	0.022
Escombro	0.025
B. Canales Excavados en tierra	
Limpio	0.022
Grava	0.025
Con raíces de maleza	0.030
Con piedras, adoquines	0.035
C. Canales naturales	
Limpio y recto	0.030
De flujo lento con fondos profundos	0.040
Ríos grandes	0.035
Corrientes de montaña	0.050
D. Llanuras inundables	
Pastadero, terreno agrícola	0.035
Con poca maleza	0.050
Con mucha maleza	0.075
Con árboles	0.150

* La incertidumbre en n puede ser 20 por ciento o más.

Flujo uniforme crítico

El flujo en un canal abierto se vuelve flujo crítico cuando el número de Froude Fr = 1 y en consecuencia la velocidad del flujo es igual a la velocidad de onda $V_c = \sqrt{gy_c}$, donde y_c es la profundidad crítica del flujo, definida previamente (Ec. 13-9). Cuando el flujo volumétrico (entra símbolo), la pendiente del canal S_0, y el coeficiente de Manning n se conocen, la profundidad normal del flujo y_n puede determinarse a partir de la ecuación de Manning (Ec. 13-41). Sin embargo, puesto que A_c y R_h son ambas funciones de y_n, con frecuencia la ecuación termina siendo implícita en y_n y para resolverla se necesita una solución numérica (o el método de prueba y error). Si $y_n = y_c$, el flujo es un *flujo crítico uniforme* y la pendiente del fondo S_0 es igual a la pendiente crítica S_c en este caso. Cuando la profundidad del flujo y_n se conoce en vez de la razón de flujo volumétrico (entra símbolo), el flujo volumétrico puede determinarse de la ecuación de Maning y la profundidad del flujo crítico de la ecuación 13-9. Otra vez el flujo es crítico sólo si $y_n = y_c$.

En caso de un flujo uniforme crítico, $S_0 = S_c$, y $y_n = y_c$. Al reemplazar $\dot{V}$ y S_0 en la ecuación de Manning por $\dot{V} = A_c\sqrt{gy_c}$ y S_c, respectivamente, y al resolver esta ecuación para S_c, se obtiene la siguiente relación general para una pendiente crítica:

Pendiente crítica (caso general): $$S_c = \frac{gn^2 y_c}{a^2 R_h^{4/3}} \qquad \textbf{(13-43)}$$

Para flujo de película o flujo en un canal ancho rectangular con $b \gg y_c$, la ecuación 13-43 se simplifica a:

Pendiente crítica ($b \gg y_c$): $$S_c = \frac{gn^2}{a^2 y_c^{1/3}} \qquad \textbf{(13-44)}$$

Esta ecuación da la pendiente necesaria para mantener un flujo crítico de profundidad y_c, en un canal ancho rectangular que tiene un coeficiente Manning de n.

Métodos de superposición para perímetros no uniformes

La rugosidad de la superficie y en consecuencia el coeficiente de Manning para la mayoría de los canales naturales y para algunos canales hechos por el hombre

varían a lo largo del perímetro mojado o tan sólo a lo largo del canal. Un río, por ejemplo, podría tener un fondo pedregoso en su fondo regular, pero una superficie cubierta con arbustos en todo su extenso plano inundado. Existen métodos para resolver este problema, ya sea encontrar el coeficiente efectivo de Manning *n* adecuado para toda la sección transversal del canal, o dividir la sección del canal en subsecciones y aplicar el principio de superposición. Por ejemplo, la sección transversal del canal puede dividirse en N subsecciones, cada una con sus propios coeficiente de Manning y razón de flujo. Cuando se determina el perímetro de una sección, sólo se considera la porción mojada de la frontera de esta sección, y las partes de frontera imaginarias se ignoran. La razón de flujo en el canal es la suma de las razones de flujo en todas las subsecciones.

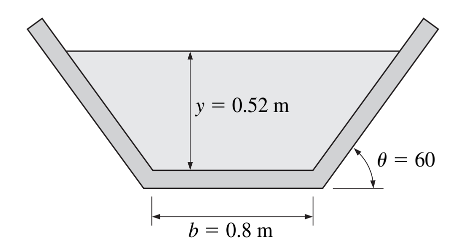


FIGURA 13-18
Esquema para el ejemplo 13-2.

EJEMPLO 13-2 Razón de flujo uniforme en un canal abierto

Se tiene agua que fluye en un canal excavado en la tierra donde crece maleza, de sección transversal trapezoidal, con un ancho de fondo de 0.8 m, un ángulo del trapezoide de 60º, y una pendiente de fondo de 0.3º de ángulo como se muestra en la figura 13-18. Si la profundidad del flujo se mide en 0.52 m, determine la razón del flujo del agua en el canal. ¿Cuál sería la respuesta si el ángulo del fondo fuera 1º?

SOLUCIÓN Fluye agua en un canal de forma trapezoidal con dimensiones dadas excavado en la tierra donde crece maleza. La razón de flujo corresponde al valor medido de la profundidad del flujo y debe determinarse.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario y uniforme. **2** La pendiente del fondo es constante. **3** La rugosidad de la superficie mojada del canal y por tanto el coeficiente de fricción son constantes.
Propiedades El coeficiente de Manning para un canal abierto con una superficie cubierta de raíces de maleza es $n = 0.030$.
Análisis El área de sección transversal, el perímetro y el radio hidráulico del canal son:

$$A_c = y\left(b + \frac{y}{\tan\theta}\right) = (0.52\text{ m})\left(0.8\text{ m} + \frac{0.52\text{ m}}{\tan 60°}\right) = 0.5721\text{ m}^2$$

$$p = b + \frac{2y}{\text{sen}\,\theta} = 0.8\text{ m} + \frac{2 \times 0.52\text{ m}}{\text{sen } 60°} = 2.001\text{ m}$$

$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{0.5721\text{ m}^2}{2.991\text{ m}} = 0.2859\text{ m}$$

La pendiente del fondo del canal es:

$$S_0 = \tan\alpha = \tan 0.3° = 0.005236$$

Entonces, la razón de flujo en el canal se determina por la ecuación de Manning:

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1\text{ m}^{1/3}/\text{s}}{0.030}(0.5721\text{ m}^2)(0.2859\text{ m})^{2/3}(0.005236)^{1/2} = \mathbf{0.60\ m^3/s}$$

La razón de flujo para el ángulo del fondo de 1° puede determinarse con $S_0 = \tan\alpha = \tan 1° = 0.01746$ en la última relación. Éste da $\dot{V} =$ **1.1 m³/s**.
Discusión Note que la razón de flujo es una función que depende considerablemente del ángulo de inclinación del fondo. También existe una considerable incertidumbre en el valor del coeficiente de Manning, y en consecuencia en el cálculo de la razón de flujo. Diez por ciento de incertidumbre en *n* resulta en 10 por ciento de incertidumbre en la razón de flujo. Por lo tanto, las respuestas finales se dan con sólo dos dígitos significativos.

EJEMPLO 13-3 Altura de un canal rectangular

Se transporta agua en un canal rectangular de concreto inacabado con un ancho de fondo de 4 ft y un flujo volumétrico de 51 ft^3/s. El terreno es tal que el fondo del canal tiene una caída en su elevación de 2 ft por cada 1 000 ft de largo. Determine la altura mínima del canal en condiciones de flujo uniforme (Fig. 13-19). ¿Cual sería la respuesta si el fondo tuviera una caída de sólo 1 ft por cada 1 000 ft?

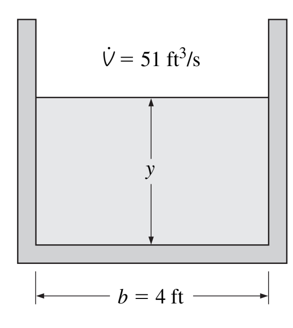


FIGURA 13-19
Esquema para el ejemplo 13-3.

SOLUCIÓN Fluye agua en un canal rectangular de concreto con un ancho de fondo especificado. La altura mínima del canal por determinar corresponde a una razón de flujo especificada.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario y uniforme. **2** La pendiente del fondo es constante. **3** La rugosidad de la superficie de las paredes del canal y por tanto el coeficiente de fricción son constantes.
Propiedades El coeficiente de Manning para un canal abierto con superficies de concreto inacabado es $n = 0.014$.
Análisis El área de sección transversal, el perímetro y el radio hidráulico del canal son:

$$A_c = by = (4\text{ ft})y \qquad p = b + 2y = (4\text{ ft}) + 2y \qquad R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{4y}{4 + 2y}$$

La pendiente del fondo del canal es $S_0 = 2/1\,000 = 0.002$. Con la ecuación de Manning, la razón de flujo en el canal puede expresarse de la siguiente manera:

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$51\text{ ft}^3/\text{s} = \frac{1.486\text{ ft}^{1/3}/\text{s}}{0.014}(4y\text{ ft}^2)\left(\frac{4y}{4 + 2y}\text{ ft}\right)^{2/3}(0.002)^{1/2}$$

la cual no es una ecuación lineal en y. Con el empleo de un paquete computacional como EES o una solución numérica iterativa se determina que la profundidad del flujo es:

$$y = \mathbf{2.5\text{ ft}}$$

Si la caída del fondo fuera sólo de 1 ft por cada 1 000 ft de largo, la pendiente de fondo sería $S_0 = 0.001$, y la profundidad del flujo sería $y =$ **3.3 ft**.
Discusión Note que y es la profundidad del flujo, y por consiguiente éste es el valor mínimo para la altura del canal. También, existe considerable incertidumbre en el valor del coeficiente de Manning n. Este hecho debe tomarse en cuenta al decidir cuál debe ser la altura del canal por construir.

EJEMPLO 13-4 Canales de rugosidad no uniforme

Fluye agua en un canal cuya pendiente de fondo es 0.003. Su sección transversal se muestra en la figura 13-20. Las dimensiones y los coeficientes de Manning para las superficies de diferentes subsecciones se muestran en la figura. Determine la razón de flujo en el canal y el coeficiente de Manning eficiente para el canal.

SOLUCIÓN Fluye agua en un canal con propiedades de la superficie no uniformes. La razón de flujo y el coeficiente de Manning eficiente deben determinarse.

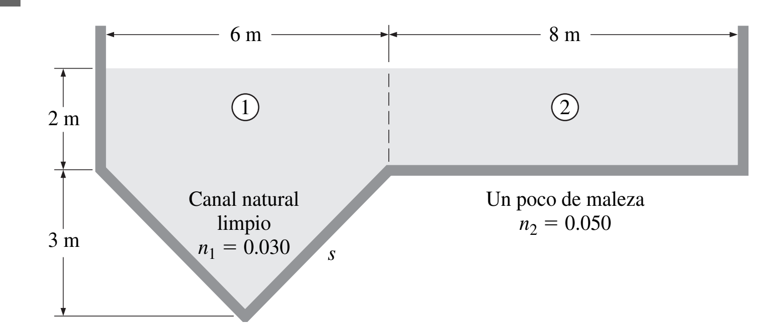


FIGURA 13-20
Esquema para el ejemplo 13-4.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario y uniforme. **2** La pendiente del fondo es constante. **3** Los coeficientes de Manning no varían a lo largo del canal.

Análisis El canal incluye dos partes con diferentes rugosidades y por lo tanto es apropiado dividir el canal en dos subsecciones como se indica en la figura 13-20. La razón de flujo para cada sección puede determinarse por la ecuación de Manning, y la razón total de flujo puede determinarse al sumar las razones de flujo en las subsecciones.

La longitud del lado del canal triangular es $s = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4.243$ m. Entonces el área del flujo, el perímetro y el radio hidráulico del canal para cada subsección y el canal entero se vuelven:

Subsección 1:

$$A_{c1} = 21 \text{ m}^2 \qquad p_1 = 10.486 \text{ m} \qquad R_{h1} = \frac{A_{c1}}{p_1} = \frac{21 \text{ m}^2}{10.486 \text{ m}} = 2.00 \text{ m}$$

Subsección 2:

$$A_{c2} = 16 \text{ m}^2 \quad p_2 = 10 \text{ m} \quad R_{h2} = \frac{A_{c2}}{p_2} = \frac{16 \text{ m}^2}{10 \text{ m}} = 1.60 \text{ m}$$

El canal completo:

$$A_c = 37 \text{ m}^2 \quad p = 20.486 \text{ m} \quad R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{37 \text{ m}^2}{20.486 \text{ m}} = 1.806 \text{ m}$$

Con el uso la ecuación de Manning para cada subsección, la razón total de flujo en el canal se determina de la siguiente manera:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \frac{a}{n_1} A_{c1} R_{h1}^{2/3} S_0^{1/2} + \frac{a}{n_2} A_{c2} R_{h2}^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$= (1 \text{ m}^{1/3}/\text{s}) \left[\frac{(21 \text{ m}^2)(2 \text{ m})^{2/3}}{0.030} + \frac{(16 \text{ m}^2)(1.60 \text{ m})^{2/3}}{0.050} \right] (0.003)^{1/2}$$

$$= 84.8 \text{ m}^3/\text{s} \cong \mathbf{85 \text{ m}^3/s}$$

Si se conoce la razón total de flujo, el coeficiente de Manning eficiente para el canal completo puede determinarse con la ecuación de Manning de la siguiente manera:

$$n_{\text{eff}} = \frac{a A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2}}{\dot{V}} = \frac{(1 \text{ m}^{1/3}/\text{s})(37 \text{ m}^2)(1.806 \text{ m})^{2/3}(0.003)^{1/2}}{84.8 \text{ m}^3/\text{s}} = \mathbf{0.035}$$

Discusión El coeficiente de Manning eficiente n_{ef} del canal se encuentra entre dos valores n, como era de esperarse. El promedio ponderado del coeficiente de Manning del canal es $n_{prom} = (n_1p_1 + n_2p_2)/p = 0.040$, el cual es muy diferente de n_{ef}. Por lo tanto, usar el promedio ponderado del coeficiente de Manning para el canal completo puede ser tentador, pero no sería muy preciso.

13-6 ▪ MEJORES SECCIONES TRANSVERSALES HIDRÁULICAS

Los sistemas de canales abiertos por lo general se diseñan para transportar líquidos de un lugar a otro de una elevación más baja a una razón de flujo específico bajo la influencia de la gravedad al costo más bajo posible. Note que no se necesita suministrar energía, y por esto el costo del sistema de canales abiertos consiste primordialmente del costo de la construcción inicial, la cual es proporcional al tamaño físico del sistema. Por lo tanto, para una longitud de un canal en específico, el perímetro del canal representa también el costo del sistema, y éste debe mantenerse al mínimo para no incrementar el tamaño y por tanto el costo del sistema.

Desde otra perspectiva, la resistencia del flujo se debe al esfuerzo cortante τ_w y al área de la pared, la cual es equivalente al perímetro mojado por unidad de longitud del canal. Por lo tanto, para un área de sección transversal del flujo A_c, cuanto más pequeño sea el perímetro mojado p, más pequeña será la fuerza de fricción, y en consecuencia la velocidad promedio y la razón de flujo serán mayores.

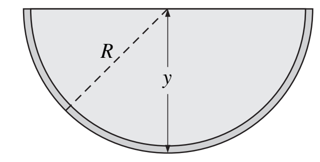


FIGURA 13-21
La mejor sección transversal hidráulica para el canal abierto es un semicírculo, ya que éste tiene el perímetro mojado mínimo para una sección transversal especificada, y así la mínima resistencia de flujo.

Desde una perspectiva más, para cierta geometría de un canal con una pendiente de fondo S_0 y un revestimiento de las superficies del canal (y por lo tanto el coeficiente de rugosidad n) especificados, la velocidad del flujo se obtiene por la fórmula de Manning: $V = aR_h^{2/3}S_0^{1/2}/n$. Por lo tanto, la velocidad del flujo es proporcional al radio hidráulico, y el radio hidráulico debe maximizarse (por lo tanto el perímetro debe minimizarse ya que $R_h = A_c/p$) para que pueda maximizarse la velocidad promedio del flujo o la razón de flujo por unidad del área de la sección transversal. Entonces, se llega a la siguiente conclusión:

> La mejor sección transversal hidráulica para un canal abierto es la que tiene el máximo radio hidráulico o, proporcionalmente, la que tiene menor perímetro mojado para una sección transversal especificada.

La forma con el perímetro mínimo por unidad de área es un círculo. Por lo tanto, con base en la mínima resistencia del flujo, la mejor sección transversal para un canal abierto es un semicírculo (Fig. 13-21). Sin embargo, es usualmente más barato construir un canal abierto con lados rectos (como los canales con secciones transversales trapezoidales o rectangulares) en vez de uno semicircular, y la forma general del canal puede especificarse *a priori*. Por lo que tiene sentido analizar cada una de las formas geométricas por separado para determinar la mejor sección transversa.

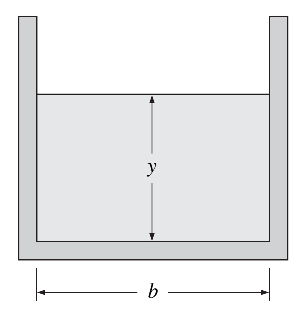


FIGURA 13-22
Un canal rectangular abierto de ancho b y profundidad de flujo y. Para un área de sección transversal dada, la mayor razón de flujo ocurre cuando $y = b/2$.

Como un ejemplo inductivo, se considera un canal rectangular de concreto acabado ($n = 0.012$) con un ancho b, profundidad de flujo y con una pendiente de fondo de 1° (Fig. 13-22). Para determinar el efecto de la razón de dimensiones del flujo en el canal y/b sobre el radio hidráulico R_h y el flujo volumétrico por unidad de área de sección transversal $\dot{V}$, R_h y $\dot{V}$ se evalúan a partir de la fórmula de Manning. Los resultados están tabulados en la tabla 13-2 y se trazan en la figura 13-23 para las razones de dimensiones desde 0.1 hasta 5. En la tabla y

TABLA 13-2

Variación del radio hidráulico R_h y razón de flujo $\dot{V}$ con razón *y/b* para un canal rectangular con A_c = 1 m^2, S_0 = tan 1° y n = 0.012

Razón *y/b*	Ancho del canal *b*, m	Profundidad del flujo *y*, m	Perímetro *p*, m	Radio hidráulico R_h, m	Razón de flujo $\dot{V}$, m^3/s
0.1	3.162	0.316	3.795	0.264	4.53
0.2	2.236	0.447	3.130	0.319	5.14
0.3	1.826	0.548	2.921	0.342	5.39
0.4	1.581	0.632	2.846	0.351	5.48
0.5	1.414	0.707	2.828	0.354	5.50
0.6	1.291	0.775	2.840	0.352	5.49
0.7	1.195	0.837	2.869	0.349	5.45
0.8	1.118	0.894	2.907	0.344	5.41
0.9	1.054	0.949	2.951	0.339	5.35
1.0	1.000	1.000	3.000	0.333	5.29
1.5	0.816	1.225	3.266	0.306	5.00
2.0	0.707	1.414	3.536	0.283	4.74
3.0	0.577	1.732	4.041	0.247	4.34
4.0	0.500	2.000	4.500	0.222	4.04
5.0	0.447	2.236	4.919	0.203	3.81

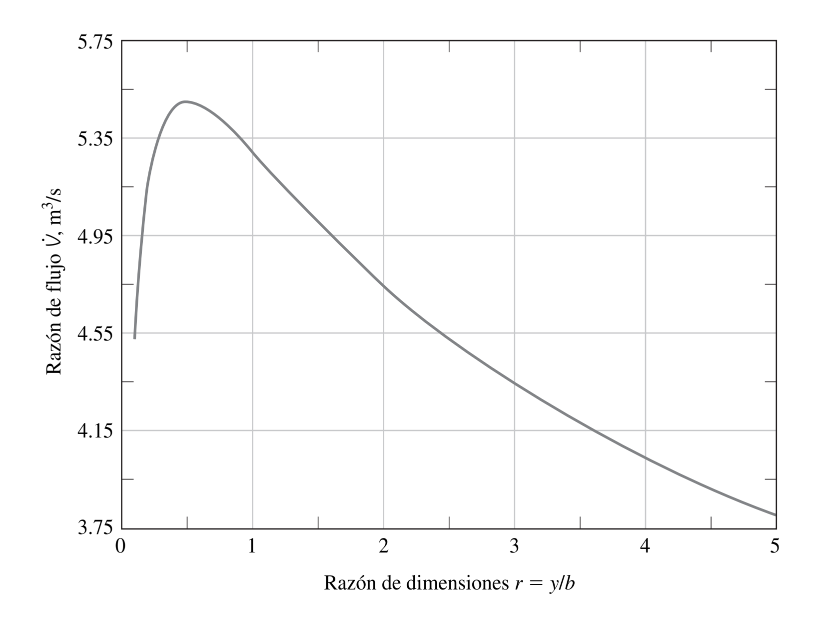


FIGURA 13-23
Variación de la razón de flujo en un canal rectangular con radio $r = y/b$ para A_c = 1 m^2 y S_0 = tan 1°.

en la gráfica puede observarse que la razón de flujo $\dot{V}$ aumenta con el incremento de *y/b,* alcanza su valor máximo en *y/b* igual a 0.5 y después empieza a disminuir (los valores numéricos de $\dot{V}$ pueden interpretarse también como velocidades de flujo en m/s ya que A_c = 1 m^2). Se observa la misma tendencia para el radio hidráulico, pero una tendencia opuesta para el perímetro mojado *p.* Estos resultados confirman que la mejor sección transversal para una forma dada del canal es la que tiene el máximo radio hidráulico, o, proporcionalmente, la que tiene el perímetro mojado menor.

Canales rectangulares

Considere el flujo de un líquido en un canal abierto de sección transversal rectangular de un ancho b y una profundidad de flujo y. El área de sección transversal y el perímetro mojado en una sección de flujo son:

$$A_c = yb \qquad \text{y} \qquad p = b + 2y \tag{13-45}$$

Se resuelve la primera relación de la ecuación 13-45 para b y se sustituye en la segunda relación, lo que da:

$$p = \frac{A_c}{y} + 2y \tag{13-46}$$

Ahora se aplica el criterio de la mejor sección transversal hidráulica para un canal abierto, la cual es la que tiene el menor perímetro mojado para una sección transversal dada. Se toma la derivada de p respecto a y mientras se mantiene constante Ac:

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{A_c}{y^2} + 2 = -\frac{by}{y^2} + 2 = -\frac{b}{y} + 2 \tag{13-47}$$

Al hacer $dp/dy = 0$ y resolver para y, se obtiene el siguiente criterio para la mejor sección transversal hidráulica:

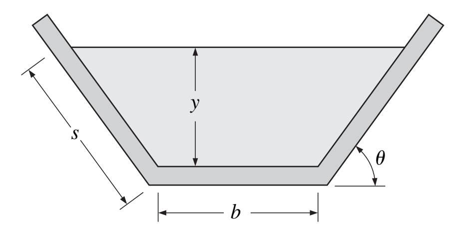
La mejor sección transversal hidráulica (canal rectangular): $y = \frac{b}{2}$ **(13-48)**

Por lo tanto, un canal abierto rectangular debe diseñarse de tal manera que la altura del líquido sea la mitad del ancho del canal para minimizar la fricción o maximizar la razón de flujo para un área de sección transversal dada. Esto también minimiza el perímetro y en consecuencia el costo de la construcción. Este resultado confirma lo encontrado en la tabla 13-2 que $y = b/2$ proporciona la mejor sección transversal.

Canales trapezoidales

Ahora se considera el flujo del líquido en un canal abierto de una sección transversal trapezoidal con un ancho de fondo b, profundidad de flujo y y un ángulo del trapezoide θ medido desde la horizontal, como se muestra en la figura 13-24. El área de sección transversal y el perímetro mojado en la sección de flujo son:

$$A_c = \left(b + \frac{y}{\tan\theta}\right)y \qquad \text{y} \qquad p = b + \frac{2y}{\text{sen}\,\theta} \tag{13-49}$$



$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{y(b + y/\tan\theta)}{b + 2y/\text{sen}}$$

FIGURA 13-24
Parámetros para un canal trapezoidal.

Se resuelve la primera relación de la ecuación 13-49 para b y se sustituye en la segunda relación:

$$p = \frac{A_c}{y} - \frac{y}{\tan} + \frac{2y}{\text{sen}\,\theta} \tag{13-50}$$

Se toma la derivada de p respecto a y y se mantienen constantes A_c y θ , se obtiene:

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{A_c}{y^2} - \frac{1}{\tan} + \frac{2}{\text{sen}\,\theta} = -\frac{b + y/\tan\theta}{y} - \frac{1}{\tan\theta} + \frac{2}{\text{sen}\,\theta} \tag{13-51}$$

Al hacer $dp/dy = 0$ y resolver para y, se obtiene el siguiente criterio para la mejor sección transversal hidráulica para cualquier ángulo θ de un trapezoide especificado:

La mejor sección transversal hidráulica (canal trapezoidal): $y = \frac{b\,\text{sen}\,\theta}{2(1 - \cos\theta)}$ **(13-52)**

Para un caso especial donde θ es igual a 90º (un canal rectangular), esta relación se reduce a $y = b/2$ como era de esperarse.

El radio hidráulico R_h para un canal trapezoidal puede expresarse de la siguiente manera:

$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{y(b + y/\tan\ \theta)}{b + 2y/\text{sen}\ \theta} = \frac{y(b\ \text{sen}\ \theta + y\cos\theta)}{b\ \text{sen}\ \theta + 2y} \tag{13-53}$$

Se reordena la ecuación 13-52 como $b\text{sen}\theta = 2y(1 - \cos\theta)$, se sustituye dentro de la ecuación 13-53 y se simplifica, y el radio hidráulico para un canal trapezoidal con la mejor sección transversal se convierte en:

El radio hidráulico para la mejor sección transversal: $$R_h = \frac{y}{2} \tag{13-54}$$

Por lo tanto, el radio hidráulico es la mitad de la profundidad del flujo para un canal trapezoidal con la mejor sección transversal y es independiente del ángulo θ del trapezoide.

De la misma manera se busca el ángulo del trapezoide correspondiente a la mejor sección transversal hidráulica con sólo tomar la derivada de p de la ecuación 13-50 respecto al ángulo y mantener constantes A_c y y. Después se hace $dp/d\theta = 0$, y se resuelve la ecuación resultante para el ángulo θ. Esto resulta ser:

Mejor ángulo trapezoide: $$\theta = 60° \tag{13-55}$$

Se sustituye el mejor ángulo del trapezoide $\theta = 60º$ en la relación de la mejor sección transversal hidráulica $y = b\ \text{sen}\ \theta/(2 - 2\cos\theta)$ y se tiene:

La mejor profundidad de flujo para $\theta = 60°$: $$y = \frac{\sqrt{3}}{2}b \tag{13-56}$$

Entonces la longitud del lado lateral de la sección del flujo y el área se convierten en:

$$s = \frac{y}{\text{sen}\ 60°} = \frac{b\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2} = b \tag{13-57}$$

$$p = 3b \tag{13-58}$$

$$A_c = \left(b + \frac{y}{\tan\theta}\right)y = \left(b + \frac{b\sqrt{3}/2}{\tan 60°}\right)(b\sqrt{3}/2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}b^2 \tag{13-59}$$

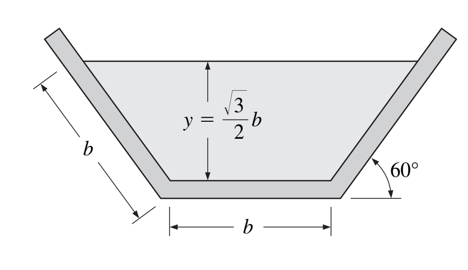


FIGURA 13-25
La mejor sección transversal para canales trapezoidales es la *mitad de un hexágono.*

porque $\tan 60° = \sqrt{3}$. Por lo tanto, la mejor sección transversal para canales trapezoidales es *la mitad de un hexágono* (Fig. 13-25). Esto no debe sorprender ya que un hexágono cerrado se aproxima a un círculo y la mitad de un hexágono tiene el menor perímetro por unidad de área de la sección transversal de todos los canales trapezoidales.

La mejor sección transversal hidráulica para otras formas de canales puede determinarse de manera similar. Por ejemplo, puede mostrarse que la mejor sección transversal hidráulica de un canal circular de diámetro D corresponde a $y = D/2$.

EJEMPLO 13-5 La mejor sección transversal de un canal abierto

Se transporta agua a razón de 2 m^3/s mediante un flujo uniforme en un canal abierto cuyas superficies están revestidas con asfalto. La pendiente del flujo es 0.001. Determine las dimensiones de la mejor sección transversal si la forma del canal es *a*) rectangular y *b*) trapezoidal (Fig. 13-26).

SOLUCIÓN Se transporta agua en un canal abierto con una razón especificada. Deben determinarse las mejores dimensiones del canal para las formas rectangular y trapezoidal.

Hipótesis 1 El flujo es estacionario y uniforme. 2 La pendiente del fondo es constante. 3 La rugosidad de la superficie mojada del canal y por tanto el coeficiente de fricción son constantes.

Propiedades El coeficiente de Manning para un canal abierto con revestimiento de asfalto es $n = 0.016$.

Análisis *a*) La mejor sección transversal para un canal rectangular ocurre cuando la altura del flujo es la mitad de la anchura del canal, $y = b/2$. Entonces el área de sección transversal, el perímetro y el radio hidráulico del canal son:

$$A_c = by = \frac{b^2}{2} \qquad p = b + 2y = 2b \qquad R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{b}{4}$$

Se sustituye en la ecuación de Manning,

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} \quad \rightarrow \quad b = \left(\frac{2n\dot{V}4^{2/3}}{a\sqrt{S_0}}\right)^{3/8} = \left(\frac{2(0.016)(2\text{ m}^3/\text{s})4^{2/3}}{(1\text{ m}^{1/3}/\text{s})\sqrt{0.001}}\right)^{3/8}$$

se obtiene $b = 1.84$ m. Por lo tanto, $A_c = 1.70\text{ m}^2$, $p = 3.68$ m y las dimensiones para el mejor canal rectangular son:

$$b = \mathbf{1.84\ m} \qquad \text{y} \qquad y = \mathbf{0.92\ m}$$

b) La mejor sección transversal para un canal trapezoidal ocurre cuando el ángulo del trapezoide es 60° y la altura del flujo es $y = b\sqrt{3}/2$. Entonces:

$$A_c = y(b + b\cos\theta) = 0.5\sqrt{3}b^2(1 + \cos 60°) = 0.75\sqrt{3}b^2$$

$$p = 3b \qquad R_h = \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}b$$

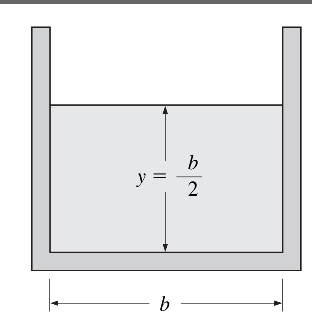
Se sustituye en la ecuación de Manning:

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} \quad \rightarrow \quad b = \left(\frac{(0.016)(2\text{ m}^3/\text{s})}{0.75\sqrt{3}\left(\sqrt{3}/4\right)^{2/3}(1\text{ m}^{1/3}/\text{s})\sqrt{0.001}}\right)^{3/8}$$

donde $b = 1.12$ m. Por lo tanto, $A_c = 1.64\text{ m}^2$, $p = 3.37$ m y las dimensiones para el mejor canal trapezoidal son:

$$b = \mathbf{1.12\ m} \qquad y = \mathbf{0.973\ m} \qquad \text{y} \qquad \theta = \mathbf{60°}$$

Discusión Observe que la sección transversal trapezoidal es mejor puesto que ésta tiene un perímetro más pequeño (3.37 m contra 3.68 m) y por tanto un costo menor.



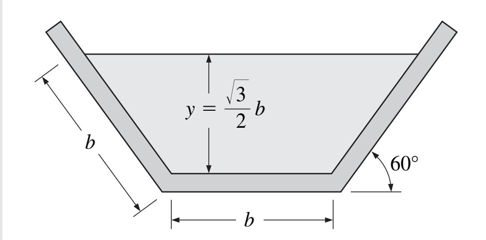


FIGURA 13-26
Esquema para el ejemplo 13-5.

13-7 ▪ FLUJO DE VARIACIÓN GRADUAL

Hasta este momento se consideraba un *flujo uniforme* cuando la profundidad del flujo y y la velocidad del flujo V se mantienen constantes. En esta sección se toma en cuenta un *flujo de variación gradual* (FVG, GVF por sus siglas en inglés), la cual es una forma de flujo estacionario no uniforme con una variación gradual en la profundidad y velocidad de flujo (pendientes pequeñas y sin cambios bruscos) y una superficie libre que siempre se mantiene suave (sin discontinuidades o zigzag). Flujos que implican cambios rápidos de profundidad y velocidad del flujo, llamados *flujos de variación rápida* (FVR, RVF por sus siglas en inglés) se tratan en la sección 13-8. Un cambio en la pendiente del fondo o

un cambio de la sección transversal o una obstrucción en el camino del flujo pueden causar que el flujo uniforme se vuelva un flujo de variación gradual o rápida.

Los flujos de variación rápida ocurren en un tramo corto de un canal con el área de superficie mojada relativamente pequeña; por tanto las pérdidas por fricción relacionadas con los esfuerzos cortantes son despreciables. Las pérdidas de carga en FVR son altas y se deben a la intensa agitación y turbulencia. Las pérdidas en FVG, por otro lado, se deben más que todo a los efectos de fricción a lo largo del canal y pueden determinarse con la fórmula de Manning.

En flujos de variación gradual la profundidad del flujo y la velocidad varían lentamente y la superficie libre es estable. Esto hace posible formular la variación de la profundidad del flujo a lo largo del canal con ayuda de la ley de la conservación de masa y el principio de la conservación de energía y también obtener las relaciones para el perfil de la superficie libre.

En un flujo uniforme, la pendiente de la línea de energía es igual a la pendiente del fondo del canal. Por lo tanto la pendiente de fricción es igual a la pendiente del fondo $S_f = S_0$. En flujos de variación gradual, sin embargo, estas pendientes son diferentes.

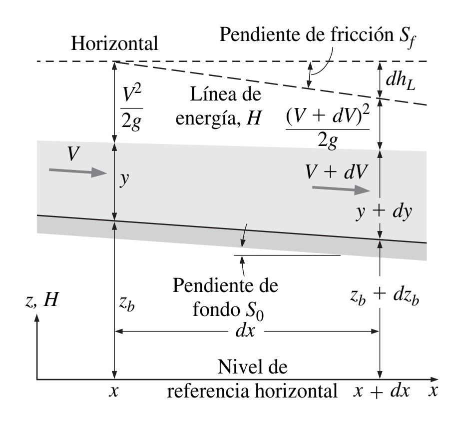


FIGURA 13-27
Variación de las propiedades sobre la sección diferencial de flujo en un canal abierto en las condiciones de flujo de variación gradual (GVF).

Considere un flujo estacionario en un canal abierto rectangular con un ancho b, tome en cuenta alguna variación en la pendiente del fondo y una profundidad del agua también gradual. Nuevamente, se escribe la ecuación en términos de la velocidad promedio V y se considera que la distribución de la presión es hidrostática. De la ecuación 13-17, la carga total del líquido en cualquier sección transversal es $H = z_b + y + V^2/2g$, donde z_b es la distancia vertical de la superficie del fondo del nivel de referencia. Al diferenciar H respecto a x se tiene:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx}\left(z_b + y + \frac{V^2}{2g}\right) = \frac{dz_b}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{V}{g}\frac{dV}{dx} \tag{13-60}$$

Pero H es la energía total del líquido y por tanto dH/dx es la pendiente de la línea de energía (cantidad negativa), la cual es igual al valor negativo de la pendiente de la fricción, como se muestra en la figura 13-27. También, dz_b/dx es igual al valor negativo de la pendiente del fondo. Por lo tanto:

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{dh_L}{dx} = -S_f \qquad \text{y} \qquad \frac{dz_b}{dx} = -S_0 \tag{13-61}$$

Se sustituye la ecuación 13-61 en la ecuación 13-60 y se tiene:

$$S_0 - S_f = \frac{dy}{dx} + \frac{V}{g}\frac{dV}{dx} \tag{13-62}$$

La ecuación de continuidad para flujo estacionario en canal rectangular es $\dot{V} = ybV =$ constante. Al diferenciar respecto a x resulta:

$$0 = bV\frac{dy}{dx} + yb\frac{dV}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = -\frac{V}{y}\frac{dy}{dx} \tag{13-63}$$

Se sustituye la ecuación 13-63 en la ecuación 13-62 y note que $V/\sqrt{gy}$ es el número de Froude,

$$S_0 - S_f = \frac{dy}{dx} - \frac{V^2}{gy}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} - \mathrm{Fr}^2\frac{dy}{dx} \tag{13-64}$$

Al resolver para dy/dx se obtiene la relación deseada para la razón de cambio de la profundidad del flujo (o el perfil de la superficie) en flujo de variación gradual en un canal abierto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \mathrm{Fr}^2} \tag{13-65}$$

el cual es análogo a la variación del área del flujo como una función del número de Mach en flujo compresible. Esta relación se deduce a partir de un canal rectangular, pero también es válida para canales de otras secciones transversales constantes si el número de Froude se expresa adecuadamente. Una solución analítica o numérica de esta ecuación diferencial, para un conjunto de los parámetros especificados, da la profundidad del flujo y como una función de x, y la función $y(x)$ es el *perfil de la superficie*.

La tendencia general de la profundidad del flujo, ya sea que aumente, disminuya o se mantenga constante a lo largo del canal, depende del signo de dy/dx, el cual depende de los signos de numerador y denominador de la ecuación 13-65. El número de Froude es siempre positivo y también lo es la pendiente de fricción S_f (excepto en el caso hipotético de un flujo con fricción despreciable para el cual tanto h_L como S_f son cero). La pendiente del fondo S_0 es positiva para tramos de pendiente descendente (por lo general el caso), cero para tramos horizontales y negativa para tramos con pendiente ascendente (flujo adverso). La profundidad del flujo se incrementa cuando $dy/dx > 0$, disminuye cuando $dy/dx < 0$, y se mantiene constante (por lo tanto la superficie libre es paralela al fondo del canal, como en flujos uniformes) cuando $dy/dx = 0$ y también $S_0 = S_f$. Para valores específicos de $S_0 = S_f$, el término dy/dx puede ser positivo o negativo depende si el número de Froude es mayor o menor que 1. Por lo tanto, el comportamiento de los flujos subcrítico y supercrítico son opuestos. Para $S_0 - S_f > 0$, por ejemplo, la profundidad del flujo se incrementa en la dirección del flujo en flujos subcríticos, pero disminuye en flujos supercríticos.

La determinación del signo del denominador $1 - \mathrm{Fr}^2$ es fácil; éste es positivo para flujos subcríticos ($\mathrm{Fr} < 1$), y negativo para flujos supercríticos ($\mathrm{Fr} > 1$). Pero el signo del numerador depende de las magnitudes relativas de S_0 y S_f. Observe que la pendiente de la fricción S_f es siempre positiva y su valor es igual a la pendiente del canal S_0 en flujo uniforme, $y = y_n$. Note que la pérdida de carga aumenta cuando aumenta la velocidad, y la velocidad es inversamente proporcional a la profundidad de flujo para una razón de flujo dada, $S_f > S$, por tanto $S_0 - S_f < 0$ cuando $y < y_n$, y $S_f < S_0$ y en consecuencia $S_0 - S_f > 0$ cuando $y > y_n$. El numerador $S_0 - S_f$ es siempre negativo en la horizontal ($S_0 = 0$) y canales de pendiente ascendente ($S_0 < 0$), por lo tanto, la profundidad del flujo disminuye en la dirección del flujo en caso de flujo subcrítico en estos canales.

Perfiles de superficie de líquido en canales abiertos, *y*(*x*)

Los sistemas de canales abiertos se diseñan y construyen con base en la profundidad del flujo proyectada a lo largo del canal. Por lo tanto, es importante ser capaz de predecir la profundidad del flujo para una razón de flujo y una geometría del canal especificadas. Una gráfica de profundidades de flujo proporciona **perfil de superficie** de flujo. Las características generales de los perfiles de superficie para flujos de variación gradual dependen de la pendiente del fondo y la profundidad del flujo relativa a las profundidades críticas y normales.

Un canal abierto típico incluye varias secciones de diferentes pendientes de fondo S_0 y distintos regímenes de flujo, por lo tanto varios tramos de diferentes perfiles de superficie. Por ejemplo, la forma general del perfil de superficie en un tramo de pendiente decreciente de un canal es diferente a un tramo de pendiente ascendente. Asimismo, el perfil en flujos subcríticos es diferente al perfil en flujos supercríticos. Distinto de un flujo uniforme que no incluye fuerzas de

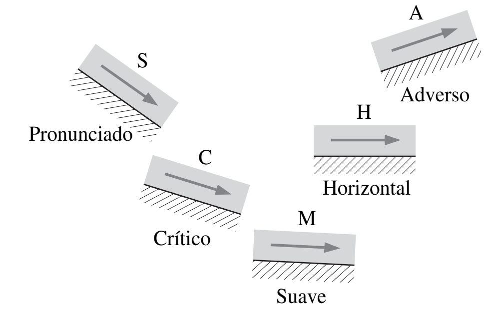


FIGURA 13-28
Designación de las letras S, C, M, H y A para perfiles superficiales de líquido para diferentes tipos de pendientes.

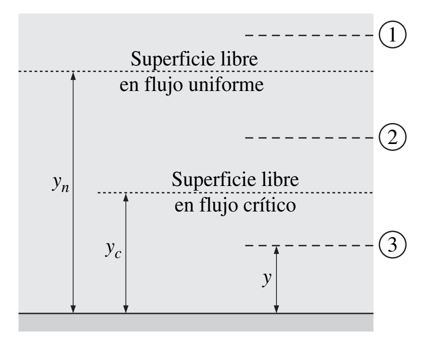


FIGURA 13-29
Designación de los números 1, 2 y 3 para perfiles superficiales de líquido basada en el valor de la profundidad de flujo relativa a las profundidades crítica y normal.

inercia, flujos de variación gradual implican aceleración y desaceleración de líquido. El perfil de superficie refleja el balance dinámico entre el peso del líquido, la fuerza de fricción y los efectos inerciales.

Cada perfil de superficie se define por una letra que indica la pendiente del canal y por el número que indica la profundidad del flujo relativa a la profundidad crítica y_c y la profundidad normal y_c. La pendiente del canal puede ser suave (M, de *mild* en inglés), crítica (C), pronunciada (S, de *steep* en inglés), horizontal (H) o adversa (A). Se dice que la pendiente del canal es suave si $y_n > y_c$, pronunciada si $y_n < y_c$, crítica si $y_n = y_c$, horizontal si $S_0 = 0$ (pendiente del fondo cero) y adversa si $S_0 < 0$ (pendiente negativa). Note que el líquido fluye cuesta arriba en un canal abierto que tiene una pendiente adversa (Fig. 13-28).

La clasificación de un tramo del canal depende de la razón de flujo y la sección transversal del canal, como también de la pendiente del fondo del canal. Un tramo del canal que se clasifica por tener una pendiente suave para cierto flujo, puede tener una pendiente pronunciada para otro , y aún más, una pendiente crítica para un tercero. Por lo tanto, se necesita calcular la profundidad crítica y_c y la profundidad normal y_c, antes de evaluar la pendiente.

La designación de números indica la posición inicial de la superficie libre del líquido para una pendiente de canal dada relativa a los niveles de la superficie libre en flujos crítico y uniforme, como se muestra en la figura 13-29. Un perfil de la superficie se designa por 1 si la profundidad del flujo está arriba de las profundidades crítica y normal ($y > y_c$ y $y < y_n$), por 2 si la profundidad del flujo está entre las dos ($y_n > y > y_c$ o $y_n < y < y_c$), y por 3 si la profundidad del flujo está abajo de las profundidades crítica y normal ($y < y_c$ y $y < y_n$). Por lo tanto, tres perfiles diferentes son posibles para un tipo específico de pendiente del canal. Pero en el caso de los canales con pendientes cero o adversas, el flujo de tipo 1 no puede existir porque el flujo nunca puede ser uniforme en canales cuesta arriba u horizontales y por tanto la profundidad normal no está definida. También el flujo de tipo 2 no existe en canales con pendiente crítica porque las profundidades crítica y normal son idénticas en este caso.

Las cinco clases de pendientes y los tres tipos de posiciones iniciales comentados dan un total de 12 configuraciones distintas para perfiles de la superficie en FV, todos tabulados en la tabla 13-3. El número de Froude también se da para cada caso con Fr > 1 para $y < y_c$, como también se indica el signo de la pendiente dy/dx del perfil de la superficie determinado con la ecuación 13-65, $dy/dx = (S_0 - S_f)/(1 - \text{Fr}^2)$. Note que $dy/dx > 0$, y por tanto la profundidad del flujo aumenta en la dirección del flujo, cuando ambos $S_0 - S_f$ y $1 - \text{Fr}^2$ son positivos o negativos. En caso opuesto $dy/dx < 0$ y la profundidad del flujo disminuye. En flujos de tipo 1, la profundidad del flujo aumenta en la dirección de flujo y el perfil de la superficie se aproxima al plano horizontal asintóticamente. En flujos de tipo 2, la profundidad del flujo disminuye y el perfil de la superficie se aproxima por abajo de y_c o y_n. En flujos de tipo 3, la profundidad del flujo aumenta y el perfil de la superficie continúa mientras que no haya un cambio en la pendiente del flujo o en la rugosidad.

Considere el primer caso de la tabla 13-3 designado con M1 (pendiente suave del canal y $y > y_n > y_c$). El flujo es subcrítico porque $y > y_c$ y por tanto Fr < 1 y $1 - \text{Fr}^2 > 0$. También $S_f < S_0$ y en consecuencia $S_0 - S_f > 0$, ya que $y > y_n$, y por tanto la velocidad del flujo es menor que la velocidad en flujo normal. Por esto, la pendiente en el perfil de la superficie $dy/dx = (S_0 - S_f)/(1 - \text{Fr}^2) > 0$, y la profundidad del flujo y aumenta en la dirección de flujo. Pero como y aumenta, la velocidad del flujo disminuye, y por consiguiente S_f y Fr se aproxima a cero. Consecuentemente, dy/dx se aproxima a S_0 y la razón de incremento en la profundidad del flujo se vuelve igual a la pendiente del canal. Esto exige que el perfil de la superficie primero crezca en la dirección del flujo y luego tienda a la asíntota horizontal.

TABLA 13-3

Clasificación de perfiles en flujos gradualmente variados

Pendiente del canal	Notación del perfil	Profundidad de flujo	Número de Froude	Pendiente del perfil	Perfil de superficie
Suave (M) $y_c < y_n$, $S_0 < S_c$	M1	$y > y_n$	Fr < 1	$\frac{dy}{dx} > 0$	
	M2	$y_c < y < y_n$	Fr < 1	$\frac{dy}{dx} < 0$	
	M3	$y < y_c$	Fr > 1	$\frac{dy}{dx} > 0$	Canal de fondo, $S_0 < S_c$
Pronunciada (S) $y_c > y_n$, $S_0 < S_c$	S1	$y > y_c$	Fr < 1	$\frac{dy}{dx} > 0$	
	S2	$y_n < y < y_c$	Fr > 1	$\frac{dy}{dx} < 0$	
	S3	$y < y_n$	Fr > 1	$\frac{dy}{dx} > 0$	Canal de fondo, $S_0 > S_c$
Crítica (C) $y_c = y_n$, $S_0 < S_c$	C1	$y > y_c$	Fr < 1	$\frac{dy}{dx} > 0$	
	C3	$y < y_c$	Fr > 1	$\frac{dy}{dx} > 0$	Canal de fondo, $S_0 = S_c$
Horizontal (H) $y_n \to \infty$, $S_0 = 0$	H2	$y > y_c$	Fr < 1	$\frac{dy}{dx} < 0$	
	H3	$y < y_c$	Fr > 1	$\frac{dy}{dx} > 0$	Canal de fondo, $S_0 = 0$
Adversa (A) $S_0 < 0$, y_n: no existe	A2	$y > y_c$	Fr < 1	$\frac{dy}{dx} < 0$	
	A3	$y < y_c$	Fr > 1	$\frac{dy}{dx} > 0$	Canal de fondo, $S_0 < 0$

Como $y \rightarrow y_c$ en flujos subcríticos (como en M2, H2 y A2), se tiene $Fr \rightarrow 1$ y $1 - Fr^2 \rightarrow 0$, por tanto la pendiente dy/dx tiende al infinito negativo. Pero $y \rightarrow y_c$ en flujos supercríticos (como en M3, H3, y A3) se tiene $Fr \rightarrow 1$ y $1 - Fr^2 \rightarrow 0$, por consiguiente la pendiente dy/dx, la cual es una cantidad positiva, tiende a infinito. Por eso, la superficie libre crece casi verticalmente y la profundidad del flujo aumenta muy rápido. Esto no puede sostenerse físicamente y la superficie libre se derriba. El resultado es un salto hidráulico. La suposición unidimensional no es aplicable cuando esto sucede.

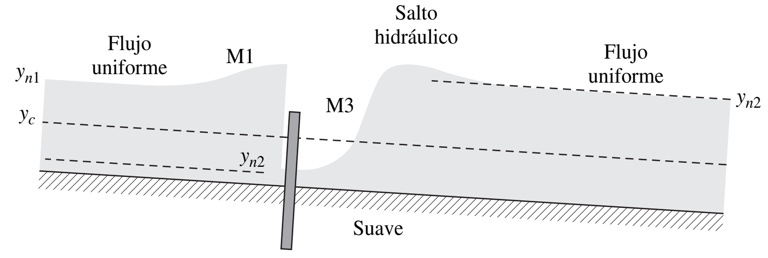
Algunos perfiles representativos de la superficie

Un sistema de canal abierto típico incluye algunos tramos de diferentes pendientes con conexiones llamadas *transiciones*. Por consiguiente, el perfil global de la superficie del flujo es un perfil continuo hecho de perfiles individuales antes descritos. Algunos perfiles representativos de la superficie que comúnmente se encuentran en canales abiertos, inclusive algunos perfiles compuestos, se muestran en la figura 13-30. Para cada caso, el cambio en el perfil de la superficie se produce por un cambio en la geometría del canal como un cambio brusco en la pendiente o una obstrucción en el flujo, por ejemplo una compuerta. Más perfiles compuestos pueden encontrarse en libros especializados que se enlistan en las referencias. Un punto sobre el perfil de la superficie representa la altura del flujo en este punto que satisface las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento, y energía. Note que $dy/dx \ll 1$ y $S_0 \ll 1$ en un flujo de variación gradual y ambas pendientes, del canal y del perfil de la superficie, en estos esquemas están muy exageradas para mejor visualización. Muchos canales y perfiles de la superficie aparecerían casi horizontales si se dibujaran a escala.

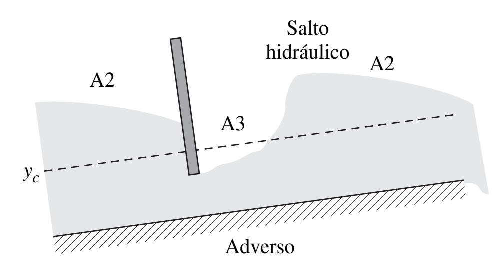
La figura 13-30*a* muestra el perfil de la superficie para un flujo de variación gradual en un canal con pendiente suave y una compuerta. El flujo subcrítico corriente arriba (note que el flujo es subcrítico porque la pendiente es suave) se vuelve más lento mientras se aproxima a la compuerta (como cuando un río se aproxima a una presa) y el nivel del líquido crece. El flujo que pasa por la compuerta es supercrítico (porque la altura de la abertura es menor a la profundidad crítica). Por lo tanto, el perfil de la superficie es M1 antes de la compuerta y M3 después de la compuerta pero previo al salto hidráulico.

Un tramo de un canal abierto puede tener una pendiente negativa e incluir un flujo cuesta arriba, como se muestra en la figura 13-30*b*. Un flujo con una pendiente adversa no puede mantenerse a menos que las fuerzas de inercia superen las fuerzas de gravedad y viscosidad que se oponen al movimiento del flujo. Por lo tanto, a una sección del canal cuesta arriba le sigue una sección cuesta abajo o una caída libre. Para flujos subcríticos con pendiente adversa que se aproximan a la compuerta, la profundidad del flujo disminuye cuanto más se acerque a la compuerta, dando paso a un perfil A2. Un flujo que pasa por la compuerta es normalmente supercrítico y da paso a un perfil A3, previo al salto hidráulico.

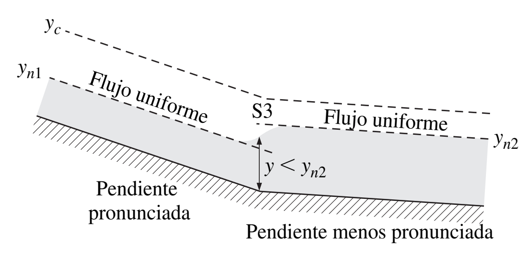
La sección de canal abierto en la figura 13-30*c* incluye un cambio en la pendiente de inclinada a menos inclinada. La velocidad del flujo en la parte menos pronunciada es más lenta (una caída de elevación menor para conducir el flujo). Por tanto, la profundidad del flujo es más grande cuando un flujo uniforme se establece otra vez. Note que un flujo uniforme con pendiente pronunciada debe ser supercrítico ($y < y_c$), la profundidad del flujo aumenta desde la inicial hasta el nuevo nivel uniforme de manera suave a través de un perfil S3.



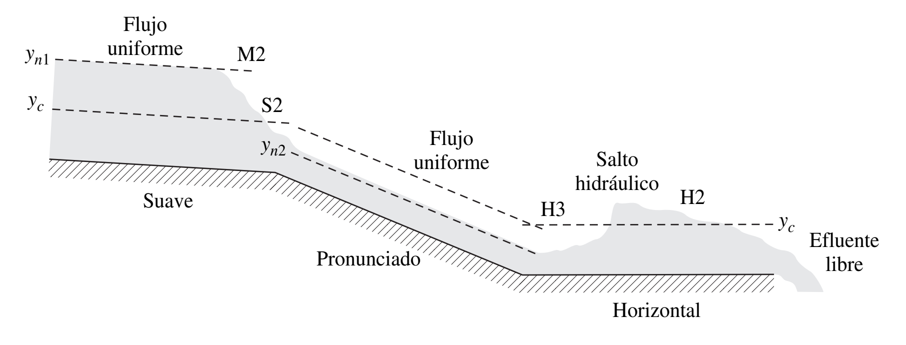
a) Flujo a través de una compuerta de desagüe en un canal abierto con una pendiente suave



b) Flujo a través de una compuerta de desagüe en un canal abierto con una pendiente adversa y efluente libre



c) Flujo uniforme supercrítico que cambia desde una pendiente pronunciada a la pendiente menos pronunciada



d) Flujo uniforme supercrítico con efluente libre que cambia desde una pendiente suave hacia la pronunciada y después hacia una horizontal

FIGURA 13-30
Algunos perfiles superficiales comunes encontrados en el flujo de un canal abierto. Todos los flujos están desde la izquierda hasta la derecha.

En la figura 13-30*d* se muestra un perfil de la superficie formado por un canal abierto que incluye varias secciones de flujo. Inicialmente la pendiente leve y el flujo son uniformes y supercríticos. Después, la pendiente cambia a pronunciada, y el flujo se vuelve supercrítico cuando un flujo uniforme se establece. La profundidad crítica ocurre al cambio de la pendiente. El cambio en la pendiente está acompañado por una disminución suave en la profundidad del flujo a través de un perfil M2 al final de la sección de la pendiente leve, y a través de un perfil S2 al principio de la sección de la pendiente pronunciada. En secciones hori-

zontales, la profundidad del flujo aumenta primero de manera suave a través del perfil H3, y después rápidamente durante el salto hidráulico. La profundidad del flujo entonces disminuye a través del perfil H2 mientras que el líquido acelera hacia el final del canal en caída libre. El flujo se vuelve crítico antes de alcanzar el final del canal, y la caída controla el flujo corriente arriba después del salto hidráulico. El flujo de la caída del arroyo es supercrítico. Note que un flujo uniforme no puede establecerse en un canal horizontal ya que las fuerzas de gravedad no tienen componentes en la dirección del flujo y el flujo es conducido por las fuerzas de inercia.

Soluciones numéricas del perfil de la superficie

La predicción del perfil de la superficie *y(x)* es parte importante en el diseño de sistemas de canales abiertos. Un comienzo adecuado para determinar el perfil de la superficie se da mediante la identificación de puntos a lo largo del canal, llamados **puntos de control**, donde puede calcularse la profundidad del flujo, sólo con conocer su razón. Por ejemplo, la profundidad del flujo en un tramo de un canal rectangular donde ocurren flujos críticos, llamados *puntos críticos*, pueden determinarse como $y_c = (\dot{V}^2/gb^2)^{1/3}$. La *profundidad normal* y_n, la cual es la profundidad del flujo alcanzada cuando el flujo uniforme está establecido, también sirve como un punto de control. Cuando las profundidades en los puntos de control estén disponibles, el perfil de superficie corriente arriba o corriente abajo puede determinarse, de manera usual por una integración numérica de la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \mathrm{Fr}^2} \tag{13-66}$$

La pendiente de fricción S_f se determina por las condiciones de flujo uniforme, y el número de Froude, por la relación apropiada de la sección transversal del canal.

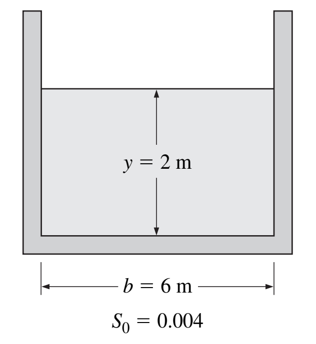


FIGURA 13-31
Esquema para el ejemplo 13-6.

EJEMPLO 13-6 **Clasificación de la pendiente del canal**

Fluye agua de manera uniforme en un canal rectangular abierto con superficies inacabadas de concreto. El canal mide 6 m de ancho. La profundidad del flujo es 2 m y la pendiente del fondo es de 0.004. Determine si la pendiente del canal debe clasificarse como suave, crítica o pronunciada para este flujo (Fig. 13-31).

SOLUCIÓN Fluye agua uniformemente en un canal. Se debe determinar si la pendiente del canal es suave, crítica o pronunciada para este flujo.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario y uniforme. **2** La pendiente del fondo es constante. **3** La rugosidad de la superficie mojada del canal y por tanto el coeficiente de fricción son constantes.
Propiedades El coeficiente de Manning para un canal abierto con superficies de concreto inacabado es $n = 0.014$.
Análisis El área de la sección transversal, el perímetro y el radio hidráulico son:

$$A_c = yb = (2\text{ m})(6\text{ m}) = 12\text{ m}^2$$

$$p = b + 2y = 6\text{ m} + 2(2\text{ m}) = 10\text{ m}$$

$$R_h = \frac{A_c}{p} = \frac{12\text{ m}^2}{10\text{ m}} = 1.2\text{ m}$$

La razón de flujo se determina con la ecuación de Manning de la siguiente manera:

$$\dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1\ \text{m}^{1/3}/\text{s}}{0.014}(12\ \text{m}^2)(1.2\ \text{m})^{2/3}(0.004)^{1/2} = \mathbf{61.2\ m^3/s}$$

Se observa que el flujo es uniforme, la razón de flujo específico corresponde a la profundidad normal y por tanto $y = y_n = 2$ m. La profundidad crítica para este flujo es:

$$y_c = \frac{\dot{V}^2}{gA_c^2} = \frac{(61.2\ \text{m}^3/\text{s})^2}{(9.81\ \text{m/s}^2)(12\ \text{m}^2)} = 2.2\ \text{m}$$

La pendiente del canal, con estas condiciones se clasifica como **pronunciada**, porque $y_n < y_c$, y el flujo es supercrítico.

Discusión Si la profundidad del flujo fuera mayor de 2.2 m se diría que la pendiente de canal es suave. Por lo tanto, sólo la pendiente del fondo no es suficiente para clasificar un canal cuesta abajo como suave, crítico o pronunciado.

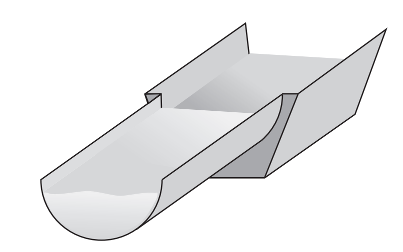


FIGURA 13-32
El flujo de variación rápida ocurre cuando ocurre un cambio repentino de flujo, tal como un cambio abrupto en la sección transversal.

13-8 ▪ FLUJO DE VARIACIÓN RÁPIDA Y SALTO HIDRÁULICO

Recuerde que un flujo en canales abiertos se llama **flujo de variación rápida (FVR,** RVF por sus siglas en inglés) si su profundidad cambia de manera evidente en una distancia relativamente corta en la dirección del flujo (Fig. 13-32). Estos flujos ocurren en compuertas de desagüe, vertederos de pared delgada o gruesa, cascadas y la sección de transición de canales que se expanden o se contraen. Un cambio en la sección transversal del canal es importante razón para que los flujos de variación rápida ocurran. Pero algunos flujos de variación rápida, como los flujos a través de compuertas de desagüe, suceden inclusive en regiones donde la sección transversal del canal es constante.

Usualmente los flujos de variación rápida son complicados por el hecho de que implican importantes efectos multidimensionales y transitorios, flujos en reversa y separación de flujos. Por lo tanto, los flujos de variación rápida por lo general se estudian de manera experimental o numéricamente. Pero pese a estas complejidades, no obstante es posible analizar algunos flujos de variación rápida con precisión razonable si se usan aproximaciones unidimensionales.

El flujo en canales inclinados puede ser supercrítico, y éste puede cambiar a subcrítico si el canal no puede mantener un flujo supercrítico debido a una reducción de la pendiente del canal o el incremento de los efectos de fricción. Cualquier cambio de supercrítico a subcrítico ocurre mediante un *salto hidráulico*. Un salto hidráulico implica considerables mixturas y agitaciones, y por consiguiente una cantidad considerable de disipación de energía mecánica.

Considere un flujo estacionario a través de un volumen de control que rodea un salto hidráulico, como se muestra en la figura 13-33. Para hacer posible un análisis simple, se necesitan establecer las siguientes hipótesis:

1. La velocidad es casi constante a través de las secciones 1 y 2 del canal, y por lo tanto, los factores de corrección del momento del flujo son $\beta_1 = \beta_2 \cong 1$.
2. La presión en el líquido varía hidrostáticamente, y se considerará la presión manométrica solamente ya que la presión atmosférica actúa sobre todas las superficies y su efecto se cancela.
3. El esfuerzo del corte y las pérdidas asociadas son despreciables respecto a las pérdidas que ocurren durante el salto hidráulico debido a su intensidad.

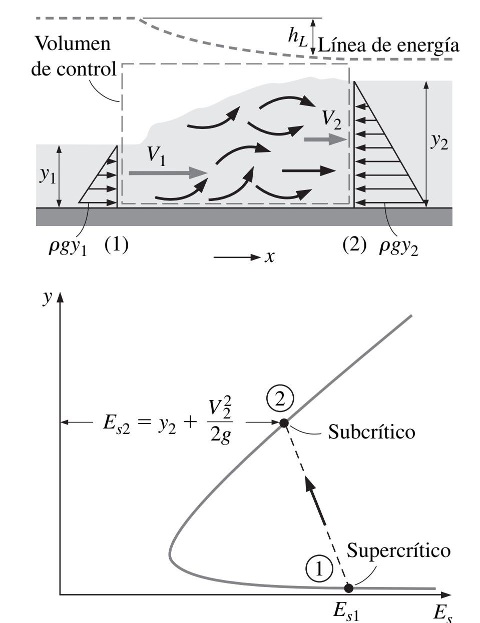


FIGURA 13-33
Esquema y diagrama de la profundidad de flujo contra la energía específica para un salto hidráulico (la energía específica disminuye).

4. El canal es ancho y horizontal.
5. No hay fuerzas externas o de cuerpo más que la gravedad.

Para un canal de ancho b, la ley de conservación de la masa o la ecuación de continuidad $\dot{m}_2 = \dot{m}_1$ puede expresarse como $\rho y_1 b V_1 = \rho y_2 b V_2$ o

$$y_1 V_1 = y_2 V_2 \tag{13-67}$$

Note que las únicas fuerzas que actúan en el volumen de control en la dirección horizontal x son las fuerzas de presión. La ecuación de cantidad de movimiento $\sum \vec{F} = \sum_{\text{sal}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta \dot{m} \vec{V}$ en la dirección x se vuelve un equilibro entre las fuerzas de presión hidrostática y la transferencia de cantidad de movimiento:

$$P_{1,\text{ prom}} A_1 - P_{2,\text{ prom}} A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{13-68}$$

donde $P_{1,\text{ prom}} = \rho g y_1/2$ y $P_{2,\text{ prom}} = \rho g y_2/2$. Para un canal de ancho b, se tiene que $A_1 = y_1 b$, $A_2 = y_2 b$, y $\dot{m} = \dot{m}_2 = \dot{m}_1 = \rho A_1 V_1 = \rho y_1 b V_1$. Se sustituye y se simplifica, la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a:

$$y_1^2 - y_2^2 = \frac{2 y_1 V_1}{g}(V_2 - V_1) \tag{13-69}$$

Se elimina V_2 con el uso de $V_2 = (y_1/y_2)V_1$ que se obtiene de la ecuación de continuidad:

$$y_1^2 - y_2^2 = \frac{2 y_1 V_1^2}{g y_2}(y_1 - y_2) \tag{13-70}$$

Cuando se cancelan los factores comunes $y_1 - y_2$ en ambos lados y se reacomodan, se obtiene:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \frac{y_2}{y_1} - 2\mathrm{Fr}_1^2 = 0 \tag{13-71}$$

donde $\mathrm{Fr}_1 = V_1/\sqrt{g y_1}$. Ésta es una ecuación cuadrática para y_2/y_1, y tiene dos raíces, una negativa y otra positiva. Note que y_2/y_1 no puede ser negativa ya que tanto y_2 como y_1 son cantidades positivas, la razón de profundidades y_2/y_1 se determina de la siguiente manera

Razón de profundidades:
$$\frac{y_2}{y_1} = 0.5\left(-1 + \sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_1^2}\right) \tag{13-72}$$

La ecuación de energía para el tramo de flujo horizontal puede expresarse de la siguiente manera:

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L \tag{13-73}$$

Note que $V_2 = (y_1/y_2)V_1$ y $\mathrm{Fr}_1 = V_1/\sqrt{g y_1}$, la pérdida de carga relacionada con el salto hidráulico se expresa así:

$$h_L = y_1 - y_2 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = y_1 - y_2 + \frac{y_1 \mathrm{Fr}_1^2}{2}\left(1 - \frac{y_1^2}{y_2^2}\right) \tag{13-74}$$

La línea de energía para un salto hidráulico se muestra en la figura 13-33. La caída en la línea de energía a través del salto representa la pérdida de carga h_L relacionada con el salto.

Para Fr_1 y y_1 dadas, la profundidad del flujo corriente abajo y_2 y la pérdida de carga h_L pueden calcularse con las ecuaciones 13-72 y 13-74, respectivamente. Si se traza h_L contra Fr_1 se revela que h_L se vuelve negativa cuando $Fr_1 < 1$, lo cual es imposible (esto corresponderá a una entropía negativa, lo cual sería una violación a la segunda ley de la termodinámica). Por lo tanto, se llega a la conclusión que el flujo corriente arriba debe ser supercrítico ($Fr_1 > 1$) cuando ocurre un salto hidráulico. En otras palabras, es imposible para un flujo subcrítico experimentar un salto hidráulico. Esto es análogo al flujo de gas supersónico (el número de Mach mayor que 1) que experimente una onda de choque.

La pérdida de carga es una medida de la energía mecánica disipada mediante la fricción de fluido interna, y la pérdida de carga es usualmente indeseable porque representa la energía mecánica perdida. Pero algunas veces los saltos hidráulicos se diseñan en conjunción con cuencas inmóviles y flujos de desborde de presas, y es deseable desperdiciar tanta energía mecánica como sea posible para minimizar la energía mecánica del agua y por tanto su potencial para causar daños. Esto se hace primero cuando se producen flujos supercríticos, se convierten grandes presiones en grandes velocidades lineales, y después se permite que el flujo agite y disipe parte de su energía cinética, hasta que se rompa y se desacelere hasta una velocidad subcrítica. Por lo tanto, una medida de ejecución de un salto hidráulico es la fracción de su disipación de energía.

La energía específica de un líquido antes del salto hidráulico es $E_{s1} = y_1 + V_1^2/2g$. Entonces, la *razón de disipación de energía* (Fig. 13-34) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\text{Razón de disipación} = \frac{h_L}{E_{s1}} = \frac{h_L}{y_1 + V_1^2/2g} = \frac{h_L}{y_1(1 + Fr_1^2/2)} \qquad \textbf{(13-75)}$$

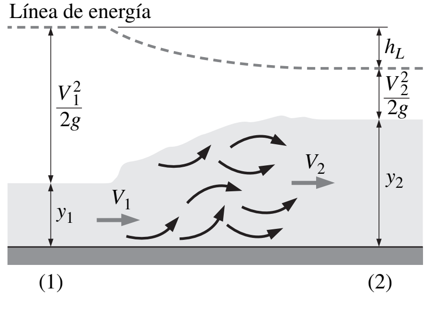


FIGURA 13-34
La razón de disipación de energía representa la fracción de energía mecánica disipada durante un salto hidráulico.

La fracción de la energía disipada se extiende sólo desde un porcentaje para saltos hidráulicos débiles ($Fr_1 < 2$) hasta 85 por ciento para saltos hidráulicos fuertes ($Fr_1 > 9$).

A diferencia de un choque normal en un flujo de gas, el cual ocurre prácticamente en una sección transversal y de tal manera su grosor es despreciable, el salto hidráulico ocurre sobre una longitud considerable del canal. En el rango de los números de Froude de interés práctico, se observa que la longitud del salto hidráulico es de 4 hasta 7 veces la profundidad del flujo corriente abajo y_2.

Estudios experimentales indican que el salto hidráulico puede considerarse en cinco categorías como se muestra en la tabla 13-4. Esto depende primero del valor del número de Froude corriente arriba Fr_1. Para Fr_1 cualquiera mayor que 1, el líquido crece ligeramente durante el salto hidráulico y produce ondas en el mismo lugar. A un valor de Fr_1 más grande, ocurren ondas oscilatorias muy peligrosas. El rango deseable del número de Froude es $4.5 < Fr_1 < 9$, en el cual se producen ondas estacionarias estables y bien balanceadas con altos niveles de disipación de energía en el salto. Saltos hidráulicos con $Fr_1 > 9$ producen ondas muy agitadas. La razón de profundidades y_2/y_1 varía del valor ligeramente por arriba de 1, en *saltos ondulares* que son leves e incluyen pequeños crecimientos del nivel de la superficie hasta 12 en *saltos fuertes,* que son grandes e incluyen crecimientos altos del nivel de la superficie.

Esta sección se limita a considerar los canales horizontales rectangulares, para los cuales el margen y los efectos de la gravedad sean despreciables. Saltos hidráulicos en canales no rectangulares y canales con pendiente se comportan de manera similar, pero las características del flujo y por tanto la relación para la razón de profundidades, pérdida de carga, longitud del salto y la razón de disipación son diferentes.

TABLA 13-4

Clasificación de saltos hidráulicos

Fuente: Oficina de Reclamación U.S. (1955).

Corriente arriba Fr_1	Razón de profundidades y_2/y_1	Fracción de energía disipada	Descripción	Perfil de superficie
<1	1	0	*Salto imposible*. Violaría la segunda ley de la termodinámica	
1–1.7	1–2	<5%	*Ondulatorio* (*onda estacionaria*). Pequeño aumento en la superficie de nivel. Baja disipación de la energía. Las ondas superficiales se desarrollan cerca de Fr = 1.7	y_1 V_1 V_2 y_2
1.7–2.5	2–3.1	5–15%	*Salto débil*. La superficie aumenta suavemente con pequeñas ondas. Baja disipación de la energía	
2.5–4.5	3.1–5.9	15–45%	*Salto oscilatorio*. Las pulsaciones causadas por los chorros en el fondo generan ondas que pueden viajar por millas y dañar bancos terrestres. Deben evitarse en el diseño de cuencas de aguas tranquilas.	
4.5–9	5.9–12	45–70%	*Salto estable*. Estable, bien balanceado e insensible a condiciones corriente abajo. Intenso movimiento de remolino y alto nivel de disipación de energía en el salto. Rango recomendado para diseño.	
>9	>12	70–85%	*Salto fuerte*. Agresivo e intermitente. Muy efectivo en disipación de energía, pero menos económico comparado con otros diseños.	

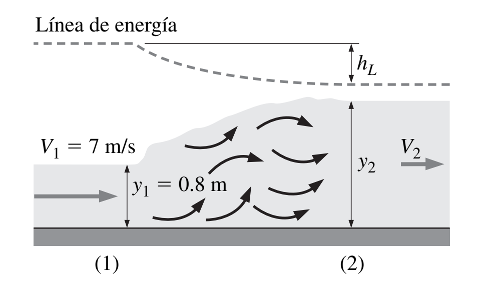


FIGURA 13-35
Esquema para el ejemplo 13-7.

EJEMPLO 13-7 Salto hidráulico

Se observa que el agua que se descarga dentro de un canal horizontal rectangular de 10 m de ancho, desde una compuerta de desagüe está experimentando un salto hidráulico. La profundidad del flujo y la velocidad antes del salto son de 0.8 m y 7 m/s, respectivamente. Determine *a*) la profundidad del flujo y el número de Froude después del salto, *b*) la pérdida de carga y la razón de disipación y *c*) la potencia que pudiera servir para generar energía, pero se perdió debido al salto hidráulico (Fig. 13-35).

SOLUCIÓN El agua con profundidad y velocidad específicas experimenta un salto hidráulico en un canal horizontal. La profundidad y el número de Froude des-

pués del salto, la pérdida de carga y la razón de disipación y la potencia desperdiciada deben determinarse

Hipótesis **1** El flujo es estacionario o cuasi-estacionario. **2** El canal es suficientemente ancho, así que los efectos de los bordes son despreciables.

Propiedades La densidad del agua es 1 000 kg/m³.

Análisis *a*) El número de Froude antes del salto hidráulico es:

$$\text{Fr}_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{7 \text{ m/s}}{\sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(0.8 \text{ m})}} = 2.50$$

que es mayor que 1. Por lo tanto, el flujo es sin duda supercrítico antes del salto. La profundidad del flujo, velocidad y número de Froude después del salto son:

$$y_2 = 0.5y_1\left(-1 + \sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2}\right) = 0.5(0.8 \text{ m})\left(-1 + \sqrt{1 + 8 \times 2.50^2}\right) = \mathbf{2.46 \text{ m}}$$

$$V_2 = \frac{y_1}{y_2}V_1 = \frac{0.8 \text{ m}}{2.46 \text{ m}}(7 \text{ m/s}) = 2.28 \text{ m/s}$$

$$\text{Fr}_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gy_2}} = \frac{2.28 \text{ m/s}}{\sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(2.46 \text{ m})}} = \mathbf{0.464}$$

Note que la profundidad del flujo se triplica y el número de Froude se reduce a un quinto después del salto.

b) La pérdida de carga se determina con la ecuación de energía y es:

$$h_L = y_1 - y_2 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = (0.8 \text{ m}) - (2.46 \text{ m}) + \frac{(7 \text{ m/s})^2 - (2.28 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)}$$
$$= \mathbf{0.572 \text{ m}}$$

La energía específica del agua antes del salto y la razón de disipación son:

$$E_{s1} = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = (0.8 \text{ m}) + \frac{(7 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 3.30 \text{ m}$$

$$\text{Razón de disipación} = \frac{h_L}{E_{s1}} = \frac{0.572 \text{ m}}{3.30 \text{ m}} = \mathbf{0.173}$$

Por lo tanto, 17.3 por ciento de la carga disponible (o energía mecánica) del líquido se pierde (se convierte en energía térmica) en resultado de los efectos de fricción en este salto hidráulico.

c) La razón del flujo de masa del agua es:

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = \rho by_1V_1 = (1\,000 \text{ kg/m}^3)(0.8 \text{ m})(10 \text{ m})(7 \text{ m/s}) = 56\,000 \text{ kg/s}$$

Entonces, la disipación de potencia correspondiente a la pérdida de carga de 0.572 m se convierte en:

$$\dot{E}_{\text{disipación}} = \dot{m}gh_L = (56\,000 \text{ kg/s})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.572 \text{ m})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$
$$= 314{,}000 \text{ N} \cdot \text{m/s} = \mathbf{314 \text{ kW}}$$

Discusión Los resultados muestran que el salto hidráulico es un proceso muy disipativo que desperdicia 314 kW de potencia que podría aprovecharse. Esto es, si el agua se redirecciona a una turbina hidráulica en vez de ser liberada en una

compuerta de desagüe, hasta 314 kW de potencia podría generarse. Pero este potencial se convierte en energía térmica inútil en vez de una energía útil y provoca un incremento de temperatura del agua de

$$\Delta T = \frac{\dot{E}_{\text{disipación}}}{\dot{m}c_p} = \frac{314 \text{ kJ/s}}{(56\,000 \text{ kg/s})(4.18 \text{ kJ/kg} \cdot {}^\circ\text{C})} = 0.0013^\circ\text{C}$$

Observe que un calentador eléctrico de 314 kW podría causar el mismo incremento de temperatura en el agua que fluye a una razón de 56 000 kg/s.

13-9 ▪ CONTROL Y MEDIDA DEL FLUJO

La razón de flujo en tuberías y conductos se controla por numerosas clases de válvulas. El flujo líquido en canales abiertos, sin embargo, no está limitado, y por consiguiente la razón de flujo se controla al bloquear el canal de manera parcial. Esto se realiza ya sea cuando se permite que el líquido fluya sobre la obstrucción o abajo de ésta. Una obstrucción que permita que el líquido fluya sobre ésta se llama **vertedero**, y a una obstrucción con una abertura ajustable en el fondo y que permita al flujo del líquido pasar por abajo de éste se le llama **compuerta de corriente** subálvea. Estos mecanismos pueden usarse para controlar la razón de flujo en el canal y también para medirlo.

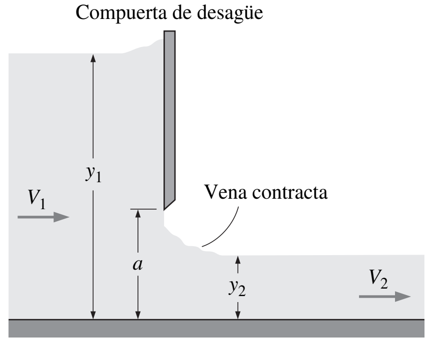
Compuertas de corriente subálvea

Existen numerosos tipos de compuertas de corriente subálvea para controlar la razón de flujo, cada uno con ciertas ventajas y desventajas. Compuertas de corriente subálvea se localizan en el fondo de la pared, dique o canal abierto. Dos tipos comunes de compuertas de corriente subálvea son la *compuerta de desagüe* y *compuerta de tambor*, que se muestran en la figura 13-36. Una compuerta de desagüe es usualmente vertical y tiene una superficie plana, mientras que la compuerta de tambor tiene una sección transversal circular con una superficie currentilínea.

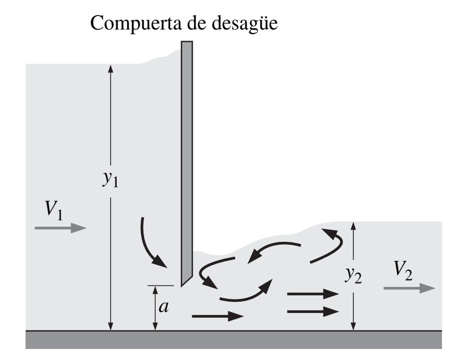
Cuando la compuerta está abierta, el líquido corriente arriba acelera mientras se aproxima a la compuerta, alcanza su velocidad crítica en la compuerta, y acelera hasta alcanzar una velocidad supercrítica cuando pasa por la compuerta. Por lo tanto, una compuerta de corriente subálvea es análoga a la tobera convergente-divergente en la dinámica de gas. La descarga desde una compuerta de corriente subálvea se llama *efluente libre* si el chorro del líquido que corre afuera de la compuerta está expuesto a la atmósfera, y se le llama *efluente ahogado* (o *sumergido*) si la descarga del líquido se regresa y sumerge el chorro, como se muestra en la figura 13-36. En efluentes ahogados, el chorro del líquido experimenta un salto hidráulico, y por consiguiente el flujo corriente abajo es subcrítico. También los efluentes ahogados implican un nivel alto de turbulencias y flujos en reversa, como también una gran pérdida de carga h_L.

El diagrama de la profundidad del flujo contra la energía específica para flujos que salen de las compuertas de corriente subálvea con efluentes libre y ahogado se muestra en la figura 13-37. Note que la energía específica se mantiene constante para compuertas idealizadas con efectos de fricción despreciables (desde el punto 1 hasta el punto 2*a*), pero disminuye para las compuertas reales. El flujo corriente abajo es supercrítico si tiene una compuerta con efluente libre (punto 2*b*), pero subcrítico para un efluente ahogado (punto 2*c*) ya que un efluente ahogado también involucra un salto hidráulico al flujo subcrítico, el cual representa considerables mixturas y disipación de energía.

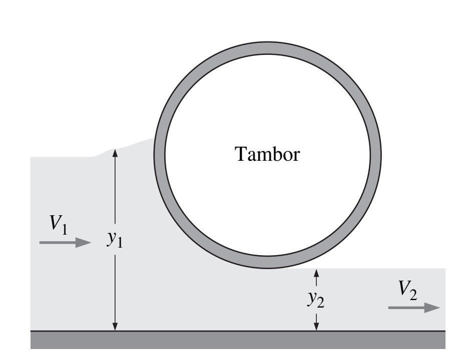
Si se supone que los efectos de fricción son despreciables y que la velocidad corriente arriba (o en el depósito) sea baja, se puede mostrar con la ecuación de



a) Compuerta con efluente libre



b) Compuerta de desagüe con efluente ahogado



c) Compuerta de tambor

FIGURA 13-36
Tipos comunes de compuertas de corriente subálvea para controlar la razón de flujo.

Bernoulli que la velocidad de la descarga de efluente libre es (vea capítulo 5 para más detalles)

$$V = \sqrt{2gy_1} \tag{13-76}$$

Se puede tomar en cuenta los efectos de fricción y modificar esta relación al introducir el **coeficiente de descarga** C_d. Entonces, la velocidad de la descarga en la compuerta y la razón de flujo se convierten en:

$$V = C_d\sqrt{2gy_1} \qquad \text{y} \qquad \dot{V} = C_d ba\sqrt{2gy_1} \tag{13-77}$$

en donde b y a son la anchura y la altura de la abertura de la compuerta, respectivamente.

El coeficiente de descarga $C_d = 1$ para flujos imaginarios, pero $C_d < 1$ para flujos reales que pasan a través de las compuertas. De manera experimental se determinaron los valores de C_d para compuertas de corriente subálvea que se trazan en la figura 13-38 como funciones del coeficiente de contracción y_2/a y la razón de profundidad y_1/a. Observe que la mayoría de los valores de C_d para efluentes libres de compuertas verticales se extienden entre 0.5 y 0.6. Los valores de C_d caen de manera angulosa para efluentes ahogados, como era de esperarse, y la razón de flujo disminuye si se mantienen las mismas condiciones corriente arriba. Para un valor dado de y_1/a el valor de C_d disminuye al incrementar y_2/a .

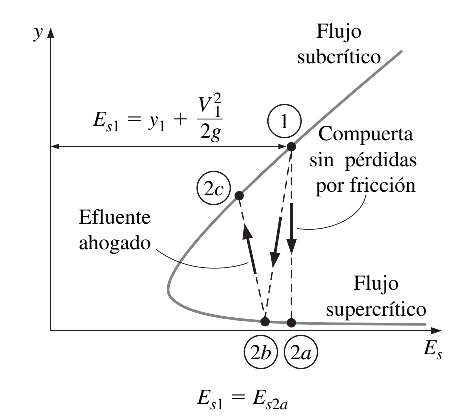


FIGURA 13-37
Esquema y diagrama de la profundidad de flujo contra la energía específica para el flujo a través de compuertas de corriente subálvea.

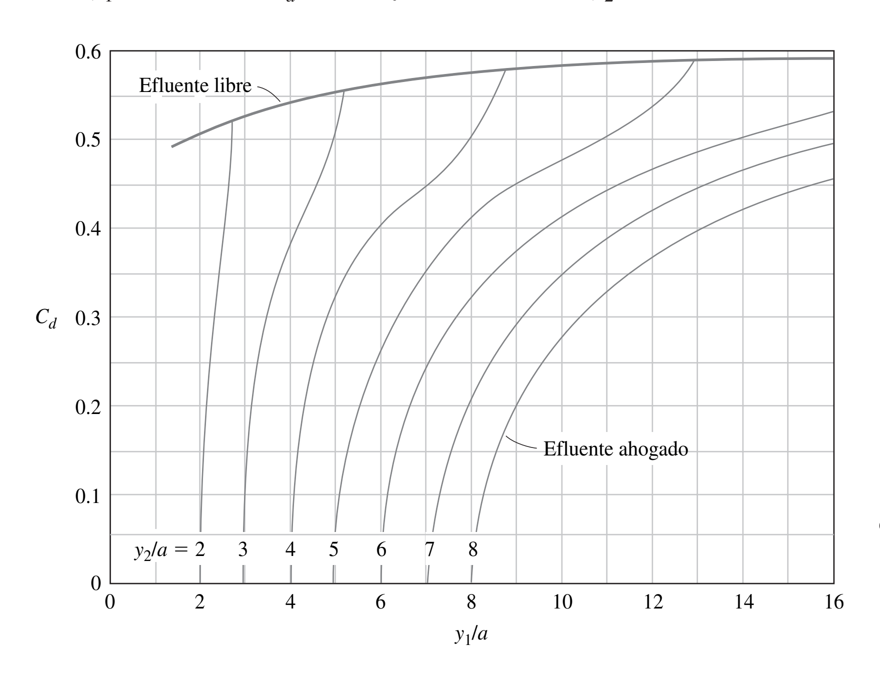


FIGURA 13-38
Coeficientes de descarga a través de compuertas de corriente subálvea. para efluentes libre y ahogado

Tomado de Henderson, Open Channel Flow, *1st Edition, © 1966. Reimpreso con autorización de Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.*

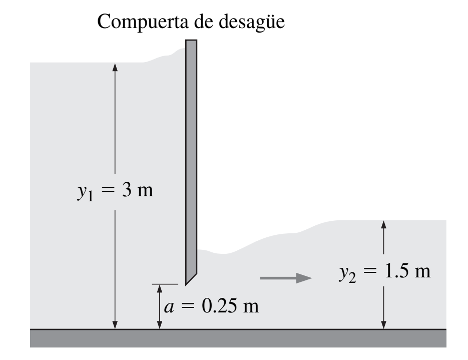


FIGURA 13-39
Esquema para el ejemplo 13-8.

EJEMPLO 13-8 **Compuertas con efluentes ahogados**

Se libera desde un depósito de 3 m de profundidad a un canal abierto de 6 m de ancho a través de una compuerta de 0.25 m de alto con la abertura localizada en el fondo. La profundidad del flujo después de que se calmen todas las turbulencias es 1.5 m. Determine la razón de la descarga (Fig. 13-39).

SOLUCIÓN El agua se libera desde un depósito a través de una compuerta a un canal abierto. Para profundidades de flujo especificadas, la razón de la descarga tiene que determinarse.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario o cuasi-estacionario. **2** El canal es suficientemente ancho, así que los efectos de los bordes son despreciables.

Análisis La razón de la profundidad y_1/a y el coeficiente de contracción y_2/a son:

$$\frac{y_1}{a} = \frac{3 \text{ m}}{0.25 \text{ m}} = 12 \qquad \text{y} \qquad \frac{y_2}{a} = \frac{1.5 \text{ m}}{0.25 \text{ m}} = 6$$

El coeficiente de descarga correspondiente se determina de la figura 13-38 y es $C_d = 0.47$. Entonces, la razón de la descarga se convierte en:

$$\dot{V} = C_d ba\sqrt{2gy_1} = 0.47(6 \text{ m})(0.25 \text{ m})\sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m})} = \mathbf{5.41 \text{ m}^3/\text{s}}$$

Discusión En el caso del efluente libre, el coeficiente de descarga sería $C_d = 0.59$, con una razón de flujo correspondiente de 6.78 m^3/s. Por lo tanto, la razón de flujo disminuye considerablemente cuando el efluente es ahogado.

Compuertas de sobreflujo

Recuerde que la energía mecánica total de un líquido en cualquier sección transversal de un canal abierto puede estar expresada en términos de cargas como $H = z_b + y + V^2/2g$, donde y es la profundidad del flujo, z_b es la elevación del fondo del canal, y V es la velocidad promedio del flujo. En el flujo con efectos de fricción despreciable (pérdida de carga $h_L = 0$), la energía mecánica total se mantiene constante, y la ecuación unidimensional de la energía para un flujo en un canal abierto entre una sección 1 corriente arriba y una sección 2 corriente abajo puede ser expresada de la siguiente manera:

$$z_{b1} + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_{b2} + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} \qquad \text{o} \qquad E_{s1} = \Delta z_b + E_{s2} \tag{13-78}$$

donde $E_s = y + V^2/2g$ es la energía específica y $\Delta z_b = z_{b2} - z_{b1}$ es la elevación del punto del fondo en la sección 2 relativa a la sección 1. Por lo tanto, la energía específica de un flujo del líquido se incrementa en $|\Delta z_b|$ durante el flujo cuesta abajo (note que Δz_b es negativo en canales con inclinaciones hacia abajo), disminuye en Δz_b en el flujo cuesta arriba, y se mantiene constante en el flujo horizontal (la energía específica también disminuye en h_L en todos los casos si los efectos de fricción no son despreciables).

Para un canal abierto de ancho constante b, $\dot{V} = A_c V = byV =$ constante en un flujo estacionario y $V = \dot{V}/A_c$. Entonces, la energía específica puede expresarse así:

$$E_s = y + \frac{\dot{V}^2}{2gb^2y^2} \tag{13-79}$$

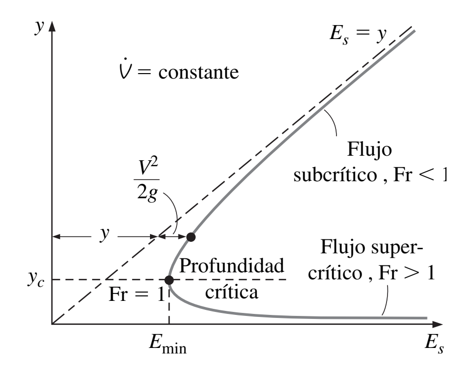


FIGURA 13-40
Variación de la energía específica E_s respecto a la profundidad y para una razón de flujo especificada.

La variación de la energía específica E_s con una profundidad del flujo y para flujos estacionarios en un canal con ancho constante b está trazada en la figura 13-40. Este diagrama es extremadamente valioso, ya que muestra los estados permitidos en el flujo. Después que las condiciones corriente arriba en la sección 1

del flujo estén especificadas, el punto correspondiente al estado del líquido en cualquier sección 2 se ubica en el diagrama E_s-y sobre la curva de la energía específica que pasa a través del punto 1.

Flujo con fricción despreciable sobre un tope

Considere flujo estacionario con fricción despreciable sobre un tope de altura Δz_b en un canal horizontal de ancho constante b, como se muestra en la figura 13-41. La ecuación de la energía en este caso es de la ecuación 13-78:

$$E_{s2} = E_{s1} - \Delta z_b \tag{13-80}$$

Por lo tanto, la energía específica de un líquido disminuye en Δz_b mientras éste fluye sobre el tope, y el estado del líquido en el diagrama de E_s-y se desplaza hacia la izquierda en Δz_b como se muestra en la figura 13-41. La ecuación de continuidad para el canal de un gran ancho es $y_2V_2 = y_1V_1$ y por consiguiente $V_2 = (y_1/y_2)V_1$. Entonces la energía específica de un líquido sobre el tope puede expresarse de la siguiente manera:

$$E_{s2} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} \qquad \rightarrow \qquad E_{s1} - \Delta z_b = y_2 + \frac{V_1^2}{2g}\frac{y_1^2}{y_2^2} \tag{13-81}$$

Al reordenar términos:

$$y_2^3 - (E_{s1} - \Delta z_b)y_2^2 + \frac{V_1^2}{2g}\,y_1^2 = 0 \tag{13-82}$$

la cual es una ecuación polinomial de tercer grado en y_2 y por tanto tiene tres soluciones. Descartando la solución negativa, parece que la profundidad del flujo sobre el tope puede tener dos valores.

Ahora, la pregunta curiosa es: el nivel del líquido ¿aumenta o disminuye sobre el tope? La intuición dice que el cuerpo completo del líquido seguirá al tope y por consiguiente la superficie del líquido aumentará cuando pase por el tope, pero esto no necesariamente es así. Note que la energía específica es la suma de la profundidad del flujo y la carga dinámica, y cada escenario es posible, dependiendo cómo cambia la velocidad. El diagrama de E_s-y de la figura 13-41 proporciona la respuesta definitiva. Si el flujo es subcrítico antes del tope (estado 1*a*), la profundidad del flujo y_2 disminuye (estado 2*a*). Si la disminución de la profundidad del flujo es mayor a la altura del tope (es decir $y_1 - y_2 > \Delta z_b$), la superficie libre se suprime. Pero si el flujo es *supercrítico* mientras se aproxima al tope (estado 1*b*), la profundidad del flujo aumenta por arriba del tope (estado 2*b*) y crea un tope más alto sobre la superficie libre.

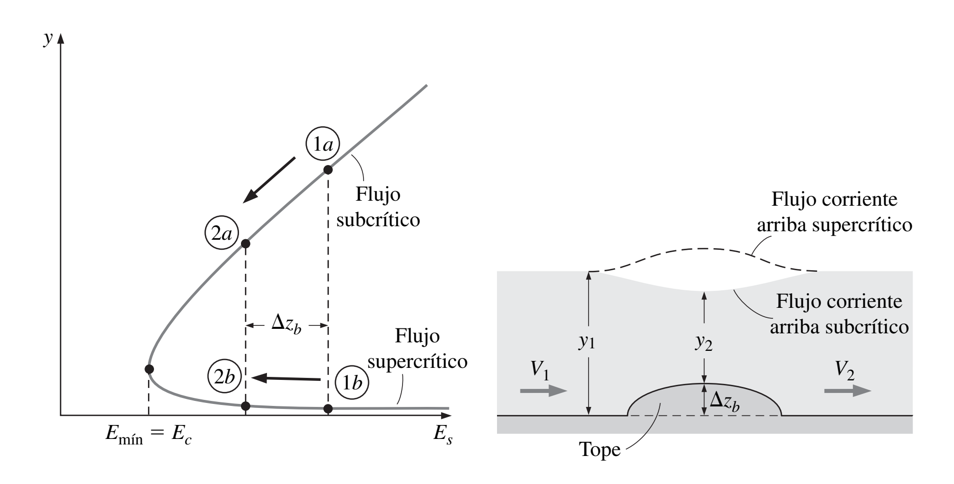


FIGURA 13-41
Esquema y diagrama de la profundidad contra la energía específica del flujo sobre un tope para flujos corriente arriba subcrítico y supercrítico.

La situación se invierte si el canal tiene una depresión de profundidad Δz_b en vez de un tope. La energía específica en este caso aumenta (así que el estado 2 está a la derecha del estado 1 en el diagrama de E_s-y) ya que Δz_b es negativo. Por lo tanto, la profundidad aumenta mientras el flujo que se aproxima es subcrítico y disminuye si éste es supercrítico.

Considere ahora el flujo sobre un tope con fricción despreciable como ya se indicó . Mientras la altura del tope Δz_b está en aumento, el punto 2 (ya sea 2*a* o 2*b* para flujos subcríticos o supercríticos) continúa desplazándose hacia la izquierda en el diagrama de E_s-y, hasta que finalmente alcanza el punto crítico. Esto significa que el flujo sobre el tope es *crítico* cuando la altura de éste es $\Delta z_c = E_{s1} - E_{sc} = E_{s1} - E_{\text{mín}}$, y la energía específica del líquido alcanza su nivel mínimo.

La pregunta en la mente es: ¿qué pasa si la altura del tope se incrementa más adelante?, la energía específica del líquido ¿continúa disminuyendo? La respuesta a esta pregunta es un rotundo *no*, ya que el líquido está hasta su nivel mínimo de energía, y su energía no puede disminuir más. En otras palabras, el líquido ya está hasta el punto más apartado de la izquierda en el diagrama de E_s-y, y un punto más a la izquierda no puede satisfacer la ley de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía. Por lo tanto, el flujo debe mantenerse crítico. El flujo en este estado se dice que está **bloqueado**. En dinámica de gas, esto es análogo al flujo en una tobera convergente que acelera mientras la presión que recibe el flujo a la salida de la tobera disminuye y alcanza la velocidad del sonido a la salida de la tobera cuando la presión afuera de la salida de la tobera alcanza el valor de la presión crítica. Pero la velocidad del flujo a la salida de la tobera se mantiene en el nivel sónico sin importar qué tanto más se disminuye la presión que recibe el flujo afuera de la salida de la tobera. Aquí otra vez, el flujo está bloqueado.

Vertederos de pared gruesa o vertederos de cresta ancha

El comentario acerca del flujo sobre una protuberancia alta puede resumirse de la siguiente manera: *el flujo sobre una obstrucción lo suficientemente alta en un canal abierto es siempre crítico.* Estas obstrucciones colocadas intencionalmente en un canal abierto para medir la razón de flujo se llaman *vertederos*. Por lo tanto, la velocidad de flujo sobre un vertedero lo suficientemente ancho se expresa como $V = \sqrt{gy_c}$, donde y_c es la velocidad crítica. Entonces la razón de flujo sobre un vertedero de ancho b puede expresarse como:

$$\dot{V} = A_cV = y_cb\sqrt{gy_c} = bg^{1/2}y_c^{3/2} \qquad \textbf{(13-83)}$$

Un **vertedero de pared gruesa** es un bloque rectangular de altura P_w y longitud L_w que tiene una cresta horizontal sobre la cual ocurre un flujo crítico (Fig. 13-42). La carga corriente arriba por encima de la superficie superior se llama **carga de vertedero** y se denota por H. Para obtener la relación de la profundidad crítica y_c en términos de carga de vertedero, se escribe la ecuación de la energía entre la sección corriente arriba y la sección sobre el vertedero para flujos con fricción despreciable como:

$$H + P_w + \frac{V_1^2}{2g} = y_c + P_w + \frac{V_c^2}{2g} \qquad \textbf{(13-84)}$$

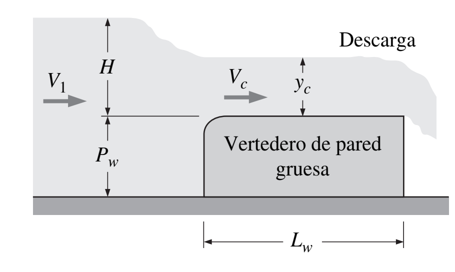


FIGURA 13-42
Flujo sobre un vertedero de pared

Se cancela P_w de ambos lados, se sustituye $V_c = \sqrt{gy_c}$ y se tiene:

$$y_c = \frac{2}{3}\left(H + \frac{V_1^2}{2g}\right) \qquad \textbf{(13-85)}$$

Se sustituye esta relación en la ecuación 13-83, y entonces la razón de flujo para este caso de flujo imaginario con fricción despreciable puede determinarse como:

$$\dot{V}_{\text{ideal}} = b\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\left(H + \frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2} \quad \text{(13-86)}$$

Esta relación define la dependencia funcional de la razón de flujo de los parámetros de flujo, pero sobrevalúa la razón de flujo en varios porcientos porque no se consideran los efectos de fricción. Estos efectos se consideran correctamente cuando se modifica la relación teórica (Ec. 13-86) por medio de un *coeficiente de descarga del vertedero* C_{dv} determinado experimentalmente como:

Vertedero de pared gruesa:

$$\dot{V} = C_{\text{dv, grueso}}\, b\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\left(H + \frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2} \quad \text{(13-87)}$$

donde valores razonablemente correctos de los coeficientes de descarga para vertederos de pared gruesa pueden obtenerse a partir de (Chow, 1959):

$$C_{\text{dv, grueso}} = \frac{0.65}{\sqrt{1 + H/P_w}} \quad \text{(13-88)}$$

Relaciones más correctas, pero más complicadas para $C_{\text{dv, grueso}}$ se encuentran disponibles en la literatura (por ejemplo, Ackers, 1978). También la velocidad V_1 es muy baja usualmente, y puede despreciarse. Esto se cumple especialmente para el caso de vertederos altos. Entonces la razón de flujo puede aproximarse como:

Vertedero de pared gruesa con V_1 pequeña:

$$\dot{V} \cong C_{\text{dv, grueso}}\, b\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} H^{3/2} \quad \text{(13-89)}$$

Se debe tener en la mente que la necesidad básica para el uso de las ecuaciones 13-87 a 13-89 es el establecimiento del flujo crítico por encima del vertedero, y esto pone algunas limitaciones en la longitud del vertedero L_w. Si el vertedero es demasiado largo ($L_w > 12H$), los efectos de fricción dominan y causan que el flujo sobre el vertedero sea subcrítico. Si el vertedero es demasiado corto ($L_w < 2H$), el líquido no es capaz de acelerarse a la velocidad crítica. Con base en esta observación, la longitud apropiada de un vertedero de pared gruesa es $2H < L_w < 12H$. Observe que un vertedero que es demasiado largo para un flujo puede ser demasiado corto para otro flujo, dependiendo del valor de la carga del vertedero. Por lo tanto, el rango de la razón de flujo debe conocerse antes de seleccionar un vertedero.

Vertederos de pared delgada o vertederos de cresta afilada

Un vertedero de pared delgada es una placa vertical colocada en un canal, la cual fuerza al líquido a fluir a través de una abertura para medir la razón de flujo. El tipo de vertedero se caracteriza por la forma de la abertura. Una placa vertical delgada con un borde superior derecho se llama vertedero rectangular porque la sección transversal del flujo sobre éste es rectangular; un vertedero con abertura triangular se llama vertedero triangular, etcétera.

Un flujo corriente arriba es subcrítico y se convierte en crítico cuando se aproxima al vertedero. El líquido continúa acelerándose y descargándose como un flujo supercrítico que se parece a un chorro libre. La razón de la aceleración es la disminución continua en la elevación de la superficie libre y la conversión de la carga de elevación en carga de velocidad. Las correlaciones de la razón de flujo que se dan a continuación suponen que capa de la caída libre del líquido de descarga sobre la cresta afilada del vertedero, llamada **napa,** está separada de la superficie vertical del vertedero. Posiblemente será necesario ventilar el espacio bajo la napa para asegurar una presión atmosférica por debajo de ella. También existen relaciones empíricas para vertederos ahogados.

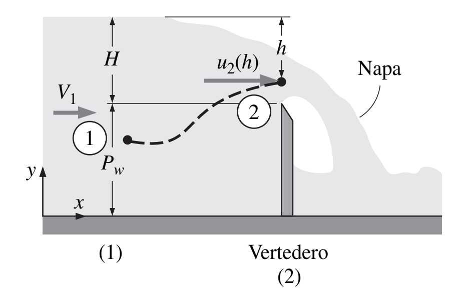


FIGURA 13-43
Flujo sobre un vertedero de pared delgada.

Considere el flujo de un líquido sobre un vertedero de pared delgada que está colocado en un canal horizontal, como se muestra en la figura 13-43. Por sencillez, la velocidad corriente arriba del vertedero es aproximada como casi constante a través de la sección transversal 1. La energía total corriente arriba del líquido expresada como una carga relativa al fondo del canal es la energía específica, la cual es la suma de la profundidad de flujo y la carga de velocidad. Esto es $y_1 + V_1^2/2g$, donde $y_1 = H + P_w$. El flujo sobre el vertedero no es unidimensional ya que el líquido sufre grandes cambios en la velocidad y en la dirección sobre el vertedero. Pero la presión dentro de la napa es atmosférica.

Una relación simple para la variación de la velocidad de un líquido sobre el vertedero puede obtenerse cuando se considera fricción despreciable y se escribe la ecuación de Bernoulli entre en un punto del flujo corriente arriba (punto 1) y un punto sobre el vertedero a una distancia h desde el nivel del líquido corriente arriba como:

$$H + P_w + \frac{V_1^2}{2g} = (H + P_w - h) + \frac{u_2^2}{2g} \qquad \textbf{(13-90)}$$

Se cancelan los términos comunes y se resuelve para u_2, la distribución de la velocidad imaginaria sobre el vertedero se determina como:

$$u_2 = \sqrt{2gh + V_1^2} \qquad \textbf{(13-91)}$$

En realidad, el nivel superficial del agua disminuye sobre el vertedero mientras el agua cae libremente (el efecto de descenso en la parte superior) y la separación del flujo en la cima del borde del vertedero reduce la napa (el efecto de contracción en la parte inferior). Como resultado, la altura del flujo sobre el vertedero es considerablemente más pequeña que H. Cuando los efectos de descenso y contracción se ignoran por simplicidad, la razón de flujo se obtiene al integrar el producto de la velocidad de flujo y el diferencial del área de flujo sobre el área de flujo completa,

$$\dot{V} = \int_{A_c} u_2\, dA_{c2} = \int_{h=0}^{H} \sqrt{2gh + V_1^2}\, w\, dh \qquad \textbf{(13-92)}$$

donde w es el ancho del área de flujo a la distancia h desde la superficie libre corriente arriba.

En general, w es una función de h. Pero para un vertedero rectangular, $w = b$, el cual es constante. Entonces la integral puede realizarse fácilmente y la razón de flujo para un vertedero rectangular en caso de un flujo imaginario con fricción y efectos de descenso y contracción despreciables se determina como:

$$\dot{V}_{\text{ideal}} = \frac{2}{3} b\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2}\right] \qquad \textbf{(13-93)}$$

Cuando la altura del vertedero es grande en relación con la carga del vertedero, la velocidad corriente arriba V1 es pequeña y la carga de velocidad corriente arriba puede despreciarse. Esto es, $V_1^2/2g \ll H$. Entonces:

$$\dot{V}_{\text{ideal, rec}} \cong \frac{2}{3} b\sqrt{2g}H^{3/2} \qquad \textbf{(13-94)}$$

Por lo tanto, la razón de flujo puede determinarse cuando se conocen dos cantidades geométricas: el ancho de la pared b y la carga del vertedero H, la cual es la distancia vertical entre la cresta del vertedero y la superficie libre corriente arriba.

Este análisis simplificado proporciona la forma general de la relación de la razón de flujo, pero necesita modificarse al considerar la fricción y los efectos de tensión superficial, los cuales tienen un papel secundario, así como los efectos

de descenso y de contracción. Nuevamente esto se hace cuando se multiplican las relaciones de la razón de flujo ideal por un coeficiente de descarga del vertedero determinado experimentalmente C_{dv}. Entonces la razón de flujo para un vertedero rectangular de pared delgada se expresa como:

Vertedero rectangular de pared delgada: $$\dot{V}_{\text{rec}} = C_{\text{dv, re c}} \frac{2}{3} b\sqrt{2g}H^{3/2} \quad \textbf{(13-95)}$$

donde, de la Ref. 1 (Ackers, 1978): dv

$$C_{\text{dv, re c}} = 0.598 + 0.0897\frac{H}{P_w} \quad \text{para} \quad \frac{H}{P_w} \leq 2 \quad \textbf{(13-96)}$$

Esta fórmula se aplica a un amplio rango de números de Reynolds corriente arriba definidos como $Re = V_1H/\nu$. Más precisas, pero también más complicadas se encuentran relaciones disponibles en la literatura. Observe que, la ecuación 13-95 es válida para vertederos rectangulares de *todo ancho*. Si lo ancho del vertedero es menor que lo ancho del canal tal que el flujo se fuerza a contraerse, se debe incorporar un coeficiente adicional de la corrección relacionada con la contracción para tomar en cuenta apropiadamente este efecto.

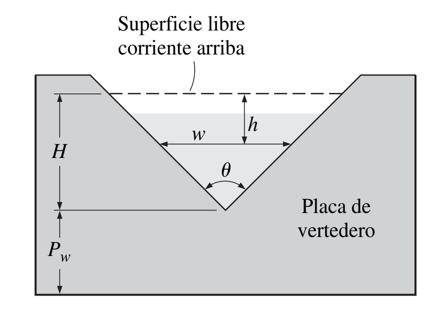


FIGURA 13-44
Geometría de un vertedero triangular (o de forma de "V") de pared delgada. Esta vista es corriente abajo mirando corriente arriba.

Otro tipo de vertederos de pared delgada que por lo general se usa para medición del flujo es el *vertedero triangular* (también llamado *vertedero de corte en V*) que se muestra en la figura 13-44. El vertedero triangular tiene la ventaja de mantener una carga de vertedero H alta, inclusive para razones de flujo pequeñas, debido a la disminución del área de flujo con la disminución de H, y así puede utilizarse para medir un amplio rango de razones de flujo con una buena precisión.

A partir de consideraciones geométricas, el ancho de corte puede expresarse como $w = 2(H - h)\tan(\theta/2)$, donde θ es el ángulo de corte en V. Se sustituye en la ecuación 31-92 y se realiza la integral, se obtiene la razón de flujo imaginario para un vertedero triangular como:

$$\dot{V}_{\text{ideal, tri}} = \frac{8}{15}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2g}H^{5/2} \quad \textbf{(13-97)}$$

donde se ha despreciado nuevamente la carga de velocidad corriente arriba. Por conveniencia, la fricción y otros efectos disipativos se consideran al multiplicar la razón de flujo imaginaria por el coeficiente de descarga. Entonces la razón de flujo para un vertedero triangular de pared delgada es:

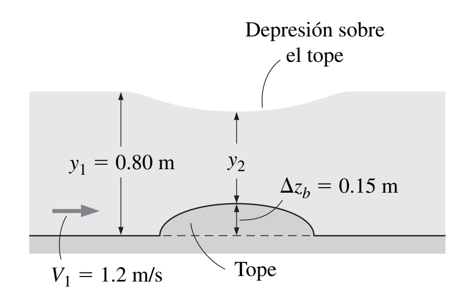
Vertedero triangular de pared delgada: $$\dot{V} = C_{\text{dv, tri}}\frac{8}{15}\tan\left(\frac{}{2}\right)\sqrt{2g}H^{5/2} \quad \textbf{(13-98)}$$

donde el rango típico de valores de C_{dv} es entre 0.58 y 0.62. Por lo tanto, la fricción del fluido, la constricción del área del flujo, y otros efectos disipativos originan que la razón de flujo a través del vertedero triangular real disminuya 40 por ciento comparado con el caso ideal. Para casos más prácticos ($H > 0.2$ m y $45° < \theta < 120°$), el valor del coeficiente de descarga del vertedero C_{dv} es casi de 0.58. Valores más precisos se encuentran en la literatura.

EJEMPLO 13-9 Flujo subcrítico sobre un tope

Agua que fluye en un canal abierto horizontal y ancho encuentra un tope de 15 cm de altura en el fondo del canal. Si la profundidad del flujo es de 0.80 m y la velocidad es de 1.2 m/s antes del tope, determine si la superficie del agua se reduce sobre el tope.

SOLUCIÓN Agua que fluye en un canal abierto encuentra un tope. Debe determinase si la superficie del agua se reduce sobre el tope.



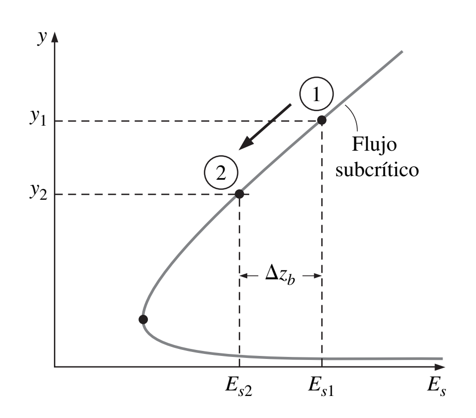


FIGURA 13-45
Esquema y diagrama de la profundidad de flujo contra la energía específica para el ejemplo 13-9.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** Los efectos de fricción son despreciables de tal manera que no hay disipación de energía mecánica. **3** El canal es lo suficientemente ancho, así que los efectos en los bordes son despreciables.
Análisis El número de Froude corriente arriba y la profundidad crítica son

$$\text{Fr}_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{1.2 \text{ m/s}}{\sqrt{(9.81 \text{ m}^2\text{/s})(0.80 \text{ m})}} = 0.428$$

$$y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{(by_1V_1)^2}{gb^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{y_1^2V_1^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{(0.8 \text{ m})^2(1.2 \text{ m/s})^2}{9.81 \text{ m/s}^2}\right)^{1/3} = 0.455 \text{ m}$$

El flujo es subcrítico puesto que $\text{Fr} < 1$ y por lo tanto la profundidad de flujo disminuye sobre el tope. La energía específica corriente arriba es:

$$E_{s1} = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = (0.80 \text{ m}) + \frac{(1.2 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 0.873 \text{ m}$$

La profundidad de flujo sobre el tope puede determinarse a partir de:

$$y_2^3 - (E_{s1} - \Delta z_b)y_2^2 + \frac{V_1^2}{2g}y_1^2 = 0$$

Se sustituye,

$$y_2^3 - (0.873 - 0.15 \text{ m})y_2^2 + \frac{(1.2 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)}(0.80 \text{ m})^2 = 0$$

o

$$y_2^3 - 0.723y_2^2 + 0.0470 = 0$$

usa un paquete computacional para resolver ecuaciones, las tres raíces de esta ecuación son 0.59 m, 0.36 m, y −0.22 m. Se descarta la solución negativa ya que es físicamente imposible. También se elimina la solución 0.36 m ya que este valor es menor que la profundidad crítica, y puede ocurrir solamente en flujos supercríticos. Así, únicamente la solución que tenga significado para la profundidad de flujo sobre el tope es $y_2 = 0.59$ m. Entonces, la distancia de la superficie del agua sobre el tope desde el fondo del canal es $\Delta z_b + y_2 = 0.15 + 0.59 = 0.74$ m, la cual es menor que $y_1 = 0.80$ m. Por lo tanto, la superficie se **reduce** sobre el tope en la cantidad de:

$$\text{Reducción} = y_1 - (y_2 + \Delta z_b) = 0.80 - (0.59 + 0.15) = \mathbf{0.06 \text{ m}}$$

Discusión Note que al tener $y_2 < y_1$ no indica necesariamente que la superficie del agua se reduce (ésta puede inclusive aumentar sobre el tope). La superficie se reduce sobre el tope solamente cuando la diferencia $y_2 - y_1$ es mayor que la altura del tope Δz_b. El valor actual de la reducción puede también ser diferente de 0.06 debido a los efectos de la fricción que se desprecian en el análisis.

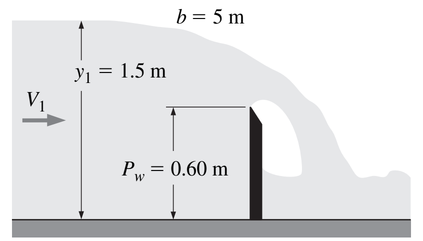


FIGURA 13-46
Esquema para el ejemplo 13-10.

EJEMPLO 13-10 Medición de la razón de flujo mediante un vertedero

La razón de flujo del agua en un canal abierto horizontal y ancho se mide con un vertedero rectangular de pared delgada de 0.6 m de alto de ancho igual al ancho del canal. Si la profundidad del agua corriente arriba es 1.5 m, determine la razón de flujo del agua (Fig. 13-46).

SOLUCIÓN Se mide la profundidad del agua corriente arriba en un canal horizontal equipado con un vertedero rectangular. Se determina la razón de flujo.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** La carga de velocidad corriente arriba es despreciable. **3** El canal es lo suficientemente ancho, así que los efectos en los bordes son despreciables.

Análisis La carga del vertedero es:

$$H = y_1 - P_w = 1.5 - 0.60 = 0.90 \text{ m}$$

El coeficiente de descarga del vertedero es:

$$C_{\text{dv, rec}} = 0.598 + 0.0897\frac{H}{P_w} = 0.598 + 0.0897\frac{0.90}{0.60} = 0.733$$

Se satisface la condición $H/P_w < 2$, ya que $0.9/0.6 = 1.5$. Entonces la razón del flujo del agua a través del canal es:

$$\dot{V}_{\text{rec}} = C_{\text{dv, rec}}\frac{2}{3}b\sqrt{2g}H^{3/2}$$

$$= (0.733)\frac{2}{3}(5 \text{ m})\sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)}(0.90 \text{ m})^{3/2}$$

$$= \mathbf{9.24 \ m^3/s}$$

Discusión La velocidad corriente arriba y la carga de velocidad corriente arriba son:

$$V_1 = \frac{\dot{V}}{by_1} = \frac{9.24 \text{ m}^3\text{/s}}{(5 \text{ m})(1.5 \text{ m})} = 1.23 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad \frac{V_1^2}{2g} = \frac{(1.23 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 0.077 \text{ m}$$

Esto es 8.6 por ciento de la carga del vertedero, una cantidad importante. Cuando se considera la carga de velocidad corriente arriba, la razón de flujo toma el valor de 10.2 m^3/s, la cual es casi 10 por ciento más grande que el valor determinado. Por lo tanto, es buena práctica considerar la carga de velocidad corriente arriba al menos que la altura del vertedero P_w sea muy grande con relación a la carga del vertedero H.

RESUMEN

Un *flujo de canal abierto* se refiere al flujo de líquidos en canales abiertos a la atmósfera o en conductos parcialmente llenos. Se dice que el flujo en un canal es *uniforme* si la profundidad del flujo (y por tanto la velocidad promedio) permanece constante. De otra manera se dice que el flujo es *no uniforme* o *variado*. El *radio hidráulico* se define como $R_h = A_c/p$. El número de Froude adimensional se define como:

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL_c}} = \frac{V}{\sqrt{gy}}$$

El flujo se clasifica como subcrítico para Fr < 1, crítico para Fr = 1, y supercrítico para Fr > 1. La profundidad de flujo en flujos críticos se llama *profundidad crítica* y se expresa como:

$$y_c = \frac{\dot{V}^2}{gA_c^2} \quad \text{o} \quad y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2}\right)^{1/3}$$

donde b es el ancho del canal para canales anchos.

La velocidad a la cual viaja una perturbación superficial a través de un líquido de profundidad y es la velocidad de onda c_0, la cual se expresa como $c_0 = \sqrt{gy}$. La energía mecánica total de un líquido en un canal se expresa en términos de la carga como:

$$H = z_b + y + \frac{V^2}{2g}$$

donde z_b es la carga de elevación, $P/\rho g = y$ es la carga de presión, y $V^2/2g$ es la carga de velocidad. La suma de las cargas dinámicas y de presión se llama *energía específica* E_s:

$$E_s = y + \frac{V^2}{2g}$$

La ecuación de continuidad es $A_{c1}V_1 = A_{c2}V_2$. La ecuación de la energía se expresa como:

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + S_0L = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

Aquí h_L es la pérdida de carga y $S_0 = \tan\theta$ es la pendiente de fondo del canal. La pendiente de fricción está definida como $S_f = h_L/L$.

La profundidad de flujo uniforme se llama *profundidad normal* y_n, y la velocidad promedio se llama *velocidad de flujo uniforme* V_0. La velocidad y la razón de flujo están dadas por:

$$V_0 = \frac{a}{n} R_h^{2/3} S_0^{1/2} \qquad \text{y} \qquad \dot{V} = \frac{a}{n} A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2}$$

donde n es el *coeficiente de Manning* cuyo valor depende de la rugosidad de las superficies del canal, y $a = 1\ \text{m}^{1/3}/\text{s} = (3.2808\ \text{ft})^{1/3}/\text{s} = 1.486\ \text{ft}^{1/3}/\text{s}$. Si $y_n = y_c$, el flujo es crítico uniforme, y la pendiente de fondo es igual a la pendiente crítica S_0 que se expresa como:

$$S_c = \frac{gn^2 y_c}{a^2 R_h^{4/3}} \qquad \text{la cual se simplifica en} \qquad S_c = \frac{gn^2}{a^2 y_c^{1/}}$$

para una película de flujo o un flujo en un canal rectangular con $b \gg y_c$.

La mejor sección transversal hidráulica para un canal abierto es aquella con el radio hidráulico máximo, o equivalente, aquella con el perímetro mojado mínimo para una sección transversal específica. El criterio para la mejor sección transversal hidráulica para un canal rectangular es $y = b/2$. La mejor sección transversal para un canal trapezoidal es la mitad de un hexágono.

En *flujos rápidamente variados* (FRV, RVF por sus siglas en inglés), la profundidad de flujo varía de forma marcada sobre una distancia relativamente corta en la dirección del flujo. Cualquier cambio de flujo supercrítico a flujo subcrítico ocurre a través de un *salto hidráulico*, el cual es un proceso altamente disipativo. La razón de profundidades y_2/y_1, pérdida de carga y razón de energía disipada durante un salto hidráulico se expresan como:

$$\frac{y_2}{y_1} = 0.5\left(-1 + \sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2}\right)$$

$$h_L = y_1 - y_2 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

$$= y_1 - y_2 + \frac{y_1 \text{Fr}_1^2}{2}\left(1 - \frac{y_1^2}{y_2^2}\right)$$

$$\text{Razón de disipación} = \frac{h_L}{E_{s1}} = \frac{h_L}{y_1 + V_1^2/2g}$$

$$= \frac{h_L}{y_1(1 + \text{Fr}_1^2/2)}$$

Una obstrucción que permite al líquido fluir sobre ésta se llama *vertedero*, y una obstrucción con una puerta ajustable en el fondo que permite que el líquido fluya por debajo se llama *compuerta de corriente subálvea*. La razón de flujo a través de una *compuerta* está dado por :

$$\dot{V} = C_d ba\sqrt{2gy_1}$$

donde b y a son lo ancho y la altura de la compuerta abierta, respectivamente, y C_d es el coeficiente de descarga, el cual cuenta para los efectos de fricción.

Un *vertedero de pared gruesa* es un bloque rectangular que tiene una cresta (borde superior) sobre el cual ocurre el flujo. La carga corriente arriba de la superficie superior del vertedero se llama *carga del vertedero, H*. La razón de flujo se expresa como:

$$\dot{V} = C_{\text{dv, grueso}} b\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\left(H + \frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2}$$

donde el coeficiente de descarga es:

$$C_{\text{dv, grueso}} = \frac{0.65}{\sqrt{1 + H/P_w}}$$

La razón de flujo para un vertedero rectangular de pared delgada se expresa como:

$$\dot{V}_{\text{rec}} = C_{\text{dv, rec}} \frac{2}{3} b\sqrt{2g}H^{3/2}$$

donde

$$C_{\text{dv, rev}} = 0.598 + 0.0897\frac{H}{P_w} \qquad \text{para} \qquad \frac{H}{P_w} \leq 2$$

Para un vertedero rectangular de pared delgada, la razón de flujo está dada por

$$\dot{V} = C_{\text{dv, tri}} \frac{8}{15} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2g}H^{5/2}$$

donde el rango típico de los valores de $C_{dv,tri}$ es entre 0.58 y 0.62.

El análisis de canal abierto se usa por lo general en el diseño de sistemas de alcantarillado, sistemas de irrigación, desagües y diques. Algunos flujos de canales abiertos se analizan en el capítulo 15 con el uso de dinámica de fluidos computacional (DFC, CFD por sus siglas en inglés).

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. P. Ackers *et al*. *Weirs and Flumes for Flow Measurement*. Nueva York: Wiley, 1978.

2. B. A. Bakhmeteff. *Hydraulics of Open Channels*. Nueva York: McGraw-Hill, 1932.

3. M. H. Chaudhry. *Open Channel Flow.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1993.

4. V. T. Chow. *Open Channel Hydraulics*. Nueva York: McGraw-Hill, 1959.

5. C. T. Crowe, J. A. Roberson y D. F. Elger. *Engineering Fluid Mechanics,* 7a. ed. Nueva York: Wiley, 2001.

6. R. H. French. *Open Channel Hydraulics*. Nueva York: McGraw-Hill, 1985.

7. F. M. Henderson. *Open Channel Flow*. Nueva York: Macmillan, 1966.

8. C. C. Mei. *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. Nueva York: Wiley, 1983.

9. B. R. Munson, D. F. Young y T. H. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics,* 4a. ed. Nueva York: Wiley, 2002.

10. M. C. Potter y D. C. Wiggert. *Mechanics of Fluids,* 2a. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.

11. F. M. White. *Fluid Mechanics,* 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2003.

12. U. S. Bureau of Reclamation. "Research Studies on Stilling Basins, Energy Dissipaters, and Associated Appurtenances," Hydraulic Lab Report Hyd.-399, junio 1, 1955.

PROBLEMAS*

Clasificación, número de Froude y velocidad de onda

13-1C ¿En qué difiere un flujo de canal abierto de un flujo interno?

13-2C ¿Qué fuerza impulsa el flujo en un canal abierto? ¿Cómo se establece la razón de flujo en un canal abierto?

13-3C ¿Cómo es el cambio de presión a lo largo de la superficie libre en un flujo de canal abierto?

13-4C Considere un flujo estacionario totalmente desarrollado en un canal abierto de sección transversal rectangular con una inclinación de 5° de su fondo. ¿Será el ángulo de la inclinación de la superficie libre también de 5°? Explíquelo.

13-5C ¿Cómo difiere un flujo uniforme de un flujo no uniforme en canales abiertos? ¿En qué clase de canales se observa flujo uniforme?

13-6C ¿Qué es la profundidad normal? Explique cómo se establece en canales abiertos.

13-7C ¿Qué origina que el flujo en un canal abierto varíe (que sea no uniforme)? ¿Cómo difiere el flujo rápidamente variado del flujo gradualmente variado?

13-8C En canales abiertos, ¿cómo se define al radio hidráulico? Conociendo el radio hidráulico, ¿cómo puede determinarse el diámetro hidráulico?

13-9C Dada la velocidad promedio de flujo y la profundidad de flujo, explique cómo determinaría si el flujo en un canal abierto es tranquilo, rápido o critico.

13-10C ¿Qué es el número de Froude? ¿Cómo está definido? ¿Cuál es su significado físico?

*Los problemas designados por una "C" son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

13-11C ¿Qué es la profundidad critica en un flujo de canal abierto? Para una velocidad promedio de flujo dada, ¿cómo se determina?

13-12C Se observa que el flujo de canal abierto sufre un salto hidráulico. ¿Es el flujo corriente arriba del salto necesariamente supercrítico?, ¿el flujo corriente abajo del salto es necesariamente subcritico?

13-13 Considere el flujo de agua en un canal ancho. Determine la velocidad de una pequeña perturbación en el flujo si la profundidad del flujo es *a*) 10 cm y *b*) 80 cm ¿cómo sería su respuesta si el fluido fuera aceite?

13-14 Fluye agua de manera uniforme a 20°C en un canal rectangular ancho con una velocidad promedio de 2 m/s. Si la profundidad del agua es 2.0 m, determine *a*) si el flujo es laminar o turbulento y *b*) si el flujo es subcrítico o supercrítico.

13-15 Fluye agua a 20°C en un canal circular de 2 m de diámetro parcialmente lleno con una velocidad promedio de 2 m/s. Si la profundidad máxima del agua es 0.5 m, determine los radios hidráulicos, el número de Reynolds y el régimen de flujo.

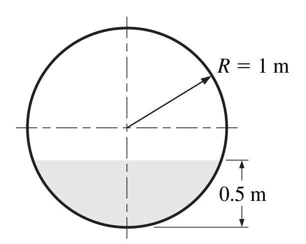


FIGURA P13-15

13-16 Se tiene agua a 15°C que fluye de manera uniforme en un canal rectangular de 2 m de profundidad con una velocidad promedia de 4 m/s. Si la profundidad del agua es de 8 cm, determine si el flujo es subcritico o supercrítico. *Respuesta:* supercrítico

13-17 Después de una pesada lluvia, fluye agua sobre una superficie de concreto con una velocidad promedio de 1.3 m/s. Si la profundidad del agua es de 2 cm, determine si el flujo es subcrítico o supercrítico.

13-18I Fluye agua a 70°F de manera uniforme en un canal rectangular ancho con una velocidad promedio de 6 ft/s. Si la profundidad del agua es de 0.5 ft, determine *a*) si el flujo es laminar o turbulento y *b*) si el flujo es subcrítico o supercrítico.

13-19 Fluye agua a 10°C en un canal circular medio lleno de 3 m de diámetro con una velocidad promedio de 2.5 m/s. Determine el radio hidráulico, el número de Reynolds y el régimen de flujo (laminar o turbulento).

13-20 Una onda se origina en el mar debido a una fuerte sacudida durante un sismo. Tomando la profundidad promedio del agua como 2 km y la densidad del agua de mar como 1.030 kg/m^3, determine la velocidad de propagación de esta onda.

Energía específica y ecuación de la energía

13-21C ¿Cómo es la energía específica de un fluido que fluye en un canal abierto definido en términos de carga?

13-22C Considere un flujo estacionario de agua a través de dos canales rectangulares abiertos con razones de flujo idénticas. Si el flujo en uno de los canales es subcrítico y en el otro es supercrítico, ¿la energía específica del agua en estos dos canales puede ser idéntica? Explíquelo.

13-23C Para una razón de flujo dado en un canal abierto, se estudia la variación de la energía específica respecto a la profundidad. Una persona afirma que la energía específica para un fluido debe ser mínima cuando el flujo es crítico, pero otra persona afirma que la energía es mínima cuando el flujo es subcrítico. ¿Cuál es su opinión al respecto?

13-24C Considere un flujo supercrítico estacionario de agua a través de un canal rectangular abierto con una razón de flujo constante. Alguien afirma que a mayor profundidad de flujo, mayor energía específica. ¿Está de acuerdo con esto? Explíquelo.

13-25C Durante un flujo estacionario y uniforme a través de un canal abierto de sección transversal rectangular, una persona afirma que la energía específica del fluido permanece constante. Una segunda persona afirma que la energía específica aumenta a lo largo de flujo debido a los efectos de la fricción y a la pérdida de carga. ¿Con cuál de las dos personas está de acuerdo? Explíquelo.

13-26C ¿Cómo se define la pendiente de fricción? ¿En qué condiciones ésta es igual a la pendiente de fondo de un canal abierto?

13-27C Considere el flujo estacionario de un líquido en un canal rectangular ancho. Si se dice que la línea de energía del flujo es paralela al fondo del canal cuando las pérdidas de fricción son despreciables,¿está de acuerdo?

13-28C Considere el flujo estacionario unidimensional en un canal rectangular ancho. Alguien afirma que la energía mecánica total del fluido en la superficie libre de una sección transversal es igual a aquella que tiene el fluido en el fondo del canal de la misma sección transversal. ¿Está de acuerdo? Explíquelo.

13-29C ¿Cómo es la energía mecánica total del fluido en caso de un flujo estacionario unidimensional en un canal rectangular ancho en términos de las cargas? ¿Cómo está relacionada con la energía específica del fluido?

13-30C Exprese la ecuación unidimensional de energía para un flujo en canal abierto en una sección corriente arriba 1 y una sección corriente abajo 2, explique como la pérdida de carga puede determinarse.

13-31 Fluye agua de manera estacionaria en un canal rectangular de 8 m de ancho a una razón de 0.7 m^3/s. Si la profundidad de flujo es 0.25 m, determine la velocidad de flujo y si el fluyo es subcrítico o supercrítico. Determine también la profundidad de flujo alterno si el carácter del flujo se cambiara.

13-32 Fluye agua a 15°C a una profundidad de 0.4 m con una velocidad promedio de 6 m/s en un canal rectangular. Determine la energía específica del agua y si el flujo es subcrítico o supercrítico.

13-33 Fluye agua a 15° a una profundidad de 0.4 m con una velocidad promedio de 6 m/s en un canal rectangular. Determine *a*) la profundidad crítica, *b*) la profundidad alterna y *c*) la energía específica mínima.

13-34 Fluye agua a 10°C en un canal rectangular a una profundidad de 0.55 m y una razón de 12 m^3/s. Determine *a*) la profundidad crítica, *b*) si el flujo es subcrítico o supercrítico y *c*) la profundidad alterna. *Respuestas: a*) 0.742 m, *b*) supercrítico, *c*) 1.03 m

13-35I Fluye agua a 65°F a una profundidad de 8.0 ft con una velocidad promedio de 14 ft/s en un canal rectangular ancho. Determine *a*) el número de Froude, *b*) la profundidad crítica y *c*) si el flujo es subcrítico o supercrítico. ¿Cuáles serían sus respuestas si la profundidad del flujo fuera de 0.2 ft?

13-36I Repita el problema 13-35E para velocidad promedio de 10 ft/s.

13-37 Fluye agua a través de un canal rectangular de 4 m de ancho con una velocidad promedio de 5 m/s. Si el flujo es crítico, determine la razón de flujo del agua. *Respuesta:* 51.0 m^3/s

13-38 Fluye agua a través de un canal de acero de 50 cm de diámetro lleno hasta la mitad con una velocidad promedio de 2.8 m/s. Determine la razón de volumen del flujo y si el flujo es subcrítico o supercrítico.

13-39 Fluye agua a través de un canal hexagonal con ancho de fondo de 2 m a una razón 45 m^3/s. Determine *a*) la velocidad promedio y *b*) si el flujo es subcrítico y supercrítico.

13-40 Repita el problema 13-39 pero con una razón de flujo de 30 m^3/s.

Flujo uniforme y mejores secciones transversales hidráulicas

13-41C ¿Cuándo se dice que el flujo en un canal abierto es uniforme? ¿En que condiciones el flujo en un canal abierto permanece uniforme?

13-42C Considere el flujo uniforme en un canal rectangular ancho. Si la inclinación de fondo aumenta, la profundidad de flujo *a*) aumentará, *b*) disminuirá, o *c*) permanecerá constante. Explíquelo.

13-43C Durante un flujo en canal abierto, alguien afirma que la pérdida de carga puede determinarse simplemente multiplicando la inclinación del fondo por la longitud del canal. ¿Puede esto ser tan simple? Explíquelo.

13-44C Durante un flujo uniforme en canales abiertos, la velocidad de flujo puede determinarse a partir de las ecuaciones de Manning expresadas como $V_0 = (a/n)R_h^{2/3}S_0^{1/2}$ y $\dot{V} = (a/n) A_c R_h^{2/3} S_0^{1/2}$. ¿Cuál es el valor y las dimensiones de la constante a en estas ecuaciones en unidades SI? Explique también, cómo puede determinarse el coeficiente de Manning n cuando se conoce el factor de fricción f.

13-45C Muestre que para un flujo uniforme crítico, la relación general de pendiente crítica $S_c = \dfrac{gn^2 y_c}{a^2 R_h^{4/3}}$ se reduce a $S_c = \dfrac{gn^2}{a^2 y_c^{1/3}}$ para flujos con $b \gg y_c$.

13-46C Cuál es la mejor sección transversal hidráulica para un canal abierto ¿una con radio hidráulico pequeño u otra con radio hidráulico grande?

13-47C ¿Cuál es la mejor sección transversal hidráulica para un canal abierto: *a*) circular, *b*) rectangular, *c*) trapezoidal o *d*) triangular?

13-48C La mejor sección transversal hidráulica para un canal rectangular abierto es aquella cuya altura de fluido es *a*) la mitad, *b*) el doble, *c*) igual, o *d*) un tercio del ancho del canal.

13-49C La mejor sección transversal hidráulica para un canal trapezoidal con un ancho de base b es aquel cuya longitud del borde de lado es *a*) b, *b*) $b/2$, *c*) $2b$, o *b*) $\sqrt{3}b$.

13-50C Considere un flujo uniforme a través de un canal abierto con un coeficiente de Manning $n = 0.015$. Si se duplica el coeficiente de Manning ($n = 0.030$) como resultado de algún crecimiento de algas sobre las superficies del canal mientras la sección transversal permanece constante, la razón de flujo *a*) se duplica, *b*) disminuye en un factor de $\sqrt{2}$, *c*) permanece sin cambiar, *d*) disminuye a la mitad, o *e*) disminuye por un factor de $2^{1/3}$.

13-51 Fluye agua de manera uniforme en un canal de concreto acabado de sección transversal trapezoidal con un ancho de fondo de 0.6 m, un ángulo trapezoidal de 50°, y una pendiente de fondo de 0.4°. Si la profundidad de flujo cuando se mide resulta que es de 0.45 m, determine la razón de flujo del agua a través del canal.

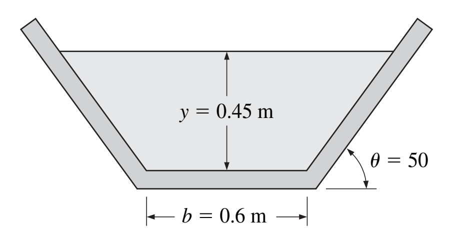


FIGURA P13-51

13-52 Fluye agua de manera uniforme en un canal circular medio lleno de 2 m de diámetro y de inclinación de 1.5 m/km. Si el canal está hecho de concreto acabado, determine la razón de flujo del agua.

13-53I Un canal semicircular de 6 ft de diámetro fabricado de concreto no acabado debe transportar agua uniformemente a una distancia de 1 milla. Si la razón de flujo debe alcanzar el valor de 150 m^3/s cuando el canal está lleno, determine la diferencia de elevación mínima a través del canal.

13-54 Un canal trapezoidal con un ancho de fondo de 5 m, ancho de superficie libre de 10 m, y profundidad de flujo de 2.2 m, descarga agua a una razón de 120 m^3/s. Si las superficies del canal se corrugan con asfalto ($n = 0.016$), determine la elevación mínima del canal por km. *Respuesta:* 8.52 m

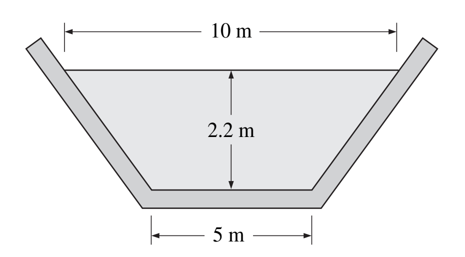


FIGURA P13-54

13-55 Reconsidere el problema 13-54. Si la máxima altura de flujo que puede acomodarse en el canal es 2.4 m, determine la razón de flujo máxima a través del canal.

13-56 Considere el agua que fluye a través de dos canales idénticos con secciones de flujo cuadradas de 3 m × 3 m. Ahora se combinan los dos canales, formando un canal de 6 m de ancho. La razón de flujo se ajusta de tal manera que la profundidad de flujo permanezca constante en 3 m. Determine el porcentaje de aumento en la razón de flujo como resultado de combinar los canales.

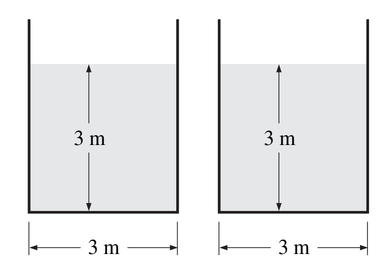


FIGURA P13-56

13-57 Un canal trapezoidal hecho de concreto no acabado tiene una pendiente de fondo de 1°, un ancho de base de 5 m, y una inclinación del lado superficial de 1:1, como se muestra en la figura P13-57. Para una razón de flujo de 25 m^3/s, determine la profundidad normal h.

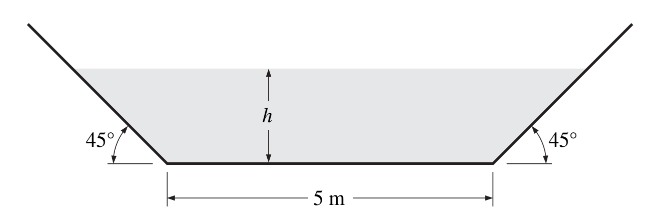


FIGURA P13-57

13-58 Repita el problema 13-57 para un canal excavado en la tierra y cubierto de raíces de maleza con $n = 0.030$.

13-59 Un canal para agua con forma de "v" de hierro fundido que se muestra en la figura P13-59 tiene una inclinación del fondo de 5°. Para una profundidad de flujo de 1 m en el centro, determine la razón de descarga en caso de un flujo uniforme. *Respuesta:* 3.59 m^3/s

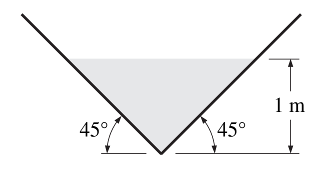


FIGURA P13-59

13-60I Se transporta agua en un canal de hierro fundido rectangular con una profundidad desde el fondo de 6 ft a una razón de 70 ft^3/s. El terreno es tal que el fondo se inclina 1.5 ft por 1 000 ft de longitud. Determine la altura mínima del canal en condiciones de flujo uniforme.

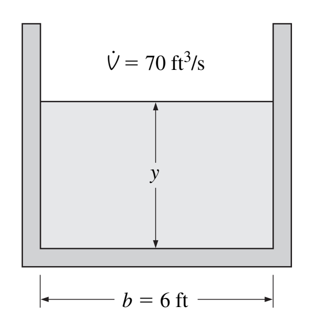


FIGURA P13-60I

13-61 Fluye agua en un canal cuya inclinación del fondo es de 0.002 y cuya sección de área transversal se muestra en la figura P13-61. Las dimensiones y los coeficientes de Manning, para las superficies en diferentes subsecciones también están dadas en la figura. Determine la razón de flujo a través del canal y el coeficiente de Manning efectivo del canal.

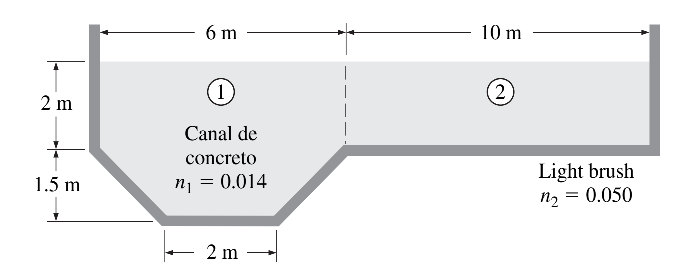


FIGURA P13-61

13-62 Considere un canal hecho de concreto acabado con un diámetro interno de 1 m. La inclinación del canal es 0.002. Para una profundidad de flujo de 0.25 m al centro, determine la razón de flujo a través del canal.

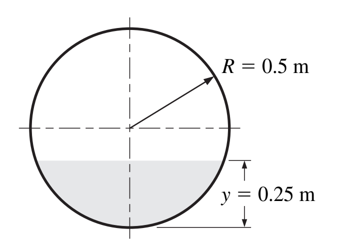


FIGURA P13-62

13-63 Reconsidere el problema 13-62. Varíe la profundidad de flujo en una razón y/R desde 0.1 hasta 1.9 mientras mantenga constante el área de flujo y evalúe la razón de flujo, muestre que la sección transversal más adecuada para un flujo a través de un canal circular ocurre cuando el canal está medio lleno. Tabule y grafique sus resultados.

13-64 Un canal trapezoidal con profundidad del fondo de 1.5 m e inclinación del lado lateral de 1:1 drena agua uniformemente a una razón de 8 m^3/s a una distancia de 1 km. Si la profundidad del flujo no debe exceder 1 m, determine la caída de elevación necesaria.

13-65 Un sistema de drenado con una inclinación constante de 0.0015 debe construirse de tres canales circulares hechos de concreto acabado. Dos de los canales tienen un diámetro de 1.2 m y conducen el agua al tercer canal. Si todos los canales deben correr medio llenos y las pérdidas en las uniones son despreciables, determine el diámetro del tercer canal. *Respuesta:* 1.56 m

13-66 Se debe transportar agua en un canal abierto cuyas superficies están cubiertas de asfalto a una razón de 4m^3/s en flujo uniforme. La inclinación del fondo es de 0.0015. Determine las dimensiones de la sección transversal más adecuada si la forma del canal es *a*) circular de diámetro D , *b*) rectangular de ancho de fondo b y *c*) trapezoidal de ancho de fondo b.

13-67I Un canal rectangular con una inclinación del fondo de 0.0005 se construye para transportar agua a una razón de 800 ft^3/s. Determine las dimensiones más adecuadas del canal si éste debe ser hecho de, *a*) concreto no acabado y *b*) concreto acabado.

13-68 Considere un flujo uniforme en un canal rectangular de asfalto con área de flujo de 2 m^2 y una inclinación en el fondo de 0.0003. Varíe la razón de profundidad-ancho y/b desde 0.1 a 2.0, calcule y grafique la razón de flujo y confirme que la sección transversal de flujo más adecuada ocurre cuando la razón profundidad-ancho es de 0.5.

Flujos de variación gradual, flujos de variación rápida y salto hidráulico

13-69C ¿En qué difiere un flujo de variación o no uniforme de un flujo uniforme?

13-70C ¿Cómo difiere un flujo variado gradualmente (FVG, GVF por sus siglas en inglés) de un flujo variado rápidamente?

13-71C Alguien afirma que las pérdidas por fricción asociadas con el esfuerzo de corte sobre las superficies del canal, pueden ignorarse en el análisis de flujos rápidamente variantes, pero deben considerase en el análisis de flujos gradualmente variantes. ¿Está de acuerdo con esta afirmación? Justifique su respuesta.

13-72C Considere un flujo estacionario en un canal horizontal de sección transversal rectangular. Si el flujo es subcrítico, la profundidad del flujo *a*) aumentará, *b*) permanecerá constante o *c*) disminuirá en la dirección del flujo.

13-73C Considere un flujo estacionario de agua en un canal inclinado de sección transversal rectangular. Si el flujo es subcrítico y la profundidad de flujo es mayor que la profundidad normal ($y > y_n$), la profundidad de flujo *a*) aumentará *b*) permanecerá constante, o *c*) disminuirá en la dirección del flujo.

13-74C Considere un flujo estacionario de agua en un canal horizontal de sección transversal rectangular. Si el flujo es supercrítico, la profundidad del flujo *a*) aumentará, *b*) permanecerá constante, o *c*) disminuirá en la dirección del flujo.

13-75C Considere un flujo de agua estacionario en un canal inclinado de sección transversal rectangular. Si el flujo es subcrítico y la profundidad del flujo menor que la profundidad normal ($y < y_n$), la profundidad del flujo *a*) aumentará, *b*) permanecerá constante, o *c*) disminuirá en la dirección del flujo.

13-76C Considere un flujo estacionario de agua en un canal inclinado de sección transversal rectangular. Si el flujo es supercrítico, la profundidad del flujo *a*) aumentará, *b*) permanecerá constante o *c*) disminuirá en la diversión del flujo.

13-77C ¿Es posible que un flujo subcrítico efectúe un salto hidráulico? Explíquelo.

13-78C ¿Por qué algunas veces se usa el salto hidráulico para disipar a la energía mecánica? ¿Cómo se define la razón de disipación de energía para un salto hidráulico?

13-79 Fluye agua de manera uniforme en un canal rectangular con superficies de concreto acabado. El ancho del canal mide 3 m y la profundidad del flujo es de 1.2 m y la inclinación del fondo es 0.002. Determine si la pendiente del canal debería clasificarse como suave, crítica o pronunciada para este flujo.

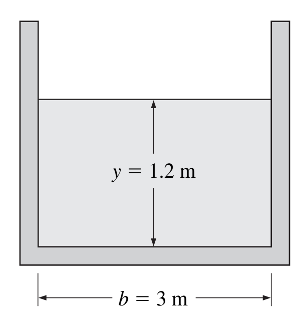


FIGURA P13-79

13-80 Considere un flujo uniforme de agua en un canal ancho de ladrillo con una inclinación de 0.4. Determine el rango de la profundidad de flujo para el cual el canal se clasifica como pronunciado.

13-81E Considere un flujo de agua a través de un canal de 12 ft de profundidad de concreto no acabados con una inclinación de fondo de 0.5. Si la razón de flujo es de 300 ft^3/s, determine si la inclinación del canal es suave, critica o pronunciada. Clasifique también el perfil de la superficie mientras se desarrolla el flujo para profundidad de flujo de 3 ft.

13-82 Fluye agua en un canal de hierro fundido en forma de "V" de 90°Con una inclinación de fondo de 0.002 a una razón de 3 m^3/s. Determine si la inclinación del canal puede clasificarse como suave, crítica o pronunciada para este canal. *Respuesta:* suave

13-83 Se descarga agua en un canal rectangular horizontal con una profundidad de 8 m desde una compuerta, se observa que hay un salto hidráulico. La profundidad y la velocidad antes del salto son de 1.2 m y 9 m/s, respectivamente. Determine *a*) la profundidad de flujo y el número de Froude después del salto, *b*) la pérdida y la razón de disipación y *c*) la energía mecánica disipada por el salto hidráulico.

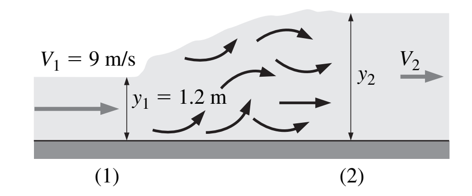


FIGURA P13-83

13-84 Agua que fluye en un canal horizontal ancho con profundidad de flujo de 35 cm y una velocidad promedio de 12 m/s experimenta un salto hidráulico. Determine la pérdida de carga relacionada con el salto hidráulico.

13-85 Durante un salto hidráulico en un canal ancho, la profundidad de flujo aumenta de 0.6 a 3 m. Determine las velocidades y el número de Froude antes y después del salto, y la razón de disipación de energía.

13-86 Considere el flujo de agua en un canal de10 m de ancho a una razón de 70 m^3/s y una profundidad de flujo de 0.5 m. El agua sufre un salto hidráulico y la profundidad del flujo después del salto resulta ser de 4 m. Determine la potencia mecánica desperdiciada durante este salto. *Respuesta:* 4.35 MW

13-87 La velocidad y la profundidad de flujo del agua después de un salto hidráulico se miden y resultan ser 2 m y 3 m/s, respectivamente. Determine la profundidad de flujo y la velocidad antes del salto, y la fracción de energía mecánica disipada.

13-88I Fluye agua en un canal ancho a una profundidad 2 ft y una velocidad 40 ft/s y experimenta un salto hidráulico. Determine la profundidad de flujo y el número de Froude después del salto y la perdida de carga coincidente con el salto.

Control de flujo y mediciones en canales

13-89C Dibuje un diagrama de profundidad-energía específica para un flujo a través de puertas submarinas, e indique el flujo a través de las puertas para los casos de *a*) puertas sin fricción, *b*) compuertas con efluente libre *c*) compuertas con efluente ahogado.

13-90C Para compuertas, ¿cómo define el coeficiente de descarga C_d? ¿Cuáles son los valores típicos de C_d para compuertas con efluente libre? ¿Cuál es el valor de C_d para un flujo imaginario sin fricción a través de la compuerta?

13-91C ¿Cuál es el principio de un vertedero de pared delgada usado para medir el flujo en un canal abierto?

13-92C Considere un flujo estacionario sin fricción sobre un tope de altura Δz en un canal horizontal con profundidad constante *b*, mientras el fluido fluye por la bomba, ¿la profundidad de flujo aumenta, disminuye o permanece constante? Considere que el flujo es subcrítico.

13-93C Considere el flujo de un líquido sobre una protuberancia durante un flujo subcrítico en un canal abierto. La energía específica y la profundidad de flujo disminuyen sobre la protuberancia mientras que la altura aumenta. ¿Cuál será el carácter del flujo cuando la energía específica alcanza su valor mínimo? ¿El flujo se convertirá en crítico si la altura de la protuberancia se aumenta aún más?

13-94C ¿Qué es un vertedero de pared gruesa? ¿Con base en qué se clasifican los vertederos de pared gruesa?

13-95 Fluye agua desde un depósito de 14 m de profundidad a un canal abierto de 5 m de ancho a través de una compuerta de 1 m de altura abierta en el depósito hacia el fondo del canal. Si la profundidad de flujo corriente abajo de la compuerta es de 3 m, determine la razón de descarga a través de la compuerta.

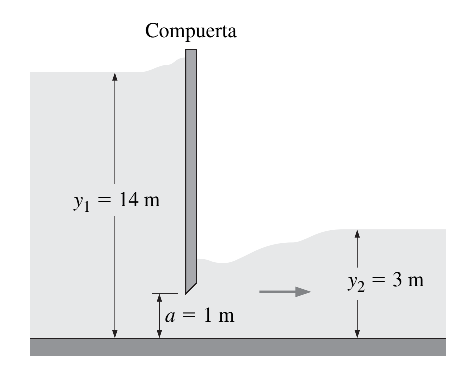


FIGURA P13-95

13-96 Se tiene agua que fluye en un canal ancho y encuentra un tope de 22 cm de altura desde el fondo del canal. Si la profundidad del flujo es de 1.2 m y la velocidad es de 2.5 m/s antes del tope, determine si el flujo está bloqueado sobre el tope y explíquelo.

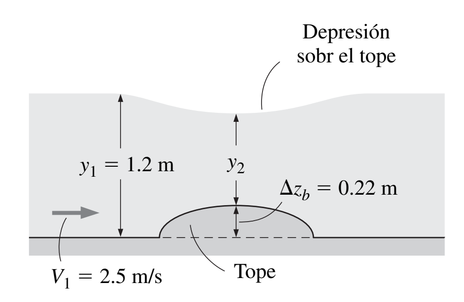


FIGURA P13-96

13-97 Considere el flujo uniforme de agua en un canal ancho con velocidad de 8 m/s y profundidad de flujo de 8.0 m. El agua fluye sobre un tope de 30 cm de altura. Determine el cambio (aumento o disminución) en el nivel de la superficie del agua sobre el tope. Determine también si el flujo sobre el tope es subcrítico o crítico.

13-98 La razón de flujo de agua en un canal horizontal se mide usando un vertedero triangular de pared gruesa de 0.75 m de altura que se coloca en el canal. Si la profundidad del flujo corriente arriba es 2.2 m, determine la razón de flujo de agua. *Respuesta:* 15.9 m^3/s

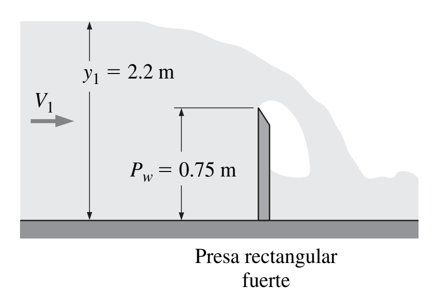


FIGURA P13-98

13-99 Repita el problema 13-98 pero en el caso de un vertedero de 1 m de altura.

13-100 Fluye agua sobre un vertedero rectangular de pared gruesa de 2 m de altura. La profundidad del flujo corriente arriba del vertedero es de 3 m, y se descarga agua desde el vertedero a un canal de concreto no acabado con el mismo ancho en donde se establece condiciones de flujo uniforme. Si no debe ocurrir un salto hidráulico en el flujo corriente abajo, determine la pendiente máxima corriente abajo del canal.

13-101I Un vertedero de pared gruesa muy ancha se usa para medir la razón de flujo de agua en un canal rectangular de 10 ft de ancho. La razón de flujo máximo a través del canal es 150 ft^3/s y la profundidad de flujo corriente abajo desde el vertedero no debe exceder 5 ft. Determine la altura apropiada del vertedero.

13-102 Considere un flujo uniforme en un canal rectangular ancho con una profundidad de 2 m, fabricado de concreto no acabado, colocado en una pendiente de 0.0022. Determine la razón de flujo de agua por m de ancho del canal. Ahora fluye

agua sobre un tope de 15 cm de altura. Si la superficie del agua sobre el tope permanece plana (sin aumentar o disminuir), determine el cambio en la razón de descarga del agua por m de ancho del canal (sugerencia: investigue si una superficie plana sobre un tope es posible).

13-103 Considere un flujo uniforme de agua en un canal ancho fabricado de concreto no acabado, colocado sobre una pendiente de 0.0022. Ahora fluye agua sobre una protuberancia de 15 cm de altura. Si el flujo sobre la protuberancia es exactamente critico (Fr = 1), determine la razón de flujo y la profundidad de flujo sobre la protuberancia por m de ancho.
Respuestas: 20.3 m^3/s, 3.48 m

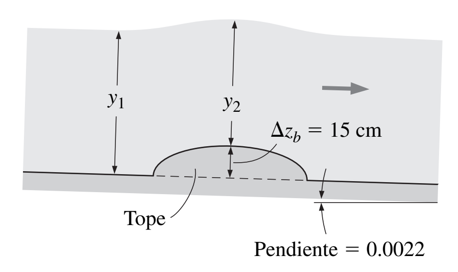


FIGURA P13-103

13-104 La razón de flujo del agua a través de un canal de 5 m de ancho (que se muestra en la figura P13-104) se controla con una compuerta. Si las profundidades de flujo cuando se miden resultan ser 1.1 y 0.45 m respectivamente, determine la razón de flujo y el número de Froude corriente abajo de la compuerta.

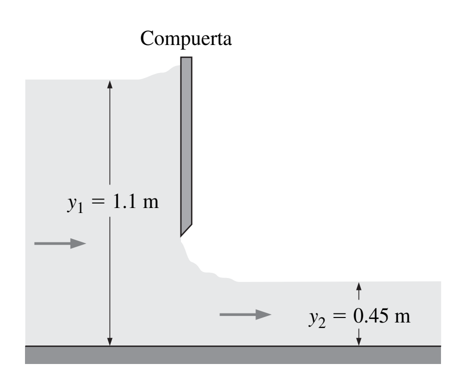


FIGURA P13-104

13-105I Fluye agua a través de una compuerta de 1.1 ft de altura en la entrada y se descarga con efluente libre. Si la profundidad de flujo corriente arriba es de 5 ft, determine la razón de flujo por unidad de ancho y el número de Froude corriente abajo de la compuerta.

13-106I Repita el problema 13-105I para el caso de una compuerta ahogada de profundidad de flujo corriente abajo de 3.3 ft.

13-107 Se descarga agua desde un lago de 6 m de profundidad a un canal a través de una compuerta de 5 m de ancho y 0.6 m de altura abierta en el fondo del canal. Si la profundidad de flujo corriente abajo desde la compuerta se mide y resulta ser de 3 m, determine la razón de descarga.

13-108I Considere que fluye agua a través de un canal ancho con una profundidad de flujo de 8 ft. Ahora fluye agua a través de una compuerta de 1 ft de altura y el flujo de descarga de efluente libre subsecuentemente sufre un salto hidráulico. Ignorando cualquier pérdida asociada con la compuerta misma, determine la profundidad de flujo y las velocidades antes y después del salto, y la fracción de la energía mecánica disipada durante el salto.

13-109 La razón de flujo de agua que fluye en un canal de 3 m de ancho debe medirse con un vertedero triangular de pared delgada 0.5 por arriba del fondo del canal con un ángulo de corte de 60°. Si la profundidad de flujo corriente arriba desde el vertedero es de 1.5 m, determine la razón de flujo de agua a través del canal. Tome el coeficiente de descarga del vertedero como 0.60. *Respuesta:* 0.818 m^3/s

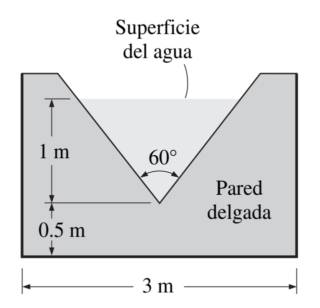


FIGURA P13-109

13-110 Repita el problema 13-109 para una profundidad de flujo corriente arriba de 1.2 m.

13-111 Un vertedero triangular de pared delgada con un ángulo de corte de 100° se usa para medir la razón de la descarga del agua desde un gran lago a un contenedor. Si se usa en su lugar un vertedero con la mitad del ángulo de corte ($\theta = 50°$), determine el porcentaje en la reducción de la razón de flujo. Considere que la profundidad del agua y el coeficiente de descarga del vertedero permanecen constantes.

13-112 Un vertedero de pared gruesa de 1 m de altura se usa para medir la razón del flujo de agua en un canal rectangular de 5 m de ancho. La profundidad del flujo corriente arriba desde el vertedero es de 1.6 m. Determine la razón de flujo a través del canal y la profundidad mínima de flujo por arriba del vertedero.

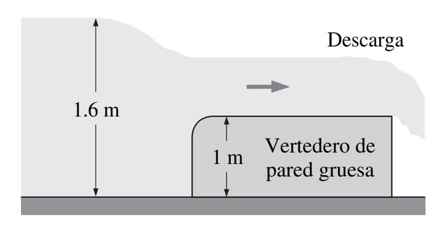


FIGURA P13-112

13-113 Repita el problema 13-112 para una profundidad de flujo corriente arriba de 2.2 m.

13-114 Considere agua que fluye sobre un vertedero de pared gruesa suficientemente largo de 0.80 m de altura.. Si la profundidad de flujo mínima es de 0.50 m, determine la razón de flujo por metro de ancho del canal y la profundidad de flujo corriente arriba del canal.

Problemas de repaso

13-115 Un canal trapezoidal con un ancho de fondo de 4 m y una pendiente de lado de 45°, descarga agua a una razón de 18 m^3/s. Si la profundidad de flujo es de 0.6 m, determine si el flujo es subcrítico o supercrítico.

13-116 Un canal rectangular con un ancho de fondo de 2 m descarga agua a una razón de 8 m^3/s. Determine la profundidad de flujo abajo del cual el flujo es supercrítico.

13-117 Fluye agua en un canal con una velocidad promedio de 4 m/s. Determine si el flujo es subcrítico o supercrítico para las siguientes profundidades de flujo: *a*) 0.2 m, *b*) 2 m y *c*) 1.63 m.

13-118 Fluye agua a través de un canal rectangular de 1.5 m de ancho con un coeficiente de Manning de n = 0.012. Si la profundidad del agua es de 0.9 m y la pendiente del fondo es de 0.6° determine la razón de descarga del canal en caso de flujo uniforme.

13-119 Un canal rectangular de 5 m de ancho cubierto de concreto acabado se diseñó para transportar agua a una distancia de 1 km a una razón de 12 m^3/s. Con el empleo del software EES (u otro), investigue el efecto de la pendiente del fondo sobre la profundidad de flujo (y así sobre la altura necesaria del canal). El ángulo varía de 5° hasta 10° en incrementos de 0.5°. Tabule y grafique la profundidad del flujo contra el ángulo de fondo explique los resultados.

13-120 Repita el problema 13-119, pero para un canal trapezoidal que tiene un ancho en la base de 5 m y un ángulo de su lado lateral de 45°.

13-121 Un canal trapezoidal con paredes de ladrillo tiene una pendiente del fondo de 0.001 y un ancho en la base de 4 m, y los lados superficiales están inclinados a 30° con la horizontal, como se muestra en la figura P13-121. Si la profundidad normal mide 2 m, estime la razón de flujo del agua a través del canal. *Respuesta:* 36.4 m^3/s

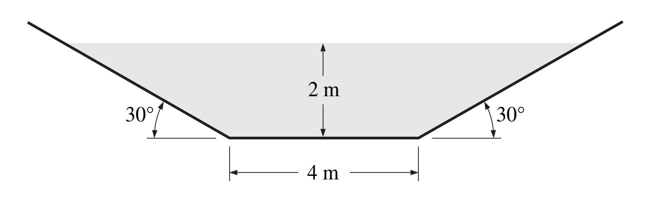


FIGURA P13-121

13-122 Una alcantarilla circular de acero para tormentas con 2 m de diámetro interno (n = 0.012) debe descargar agua de manera uniforme a una razón de 12 m^3/s a una distancia de 1 km. Si la profundidad máxima debe ser de 1.5 m, determine la caída de elevación necesaria.

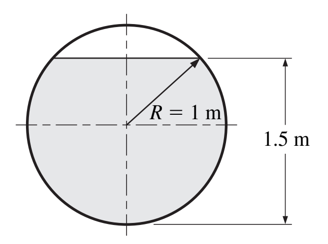


FIGURA P13-122

13-123 Considere agua que fluye a través de un canal con forma de "V". Determine el ángulo θ que forma el fondo del canal con la horizontal para que el flujo sea más eficiente.

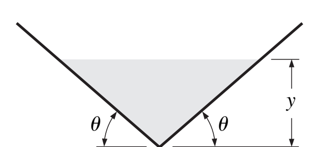


FIGURA P13-123

13-124I Un canal rectangular de concreto no acabado debe construirse para descargar agua de manera uniforme a una razón de 200 ft^3/s. Para el caso de la mejor sección transversal, determine el ancho del fondo del canal si la caída de elevación disponible es *a*) 8 y *b*) 10 ft por milla. *Respuestas:* *a*) 7.86 y *b*) 7.54 ft por milla

13-125I Repita el problema 13-124I para el caso de un canal trapezoidal con la mejor sección transversal.

13-126 Fluye agua en un canal cuya pendiente de fondo es 0.5° y cuya sección transversal es como se muestra en la figura P13-126. Las dimensiones y los coeficientes de Manning para las superficies en las diferentes subsecciones también se dan en la figura. Determine la razón de flujo a través del canal y el coeficiente de Manning efectivo para el canal.

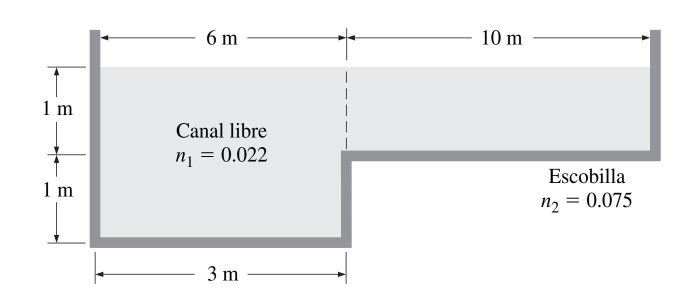


FIGURA P13-126

13-127 Considere dos canales idénticos, uno rectangular con ancho de fondo b y otro circular de diámetro D, con razones de flujo, pendientes de fondo, y paredes superficiales idénticas. Si la altura de flujo en el canal rectangular es también b y el canal circular fluye a la mitad, determine la relación entre b y D.

13-128 Considere el flujo de agua a través de una muesca parabólica que se muestra en la figura P13-128. Desarrolle una relación para la razón de flujo y calcule su valor numérico para el caso imaginario en el cual el flujo de velocidad está dado por la ecuación de Toricelli $V = \sqrt{2g(H - y)}$. *Respuesta:* 0.246 m³/s

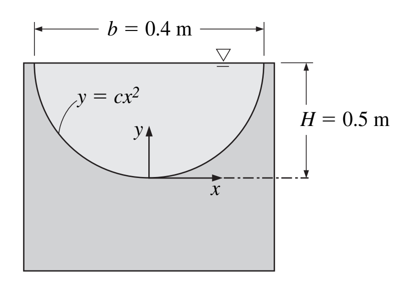


FIGURA P13-128

13-129 En la práctica, la muesca "V" se usa por lo general para medir la razón de flujo en canales abiertos. Con el uso de la ecuación ideal de Torriceli $V = \sqrt{2g(H - y)}$ para la velocidad, desarrolle una relación para la razón de flujo a través de la muesca "V" en términos del ángulo θ. Muestre también la variación de la razón de flujo con θ evaluando la razón de flujo para θ = 25, 40, 60, y 75°, y grafique sus resultados.

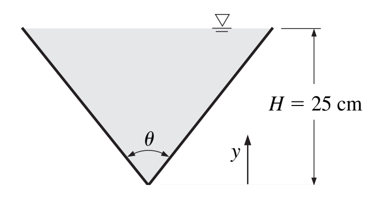


FIGURA P13-129

13-130 Fluye agua de manera uniforme en un canal circular lleno hasta la mitad con un diámetro de 1.2 cm, colocado con una inclinación de 0.0004. Si la razón de flujo es de 1.25 m³/s, determine el coeficiente de Manning del canal y el número de Froude.

13-131 Fluye agua en un canal horizontal ancho aproximándose a una protuberancia de 20 cm de altura con una velocidad de 1.25 m/s y una profundidad de flujo de 1.8 m. Determine la velocidad, profundidad de flujo, y número de Froude sobre la protuberancia.

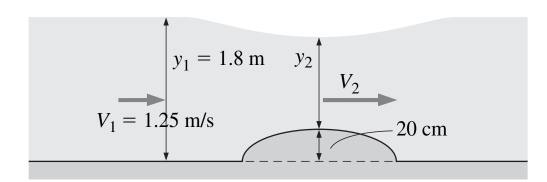


FIGURA P13-131

13-132 Reconsidere el problema 13-131. Determine la altura de la protuberancia para la cual el flujo sobre ésta es crítico (Fr = 1).

13-133 Considere que el agua que fluye a través de un canal rectangular ancho sufre un salto hidráulico. Muestre que la razón de los números de Froude antes y después del salto pueden expresarse en términos de las profundidades de flujo y_1 y y_2 antes y después del salto, respectivamente, como $Fr_1/Fr_2 = \sqrt{(y_2/y_1)^3}$.

13-134 Una compuerta con efluente libre se usa para controlar la razón de descarga de agua a través de un canal. Determine la razón de flujo por unidad de ancho cuando la puerta se eleva hasta producir un hueco de 30 cm y la profundidad de flujo corriente arriba cuando se mide resulta ser de 1.8 m. Determine también la profundidad de flujo y la velocidad corriente abajo.

13-135 El agua que fluye en un canal ancho con una profundidad de flujo de 45 cm y una velocidad promedio de 8 m/s sufre un salto hidráulico. Determine la fracción de la energía mecánica del fluido disipada durante este salto. *Respuesta:* 36.8 por ciento

13-136 El agua que fluye a través de una compuerta sufre un salto hidráulico, como se muestra en la figura P13-136. La velocidad del agua es de 1.25 m/s antes de alcanzar la puerta y 4 m/s después del salto. Determine la razón de flujo del agua a través de la puerta por metro de ancho del canal, las profundidades de flujo y_1 y y_2, y la razón de disipación de energía del salto.

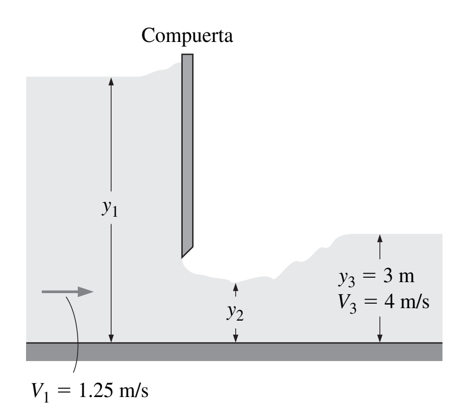


FIGURA P13-136

13-137 Repita el problema 13-136 para una velocidad de 2 m/s después de un salto hidráulico.

13-138 Se descarga agua desde un lago de 5 m de profundidad dentro de un canal de concreto acabado con una pendiente de fondo de 0.004 a través de una compuerta de 0.5 m de altura abierta en el fondo. Un poco después se establecen condiciones de flujo uniforme subcrítico y el agua experimenta un salto hidráulico. Determine la profundidad de flujo, velocidad, y número de Froude después del salto. Ignore la pendiente de fondo cuando se analiza el salto hidráulico.

13-139 Se descarga agua desde un dique a un canal de desagüe para evitar el desbordamiento y reducir el riesgo de inundaciones. Un gran porcentaje de potencia destructiva de agua se disipa por medio de un salto hidráulico, durante el cual la profundidad del agua aumenta de 0.50 a 4 m. Determine las veloci-

dades del agua antes y después del salto, y la potencia mecánica disipada por metro de ancho del vertedero.

13-140 La razón de flujo de agua en un canal rectangular de 6 m de ancho se mide usando un vertedero rectangular de pared gruesa de 1.1 m de altura que cruza todo el canal. Si la altura por encima del vertedero es de 0.6 m corriente arriba desde el vertedero, determine la razón de flujo del agua.

13-141E Considere dos canales rectangulares idénticos de 12 ft de ancho, cada uno equipado con vertederos muy anchos de 2 ft de altura, excepto que el vertedero es de pared gruesa en uno de los canales y de pared delgada en el otro. Para una profundidad de flujo de 5 ft en ambos canales, determine la razón de flujo a través de cada canal. *Respuestas:* 244 ft^3/s, 79.2 ft^3/s

Problemas de diseño y ensayo

13-142 Por medio de catálogos o websites obtenga información de tres diferentes fabricantes de vertederos. Compare los diferentes diseños de los vertederos y explique las ventajas y desventajas de cada diseño. Indique las aplicaciones para las cuales cada uno de los diseños es más satisfactorio.

13-143 Considere agua que fluye en un rango de 10 a 15 m^3/s a través de un canal rectangular de sección horizontal de 5 m de ancho. Se instalará un vertedero de pared rectangular o de pared triangular delgada para medir la razón de flujo. Si la profundidad del agua permanece por debajo de 2 m todo el tiempo, especifique el tipo y dimensiones del vertedero apropiado. ¿Qué respondería si el rango fuera de 0 a 15 m^3/s?

CAPÍTULO

14

TURBOMAQUINARIA

En este capítulo se tratan los principios de una aplicación común e importante de la mecánica de fluidos, la *turbomaquinaria*. Primero se clasifican las turbomáquinas en dos amplias categorías, *bombas* y *turbinas*. Después se analizan estas turbomáquinas con todo detalle, principalmente desde el punto de vista cualitativo, y se explican los principios de su operación. Se destaca el diseño preliminar y, más que dar detalles, se presenta el rendimiento general de las turbomáquinas. Además, se analiza cómo hacer que correspondan los requisitos de un sistema de flujo de fluidos con las características de una turbomáquina. Parte considerable de este capítulo se dedica a *las leyes de de semejanza* de la tubomaquinaria, aplicación práctica del análisis dimensional. Se muestra cómo se usan estas leyes para diseñar nuevas turbomáquinas, que son similares de manera geométrica a las ya existentes.

OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Identificar varios tipos de bombas y turbinas, así como entender su funcionamiento.
- Aplicar el análisis dimensional para diseñar nuevas bombas y turbinas geométricamente similares a las existentes.
- Efectuar análisis vectorial básico del flujo adentro y afuera de bombas y turbinas.
- Utilizar velocidad específica para el diseño preliminar y selección de bombas y turbinas.

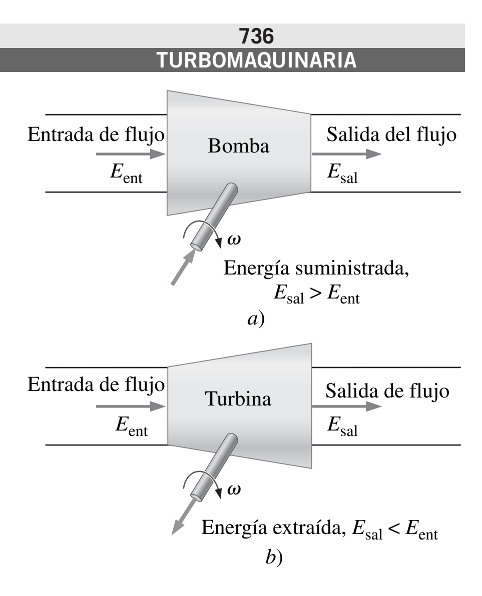


FIGURA 14-1
a) Una bomba suministra energía a un fluido, en tanto que *b*) una turbina extrae energía de un fluido.

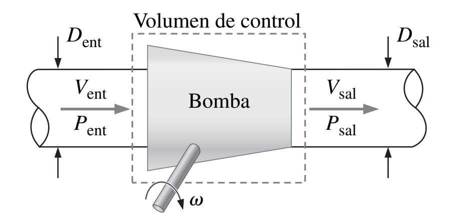


FIGURA 14-2
En el caso del flujo estacionario, la ley de conservación de la masa establece que la cantidad de masa que sale de una bomba sea igual a la cantidad de masa que entra a la misma; en el caso de flujo incompresible en donde las áreas de las secciones transversales de la entrada y la salida son iguales ($D_{sal} = D_{ent}$), se puede llegar a la conclusión que $V_{sal} = V_{ent}$, pero $P_{sal} > P_{ent}$.

	Ventilador	Fuelle	Compresor
ΔP	Bajo	Medio	Alto
$\dot{V}$	Alto	Medio	Bajo

FIGURA 14-3
Cuando las bombas se usan con gases se llaman *ventiladores, sopladores* o *compresores,* lo cual depende de los valores relativos del incremento de presión y el gasto volumétrico.

14-1 ▪ CLASIFICACIONES Y TERMINOLOGÍA

Existen dos amplias categorías de turbomaquinaria, **bombas** y **turbinas**. La palabra *bomba* es un término general que designa a cualquier máquina hidráulica que *añada* energía a un fluido. Algunos autores llaman a las bombas **dispositivos que absorben energía**, porque la energía se les debe suministrar, y transfieren la mayor parte de esta energía al fluido, por lo regular, mediante una flecha rotatoria (Fig. 14-1*a*). El incremento en la energía hidráulica se experimenta como un aumento en la presión del fluido. Por otro lado, las turbinas son **dispositivos que producen energía** porque extraen la energía *del* fluido y transforman la mayor parte de esa energía a una forma de energía mecánica, casi siempre mediante una flecha rotatoria (Fig. 14.1*b*). El fluido en la descarga de la turbina experimenta una pérdida de energía, por lo general en forma de pérdida de presión.

Una persona común podría pensar que la energía que se suministra a una bomba aumenta la velocidad del fluido que pasa por ella, y que una turbina extrae la energía del fluido y le disminuye velocidad. Esto no es necesariamente el caso. Considere un volumen de control alrededor de una bomba (Fig. 14.2). Se suponen condiciones estacionarias. Con esto se da a entender que ni la cantidad de masa ni la velocidad rotacional de los álabes rotatorios cambia con el tiempo (el campo de flujo detallado en las cercanías de los álabes rotatorios dentro de la bomba *no* es estacionario, pero el análisis del volumen de control no tiene que ver con los detalles del interior del volumen de control). De acuerdo con la ley de conservación de la masa, se sabe que la cantidad de masa que entra a la bomba debe ser igual a la cantidad de masa que abandona la bomba. Si el flujo es incompresible, el gasto volumétrico en la entrada y el gasto volumétrico en la descarga también deben ser iguales. Además, si el diámetro de la descarga es igual al de la entrada, la conservación de la masa exige que la velocidad promedio en la descarga debe ser idéntica a la velocidad promedio en la entrada. En otras palabras, la bomba no aumenta necesariamente la *velocidad* del fluido que pasa por ella, sino que incrementa la *presión* del fluido. Claro que, cuando la bomba se apaga ya no habrá ningún flujo. Así que, la bomba *sí* aumenta la velocidad del fluido si se le compara con el caso en que no hay bomba en el sistema. Sin embargo, de acuerdo con los cambios desde la entrada hasta la salida *a través* de la bomba, no necesariamente aumenta la velocidad del fluido (la velocidad de salida podría ser más baja que la velocidad de entrada si el diámetro de la descarga es mayor que el de la entrada).

> El objetivo de tener una bomba es añadir energía al fluido, lo que da como resultado un incremento en la presión de éste, no necesariamente un aumento en la velocidad del fluido cuando pasa por la bomba.

Puede plantearse un enunciado similar respecto a una turbina:

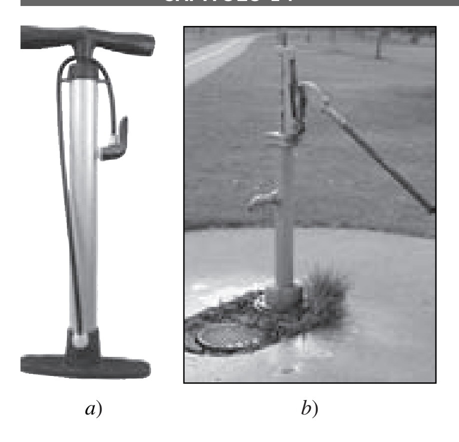
> El objetivo de instalar una turbina es extraer energía de un fluido, lo que origina menor presión en éste, no necesariamente una menor velocidad del fluido cuando pasa por la turbina.

Las máquinas hidráulicas que impulsan líquidos se denominan **bombas**, sin embargo, por lo que se refiere a los gases hay varios nombres para las máquinas que los mueven (Fig. 14-3). Un **ventilador** es una bomba de gases que eleva ligeramente la presión y la razón de un flujo alta. Entre los ejemplos están los sopladores centrífugos y los ventiladores en jaula de ardilla del sistema de ventilación de los automóviles, hornos y ventiladores de álabes. Un **compresor** es una bomba de gas diseñada para entregar caudales, desde bajos hasta moderados, a una presión muy alta. Como ejemplos están las compresoras de aire que activan herramienta neumática y que llenan de aire las llantas de los vehículos en las es-

taciones de servicio, además los compresores de gas refrigerante que se utilizan en las bombas de calor, refrigeradores y acondicionadores de aire.

El nombre apropiado para las bombas y las turbinas, en las cuales la energía se suministra o se extrae mediante la flecha rotatoria es **turbomáquinas**, ya que el prefijo latino *turbo* significa girar. No todas las bombas y las turbinas cuentan con una flecha rotatoria. La bomba de aire manual que se utiliza para inflar los neumáticos de las bicicletas es un ejemplo adecuado (Fig. 14-4*a*). El movimiento reciprocante hacia arriba y hacia abajo de un émbolo sustituye una flecha rotatoria en este tipo de bomba, y es más adecuado llamarla simplemente **máquina hidráulica**, en vez de turbomáquina. Una bomba antigua para pozo opera de manera similar para bombear agua en vez de aire (Fig. 14-4*b*). Sin embargo, las palabras *turbomáquina* y *turbomaquinaria* se utilizan con frecuencia para referirse a *todos* los tipos de bombas y turbinas sin importar si utilizan una flecha rotatoria o no.

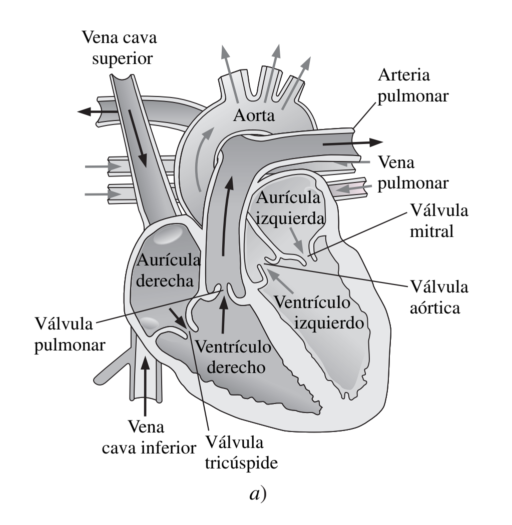
Las máquinas hidráulicas podrían clasificarse en máquinas de *desplazamiento positivo* o máquinas *dinámicas*, según sea la manera en la que ocurre la transferencia de energía. En las **máquinas de desplazamiento positivo**, el fluido se dirige hacia adentro de un volumen cerrado. La transferencia de energía al fluido se acompaña por un movimiento de las fronteras del volumen cerrado, lo cual causa la expansión o la contracción del volumen, debido a lo cual se succiona líquido o se fuerce a salir, respectivamente. El corazón es un ejemplo adecuado de **una bomba de desplazamiento positivo** (Fig. 14-5*a*). Está diseñado con válvulas de una sonda dirección que se abren para dejar que la sangre entre cuando las cámaras del corazón se expanden, y otras válvulas de un solo sentido que se abren cuando la sangre se fuerce a salir de dichas cámaras cuando éstas se contraen. Un ejemplo de una **turbina de desplazamiento positivo** es el medidor de agua de las casas (Fig. 14-5*b*), en el cual el agua se obliga a entrar en una cámara cerrada de un volumen que se expande, que está conectada a una flecha de descarga que gira a medida que el agua entra a la cámara. Las fronteras del volumen se colapsan entonces, hacen girar un poco más la



a) *b*)

FIGURA 14-4
a) No todas las bombas tienen flecha rotatoria; *a*) la energía se suministra a esta bomba manual para inflar neumáticos cuando se realiza un movimiento ascendente y descendente del brazo de una persona para bombear aire; *b*) se usa un mecanismo similar para bombear agua en una antigua bomba para pozos.

a) Fotografía de Andrew Cimbala, reproducida con autorización b) © The McGraw-Hill Companies, Inc./Ellen Behrman, fotógrafa.



a)



b)

FIGURA 14-5
a) El corazón humano es un ejemplo de una *bomba de desplazamiento positivo*; la sangre se bombea por la expansión y contracción de las cámaras del corazón, llamadas *ventrículos*. *b*) El medidor de agua común que se encuentra en todas las casas es un ejemplo de *turbina de desplazamiento positivo*; por cada revolución de la flecha, el agua llena y abandona una cámara de volumen conocido.

Fotografía cortesía de Niagara Meters, Spartanburg, SC. Reproducido con autorización.

flecha de descarga y dejan que el agua siga su camino hasta el fregadero, la regadera, etcétera. El medidor del agua registra cada giro de 360° de la flecha de descarga, ya que está calibrado precisamente al volumen conocido del líquido en la cámara.

En las **máquinas dinámicas** no hay un volumen cerrado. En este caso, los álabes rotatorios suministran energía a un fluido o la extraen de él. Por lo que se refiere a las bombas, los álabes rotatorios se llaman **álabes o aspas de rueda móvil o álabes de rotor** (en América Latina) **o rodete** (en España) **o de impulsor,** y en las turbinas se llaman **álabes o aspas del rodete o rotor.** Ejemplos de **bombas dinámicas** son las **bombas acorazadas** y las **bombas entubadas** (aquellas que tienen una carcasa que cubre los álabes, como la bomba de agua de algunos automóviles) y las **bombas descubiertas** (como los ventiladores de techo que se usan en las casas, las hélices de un aeroplano o el rotor de un helicóptero). Ejemplos de **turbinas dinámicas** son las **turbinas acorazadas**, como la hidroturbina que extrae energía del agua en una planta hidroeléctrica, y las **turbinas descubiertas** como la turbina eólica que extrae energía del viento (Fig. 14-6).

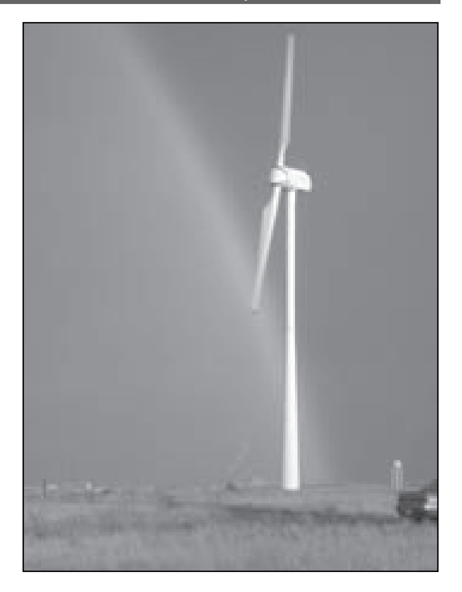


FIGURA 14-6
Una turbina eólica es un ejemplo adecuado de una máquina dinámica del tipo abierto; el aire hace girar las aspas y la flecha de salida acciona un generador eléctrico.
The Wind Turbine Company. Reproducido con autorización.

14-2 ▪ BOMBAS

Se usan algunos parámetros fundamentales para analizar el rendimiento de una bomba. La **razón de flujo de masa** del fluido a través de la bomba, $\dot{m}$, es un parámetro obvio fundamental en el funcionamiento de las bombas. En el caso del fluido incompresible es más común utilizar el **gasto volumétrico** en vez del gasto másico. En la industria de la turbomaquinaria, el flujo volumétrico se denomina **capacidad**, y es, simplemente, el gasto másico dividido entre la densidad del fluido:

Gasto volumétrico (capacidad):
$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} \qquad \textbf{(14-1)}$$

Además, el rendimiento de una bomba se caracteriza por su **carga hidrostática neta** *H*, que se define como el cambio en la **carga hidrostática de Bernoulli** entre la entrada y la descarga de la bomba:

Carga hidrostática neta:
$$H = \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_{\text{sal}} - \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_{\text{ent}} \qquad \textbf{(14-2)}$$

La dimensión de la carga hidrostática neta es longitud, y con frecuencia se menciona como altura de una columna equivalente de agua, hasta en el caso de una bomba que no bombea agua.

Por lo que se refiere al *líquido* que se bombea, la carga hidrostática de Bernoulli en la entrada equivale a la altura total o **altura de línea de energía (LE,** EGL por sus siglas en inglés) en la entrada LE_{ent}, que se obtiene cuando se alinea un tubo de Pitot en el centro del flujo según se ilustra en la figura 14-7. La línea de referencia dinámica en la descarga LE_{sal}, se obtiene de la misma manera, como se ilustra en la figura. En el caso general, la salida de la bomba podría estar a una altura distinta que la entrada y su diámetro y velocidad promedio podría no ser los mismos que en la entrada. Independientemente de estas diferencias, la carga hidrostática *H* es igual a la diferencia entre LE_{sal} y LE_{ent}:

Carga hidrostática neta para una bomba de líquidos:
$$H = \text{LE}_{\text{sal}} - \text{LE}_{\text{ent}}$$

Considere el caso especial de un flujo incompresible a través de una bomba en la cual los diámetros de la entrada y la salida son idénticos, y están a la misma altura. La ecuación 14-2 se reduce a:

Caso especial con $D_{\text{sal}} = D_{\text{ent}}$ y $z_{\text{sal}} = z_{\text{ent}}$:
$$H = \frac{P_{\text{sal}} - P_{\text{ent}}}{\rho g}$$

En este caso simplificado, la carga hidrostática neta es simplemente el aumento de la presión en la bomba que se expresa como carga (altura de la columna de fluido).

La carga hidrostática neta es proporcional a la potencia útil entregada al fluido. Se acostumbra llamar a esta potencia hidráulica **potencia útil**, inclusive si el líquido que se bombea no es agua y hasta si la potencia no se mide en unidad de caballos de fuerza. En el aspecto de las dimensiones, se debe multiplicar la carga hidrostática neta de la ecuación 14-2 por la cantidad de masa y la aceleración de la gravedad para obtener las dimensiones de potencia. Por tanto:

Potencia útil: $$\dot{W}_{\text{potencia til}} = \dot{m}gH = \rho g\dot{V}H \qquad \textbf{(14-3)}$$

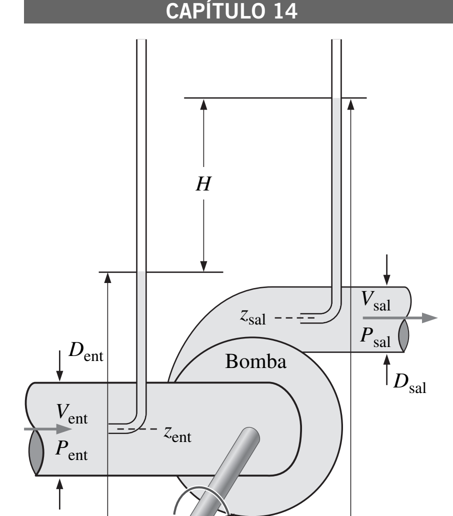


FIGURA 14-7
La *carga hidrostática neta* de una bomba, *H*, se define como el cambio en la carga total en la ecuación de Bernoulli desde la entrada hasta la descarga; en el caso de un líquido, equivale al cambio en la altura de la línea de energía, $H = LE_{salida} - LE_{entrada}$, en relación con algún plano de referencia arbitrario; bhp es la *potencia al freno*, la potencia suministrada a la bomba.

Todas las bombas sufren pérdidas irreversibles a causa de la fricción, fugas internas, separación del flujo en la superficie de los álabes, disipación turbulenta, entre otras. En consecuencia, la energía mecánica que se suministra a la bomba debe ser *mayor* que $\dot{W}_{potencia\ útil}$. En la terminología de las bombas, la potencia externa que se proporciona a la bomba se denomina **potencia al freno o potencia de accionamiento o potencia absorbida**, la cual se abrevia como bhp (por sus siglas en inglés: *brake horsepower*). En el caso representativo de una flecha rotatoria que suministra la potencia al freno:

Potencia al freno: $$\text{bhp} = \dot{W}_{\text{flecha}} = \omega T_{\text{flecha}} \qquad \textbf{(14-4)}$$

donde ω es la velocidad rotacional de la flecha (rad/s) y T_{flecha} es el momento de torsión o par de torsión que se suministra a la flecha. Se define **eficiencia de la bomba** η_{bomba} como la relación de la potencia útil y la potencia suministrada:

Eficiencia de la bomba: $$\eta_{\text{bomba}} = \frac{\dot{W}_{\text{potencia útil}}}{\dot{W}_{\text{flecha}}} = \frac{\dot{W}_{\text{potencia útil}}}{\text{bhp}} = \frac{\rho g\dot{V}H}{\omega T_{\text{flecha}}} \qquad \textbf{(14-5)}$$

Curvas de rendimiento de la bomba y correspondencia entre una bomba y un sistema de tubería

El máximo flujo volumétrico en una bomba ocurre cuando la carga hidrostática neta es cero, $H = 0$; este flujo se llama **descarga libre** de la bomba. La condición de descarga libre se logra cuando es inexistente la restricción de flujo en la entrada o la salida de la bomba, en otras palabras, cuando no hay **carga** en la bomba. En este punto de operación, $\dot{V}$ es grande, pero *H* es cero; la eficiencia de la bomba es cero porque la bomba no está haciendo trabajo útil, como es evidente por la ecuación 14-5. En el otro extremo, la **carga al cierre** es la presión hidrostática neta que se presenta cuando el gasto volumétrico es cero, $\dot{V} = 0$, y se obtiene cuando la abertura de descarga de la bomba está bloqueada. En estas condiciones, *H* es grande pero $\dot{V}$ es igual a cero; la eficiencia de la bomba (Ec. 14-5) es otra vez cero porque la bomba no realiza trabajo útil. Entre estos dos extremos, desde el cierre hasta la descarga libre, la carga hidrostática neta de la bomba, al incrementar el caudal, podría incrementarse un poco desde su valor al cierre, pero definitivamente *H* debe disminuir a cero a medida que el gasto volumétrico aumenta hasta su valor de descarga libre. La eficiencia de la bomba alcanza su valor máximo en algún punto entre la condición de cierre y la condición de descarga libre; este punto de operación de eficiencia máxima se denomina **punto de la mejor eficiencia** (PME, BEP por sus siglas en inglés) **o punto nominal o punto de diseño**, y se denota con un asterisco (H^*, $\dot{V}^*$, bhp*). Las curvas de *H*, η_{bomba} y bhp como funciones de $\dot{V}$ se denominan **curvas de rendimiento de la bomba** (o bien, *curvas características*, capítulo 8); las curvas representativas a una velocidad rotacional se grafican en la figura 14-8. Las curvas del rendimiento de la bomba cambian con la velocidad rotacional.

Es importante tener en cuenta que *para el caso de condiciones estacionarias, una bomba puede operar sólo según su curva de rendimiento*. Por tanto, el pun-

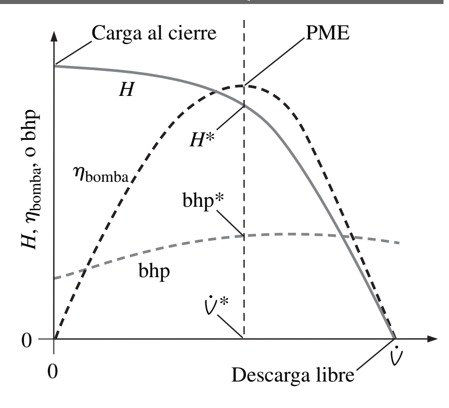


FIGURA 14-8
Curvas de rendimiento típicas de una bomba centrífuga con álabes inclinadas hacia atrás; podría ser diferente la forma de las curvas para otros tipos de bombas, y las curvas cambian conforme se modifica la velocidad de rotación de la flecha.

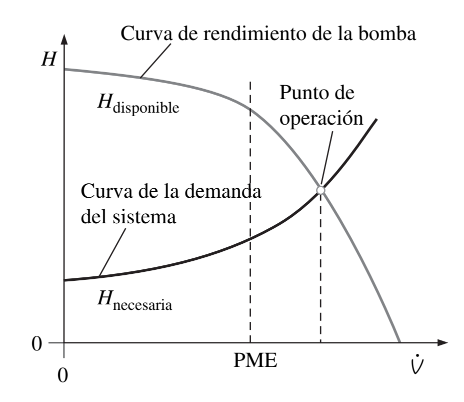


FIGURA 14-9
El *punto de operación* de un sistema de tuberías se establece como el gasto volumétrico en donde la curva de la demanda del sistema y la curva de rendimiento de la bomba se interceptan.

to de operación de un sistema de tuberías se determina cuando se hacen corresponder la demanda del sistema (carga hidrostática neta *necesaria*) con el rendimiento de la bomba (carga hidrostática neta *disponible*) En una aplicación representativa, $H_{necesaria}$ y $H_{disponible}$ coinciden en un único valor de caudal, que es el **punto de operación** o **punto de servicio** del sistema.

> El punto de operación permanente de un sistema de tuberías está establecido en el gasto volumétrico donde $H_{necesaria} = H_{disponible}$.

En el caso determinado de un sistema de tuberías con sus pérdidas mayores y menores y cambios de altura, entre otras variaciones, la carga hidrostática neta necesaria se *incrementa* con el gasto volumétrico. Por otro lado, la carga hidrostática neta disponible de la mayoría de las bombas *disminuye* con el caudal, como se muestra en la figura 14-8, por lo menos sobre la mayor parte de su rango de operación recomendado. Por lo tanto, la curva de la demanda del sistema y la curva de rendimiento de la bomba se cruzan como se ilustra en la figura 14-9, y esto determina el punto de operación. Con suerte, el punto de operación está en el punto de la mejor eficiencia o cerca del mismo de la bomba. Pero en la mayoría de los casos, como se ilustra en la figura 14.9, la bomba no trabaja a su eficiencia óptima. Si la eficiencia es de lo más importante, entonces debe seleccionarse a la bomba con todo cuidado (o bien, debe diseñarse una nueva bomba) de tal modo que el punto de operación esté tan cerca del punto de la mejor eficiencia como sea posible. A veces es posible cambiar la velocidad de rotación de la flecha de modo que una bomba existente pueda funcionar mucho más cerca de su punto de diseño (el punto de la mejor eficiencia).

Hay situaciones infortunadas donde la curva del sistema y la curva de rendimiento de la bomba se cruzan en más de un punto de operación. Esto sucede cuando una bomba que tiene cambios de pendiente en su curva característica de la carga hidrostática neta se monta en un sistema de tuberías cuya curva de demanda es casi plana, como se ilustra en la figura 14-10. Aunque es raro, estas situaciones son posibles y deben evitarse porque el sistema podría "oscilar" en busca de un punto de operación, lo que ocasionaría un flujo no estacionario.

Es muy fácil acoplar un sistema de tuberías a un bomba cuando que se advierte que el término para **carga útil de la bomba** ($h_{bomba,u}$) que se usó en la ecuación de energía expresada en su forma de cargas (capítulo 5) es el mismo que la carga hidrostática neta (H) que se usa en este capítulo. Por ejemplo, considere un sistema general de tuberías con cambios de altura, pérdidas mayores y menores y aceleración del fluido (Fig. 14.11). Primero se resuelve la ecuación de energía para la **carga hidrostática neta necesaria** $H_{necesaria}$:

$$H_{necesaria} = h_{bomba,\,u} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2 - \alpha_1 V_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) + h_{\cancel{turbina}} + h_{L,\,total} \qquad \textbf{(14-6)}$$

donde se supone que el sistema carece de turbina, aunque el término puede agregarse, si es necesario. Los factores de corrección de la energía cinética también se han incluido en la ecuación 14.6 para tener mayor exactitud, aun cuando es práctica común en la industria de la turbomaquinaria ignorarlos (se supone con frecuencia que α_1 y α_2 son iguales a la unidad porque el flujo es turbulento).

La ecuación 14-6 se evalúa desde la entrada del sistema de tuberías (punto 1, corriente arriba de la bomba) hasta la descarga del sistema de tuberías (punto 2, corriente abajo de la bomba). La ecuación 14-6 concuerda con la intuición, porque señala que la carga hidrostática útil de la bomba que se entrega al fluido realiza lo siguiente:

- Incrementa la *presión estática* del fluido desde el punto 1 hasta el punto 2 (primer término de la derecha).
- Aumenta la *presión dinámica* (energía cinética) del fluido desde el punto 1 hasta el punto 2 (segundo término de la derecha).

- Aumenta la *elevación* (energía potencial) del fluido desde el punto 1 hasta el punto 2 (tercer término de la derecha).
- Vence las *pérdidas irreversibles de carga hidrostática* en el sistema de tuberías (último término de la derecha)

En un sistema general, el cambio en la presión estática, presión dinámica y elevación pueden ser positivas o negativas, en tanto que las pérdidas de carga irreversibles *siempre son positivas*. En muchos de los problemas de ingeniería mecánica y civil, en los cuales el fluido es un líquido, el término de elevación es importante; pero cuando el fluido es un gas, tal como sucede en los problemas de ventilación y contaminación del aire, el término de elevación es despreciable casi siempre.

Para acoplar una bomba a un sistema y para determinar el punto de operación, se iguala $H_{\text{necesaria}}$ de la ecuación 14-6 con $H_{\text{disponible}}$, la cual es la carga hidrostática neta (casi siempre conocida) de la bomba como una función del gasto volumétrico.

Punto de operación: $$H_{\text{requerida}} = H_{\text{disponible}} \tag{14-7}$$

La situación más común es que el ingeniero seleccione una bomba poco más potente que la que en realidad se necesita. El gasto volumétrico a través del sistema de tubería es poco más grande que el necesario, por lo que se instala una válvula o un amortiguador en la línea, de modo que el caudal pueda disminuirse cuando se necesite.

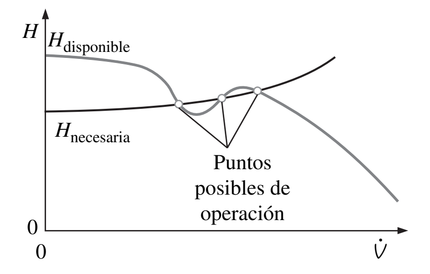


FIGURA 14-10
Deben evitarse las situaciones en las cuales puede haber más de un único punto de operación. En estos casos se prefiere instalar una bomba diferente.

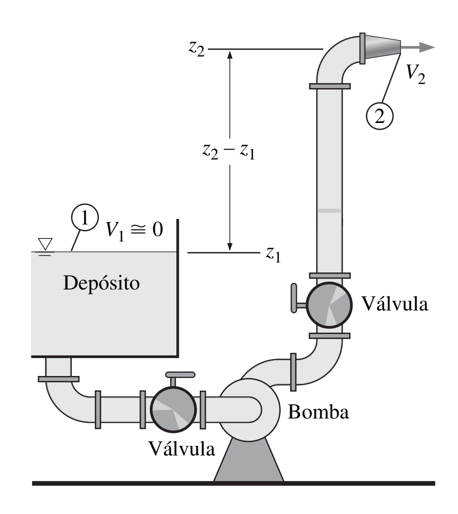


FIGURA 14-11
En la ecuación 14-6 se destaca el papel de una bomba en un sistema de tuberías, es decir, la bomba incrementa (o disminuye) la presión estática, la presión dinámica y la elevación del fluido y contrarresta las pérdidas irreversibles.

EJEMPLO 14-1 Punto de operación de un ventilador en un sistema de ventilación

Un *sistema de ventilación local* (ducto de campana y extracción) se utiliza para extraer el aire y los contaminantes que se producen en una operación de limpieza en seco (Fig. 14-12). El conducto es cilíndrico y está hecho de acero galvanizado con costuras longitudinales y juntas cada 30 in (0.76 m). El diámetro interior (DI) del conducto es D = 9.06 in (0.230 m) y su longitud total es L = 44.0 ft (13.4 m). Hay cinco codos CD3-9 a lo largo del tubo. La altura de rugosidad equivalente de este conducto es 0.15 mm, y cada codo tiene un coeficiente de pérdidas menores (locales) de $K_L = C_0 = 0.21$. Observe la notación para el coeficiente de pérdidas menores, se usa por lo general en la industria de la ventilación (ASHRAE, 2001). Con el fin de asegurar la ventilación adecuada, el gasto volumétrico mínimo necesario por el conducto es $\dot{V}$ = 600 cfm (pies cúbicos por minuto), es decir, 0.283 m^3/s a 25°C. En los manuales del fabricante, el coeficiente de pérdida en la entrada de la campana es 1.3 con base en la velocidad en el conducto. Cuando el regulador de tiro está totalmente abierto, el coeficiente de pérdida es 1.8. Hay un ventilador centrífugo de diámetros de 9.0 in en la entrada y en la salida. Sus datos de rendimiento se proporcionan en la Tabla 14.1, de acuerdo con el fabricante. Señale el punto de operación de este sistema de ventilación local y trace una gráfica de los incrementos de presión necesarios y disponibles en función del gasto volumétrico. ¿Es adecuado el ventilador seleccionado?

SOLUCIÓN Se estimará el punto de operación para un sistema de ventilación y conductos determinados y se graficarán los incrementos de presión necesarios y disponibles del ventilador en función del gasto volumétrico. Se determinará si el ventilador es adecuado.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** La concentración de contaminantes es baja en el aire; las propiedades del fluido son las del aire. **3** El flujo en la descarga es turbulento y totalmente desarrollado en una tubería con $\alpha = 1.05$.

Propiedades Para el aire a 25°C, $\nu = 1.562 \times 10^{-5}$ m^2/s y $\rho = 1.184$ kg/m^3. La presión atmosférica normal es P_{atm} = 101.3 kPa.

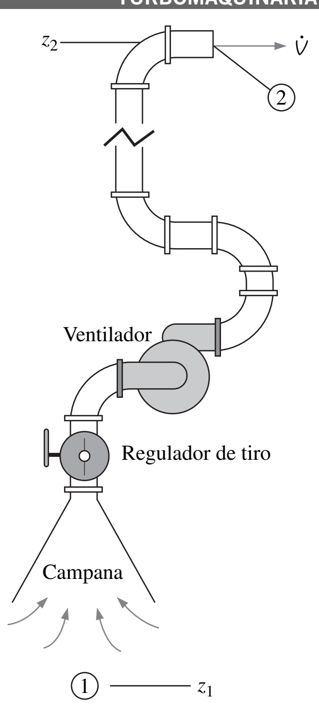


FIGURA 14-12
El sistema de ventilación local del ejemplo 14-1, en el que se muestra un ventilador y todas las pérdidas menores.

TABLA 14-1

Datos del fabricante de rendimiento del ventilador del Ejemplo 14-1*

$\dot{V}$, pcm	$(\delta P)_{vent}$, pulg de H_2O
0	0.90
250	0.95
500	0.90
750	0.75
1 000	0.40
1 200	0.0

* Note que los datos de aumento de presión se enlistan como in (pulgadas) de columna de *agua*, aun cuando el *aire* es el fluido. Ésta es la práctica común en la industria de la ventilación.

Análisis Se aplica la ecuación de la energía para el caso estacionario en su forma de las cargas (Ec. 14-6) a partir del punto 1 en la región del aire estancado en la habitación hasta el punto 2 en la descarga del conducto:

$$H_{\text{necesaria}} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2 - \alpha_1 V_1^2}{2g} + \underbrace{\cancel{(z_2 - z_1)}}_{\text{se ignora en el caso de gases}} + h_{L,\,\text{total}} \qquad \textbf{(1)}$$

En la ecuación 1 podría ignorarse la velocidad del aire en el punto 1, ya que se eligió (con inteligencia) lo suficiente lejos de la entrada de la campana de modo que el aire está casi estancado. En el punto 1, P_1 es igual a P_{atm} , y en el punto 2, P_2 también es igual a $P_{atm,}$ porque la boquilla descarga en el aire del exterior sobre el techo del edificio. Por tanto, los términos de la presión se cancelan y la ecuación 1 se reduce a:

Carga neta necesaria:
$$H_{\text{necesaria}} = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{L,\,\text{total}} \qquad \textbf{(2)}$$

La pérdida de carga total en la ecuación 2 es una combinación de las pérdidas mayores y menores, y depende del gasto volumétrico. Debido que el diámetro del tubo es constante:

Pérdida total de carga debido a las irreversibilidades:

$$h_{L,\,\text{total}} = \left(f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g} \qquad \textbf{(3)}$$

El factor de rugosidad adimensional es ε/D = (0.15 mm)/(230 mm) = 6.52 × 10^{-4}. El número de Reynolds del aire que fluye por el conducto es:

Número de Reynolds:
$$\text{Re} = \frac{DV}{\nu} = \frac{D}{\nu}\frac{4\dot{V}}{\pi D^2} = \frac{4\dot{V}}{\nu \pi D} \qquad \textbf{(4)}$$

El número de Reynolds varía con el gasto volumétrico. En el caudal mínimo necesario, la velocidad del aire por el conducto es $V = V_2$ = 6.81 m/s, y el número de Reynolds es:

$$\text{Re} = \frac{4(0.283\ \text{m}^3/\text{s})}{(1.562 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s})\pi(0.230\ \text{m})} = 1.00 \times 10^5$$

A partir del diagrama de Moody (o de la ecuación de Colebrook), con este número de Reynolds y este factor de rugosidad, el factor de fricción es f = 0.0209. La suma de todos los coeficientes de pérdidas menores es:

Pérdidas menores:
$$\sum K_L = 1.3 + 5(0.21) + 1.8 = 4.15 \qquad \textbf{(5)}$$

Cuando se sustituyen estos valores en el caudal mínimo necesario en la ecuación 2, la carga hidrostática neta necesaria del ventilador para el caudal mínimo es:

$$H_{\text{requerida}} = \left(\alpha_2 + f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g}$$

$$= \left(1.05 + 0.0209\frac{13.4\ \text{m}}{0.230\ \text{m}} + 4.15\right)\frac{(6.81\ \text{m/s})^2}{2(9.81\ \text{m/s}^2)} = 15.2\ \text{m de aire} \qquad \textbf{(6)}$$

Observe que la carga hidrostática se expresa en unidades de la altura de una columna equivalente del fluido bombeado, que en este caso es aire. Se convierte a una altura de una columna equivalente de *agua* multiplicándola por el cociente de la densidad del aire a la densidad del agua:



$$H_{\text{requerida, pulg de agua}} = H_{\text{requerida, aire}} \frac{\rho_{\text{aire}}}{\rho_{\text{agua}}}$$

$$= (15.2 \text{ m}) \frac{1.184 \text{ kg/m}^3}{998.0 \text{ kg/m}^3} \left(\frac{1 \text{ pulg}}{0.0254 \text{ m}} \right)$$

$$= 0.709 \text{ pulg de agua} \qquad \textbf{(7)}$$

Se repiten los cálculos con varios valores de gasto volumétrico y se comparan con la carga hidrostática neta disponible del ventilador de la figura 14-13. El punto de operación es a un caudal de alrededor de **650 cfm (pies cúbicos por minuto)**, en que tanto la carga hidrostática neta requerida como la disponible son iguales a casi **0.83 pulgadas (in) de agua**. Se llega a la conclusión que el ventilador seleccionado **es más que adecuado para el trabajo.**

Discusión El ventilador que se compró es poco más potente que lo que se necesita, ya que produce un caudal superior al necesario. La diferencia es pequeña y aceptable; la válvula de mariposa del regulador de tiro podría estar parcialmente cerrada para disminuir el caudal a 600 cfm (pies cúbicos por minuto) si es necesario. Por seguridad, es evidente mejor adquirir un ventilador más potente cuando se usa con un sistema para controlar la contaminación del aire.

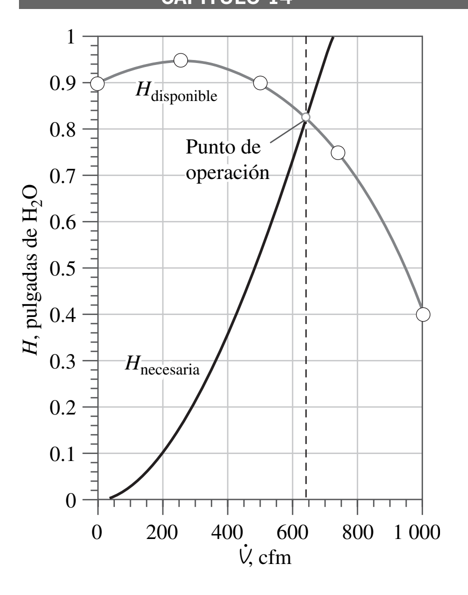


FIGURA 14-13
La carga hidrostática neta en función del caudal para el sistema de ventilación del Ejemplo 14-1. El punto donde los valores de H disponible y necesaria coinciden es el punto de operación.

Es común en la industria de las bombas ofrecer varias opciones de diámetro del rotor, o rodete, para una misma carcasa de la bomba. Las razones son varias: 1) abatir costos de manufactura, 2) posibilitar un incremento de capacidad cuando se cambia sólo el rotor, 3) estandarizar los montajes de instalación y 4) hacer posible la reutilización del equipo para aplicaciones distintas. Cuando se grafica el rendimiento de tal "familia" de bombas, los fabricantes no trazan curvas separadas de H, η_{bomba} y bhp para cada diámetro de la rueda móvil como se muestra en la figura 14-8. Prefieren combinar las curvas de rendimiento de toda la familia de bombas de distintos diámetros de rotor en una sola gráfica (Fig. 14-14). De manera específica, trazan una curva de H en función de $\dot{V}$ para cada diámetro de rotor en la misma forma que en la figura 14-8, pero crean unas *curvas de contorno* de eficiencia constante trazando curvas suaves que pasan por todos los puntos que tienen el mismo valor de η_{bomba} para las diferentes elecciones de diámetro del rotor. A menudo, las curvas de contorno de potencia al freno constante se trazan en la misma gráfica de manera similar. Puede verse un ejemplo en la figura 14-15 para una familia de bombas centrífugas que fabrica Taco, Inc. En este caso se muestran cinco diámetros del rotor, pero la carcasa de la bomba es idéntica en las cinco opciones. Como se puede ver en la figura 14-15, los fabricantes de las bombas no siempre trazan por completo sus curvas de rendimiento de las bombas para la descarga libre. La causa es que, por lo regular, las bombas no operan ahí debido a los bajos valores de carga hidrostática neta y eficiencia. Si se necesitan valores superiores de caudal y carga hidrostática neta, el cliente debe seleccionar la carcasa que le sigue en tamaño, o considerar usar unas bombas adicionales en serie o en paralelo.

Según la gráfica de rendimiento de la figura 14-15, es evidente que para una carcasa de bomba determinada, a medida que es más grande el rotor es mayor la eficiencia máxima que se alcanza. ¿Por qué entonces alguien compraría una bomba con rotor menos grande? Para contestar a esta pregunta, debe reconocerse que la aplicación del cliente requiere una cierta combinación de caudal y carga hidrostática neta. Si las condiciones se cumplen con un diámetro de rotor particular, posiblemente habría más beneficio por el costo al sacrificar eficiencia de la bomba con la finalidad de satisfacer dichas condiciones.

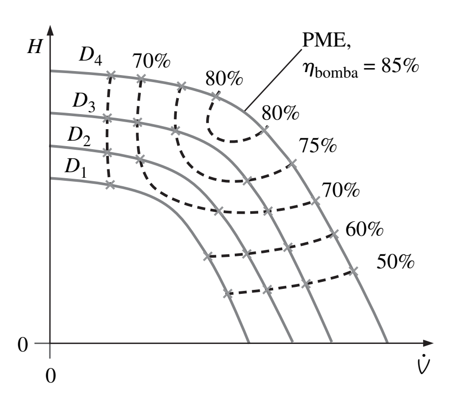


FIGURA 14-14
Curvas de rendimiento típicas para una *familia* de bombas centrífugas de igual diámetro de carcasa, pero distintos diámetros de rotor.

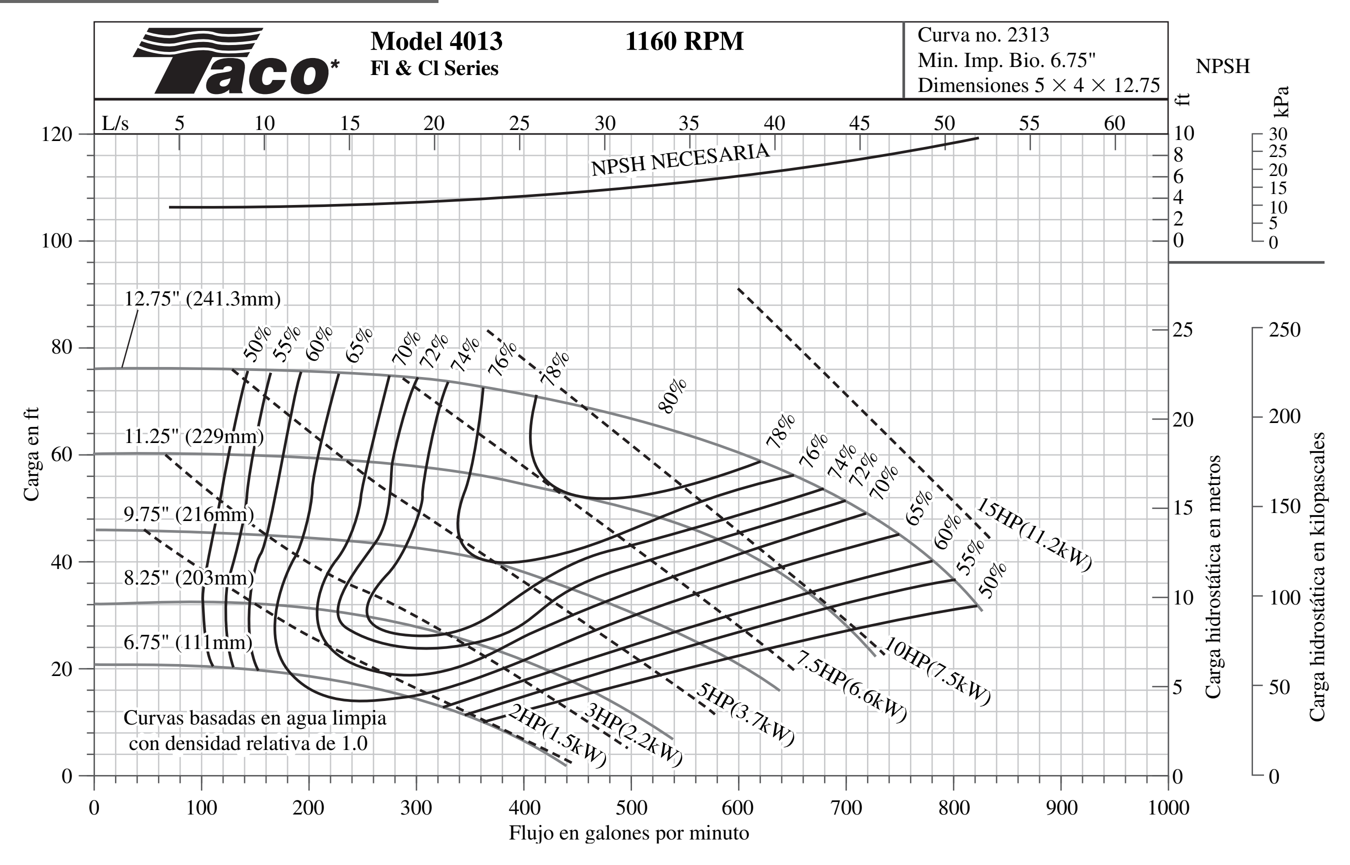


FIGURA 14-15

Ejemplo de la gráfica proporcionada por un fabricante de rendimiento de una familia de bombas centrífugas. Cada bomba tiene la misma carcasa, pero diferente diámetro del rotor.

Cortesía de Taco, Inc., Cranston, RI. Reproducido con autorización.

EJEMPLO 14-2 Selección de la dimensión del rotor para una bomba

Para una operación de lavado en una planta de generación de electricidad se necesitan 370 galones por minuto de agua (gpm). La carga hidrostática neta es alrededor de 24 ft para este caudal. Una ingeniera recién contratada revisa algunos catálogos y decide comprar el rotor de 8.25 in de la bomba centrífuga serie F1 modelo 4 013 de Taco de la figura 14-15. Si la bomba opera a 1 160 rpm, como se especifica en la gráfica de rendimiento, según el razonamiento de la ingeniera, su curva de rendimiento se corta a los 370 gpm en $H = 24$ ft. Su jefe, quien está muy interesado en la eficiencia, observa las curvas y se da cuenta que la eficiencia de esta bomba en su punto de operación es de sólo 70 por ciento. También ve que la opción del rotor de 12.75 in alcanza una eficiencia mayor (casi 76.5 por ciento) al mismo caudal. Asimismo, note que puede instalarse una válvula reguladora corriente abajo de la bomba para incrementar la carga hidrostática neta necesaria de modo que la bomba funcione a su mayor eficiencia. Pide a la ingeniera principiante que justifique su elección del diámetro del rotor. Es decir, le pide que calcule qué opción del rotor (de 8.25 in o de 12.75 in) necesitaría la mínima cantidad de electricidad para operar (Fig. 14.16). Haga la comparación y analice los resultados.

SOLUCIÓN En el caso de un caudal y carga hidrostática neta determinados, se calcula qué tamaño del rotor necesita la mínima cantidad de energía y se analizan los resultados.

Hipótesis **1** El agua está a 70°F. **2** Los requisitos del flujo (gasto volumétrico y carga hidrostática neta) son constantes.

Propiedades Para agua a 70°F, $\rho = 62.30$ lbm/ft^3.

Análisis A partir de las curvas de contorno de la potencia al freno que se muestran en la gráfica de rendimiento de la figura 14-15, la ingeniera principiante estima que la bomba con una rotor menor necesita casi 3.2 hp del motor. Luego comprueba su estimación por medio de la ecuación 14-5:

Potencia al freno (bhp) requerida para la opción del rotor de 8.25 in(pulg):

$$\text{bhp} = \frac{\rho g \dot{V} H}{\eta_{\text{bomba}}} = \frac{(62.30 \text{ lbm/ft}^3)(32.2 \text{ ft/s}^2)(370 \text{ gal/min})(24 \text{ ft})}{0.70}$$
$$\times \left(\frac{0.1337 \text{ ft}^3}{\text{gal}}\right)\left(\frac{\text{lbf}}{32.2 \text{ lbm} \cdot \text{ft/s}^2}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)\left(\frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550 \text{ ft} \cdot \text{lbf}}\right) = 3.20 \text{ hp}$$

Por otro lado, la opción del rotor de diámetro mayor necesita:

bhp requerida para la opción del rotor de 12.75 in(pulg): bhp = 8.78 hp:

con el uso del punto de operación de la bomba, a saber, $\dot{V} = 370$ gpm, $H = 72.0$ ft y $\eta_{\text{bomba}} = 76.5$ por ciento (Fig. 14.15). Es evidente que, **la opción del rotor de diámetro menor es la mejor elección a pesar de su menor eficiencia, porque utiliza menos de la mitad de la energía**.

Discusión Aunque la bomba del rotor mayor operaría a un valor un poco más alto de eficiencia, entregaría casi 72 ft de carga hidrostática neta al caudal necesario. Esto es una exageración, por lo que se necesitaría la válvula reguladora para compensar la diferencia entre esta carga hidrostática neta y la carga neta requerida de flujo de 24 ft de columna de agua. Una válvula reguladora no hace más que disipar energía mecánica; de modo que la ganancia en eficiencia de la bomba es más que compensación por las pérdidas en la válvula reguladora. Si los requisitos de carga hidrostática del flujo o capacidad se incrementan en algún momento en el futuro, se compra un rotor más grande para la misma carcasa.



FIGURA 14-16
En algunas aplicaciones, una bomba de menor eficiencia de la misma familia de bombas podría funcionar con menor consumo de energía. Sin embargo, una elección mejor sería una bomba cuyo punto de mejor eficiencia se localizara en el punto de operación necesaria, pero esta bomba no siempre se encontrará disponible en el mercado.

Cavitación de la bomba y la carga de aspiración neta positiva

Cuando se bombean líquidos es muy probable que la presión local dentro de la bomba caiga por abajo de la **presión de vapor** del líquido P_v (P_v también se denomina **presión de saturación** P_{sat}; en las tablas termodinámicas aparece como función de la temperatura de saturación). Cuando $P < P_v$, se producen burbujas llenas de vapor, que reciben el nombre de **burbujas de cavitación**. En otras palabras, el líquido *hierve* localmente, que es característico en el lado de la aspiración de los álabes rotatorios del rotor, donde ocurre la presión más baja (Fig. 14.17). Después de que se forman las burbujas de cavitación, se transportan por la bomba hasta regiones donde la presión es mayor, lo cual ocasiona el colapso rápido de las mismas. Precisamente este *colapso* de las burbujas es lo indeseable porque ocasiona ruido, vibración, reduce la eficiencia, pero lo más importante es que daña los álabes del rotor. El colapso repetido de las burbujas cerca de la superficie de los álabes les ocasiona picaduras o erosión, y, con el paso del tiempo, les provoca fallas catastróficas.

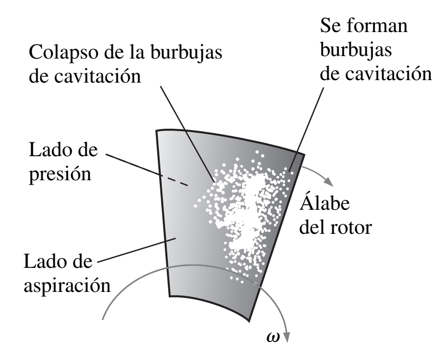


FIGURA 14-17
Burbujas de cavitación que se forman y conlapsan en el lado de aspiración de un álabe del rotor.

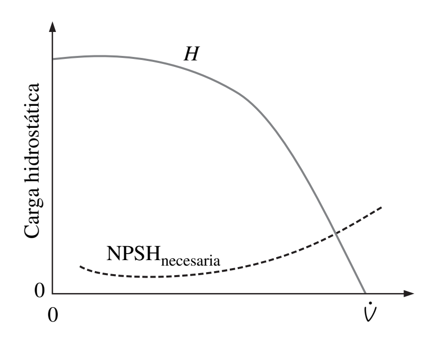


FIGURA 14-18
Gráfica de las curvas de rendimiento de una bomba en la cual están graficadas la carga hidrostática neta y la carga de aspiración neta positiva necesaria contra el gasto volumétrico.

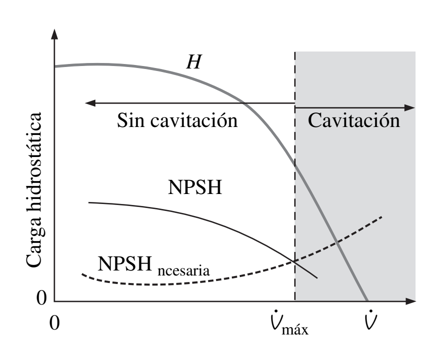


FIGURA 14-19
El gasto volumétrico en el cual la NPSH real y la NPSH necesaria coinciden representa el caudal máximo que puede entregar la bomba sin que haya cavitación.

Con el fin de evitar la cavitación, es necesario tener la certeza de que la presión local en cualquier punto de la bomba se mantiene por *arriba* de la presión de vapor. Ya que la presión es lo más fácil de medir (o estimar) en la entrada de la bomba, los criterios de la cavitación se especifican siempre *en la entrada de la bomba*. Es adecuado utilizar un parámetro de flujo llamado **carga de aspiración neta positiva (NPSH, por sus siglas en inglés)**, que se define como *la diferencia entre la carga de presión de estancamiento en la entrada de la bomba y la carga de la presión de vapor:*

Carga de aspiración neta positiva: $$\text{NPSH} = \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}\right)_{\text{entrada de la bomba}} - \frac{P_v}{\rho g} \qquad \textbf{(14-8)}$$

Los fabricantes de bombas prueban sus productos en instalaciones con el fin de verificar si se genera cavitación, hacen variar de una manera controlada el gasto volumétrico y la presión de entrada. Específicamente, a un caudal y a una temperatura del líquido determinados, la presión en la entrada de la bomba se reduce con lentitud hasta que la cavitación se presenta en algún lugar dentro de la bomba. El valor de NPSH se calcula por medio de la ecuación 14-8 y se registra a estas condiciones de operación. Este proceso se repite a distintos caudales, después el fabricante publica un parámetro de rendimiento llamado **carga de aspiración neta positiva necesaria ($\text{NPSH}_{\text{necesaria}}$)**, que se define como la *NPSH mínima necesaria para evitar la cavitación en la bomba.* El valor medido de $\text{NPSH}_{\text{necesaria}}$ varía con el gasto volumétrico y, por lo tanto, $\text{NPSH}_{\text{necesaria}}$ se grafica con frecuencia en la misma gráfica de curva de rendimiento de la bomba como carga neta (Fig. 14-l8). Cuando la $\text{NPSH}_{\text{necesaria}}$ se expresa en unidades adecuadas de carga hidrostática del líquido que se está bombeando, la $\text{NPSH}_{\text{necesaria}}$ es independiente del tipo de líquido. Pero, si la carga de aspiración neta positiva se expresa para un líquido en particular en unidades de presión como pascales o psi (libras fuerza por pulgadas cuadradas), el ingeniero debe ser cuidadoso y convertir esta presión en una columna de altura equivalente del líquido real que se está bombeando. Observe que puesto que $\text{NPSH}_{\text{necesaria}}$ es por lo regular mucho más pequeña que H en la mayor parte de la curva de rendimiento, con frecuencia se traza en un eje vertical ampliado y separado con el fin de que haya claridad en la información (vea Fig. 14-15) o como curvas de contorno cuando se muestra para el caso de una familia de bombas. Por lo común, la $\text{NPSH}_{\text{necesaria}}$ aumenta con el gasto volumétrico, aunque para algunas bombas disminuye con $\dot{V}$ a caudales bajos cuando la bomba no opera con suficiente eficiencia, como se ilustra en la figura 14-18.

Para que una bomba no sufra cavitación, la NPSH real o disponible debe ser mayor que $\text{NPSH}_{\text{necesaria}}$. Es importante hacer notar que el valor de NPSH, aparte de variar con el caudal, también se modifica con la temperatura del líquido porque P_v es una función de la temperatura. NPSH también depende del tipo de líquido que se bombea, ya que hay una curva única de P_v contra T para cada líquido. Debido a que las pérdidas irreversibles de carga hidrostática en el sistema de tuberías corriente arriba de la entrada se *incrementan* con el caudal, la presión de estancamiento en la entrada de la bomba *disminuye* con el caudal. Por lo tanto, el valor de NPSH *disminuye* con $\dot{V}$ como se ilustra en la figura 14-19. Si se identifica el gasto volumétrico en el cual las curvas de NPSH real y $\text{NPSH}_{\text{necesaria}}$ se cortan, entonces es posible estimar el gasto volumétrico máximo que la bomba puede entregar sin que se genere cavitación (Fig. 14-19).

EJEMPLO 14-3 **Caudal máximo para evitar que se genere cavitación en la bomba**

Se utiliza el rotor de 11.25 in de la bomba centrífuga de la serie FI modelo 4 013 de Taco de la figura 14-15 para bombear agua a 25°C desde un depósito

cuya superficie está 4 ft por arriba del eje central de la admisión de la bomba (Fig. 14.20). El sistema de tuberías, desde el depósito hasta la bomba, consiste en 10.5 ft de tubo de hierro fundido con un diámetro interior de 4.0 in y con una altura de rugosidad promedio de 0.02 in. Hay varias pérdidas menores: una entrada de bordes agudos ($K_L = 0.5$), tres codos regulares de 90° embridadas ($K_L = 0.3$ cada uno) y una válvula de globo embridada totalmente abierta ($K_L = 6.0$). Estime el gasto volumétrico máximo (en galones por minuto) que pueden bombearse sin que se genere cavitación. Si el agua estuviera más caliente, ¿se incrementaría o disminuiría este caudal máximo? ¿Por qué? Explique cómo podría aumentarse el caudal máximo a la vez que se evita la cavitación.

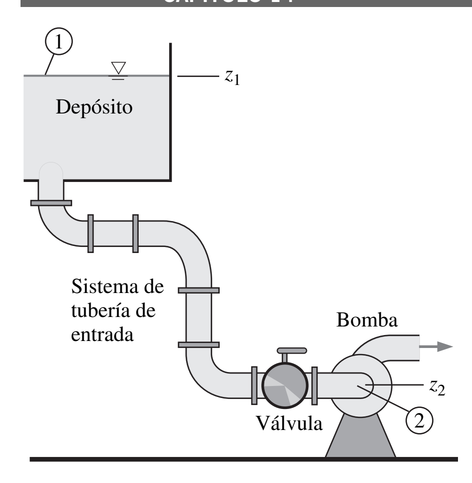


FIGURA 14-20
Sistema de tubería de admisión desde el depósito 1 hasta la entrada de la bomba 2, para el ejemplo 14-3.

SOLUCIÓN En el caso de una bomba y un sistema de tuberías dados se estimará el gasto volumétrico máximo que se puede bombear sin que se genere cavitación. También se analizará el efecto de la temperatura del agua y cómo podría incrementarse el caudal máximo.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El líquido es incompresible. **3** El flujo en la entrada de la bomba es turbulento y totalmente desarrollado, con $\alpha = 1.05$.

Propiedades Para el agua a $T = 25°C$, $\rho = 997.0$ kg/m^3, $\mu = 8.91 \times 10^{-4}$ kg/m · s, y $P_v = 3.169$ kPa. La presión atmosférica estándar es $P_{atm} = 101.3$ kPa.

Análisis Se aplica la ecuación de la energía para el caso de flujo estacionario en la forma de cargas a lo largo de una línea de corriente desde el punto 1 en la superficie del depósito hasta el punto 2 de la entrada de la bomba:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \cancel{\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}} + z_1 + \cancel{h_{\text{bomba}, u}} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + z_2 + \cancel{h_{\text{turbina}, e}} + h_{L, \text{total}} \quad (1)$$

En la ecuación 1 se ignoró la velocidad del agua en la superficie del depósito ($V_1 \cong 0$). No hay turbina en el sistema de tubería. Además, aunque hay una bomba en el sistema, no hay bomba entre los puntos 1 y 2; por lo tanto, el término de la carga hidrostática de la bomba también se anula. Se despeja de la ecuación 1 $P_2/\rho g$, que es la presión en la entrada de la bomba expresada como una carga:

Carga de presión en la entrada de la bomba:

$$\frac{P_2}{\rho g} = \frac{P_{atm}}{\rho g} + (z_1 - z_2) - \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} - h_{L, \text{total}} \quad (2)$$

Observe que en la ecuación 2 se reconoce que $P_1 = P_{atm}$ porque la superficie del depósito está expuesta a presión atmosférica.

La carga de aspiración neta positiva disponible en la entrada de la bomba se obtiene de la ecuación 14-8. Luego de la sustitución de la ecuación 2, se obtiene:

NPSH disponible: $$\text{NPSH} = \frac{P_{atm} - P_v}{\rho g} + (z_1 - z_2) - h_{L, \text{total}} - \frac{(\alpha_2 - 1)V_2^2}{2g} \quad (3)$$

Como ya se conocen P_{atm}, P_v y la diferencia de altura, todo lo que falta es determinar la pérdida de carga hidrostática irreversible total en el sistema de tuberías, lo cual depende del gasto volumétrico. Como el diámetro de la tubería es constante:

Pérdida de carga hidrostática irreversible: $$h_{L, \text{total}} = \left(f\frac{L}{D} + \sum K_L\right)\frac{V^2}{2g} \quad (4)$$

El resto del problema se resuelve de manera fácil con computadora. Para un caudal específico, se calcula la velocidad V y el número de Reynolds Re. Con Re y la rugosidad conocida de la tubería se utiliza el diagrama de Moody (o la ecuación de Colebrook) para obtener el factor de fricción f. La suma de todos los coeficientes de pérdidas menores es:

Pérdidas menores: $$\sum K_L = 0.5 + 3 \times 0.3 + 6.0 = 7.4 \quad (5)$$

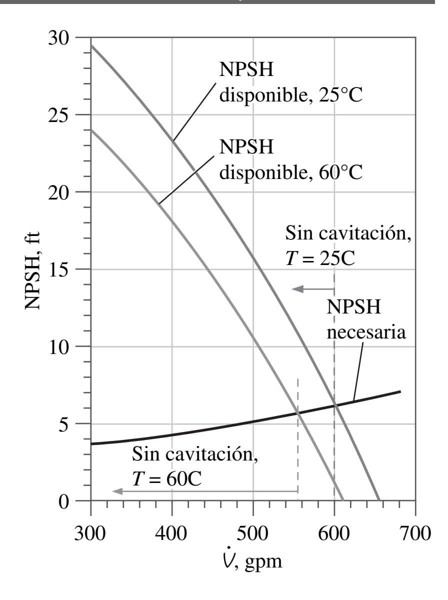


FIGURA 14-21
Carga de aspiración neta positiva en función del gasto volumétrico para la bomba del Ejemplo 14-3 a dos temperaturas. Se predice que la cavitación ocurre a los caudales mayores que el del punto donde coinciden los valores de la NPSH disponible y la NPSH requerida.

Enseguida se ilustra un cálculo realizado a mano. En $\dot{V}$ = 400 galones por minuto (0.02523 m^3/s), la velocidad promedio del agua en la tubería es:

$$V = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} = \frac{4(0.02523 \text{ m}^3/\text{s})}{\pi(4.0 \text{ in})^2}\left(\frac{1 \text{ in}}{0.0254 \text{ m}}\right)^2 = 3.112 \text{ m/s} \qquad \textbf{(6)}$$

lo cual da un número de Reynolds Re = $\rho VD/\mu$ = 3.538 × 10^5. Con este número de Reynolds y un factor de rugosidad ε/D = 0.005, la ecuación de Colebrook da f = 0.0306. Cuando se sustituyen las propiedades dadas, junto con f, D, L y las ecuaciones 4, 5 y 6 en la ecuación 3, se determina la carga de aspiración neta positiva disponible a este caudal:

$$\text{NPSH} = \frac{(101\,300 - 3\,169) \text{ N/m}^2}{(997.0 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)}\left(\frac{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{\text{N}}\right) + 1.219 \text{ m}$$
$$- \left(0.0306\,\frac{10.5 \text{ ft}}{0.3333 \text{ ft}} + 7.4 - (1.05 - 1)\right)\frac{(3.112 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)}$$
$$= 7.148 \text{ m} = 23.5 \text{ ft} \qquad \textbf{(7)}$$

La carga de aspiración neta positiva necesaria se obtiene de la figura 14-15. En el ejemplo, el caudal es de 400 galones por minuto (gpm), la NPSH$_{\text{necesaria}}$ está justo por arriba de 4 ft(pies). Como la NPSH real es mucho más alta que este valor, no hay que preocuparse por la cavitación a este caudal. Se usa EES (o una hoja de cálculo) para determinar NPSH en función del gasto volumétrico; los resultados se grafican en la figura 14-21. Es evidente en esta gráfica que a 25°C, **la cavitación se presenta a caudales por encima de alrededor de 600 gpm**, cerca a la descarga libre.

Si el agua estuviera a más de 25°C, la presión de vapor se incrementaría, disminuiría la viscosidad y la densidad se reduciría ligeramente. Los cálculos se repiten para T = 60°C, donde ρ = 983.3 kg/m^3, μ = 4.67 × 10^{-4} kg/m · s, y P_v = 19.94 kg/m · s y P_v = 19.94 kPa. Los resultados también están graficados en la figura 14-21, en la que vemos que **el gasto volumétrico máximo sin cavitación *disminuye* con la temperatura** (a casi 555 gpm a 60°C). Este decremento concuerda con la intuición, ya que el agua más caliente ya está más cerca de su temperatura de ebullición.

Para terminar, ¿cómo es posible incrementar el caudal máximo? *Cualquier modificación que aumente la NPSH disponible ayuda.* Puede aumentarse la altura de la superficie del depósito (para que sea mayor la carga hidrostática). También puede reacomodarse la tubería de modo que sólo se necesite un codo, e instalar una válvula esférica en lugar de la válvula de globo (con el fin de disminuir las pérdidas menores). Puede incrementarse el diámetro de la tubería y disminuir la rugosidad de la superficie (para aminorar las pérdidas mayores). En este problema en particular, las pérdidas menores ejercen la influencia más grande, pero en muchos problemas, las pérdidas mayores son más importantes, e incrementar el diámetro de la tubería es más eficaz. Ésta es una razón por la cual muchas bombas centrífugas tienen un diámetro de entrada mayor que el diámetro de salida.

Discusión Observe que NPSH$_{\text{necesaria}}$ no depende de la temperatura del agua, pero la NPSH real o disponible disminuye con la temperatura (Fig. 14-21).

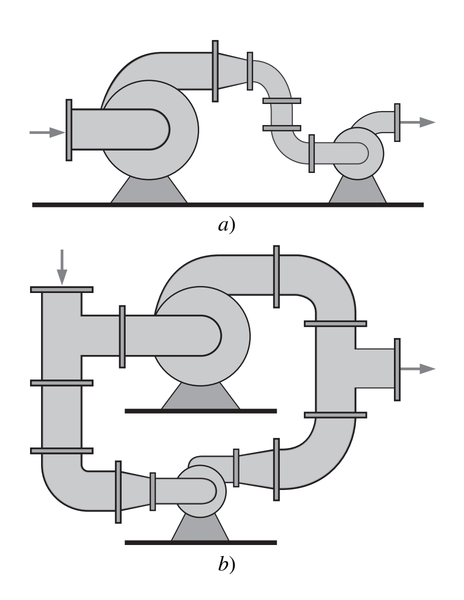


FIGURA 14-22
A veces, la conexión de dos bombas muy diferentes en *a*) serie o *b*) paralelo ocasiona problemas.

Bombas en serie y en paralelo

Cuando es necesario que el gasto volumétrico o la presión se incremente una cantidad pequeña, puede pensarse en añadir una bomba menos grande en serie o en paralelo con la bomba original. Las instalaciones en serie o en paralelo son aceptables en algunas aplicaciones, pero conectar bombas *diferentes* en serie o en paralelo puede ocasionar problemas, sobre todo si una de las bombas es más grande que la otra (Fig. 14-22). Una mejor opción es incrementar la velocidad de la bomba original, o la potencia de la entrada (un motor eléctrico mayor), o sustituir el rotor por uno más grande, o cambiar de bomba e instalar una mayor.

El razonamiento lógico para tomar esta decisión se puede ver en las curvas de rendimiento de la bomba, y advertir que *la sobrepresión y el gasto volumétrico están relacionados*. Conectar bombas desiguales en serie puede originar problemas porque el gasto volumétrico que pasa por cada una debe ser el mismo, pero la sobrepresión global es igual al aumento de presión de una bomba más el de la otra. Si las curvas de rendimiento de las bombas son muy distintas, la bomba más pequeña podría ser forzada a operar más allá de su caudal de descarga libre, y en consecuencia ésta actúa como una *pérdida* de carga, y se reduce la cantidad total de volumen. Cuando se instalan bombas diferentes en paralelo también se originan problemas porque la sobrepresión total debe ser la misma, pero el gasto volumétrico neto es la suma de la que pasa por cada rama. Si las bombas no tienen las dimensiones adecuadas, la bomba más pequeña no sería capaz de manejar la carga hidrostática enorme para ella, por lo que el flujo en esta rama, en realidad, *podría regresarse*; esto reduciría de manera inadvertida la sobrepresión global. En cada caso, la potencia suministrada a la bomba más pequeña se desperdiciaría.

Con estas cuestiones en la mente, existen numerosas aplicaciones donde dos o más bombas similares operan en serie o en paralelo. Cuando funcionan en *serie*, la carga hidrostática neta combinada es simplemente la suma de las cargas hidrostáticas netas de cada bomba (lo que da un gasto volumétrico):

Carga hidrostática neta combinada para n bombas en serie:

$$H_{\text{combinada}} = \sum_{i=1}^{n} H_i \qquad \textbf{(14-9)}$$

La ecuación 14-9 se ilustra en la figura 14-23 para tres bombas conectadas en serie. En este ejemplo, la bomba 3 es la más potente y la bomba 1 es la de menor empuje. La carga al cierre de las tres bombas conectadas en serie es igual a la suma de la carga al cierre de cada bomba. En el caso de valores bajos de gasto volumétrico, la carga hidrostática neta de las tres bombas en serie es igual a $H_1 + H_2 + H_3$. Más allá de la descarga libre de la bomba 1 (a la derecha de primera línea vertical gris y de guiones en la figura 14-23), *esta bomba debe ser desconectada y sacarse del circuito*. De lo contrario estaría trabajando más allá de su punto de operación de diseño máximo, y la bomba o su motor podrían dañarse. Además, la carga hidrostática neta en esta bomba sería *negativa,* como ya se señaló antes, lo cual contribuiría a las pérdidas netas en el sistema. Con la bomba 1 fuera del circuito, la carga hidrostática neta combinada se vuelve H_2 +

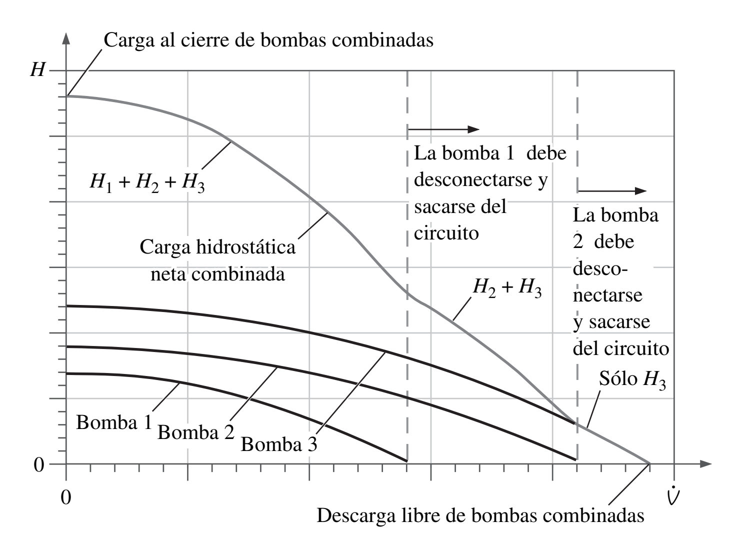


FIGURA 14-23
Curva de rendimiento (línea gris-oscuro al centro) de tres bombas muy distintas conectadas en *serie*. A caudales bajos, la carga hidrostática neta combinada es igual a la suma de la carga hidrostática neta de cada bomba. Sin embargo, para evitar daños en la bomba y pérdida de carga hidrostática neta combinada, debe desconectarse y sacar del circuito aquella de las bombas para la cual el caudal se vuelve más grande que la descarga libre de esta bomba, como se indica con las líneas verticales grises discontinuas. Si las tres bombas fueran idénticas, no sería necesario desactivar ninguna de las bombas, ya que la descarga libre de cada bomba sería el mismo gasto volumétrico.

H_3. De igual manera, más allá de la descarga libre de la bomba 2, esta bomba debe desconectarse también y ponerse fuera del circuito, y, entonces, la carga hidrostática neta combinada es igual a H_3 solamente, según se señala a la derecha de la segunda línea vertical gris y de guiones en la figura 14-23. En este caso, la descarga libre combinada es la misma que la de la bomba 3 sola, si se supone que las otras dos bombas están desconectadas.

Cuando dos o más bombas idénticas o similares están conectadas en *paralelo*, sus cantidades de volumen individuales (y no sus cargas hidrostáticas netas) se suman:

Capacidad combinada para n bombas en paralelo:

$$\dot{V}_{\text{combinada}} = \sum_{i=1}^{n} \dot{V}_i \qquad \textbf{(14-10)}$$

Como ejemplo, considere las *mismas* tres bombas, pero conectadas ahora en paralelo. La curva de rendimiento de las bombas combinadas se muestra en la figura 14-24. La descarga libre de las tres bombas combinadas es igual a la suma de la descarga libre de cada una de las bombas. En el caso de valores bajos de carga hidrostática neta, la capacidad de las tres bombas en paralelo es igual a $\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3$. Por arriba de la carga de cierre de la bomba 1 (arriba de la primera recta horizontal gris y discontinua de la figura 14-24), *la bomba 1 debe cerrarse y bloquear su rama* (por medio de una válvula). Si no es así, podría estar funcionando más allá de su punto de operación de diseño máximo, por lo que la bomba o su motor podrían dañarse. Además, el gasto volumétrico a través de esta bomba sería *negativo*, como se estableció antes, lo que contribuiría a una pérdida neta en el sistema. Con la bomba 1 apagada y desactivada, la capacidad combinada es $\dot{V}_2 + \dot{V}_3$. Sucede lo mismo si la bomba 2 funciona por arriba de su carga al cierre; esta bomba se debe desactivar y bloquear. La capacidad combinada es entonces sólo $\dot{V}_3$ como se indica antes, en la segunda recta horizontal gris y discontinua de la figura 14-24. En este caso, la carga al cierre combinada es la misma que la de la bomba 3 sola, si se supone que las otras dos bombas están cerradas y sus ramales están bloqueados.

En la práctica, varias bombas podrían combinarse en paralelo para entregar un gran caudal (Fig. 14-25). Entre los ejemplos están los bancos de bombas que se utilizan para hacer que el agua circule en torres de enfriamiento y en circuitos de agua helada (Wright, 1999). Lo ideal es que todas las bombas sean idénticas de modo que no haya que cerrar alguna de ellas en determinado mo-

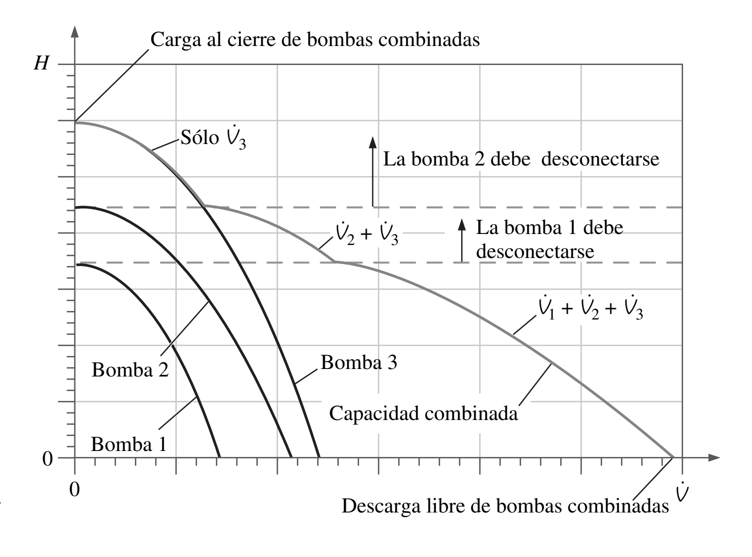


FIGURA 14-24
Curva de rendimiento de una bomba (gris-oscuro, extremo inferior izquierdo) para tres bombas en *paralelo*. A un valor bajo de carga hidrostática neta, la capacidad combinada es igual a la suma de las capacidades de cada bomba. No obstante, para evitar daños en la bomba y pérdida de capacidad combinada, debe apagarse y sacar del circuito aquella de las bombas para la cual la carga hidrostática neta se vuelve más grande que la carga al cierre de esta bomba, según lo indican las líneas horizontales, grises y discontinuas. Esa rama de la bomba se debe cerrar por medio de una válvula para evitar que el flujo invierta su dirección. Si las tres bombas fueran idénticas, no sería necesario apagar ninguna de las bombas, ya que la carga al cierre de cada bomba ocurriría a la misma carga hidrostática neta.

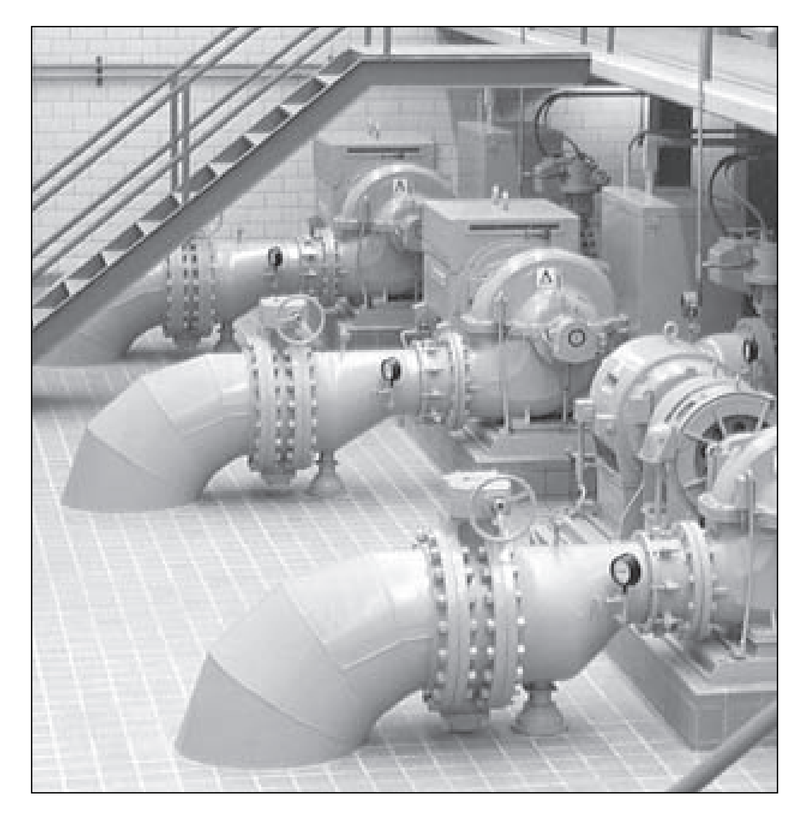


FIGURA 14-25
A menudo, varias bombas idénticas funcionan en paralelo de modo que se puede alcanzar un gran gasto volumétrico cuando es necesario. Se ilustran tres bombas en paralelo.
Cortesía de Goulds Pumps, ITT Industries. Reproducido con autorización.

mento (Fig. 14-24). Es prudente instalar válvulas de no retroceso en cada ramal, de manera que cuando una bomba necesita apagarse (para darle mantenimiento o cuando se necesita que el caudal sea bajo) se evite que el flujo regrese por la bomba. Note que las válvulas y la tubería adicionales que se necesitan para una red de bombas en paralelo añaden más pérdidas de carga al sistema; por tanto, el rendimiento global de la combinación de bombas no es el óptimo.

Bombas de desplazamiento positivo

En el transcurso de siglos se han diseñado numerosas bombas de desplazamiento positivo. En todos los diseños, el fluido se aspira dentro de un volumen en expansión y luego se expulsa cuando ese volumen se contrae, pero el mecanismo que provoca que cambie el volumen es muy diferente entre los diversos diseños. Algunos diseños son muy simples, como la *bomba peristáltica* de tubo flexible (Fig. 14-26*a*), en la que pequeñas ruedas comprimen un tubo, lo cual empuja hacia adelante al fluido (este mecanismo es parecido a la peristalsis en el esófago o en los intestinos, donde músculos en vez de ruedas comprimen el tubo). Otros son más complejos, ya que necesitan levas rotatorias con lóbulos sincronizados (Fig. 14-26*b*), engranes que se conectan (Fig. 14-16*c*) o tornillos (Fig. 14-26*d*). Las bombas de desplazamiento positivo son ideales cuando se necesita alta presión, como en el bombeo de líquidos viscosos o mezclas, lodos o suspensiones espesas, y donde se necesita medir o despachar cantidades de líquido precisas, como en las aplicaciones médicas.

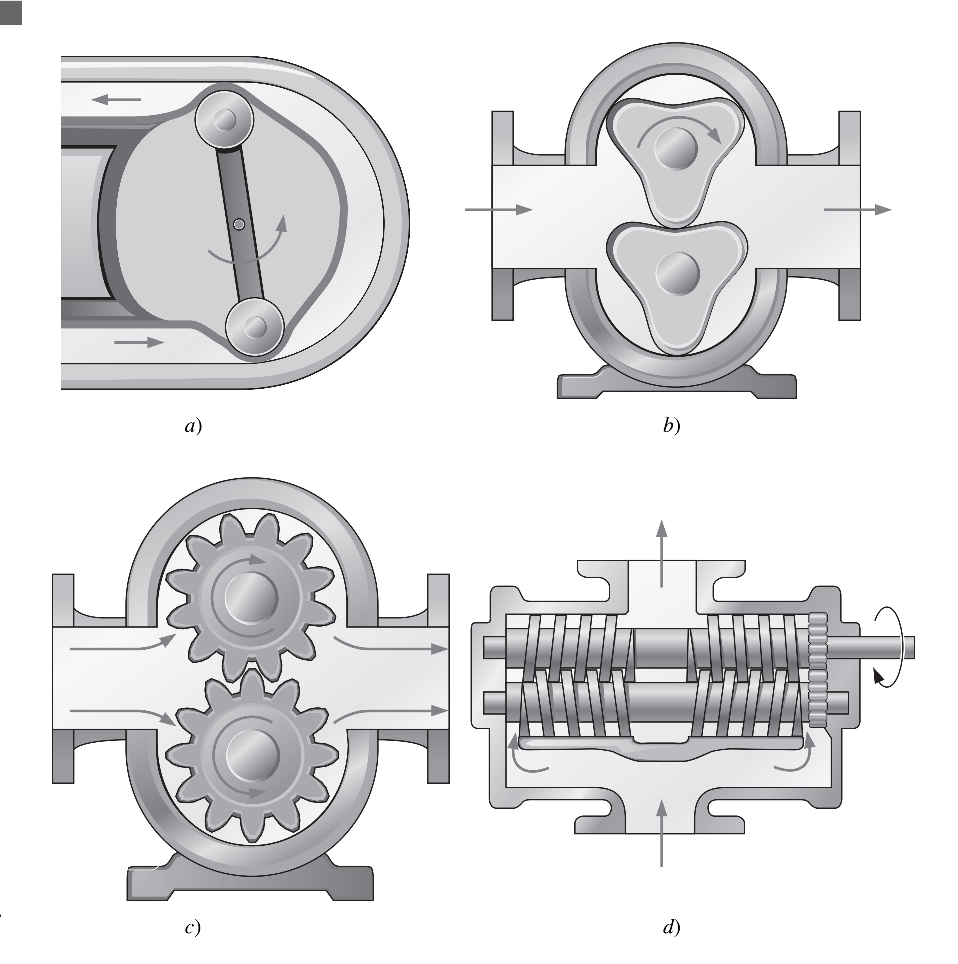


FIGURA 14-26
Ejemplos de bombas de desplazamiento positivo: *a*) bomba peristáltica de tubería flexible, *b*) bomba rotatoria de tres lóbulos, *c*) bomba de engranes y *d*) bomba de doble tornillo.

Adaptado de F. M. White, Fluid Mechanics 4/e. *Copyright © 1999. The McGraw-Hill Companies, Inc. Reproducido con autorización.*

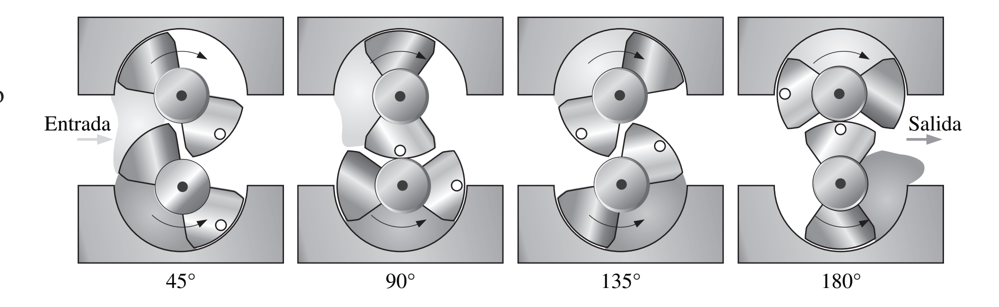


FIGURA 14-27
Cuatro fases (separadas un octavo de una vuelta) en la operación de una bomba rotatoria de dos lóbulos, un tipo de bomba de desplazamiento positivo. La región sombreada de gris claro representa una porción del fluido empujada por el rotor superior, y la región sombreada de gris oscuro representa la porción del fluido empujada por el rotor inferior, el cual gira en la dirección opuesta. El flujo va de izquierda a derecha.

Para ilustrar la operación de una bomba de desplazamiento positivo se han dibujado cuatro fases de la mitad de un ciclo de una **bomba rotatoria** simple con dos lóbulos en cada rotor (Fig. 14-27). Los dos rotores están sincronizados mediante una caja de engranes para que giren a la misma velocidad angular, pero en dirección opuesta. En el diagrama, el rotor superior gira en el sentido de las manecillas del reloj y el rotor inferior gira en dirección contraria, aspirando fluido desde la izquierda y lo descarga hacia la derecha. Un punto blanco está dibujado en uno de los lóbulos de cada rotor para ayudar a imaginar la rotación.

Existen huecos entre los rotores y la carcasa y entre los lóbulos de los mismos rotores, como se ilustra (y se exagera) en la figura 14-27. El fluido puede fugar-

se por estos huecos, lo que reduce la eficiencia de la bomba. Los fluidos de alta viscosidad no pueden pasar por los huecos con tanta facilidad; por lo tanto, la carga neta (y la eficiencia) de una bomba rotatoria *aumenta* en general con la viscosidad, como se muestra en la figura 14-28. Ésta es una razón por la que las bombas rotatorias (y otros tipos de bombas de desplazamiento positivo) son una adecuada elección para bombear fluidos y mezclas, lodos y suspensiones muy viscosas. Por ejemplo, se utilizan cuando el motor del automóvil bombea aceite y en la industria alimentaria para bombear líquidos pesados como jarabes, pasta de jitomate y chocolate, y sopas preparadas.

La curva de rendimiento de la bomba (carga hidrostática neta contra capacidad) de una bomba rotatoria es casi vertical en todo su intervalo de operación que se recomienda, ya que la capacidad es claramente constante sin importar la carga a una velocidad rotacional determinada (Fig. 14-28). No obstante, a valores muy altos de carga hidrostática neta que corresponde a una presión de salida de la bomba muy alta, las fugas se vuelven graves, inclusive para fluidos de alta viscosidad, como lo indica la línea gris discontinua de la figura 14-28. Además, el motor que acciona la bomba no puede vencer el intenso momento de torsión (torque) que causa esta presión alta de descarga, y el motor empieza a perder velocidad o sufre sobrecarga, con lo que se puede llegar a quemar el motor. Por lo tanto, los fabricantes de bombas rotatorias no recomiendan operar la bomba por arriba de cierta carga hidrostática neta, la cual está casi siempre por abajo de la carga al cierre. Con frecuencia, las curvas de rendimiento de la bomba que entrega el fabricante ni siquiera muestran el rendimiento de la bomba fuera de su intervalo de operación recomendado.

Las bombas de desplazamiento positivo ofrecen muchas ventajas en comparación con las dinámicas. Por ejemplo, una bomba de desplazamiento positivo es mejor para conducir líquidos sensibles al esfuerzo cortante, ya que el esfuerzo cortante inducido es mucho menor que el de una bomba dinámica que opera a presión y caudal similares. La sangre es un líquido sensible al esfuerzo cortante. Esta es una razón por la cual las bombas de desplazamiento positivo se usan en corazones artificiales. Una bomba de desplazamiento positivo muy bien sellada, genera una presión de vacío importante en su entrada, aun cuando no esté cebada, y, por tanto, es capaz de elevar un líquido varios metros por abajo de la bomba. Esta clase de bombas se denominan **bombas de autocebado** (Fig. 14-29). Por último, el rotor o los rotores de una bomba de desplazamiento positivo funcionan a velocidades menores que la del rotor (rueda móvil o rodete) de una bomba dinámica a cargas similares, lo cual prolonga la vida útil de los sellos, etcétera.

Las bombas de desplazamiento positivo también tienen desventajas. Su gasto volumétrico no puede cambiar a menos que se modifique la rotación (esto no es tan sencillo como parece, ya que la mayoría de los motores eléctricos de corriente alterna (CA) está diseñada para operar a una o más velocidades rotacionales *fijas*). Generan una presión muy alta en el lado de la descarga, y si la salida se bloquea, podría haber roturas o el motor se puede sobrecalentar, como ya se explicó. Con frecuencia, la protección contra presión excesiva (es decir, válvula para atenuar la presión) se necesita por esta causa. Debido a su diseño, las bombas de desplazamiento positivo podrían entregar un flujo pulsátil que sería inaceptable en algunos usos.

El análisis de las bombas de desplazamiento positivo es directo. A partir de las características geométricas de la bomba se calcula el **volumen cerrado** (V_{cerrado}) que se llena (y se descarga) por cada n rotaciones de la flecha. El gasto volumétrico es entonces igual a la velocidad de rotación que se multiplica por $\dot{n}\, V_{\text{cerrado}}$ y se divide entre n:

Gasto volumétrico, bomba de desplazamiento positivo:
$$\dot{V} = \dot{n}\,\frac{V_{\text{cerrado}}}{n} \tag{14-11}$$

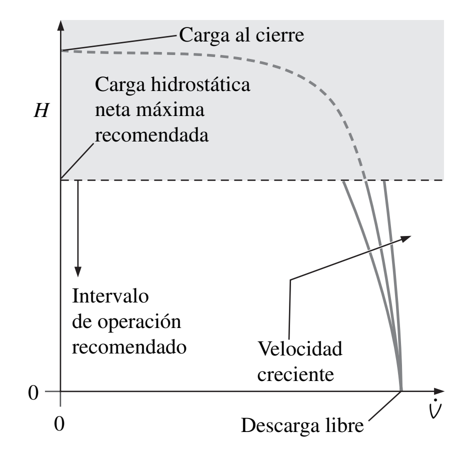


FIGURA 14-28
Comparación de las curvas de rendimiento de una bomba rotatoria que opera a la misma velocidad, pero con fluidos de diferentes viscosidades. Para evitar la sobrecarga del motor la bomba no debe operar en la región sombreada.

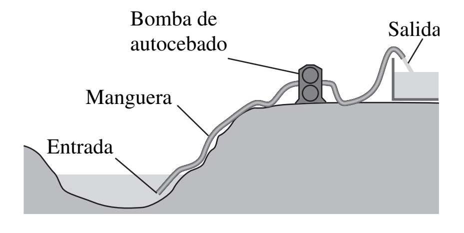


FIGURA 14-29
Una bomba que eleva un líquido aun cuando la bomba está "vacía" se llama bomba de autocebado.

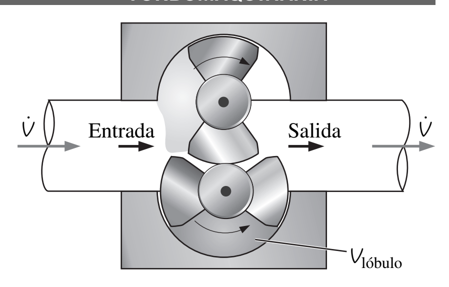


FIGURA 14-30
La bomba rotatoria de dos lóbulos del ejemplo 14-4. El flujo va de izquierda a derecha.

EJEMPLO 14-4 **Gasto volumétrico a través de una bomba de desplazamiento positivo**

Una bomba de desplazamiento positivo con dos lóbulos, similar a la de la figura 14-27 desplaza 0.45 cm^3 de aceite de motor SAE 30 en el volumen $V_{\text{lóbulo}}$ de cada lóbulo, según el esquema de la figura 14-30. Calcule la cantidad del volumen de aceite para el caso de $\dot{n}$ = 900 rpm.

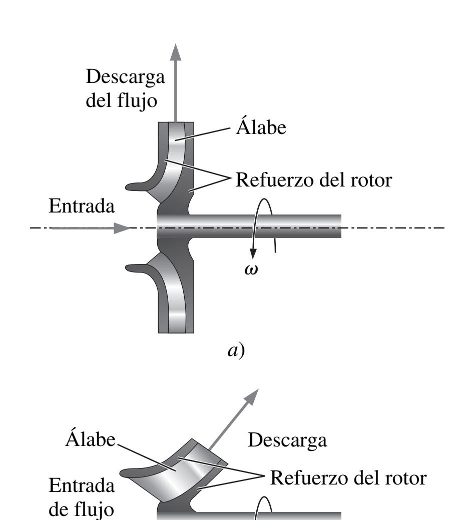
SOLUCIÓN Se calcula el gasto volumétrico de aceite que pasa por una bomba de desplazamiento positivo para volúmenes del lóbulo y velocidad de rotación determinados.

Hipótesis **1** El flujo promedio es estacionario. **2** No hay fugas entre los lóbulos ni entre los lóbulos y la carcasa. **3** EL aceite es incompresible.

Análisis Cuando se inspecciona la figura 14-27, se observa que la mitad de la rotación (180° para n = 0.5 rotaciones) de las dos flechas rotatorias, el volumen total del aceite bombeado es $V_{\text{cerrado}} = 2V_{\text{lóbulo}}$. El gasto volumétrico se calcula después con la ecuación 14.11,

$$\dot{V} = \dot{n}\frac{V_{\text{cerrado}}}{n} = (900 \text{ rot/min})\frac{2(0.45 \text{ cm}^3)}{0.5 \text{ rot}} = \mathbf{1\,620\ cm^3/min}$$

Discusión Si hubiera fugas en la bomba, el gasto volumétrico sería menor. La densidad del aceite no se necesita para calcular el gasto volumétrico. Pese a esto, conforme aumenta la densidad del fluido es mayor el momento de torsión de la flecha y la potencia al freno que se necesitan.



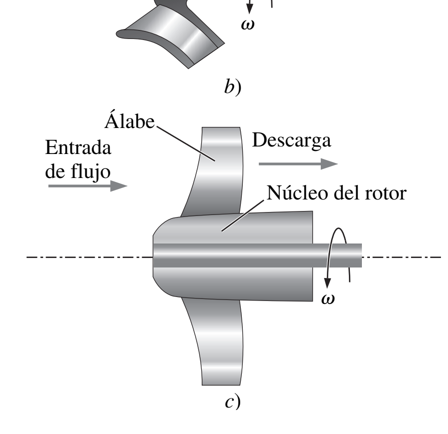


FIGURA 14-31
El *rotor o impulsor* (parte que gira) de las tres principales categorías de bombas dinámicas: *a) flujo centrífugo, b) flujo mixto (radioaxial)* y *c) flujo axial.*

Bombas dinámicas

Existen tres tipos principales de *bombas dinámicas* que cuentan con álabes rotatorios, las cuales de llaman **álabes de rueda móvil** o **álabes del rotor o impulsor** (en América Latina) **o rodete** (en España). Estos elementos imparten una cantidad de movimiento al fluido. Por esta razón se les llama algunas veces **bombas rotodinámicas** o, simplemente, **bombas rotatorias** (no deben confundirse con las bombas de desplazamiento positivo). También existen bombas dinámicas no rotatorias, como las bombas de chorro (o bombas de inyección) y las bombas electromagnéticas, las cuales no se estudian en este libro. Las bombas rotatorias se clasifican por la manera en la cual el flujo sale de la bomba: *flujo radial (centrífugo), flujo axial* y *flujo mixto (o radioaxial)* (Fig. 14-31). En el caso de una **bomba de flujo radial**, el fluido entra de manera axial (en la misma dirección que el eje de la flecha giratoria) en el centro de la bomba, pero se descarga de manera radial (o tangencialmente) a lo largo del radio exterior de la carcasa de la bomba. Por esta razón las bombas centrífugas reciben también el nombre de **bombas de flujo radial**. En el caso de una **bomba de flujo axial**, el fluido entra y sale axialmente, en general a lo largo de la parte exterior de la bomba debido al bloqueo de la flecha, motor y núcleo, entre otros. Una **bomba de flujo mixto** es considerada intermedia entre centrífuga y axial, ya que el flujo entra en forma axial, no necesariamente en el centro, pero se descarga a un ángulo entre las direcciones radial y axial.

Bombas centrífugas

Las bombas centrífugas y los sopladores se identifican con facilidad por su carcasa en forma de caracol llamada **voluta** (Fig. 14-32). Se encuentran en todos lados en los hogares: en la máquina lavaplatos, tinas de baño, lavadoras y secadoras de ropa, secadoras para el cabello, aspiradoras, campanas de extracción de

cocina, sistema de ventilación del sanitario, sopladores, hornos, entre otros aparatos. Se utilizan en automóviles: la bomba del agua del motor y el ventilador en la unidad de aire acondicionado, entre otros aditamentos. Asimismo, las bombas centrífugas están en la mayoría de las industrias: se utilizan en sistemas de ventilación de construcciones, en las operaciones de lavado, en depósitos de enfriamiento y torres de enfriamiento, aparte de otras numerosas operaciones industriales en las cuales los fluidos tienen que bombearse.

En la figura 14-33 se ilustra un diagrama de una bomba centrífuga. Observe que, con frecuencia, un refuerzo rodea los álabes para aumentar su rigidez. En la terminología de las bombas, todo el ensamble que gira y que consiste en la flecha, los álabes del impulsor, el núcleo y el refuerzo del impulsor se denomina **rodete** o **rotor**. El fluido entra de manera axial a través de la parte central hueca de la bomba (el **ojo**), después del cual el fluido enfrenta los álabes rotatorios, adquiere velocidad tangencial y radial por la transferencia de cantidad de movimiento por parte de los álabes, y adquiere velocidad radial adicional por las fuerzas llamadas centrífugas, que son en realidad falta de fuerzas *centrípetas* para sostener el movimiento circular. El flujo sale del rotor después de ganar tanto velocidad como presión cuando es lanzado radialmente hacia afuera del rotor hacia la **voluta**. Como se ilustra en la figura 14-33, la voluta es un **difusor** en forma de caracol cuyo objetivo es desacelerar el movimiento rápido del fluido que abandona los bordes posteriores de los álabes del rotor, debido a lo cual aumenta todavía más la presión del fluido, y combinar y dirigir el flujo desde todos los pasajes entre los álabes hacia una salida común. Según se mencionó ya, si el flujo es estacionario en sus valores promedio, si es incompresible y si los diámetros de entrada y salida son iguales, la velocidad media del flujo en la salida es idéntica a la de la entrada. Por tanto, no es necesariamente la velocidad, sino la *presión* la que se incrementa desde la entrada hasta la salida a través de una bomba centrífuga.

Existen tres tipos de bombas centrífugas que justifican un análisis, con base en las características geométricas de los álabes, como se ilustra en la figura 14-34: *álabes inclinados hacia atrás, álabes radiales* y *álabes inclinados en el sentido del giro*. Las bombas centrífugas con **álabes inclinados hacia atrás** (Fig. 14-34*a*) son las más comunes. Proporcionan la más alta eficiencia de los tres porque el fluido pasa por los pasajes de los álabes con la mínima cantidad de giros. Algunos álabes tienen forma currentilínea, lo cual produce una operación similar, pero una eficiencia todavía mayor. El incremento de presión es intermedio entre los otros dos tipos de bombas centrífugas. Las que tienen **álabes radiales** (también denominados **álabes rectos**, Fig. 14-34*b*) tienen las características geo-

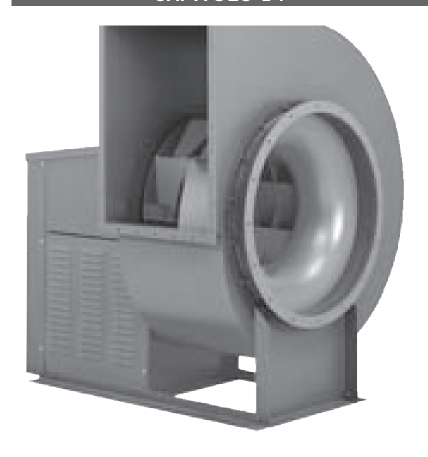


FIGURA 14-32
Un soplador centrífugo típico con su característica voluta en forma de caracol.
Cortesía de The New York Blower Company, Willowbrook, IL. Reproducido con autorización.

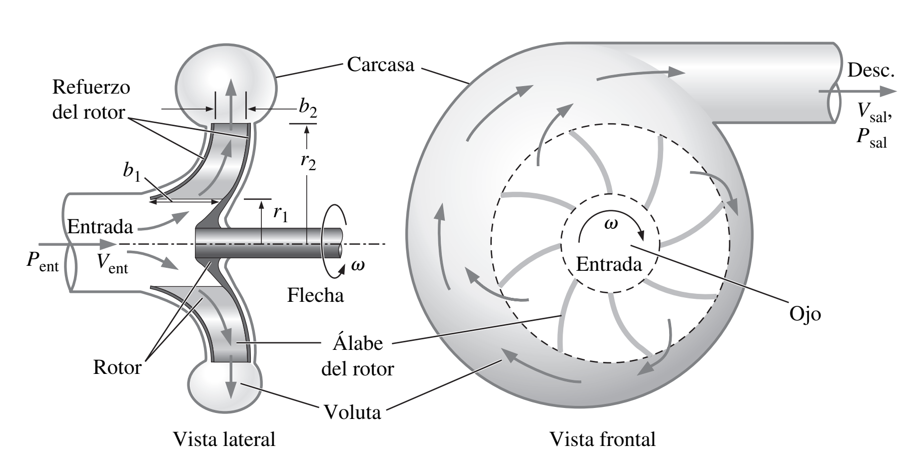
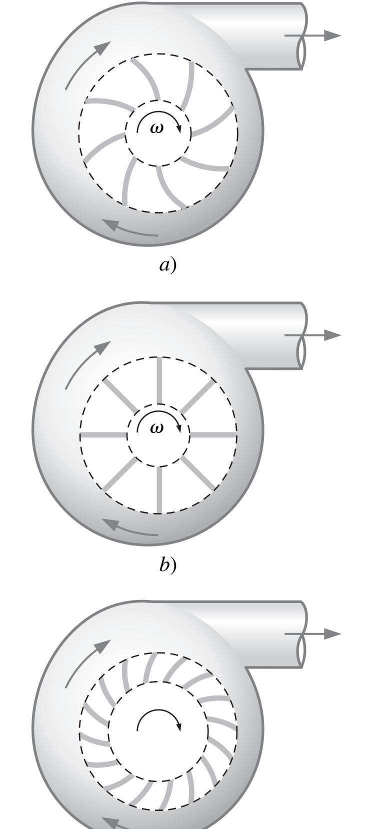


FIGURA 14-33
Vista lateral y frontal de una *bomba centrífuga típica.* El fluido ingresa en forma axial en el punto medio de la bomba (el *ojo*), es lanzado hacia la parte exterior de los álabes del *rotor (o impulsor o rodete)*, luego pasa al difusor de expansión (*voluta*) y se descarga por un lado de la bomba. Se define r_1 y r_2 como las ubicaciones radiales de los álabes del rotor en la entrada y la salida, respectivamente; b_1 y b_2 son los anchos de los álabes en la entrada y la salida del rotor, respectivamente.



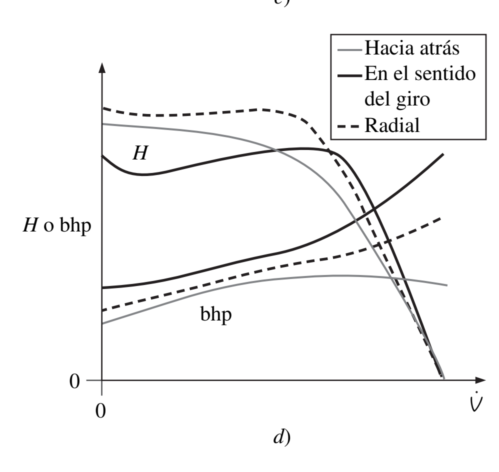


FIGURA 14-34
Los tres tipos principales de bombas centrífugas son los que tienen *a*) *álabes inclinados hacia atrás,* *b*) *álabes radiales* y *c*) *álabes inclinados en el sentido del giro*; *d*) comparación de las curvas de rendimiento, de la carga hidrostática neta y potencia al freno, para los tres tipos de bombas centrífugas.

métricas más sencillas y generan el incremento de presión más grande de los tres tipos de bombas para una diversidad de valores de gasto volumétrico, pero el incremento de presión disminuye con rapidez después del punto de eficiencia máxima. Las bombas centrífugas con **álabes inclinados en el sentido del giro** (Fig. 14-34*c*) producen un incremento de presión que es casi constante, si bien más bajo que el de los álabes inclinados hacia atrás y de los álabes rectos, en una diversidad amplia de cantidades de volumen. Por lo general, las bombas centrífugas con álabes inclinados en el sentido del giro tienen más de estos elementos, pero son más pequeños, como se ilustra en la figura 14-34*c*. Estas bombas tienen una eficiencia máxima inferior que la de las bombas de los álabes rectos. Se prefieren las bombas con álabes radiales e inclinados hacia atrás para aplicaciones donde es necesario proporcionar gasto volumétrico e incremento de presión dentro de un estrecho margen de valores. Si se requiere un rango más amplio de flujo volumétrico, incremento de presión, o ambos, el rendimiento de las bombas con álabes radiales o inclinados hacia atrás podría no cumplir con las nuevas demandas; estos tipos de bombas son menos robustos. La operación de las bombas con álabes inclinados en el sentido del giro es más flexible y se adecua a una amplia variación de las condiciones de bombeo, a costo de una eficiencia menor y bajo incremento de presión por unidad de potencia absorbida. Si se necesita una bomba para generar un gran incremento de presión en un amplio intervalo de flujo volumétrico, entonces la bomba centrífuga con álabes inclinados en el sentido del giro es adecuada

Las curvas de rendimiento de la carga hidrostática neta y la potencia al freno para estos tres tipos de bombas centrífugas se comparan en la figura 14-34*d*. Las curvas se han ajustado de tal manera que cada bomba alcanza la misma descarga libre (gasto volumétrico máximo a carga neta cero). Note que estos esquemas son cualitativos sólo con el propósito de hacer la comparación, por lo que las curvas de rendimiento medidas y reales difieren bastante en forma, dependiendo de los detalles del diseño de la bomba.

Por lo que se refiere a cualquier inclinación de los álabes del rotor (hacia atrás, radiales o en sentido del giro), se pueden analizar los vectores velocidad en los álabes. El campo de flujo real es no estacionario, tridimensional y quizá compresible. Con el objetivo de simplificar el análisis se considera flujo estacionario en el marco de referencia absoluto y en el marco de referencia relativo que gira con el rotor. Se considera sólo flujo incompresible y sólo la componente de la velocidad radial o normal (subíndice *n*) y la componente de la velocidad circunferencial o tangencial (subíndice *t*) desde la entrada del álabe hasta la salida del álabe. No se considera la componente de la velocidad axial (a la derecha en la figura 14-35 y perpendicular al plano de la vista frontal presentada en la figura 14-33). En otras palabras, aunque hay una componente de la velocidad axial diferente de cero en el rotor, ésta no entra en el análisis. Un acercamiento de la vista lateral de una bomba centrífuga simplificada se proporciona en la figura 14-35, donde se definen $V_{1,n}$ y $V_{2,n}$ como las componentes normales medias de la velocidad en los radios r_1 y r_2, respectivamente. Aunque se muestra un espacio entre el álabe y la carcasa, se supone en el análisis simplificado que no existen fugas por ese espacio.

El gasto volumétrico $\dot{V}$ que entra a la bomba por el ojo atraviesa el área de sección transversal que tiene forma de la superficie lateral de un cilindro de longitud b_1 correspondiente al ancho del álabe a la distancia r_1 del eje y de radio de base r_1. La ley de conservación de la masa necesita que este mismo gasto volumétrico pase por el área de la semejante sección transversal definida por el ancho del álabe b_2 y el radio r_2. Si se utilizan estas componentes normales medias de la velocidad $V_{1,n}$ y $V_{2,n}$ definidas en la figura 14-35, puede escribirse:

Gasto volumétrico:
$$\dot{V} = 2\pi r_1 b_1 V_{1,\,n} = 2\pi r_2 b_2 V_{2,\,n} \qquad \textbf{(14-12)}$$

de la cual se obtiene:

$$V_{2,n} = V_{1,n}\frac{r_1 b_1}{r_2 b_2} \quad \textbf{(14-13)}$$

Es evidente de la ecuación 14-13 que $V_{2,n}$ podría ser menor, igual o mayor que $V_{1,n}$, dependiendo de los valores de b y r en los dos radios.

En la figura 14-36 se ilustra un esquema de un acercamiento de la vista frontal de un álabe, donde se indican las componentes radial y tangencial de la velocidad. Está dibujado un álabe inclinado hacia atrás, pero el mismo análisis es válido para los álabes de cualquier inclinación. La entrada del álabe (en el radio r_1) se desplaza a una velocidad tangencial ωr_1. De manera similar, la salida del álabe se desplaza a una velocidad tangencial ωr_2. Es evidente en la figura 14-36 que estas dos velocidades tangenciales difieren no sólo en magnitud, sino también en dirección, debido a la inclinación del álabe. Se define **ángulo del borde de ataque o ángulo del borde delantero o ángulo de arista de entrada** β_1 como el ángulo del álabe relativo a la dirección tangencial inversa en el radio r_1. Y de la misma manera se define el **ángulo del borde posterior o ángulo de arista de salida** β_2 como el ángulo del álabe relativo a la dirección tangencial inversa en el radio r_2.

Enseguida se plantea una aproximación importante para simplificar el análisis. Se supone que el flujo incide al álabe *paralelo al borde delantero del álabe* y abandona el álabe *paralelo al borde posterior del álabe*. En otras palabras:

> Se supone que, en todos los puntos, el flujo es tangente a la superficie del álabe cuando se observa desde un marco de referencia que gira con el álabe.

En la entrada, esta aproximación recibe a veces el nombre de **condición de entrada suave**, que no debe confundirse con las ondas de choque (capítulo 12). Más bien, la terminología quiere decir que hay un flujo suave en el álabe del rotor sin un repentino giro. El supuesto de que *no hay separación del flujo* en ninguna parte en toda la superficie del álabe es inherente en esta aproximación. Si la bomba centrífuga opera en condiciones de diseño o cerca de ellas, esta suposición es válida. Sin embargo, cuando la bomba funciona lejos de sus condiciones de diseño, el flujo se podría separar de la superficie del álabe (casi siempre lo hace en el lado de la aspiración donde hay gradientes de presión adversos), por lo que esta simplificación no sería válida.

Los vectores velocidad $\vec{V}_{1,\text{relativa}}$ y $\vec{V}_{2,\text{relativa}}$ se trazan paralelos a la superficie del álabe en la figura 14-36, de acuerdo con el supuesto de simplificación. Son vectores de velocidad vistos desde el marco de referencia relativo de un observador que se desplaza junto con el álabe que gira. Cuando se añade vectorialmente velocidad tangencial ωr_1 (la velocidad del álabe en el radio r_1) a $\vec{V}_{1,\text{relativa}}$ para completar el paralelogramo de la figura 14-36, el vector resultante es la velocidad *absoluta* del fluido $\vec{V}_1$ en la entrada del álabe. De manera exactamente similar se obtiene $\vec{V}_2$, la velocidad absoluta del fluido en la salida del álabe (también se muestra en la figura 14-36). Para tener completo el panorama, las componentes de la velocidad normal $V_{1,n}$ y $V_{2,n}$ también se presentan en la figura 14-36. Observe que estas componentes normales de la velocidad son independientes del marco de referencia que se use, absoluto o relativo.

Para evaluar el momento de torsión en la flecha rotatoria, se aplica la relación de la cantidad de movimiento angular para un volumen de control, como se estudió en el capítulo 6. Se elige un volumen de control que circunde los álabes del rotor, desde el radio r_1 al r_2, como se muestra en el diagrama de la figura 14-37. También se presentan en la figura 14-37 los ángulos α_1 y α_2, que se definen como el ángulo de desviación del vector de la velocidad absoluta de la dirección normal en los radios r_1 y r_2, respectivamente. Para cumplir con el concepto de tratar un volumen de control como una "caja negra", se ignoran los detalles

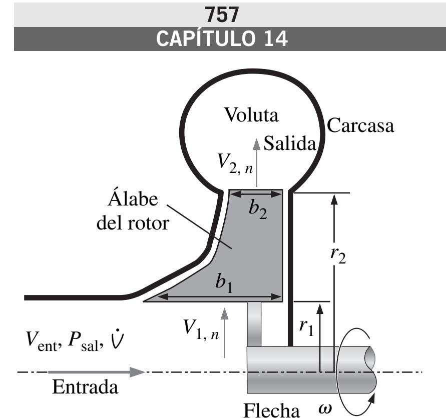


FIGURA 14-35
Acercamiento de la vista lateral de la bomba centrífuga simplificada con el objetivo de efectuar el análisis de los vectores de velocidad; $V_{1,n}$ y $V_{2,n}$ se definen como las componentes normales (radiales) medias de la velocidad a unos radios r_1 y r_2, respectivamente.

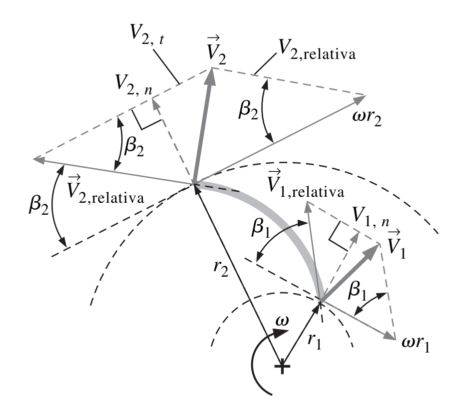


FIGURA 14-36
Acercamiento de la vista frontal de la bomba centrífuga simplificada con el objetivo de efectuar el análisis de los vectores de velocidad. Los vectores de velocidad absoluta del fluido se muestran por medio de flechas gruesas. Se supone que el flujo es tangente en cualquier punto a la superficie de los álabes cuando se observa desde un marco de referencia que gira con el álabe, como lo indican los vectores de velocidad relativa.

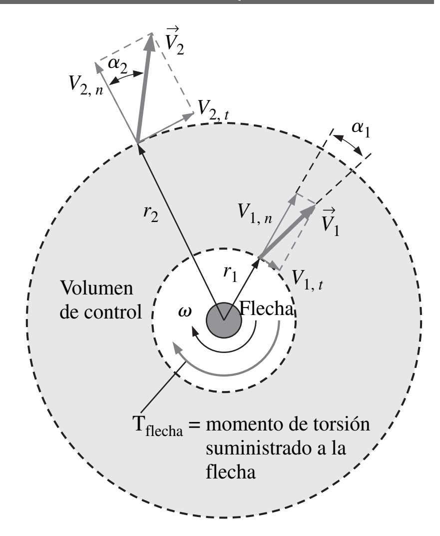


FIGURA 14-37
Volumen de control (sombreado) que se usa para analizar la cantidad de movimiento angular del flujo en una bomba centrífuga; se señalan las componentes de la velocidad tangencial absoluta $V_{1,t}$ y $V_{2,t}$.

de los álabes individuales. Entonces, se supone que el flujo entra al volumen de control con velocidad absoluta uniforme $\vec{V}_1$ en toda la circunferencia de radio r_1 y sale con velocidad absoluta uniforme $\vec{V}_2$ en toda la circunferencia de r_2.

Puesto que el momento de la cantidad de movimiento se define como el producto cruz $\vec{r} \times \vec{V}$, sólo las componentes *tangenciales* de $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ se relacionan con el momento de torsión de la flecha. Estas componentes se muestran como $V_{1,t}$ y $V_{2,t}$, en la figura 14-37. Se obtiene como resultado que el momento de torsión de la flecha es igual al cambio en el momento de la cantidad de movimiento desde la entrada hasta la salida, de acuerdo con la **ecuación de Euler de la turbomáquina** (que también se llama **fórmula de Euler de la turbina**), que se deduce en el capítulo 6.

Ecuación de Euler de la turbomáquina:
$$T_{flecha} = \rho\dot{V}(r_2V_{2,t} - r_1V_{1,t}) \quad \textbf{(14-14)}$$

O, en términos de los ángulos α_1 y α_2 y las magnitudes de los vectores de la velocidad absoluta:

Otra forma de la ecuación de Euler de la turbomáquina:
$$T_{flecha} = \rho\dot{V}(r_2V_2 \text{ sen } \alpha_2 - r_1V_1 \text{ sen } \alpha_1) \quad \textbf{(14-15)}$$

En el análisis simplificado las pérdidas irreversibles son inexistentes. De donde, la eficiencia de la bomba $\eta_{bomba} = 1$, lo que lleva por referencia lógica que la potencia útil $\dot{W}_{potencia\ útil}$ y la potencia al freno bhp son lo mismo. Si se usan las ecuaciones 14-3 y 14-4:

$$\text{bhp} = \omega T_{flecha} = \rho\omega\dot{V}(r_2V_{2,t} - r_1V_{1,t}) = \dot{W}_{potencia\ útil} = \rho g\dot{V}H \quad \textbf{(14-16)}$$

la cual, cuando se resuelve, da la carga hidrostática neta H:

Carga hidrostática neta:
$$H = \frac{1}{g}(\omega r_2V_{2,t} - \omega r_1V_{1,t}) \quad \textbf{(14-17)}$$

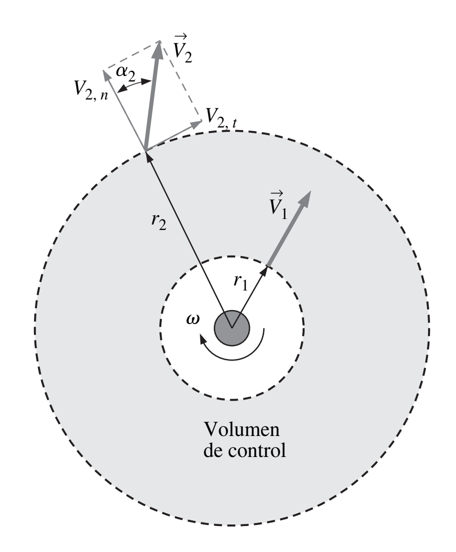


FIGURA 14-38
Volumen de control y vectores de la velocidad absoluta para el soplador centrífugo del Ejemplo 14-5. La vista es a lo largo del eje del soplador.

EJEMPLO 14-5 Operación de un soplador ideal

Un soplador gira a $\dot{n}$ = 1750 rpm (183.3 rad/s). El aire entra al soplador normal a los álabes (α_1 = 0°) y sale con un ángulo de 40° desde la dirección radial (α_2 = 40°) como se señala en la figura 14-38. El radio de entrada es r_1 = 4.0 cm, y el ancho de entrada del álabe es b_1 = 5.2 cm. El radio de salida es r_2 = 8.0 cm y el ancho de salida del álabe es b_2 = 2.3 cm. El gasto volumétrico es 0.13 m^3/s. Si se supone una eficiencia de 100 por ciento, calcule la carga hidrostática neta que produce este soplador en milímetros equivalentes de altura de una columna de agua. Calcule también la potencia al freno necesaria en watts.

SOLUCIÓN Se calcula la potencia al freno y la carga hidrostática neta de un ventilador ideal a un gasto volumétrico y velocidad de rotación dados.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario en sus valores promedio. **2** No hay fugas en el espacio entre los álabes del rotor y la carcasa del ventilador. **3** El aire es incompresible. **4** La eficiencia del ventilador es de 100 por ciento (no hay pérdidas irreversibles).
Propiedades La densidad del aire es de ρ_{aire}= 1.20 kg/m^3.
Análisis Puesto que el gasto volumétrico (capacidad) se conoce, entonces se determinan las componentes de la velocidad en la entrada y la salida mediante la ecuación 14-12:

$$V_{1,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_1 b_1} = \frac{0.13 \text{ m}^3/\text{s}}{2\pi(0.040 \text{ m})(0.052 \text{ m})} = 9.947 \text{ m/s} \quad \textbf{(1)}$$

$V_1 = V_{1,n}$, y $V_{1,t}$ = 0, puesto que α_1 = 0°. De igual manera, $V_{2,n}$ = 11.24 m/s, y

$$V_{2,t} = V_{2,n} \tan \alpha_2 = (11.24 \text{ m/s}) \tan(40°) = 9.435 \text{ m/s} \quad \textbf{(2)}$$

Enseguida se aplica la ecuación 14-17 para predecir la carga hidrostática neta:

$$H = \frac{\ }{g}(r_2 V_{2,\,t} - \underbrace{r_1 \cancel{V_{1,\,t}}}_{0}) = \frac{183.3 \text{ rad/s}}{9.81 \text{ m/s}^2}(0.080 \text{ m})(9.435 \text{ m/s}) = 14.1 \text{ m} \quad \textbf{(3)}$$

Observe que la carga hidrostática neta de la ecuación 3 está en metros de *aire*, el fluido bombeado. Para convertir la presión en unidades de milímetros equivalentes de una columna de agua se multiplica por el cociente de la densidad del aire entre densidad del agua:

$$H_{\text{columna de agua}} = H \frac{\rho_{\text{aire}}}{\rho_{\text{agua}}}$$

$$= (14.1 \text{ m}) \frac{1.20 \text{ kg/m}^3}{998 \text{ kg/m}^3}\left(\frac{1\,000 \text{ mm}}{1 \text{ m}}\right) = \mathbf{17.0 \text{ mm de agua}} \quad \textbf{(4)}$$

Para terminar, se aplica la ecuación 14-16 para predecir la potencia al freno que se requiere:

$$\text{bhp} = \rho g \dot{V} H = (1.20 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.13 \text{ m}^3\text{/s})(14.1 \text{ m})\left(\frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{21.6 \text{ W}} \quad \textbf{(5)}$$

Discusión Observe la conversión de unidades en la ecuación 5 para pasar de kilogramos, metros y segundos a watts. Esta conversión es muy útil en muchos cálculos de turbomaquinaria. La carga hidrostática neta real que se entrega al aire es inferior a la que se pronostica con la ecuación 3, porque hay ineficiencia. De manera similar, la potencia al freno real será superior a la que se obtiene mediante la ecuación 5 debido a las ineficiencias en el soplador, fricción en la flecha, entre otros aspectos.

Para diseñar la forma de los álabes se recurre a la trigonometría con el fin de obtener expresiones para $V_{1,t}$ y $V_{2,t}$ en términos de los ángulos del álabe β_1 y β_2. Cuando se aplica la *ley de los cosenos* (Fig. 14-39) al triángulo de la figura 14-36 formado por el vector de la velocidad absoluta $\vec{V}_2$, vector de la velocidad relativa $\vec{V}_{2,\text{ relativa}}$ y la velocidad tangencial del álabe en el radio r_2 (de magnitud ωr_2) se obtiene:

$$V_2^2 = V_{2,\text{ relativa}}^2 + \omega^2 r_2^2 - 2\omega r_2 V_{2,\text{ relativa}} \cos \beta_2 \quad \textbf{(14-18)}$$

Pero también se observa de la figura 14.36 que:

$$V_{2,\text{ relativa}} \cos \beta_2 = \omega r_2 - V_{2,\,t}$$

La sustitución de esta ecuación en la ecuación 14.18 da:

$$\omega r_2 V_{2,\,t} = \frac{1}{2}(V_2^2 - V_{2,\text{ relativa}}^2 + \omega^2 r_2^2) \quad \textbf{(14-19)}$$

Una ecuación similar resulta para la entrada del álabe (cambian todos los subíndices 2 de la ecuación 14-19 a subíndice 1). Cuando se sustituyen en la ecuación 14.17 se tiene:

Carga hidrostática neta:

$$H = \frac{1}{2g}[(V_2^2 - V_1^2) + (\omega^2 r_2^2 - \omega^2 r_1^2) - (V_{2,\text{ relativa}}^2 - V_{1,\text{ relativa}}^2)] \quad \textbf{(14-20)}$$

En lenguaje sencillo, la ecuación 14-20 establece que en el caso ideal (sin pérdidas irreversibles), la carga hidrostática neta es proporcional al cambio en la energía cinética absoluta, más el cambio en la energía cinética en la punta del rotor, menos el cambio en la energía cinética relativa desde la entrada hasta la

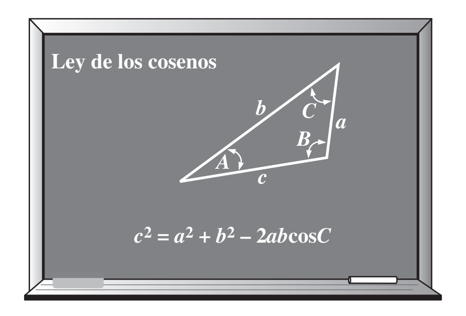


FIGURA 14-39
La ley de los cosenos se utiliza para analizar una bomba centrífuga.

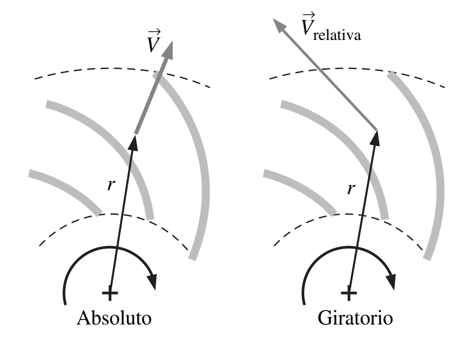


FIGURA 14-40
En el caso de la suposición de que el flujo pasa por un rotor sin pérdidas irreversibles, con frecuencia es más conveniente trabajar con un marco de referencia relativo que gire con el rotor. En ese caso, la ecuación de Bernoulli tiene un término adicional, como se indica en la ecuación 14-22.

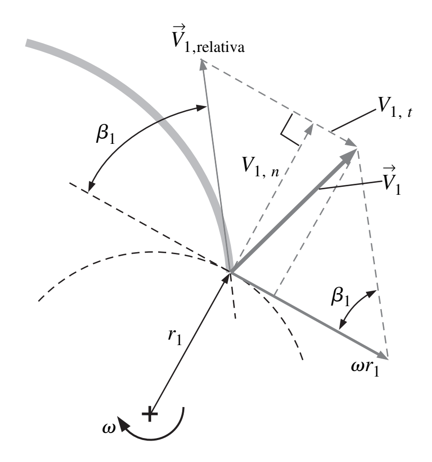


FIGURA 14-41
Acercamiento de la vista frontal de los vectores de velocidad a la entrada de un álabe del rotor. El vector de velocidad absoluta se ilustra como una flecha gruesa.

salida del rotor. Para finalizar, si se igualan las ecuaciones 14-20 y 14-2 donde los subíndices 2 son para la salida del flujo y los subíndice 1 para la entrada de flujo, se tiene:

$$\left(\frac{P}{\rho g}+\frac{V_{\text{relativa}}^2}{2g}-\frac{\omega^2 r^2}{2g}+z\right)_{\text{sal}}=\left(\frac{P}{\rho g}+\frac{V_{\text{relativa}}^2}{2g}-\frac{\omega^2 r^2}{2g}+z\right)_{\text{ent}} \quad \textbf{(14-21)}$$

Tenga en cuenta que no estamos limitados a analizar sólo la entrada o la salida. De hecho podría aplicarse la ecuación 14-21 a dos radios *cualesquiera* del rotor. En general, se escribe entonces una ecuación que se conoce como **ecuación de Bernoulli en un marco de referencia rotatorio**:

$$\frac{P}{\rho g}+\frac{V_{\text{relativa}}^2}{2g}-\frac{\omega^2 r^2}{2g}+z=\text{constante} \quad \textbf{(14-22)}$$

Note que la ecuación 14.22 es la misma que la ecuación común de Bernoulli, excepto que como la velocidad usada es la velocidad *relativa* (en el marco de referencia rotatorio), aparece un término "extra" en la ecuación (el tercer término en la parte izquierda de la ecuación 14-22) para justificar los efectos rotacionales (Fig. 14.40). Es necesario destacar que la ecuación 14-22 es una aproximación válida sólo para el caso ideal en el cual no hay pérdidas irreversibles en el rotor. No obstante, es valiosa como una aproximación de primer orden para flujo por el rotor de una bomba centrífuga.

Ahora se examina la ecuación 14-17, la ecuación de la carga hidrostática neta, con más detalle. Puesto que el término que contiene $V_{1,t}$ lleva un signo negativo, se obtiene la H máxima y hace $V_{1,t} = 0$ (se supone que no hay mecanismo en el ojo de la bomba que pueda generar un valor *negativo* de $V_{1,t}$). Por tanto, una aproximación de primer orden para **la condición de diseño** de la bomba es hacer $V_{1,t} = 0$. En otras palabras, se selecciona el ángulo de entrada del álabe β_1 tal que el flujo en el álabe sea sencillamente radial desde un marco de referencia absoluto, por lo que $V_{1,n} = V_1$. Los vectores de velocidad en $r = r_1$ en la figura 14-36 se amplifican y vuelven a dibujarse en la figura 14-41. Cuando se aplican las fórmulas trigonométricas se tiene:

$$V_{1,t}=\omega r_1-\frac{V_{1,n}}{\tan\beta_1} \quad \textbf{(14-23)}$$

Una expresión similar se obtiene para $V_{2,t}$ (se reemplazan los subíndices 1 por 2), o de hecho, para cualquier radio entre r_1 y r_2. Cuando $V_{1,t} = 0$ y $V_{1,n} = V_1$:

$$\omega r_1=\frac{V_{1,n}}{\tan\beta_1} \quad \textbf{(14-24)}$$

Para finalizar, cuando se combina la ecuación 14-24 con la ecuación 14-12, se tiene una expresión para el gasto volumétrico en función del ángulo de entrada del álabe β_1 y velocidad rotacional:

$$\dot{V}=2\pi b_1\omega r_1^2\tan\beta_1 \quad \textbf{(14-25)}$$

La ecuación 14.25 puede usarse para un diseño preliminar de la forma de álabe que se ilustra en el Ejemplo 14-6.

EJEMPLO 14-6 **Diseño preliminar de una bomba centrífuga**

Se desea diseñar una bomba centrífuga para bombear refrigerante R-134*a* líquido a temperatura ambiente y a presión atmosférica. Los radios de entrada y salida del rotor son r_1 = 100 mm y r_2 = 180 mm, respectivamente (Fig. 14-42).

Los anchos de la entrada y la salida del rotor son b_1 = 50 mm y b_2 = 30 mm (perpendicular al plano de la página de la figura 14.42). La bomba debe entregar 0.25 m^3/s del líquido a una carga hidrostática neta de 14.5 m cuando el rotor gira a 1 720 rpm. Diseñe la forma del álabe para el caso en el cual estas condiciones de operación son las *condiciones de diseño* de la bomba ($V_{1,t}$ = 0, como se ilustra en la figura); específicamente, calcule los ángulos β_1 y β_2 , y analice la forma del álabe. Prediga también la potencia que necesita la bomba.

SOLUCIÓN Para el caso de un caudal dado, carga hidrostática neta y dimensiones determinadas de una bomba centrífuga, se diseña la forma del álabe (ángulo del borde delantero y ángulo del borde posterior). También se estima la potencia que requiere la bomba.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El líquido es incompresible. **3** No hay pérdidas irreversibles en el rotor. **4** Es sólo un diseño preliminar.

Propiedades Por lo que se refiere al refrigerante R-134*a* a T = 20°C, v_f = 0.0008157 m^3/kg. Entonces, $\rho = 1/v_f$ = 1 226 kg/m^3.

Análisis Se calcula la potencia útil necesaria con la ecuación 14-3,

$$\dot{W}_{\text{potencia útil}} = \rho g \dot{V} H$$

$$= (1\,226 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.25 \text{ m}^3\text{/s})(14.5 \text{ m})\left(\frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$= 43\,600 \text{ W}$$

La potencia al freno que se necesita será mayor que ésta en una bomba real. Sin embargo, para apegarse a las aproximaciones para este diseño preliminar, se supone una eficiencia de 100 por ciento de modo que bhp es aproximadamente igual a $\dot{W}_{\text{potencia útil}}$:

$$\text{bhp} \cong \dot{W}_{\text{potencia útil}} = 43\,600 \text{ W}\ \frac{\text{hp}}{745.7 \text{ W}} = 58.5 \text{ hp}$$

En el informe se presentan los resultados finales con dos cifras significativas para cumplir con la precisión de las cantidades dadas; entonces, la bhp ≈ **59 fuerzas de caballo**.

En todos los cálculos con rotación, es necesario convertir la velocidad rotacional de $\dot{n}$ (rpm) a ω (rad/s), como se ilustra en la figura 14-43:

$$\omega = 1720 \frac{\text{rot}}{\text{min}}\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rot}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 180.1 \text{ rad/s} \tag{1}$$

Se calcula el ángulo de entrada del álabe por medio de la ecuación 14-25:

$$\beta_1 = \arctan\left(\frac{\dot{V}}{2\pi b_1 \omega r_1^2}\right) = \arctan\left(\frac{0.25 \text{ m}^3\text{/s}}{2\pi(0.050 \text{ m})(180.1 \text{ rad/s})(0.10 \text{ m})^2}\right) = 23.8°$$

Se determina β_2 mediante la ecuación deducida previamente en el análisis elemental. Primero, por la condición de diseño en la cual $V_{1,t}$ = 0, la ecuación 14-17 se reduce a:

Carga hidrostática neta:
$$H = \frac{1}{g}(\omega r_2 V_{2,t} - \omega r_1 \underbrace{V_{1,t}}_{0}) = \frac{\omega r_2 V_{2,t}}{g}$$

de donde se calcula la componente de la velocidad tangencial:

$$V_{2,t} = \frac{gH}{\omega r_2} \tag{2}$$

Mediante la ecuación 14-12 se encuentra la componente normal de la velocidad:

$$V_{2,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_2 b_2} \tag{3}$$

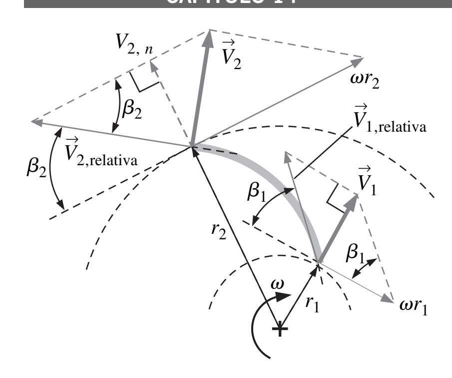


FIGURA 14-42
Geometría y vectores de velocidades absoluta y relativa para el diseño del rotor de la bomba centrífuga del ejemplo 14-6.

PRECAUCIÓN
Es necesario convertir siempre la razón de rotación en rpm a radianes por segundo.

FIGURA 14-43
La adecuada conversión de unidades demanda que las unidades de rotación estén en rad/s.

Después se aplican las mismas propiedades trigonométricas que se usaron para deducir la ecuación 14-23, pero en el *borde posterior* del álabe y no en el borde delantero. El resultado es:

$$V_{2,t} = \omega r_2 - \frac{V_{2,n}}{\tan \beta_2}$$

donde se obtiene finalmente β_2:

$$\beta_2 = \arctan\left(\frac{V_{2,n}}{\omega r_2 - V_{2,t}}\right) \quad \textbf{(4)}$$

Después de sustituir las ecuaciones 2 y 3 en la ecuación 4 y reemplazar los valores numéricos se obtiene:

$$\beta_2 = 14.7°$$

Los resultados finales se reportan con sólo dos cifras significativas. Por tanto, el diseño preliminar necesita álabes *inclinados hacia atrás* con $\beta_1 \cong$ **24°** y $\beta_2 \cong$ **15°**.

Después que se determinan los ángulos del borde delantero y del borde posterior, se diseña la *forma* detallada del álabe del rotor haciendo variar poco a poco el ángulo del álabe β desde β_1 a β_2 a medida que el radio se incrementa de r_1 a r_2. Como se ilustra en la figura 14-44, el álabe puede ser de varias formas mientras se conserve $\beta_1 \cong 24°$ y $\beta_2 \cong 15°$, lo cual depende de cómo varíe β con el radio. En la figura, los tres álabes empiezan en el mismo lugar (ángulo absoluto de cero) en el radio r_1; el ángulo del borde delantero para los tres álabes es $\beta_1 = 24°$. El álabe de longitud media (el gris claro de la figura 14.44) se construye cuando se hace variar *linealmente* β con r. Su borde posterior corta el radio r_2 en un ángulo absoluto de aproximadamente 93°. El álabe más largo (el álabe negro de la figura) se construye cuando se hace variar β con mayor rapidez cerca de r_1 que de r_2. En otras palabras, la curvatura del álabe es más notable cerca de su borde delantero que cerca de su borde posterior. Corta el radio exterior en un ángulo absoluto de aproximadamente 114°. Para terminar, el álabe más pequeño (el álabe gris mediano de la figura 14.44) es menos curvo cerca de su borde delantero, pero más curvo cerca de su borde posterior. Corta a r_2 en un ángulo absoluto de casi 77°. *No es inmediatamente obvio cuál es la mejor forma para el álabe.*

Discusión Tenga en la mente que es sólo un diseño preliminar en el cual se ignoran las pérdidas irreversibles. Una bomba real tendría pérdidas, y la potencia al freno que se necesita sería superior (quizá 20 a 30 por ciento mayor) que el valor estimado aquí. En una bomba real con pérdidas, un álabe más corto tiene la fricción superficial menor, pero los esfuerzos normales sobre el álabe son mayores porque el flujo gira de manera más abrupta cerca del borde posterior, donde las velocidades son mayores. Esto podría originar problemas estructurales si los álabes no son muy gruesos, sobre todo cuando se bombean líquidos de alta densidad. La fricción superficial es mayor en un álabe más largo, pero los esfuerzos normales son menores. Además, puede verse en una estimación simple del volumen de un álabe en la figura 14-44 que para el mismo número de álabes, a medida que éstos son más largos, hay mayor obstrucción del flujo, ya que los álabes son de un grosor finito. Por otro lado, el efecto del espesor de desplazamiento de las capas límite, las cuales se generan a lo largo de la superficie de los álabes (capítulo 10), ocasiona un bloqueo aún más intenso en el caso de los álabes largos. Obviamente, se necesita alguna optimización ingenieril para determinar la forma exacta del álabe.

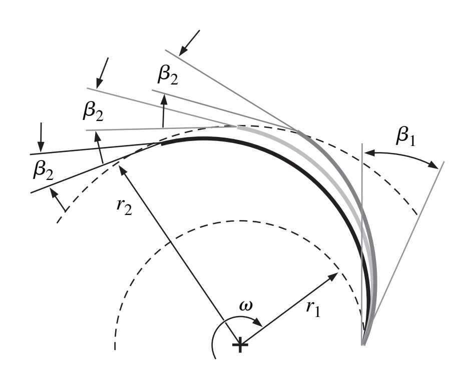


FIGURA 14-44
Tres formas posibles de los álabes para el diseño del rotor de una bomba centrífuga del ejemplo 14-6. Todos los tres álabes tienen un ángulo del borde delantero $\beta_1 = 24°$ y un ángulo del borde posterior $\beta_2 = 15°$, pero difieren en cómo β varía con el radio. El esquema está a escala.

¿*Cuántos* álabes deben utilizarse en un rotor? Si se usan muy pocos, será elevada la **pérdida de flujo circulatorio**. Estas pérdidas se presentan porque hay un número finito de álabes. Recuerde que en el análisis preliminar se supuso una velocidad tangencial uniforme $V_{2,t}$, en toda la circunferencia de la salida del volumen de control (Fig. 14-37). Esto es estrictamente correcto sólo si hay un número infinito de álabes infinitesimalmente delgados. Por supuesto que en una bomba real, la cantidad de álabes es finita y los álabes no son infinitesimalmente delgados. Como resultado, la componente tangencial del vector de velocidad absoluta no es uniforme, pero decrece en los espacios entre los álabes como se ilustra en la figura 14-45*a*. El resultado neto es un valor efectivamente más pequeño de $V_{2,t}$, el cual a su vez disminuye la carga hidrostática neta real. Esta pérdida de la carga neta (y eficiencia de la bomba) se denomina *pérdida de flujo circulatorio*. Por el contrario, si hay demasiados álabes (como en la figura 14.45*b*) hay pérdidas excesivas porque se bloquea el flujo y pérdidas por el crecimiento de las capas límite, todo lo cual ocasiona de nuevo unas velocidades de flujo no uniformes en el radio exterior de la bomba y carga hidrostática y eficiencia bajas. Estas pérdidas se conocen como **pérdidas por cortocircuito**. El punto esencial es que es necesario que se efectúe un estudio de optimización con objeto de elegir tanto la forma como la cantidad de álabes. Sin embargo, este estudio está fuera de los objetivos de este libro. Una visita rápida a las publicaciones especializadas en turbomaquinaria muestra que 11, 14 y 16 son las cantidades comunes de álabes en el rotor para bombas centrífugas de tamaño mediano.

Después que se ha diseñado la bomba en cuanto a carga hidrostática neta y caudal especificados (condiciones de diseño), se puede estimar su carga hidrostática neta en condiciones *que no son* las de diseño. En otras palabras, si se conservan fijos b_1, b_2, r_1, r_2, β_1, β_2 y ω puede hacerse variar el gasto volumétrico por arriba y por abajo del caudal de diseño. Se tienen todas las ecuaciones: la ecuación 14-17 para la carga hidrostática neta H en términos de las componentes de la velocidad tangencial absoluta $V_{1,t}$ y $V_{2,t}$, la ecuación 14-23 para $V_{1,t}$

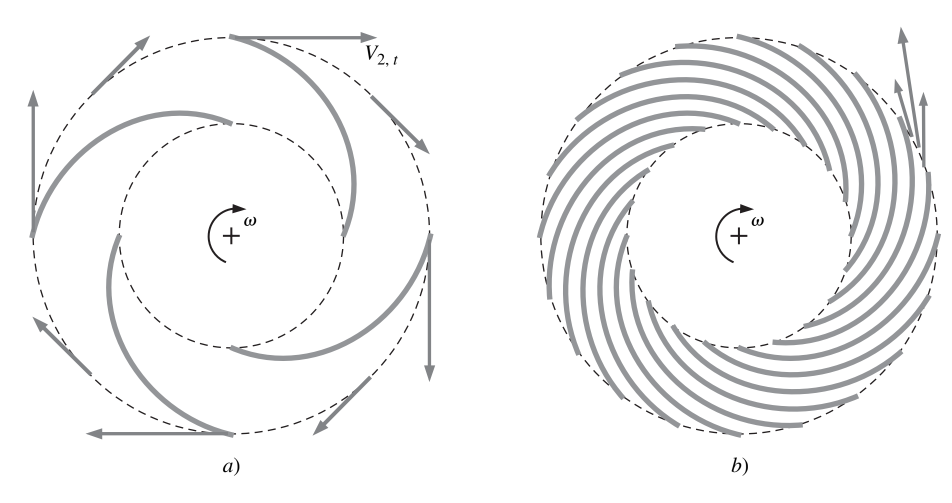


FIGURA 14-45

a) A El rotor de una bomba centrífuga con pocos álabes origina una *pérdida excesiva de flujo circulatorio*: la velocidad tangencial en el radio externo r_2 es menor en los intervalos entre los álabes que en los bordes posteriores de los álabes (se ilustran los vectores de la velocidad tangencial absoluta). *b*) En cambio, puesto que el grosor de los álabes reales del rotor es finito, un rotor con demasiados álabes ocasiona pérdidas por cortocircuito, debido a la excesiva obstaculización del flujo y la fricción superficial (los vectores de velocidad en un marco de referencia que gira con el rotor se ilustran a la salida de una corona de álabes). El punto esencial es que los ingenieros deben optimizar la forma de los álabes *y* su cantidad.

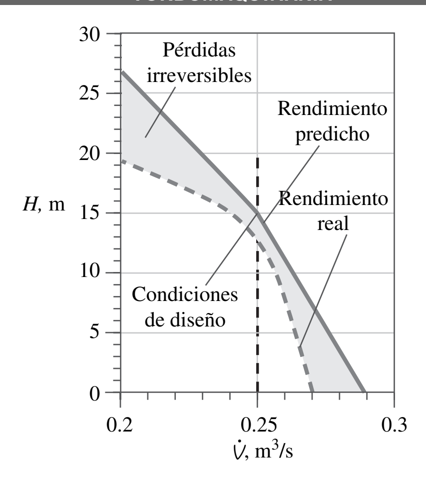


FIGURA 14-46
Carga neta en función del gasto volumétrico para la bomba del ejemplo 14-6. La diferencia entre el rendimiento pronosticado y el real se debe a que, en la predicción, no se consideraron las irreversibilidades.

y $V_{2,t}$, como funciones de las componentes normales de la velocidad absoluta $V_{1,n}$ y $V_{2,n}$ y la ecuación 14-12 para $V_{1,n}$ y $V_{2,n}$ como funciones del gasto volumétrico $\dot{V}$. En la figura 14-46 se combinan estas ecuaciones para generar una gráfica de H contra $\dot{V}$ para la bomba diseñada en el ejemplo 14-6. Las líneas grises gruesas continuas es el rendimiento pronosticado con base en el estudio preliminar. La curva de rendimiento predicha es casi lineal con respecto al cambio de $\dot{V}$ por abajo y por arriba de las condiciones de diseño ya que el término $\omega r_1 V_{1,\,t}$ en la ecuación 14-17 es pequeño en comparación con el término $\omega r_2 V_{2,t}$. Recuerde que en las condiciones de diseño pronosticadas se estableció que $V_{1,t} = 0$. Para los flujos volumétricos superiores a éste, la ecuación 14-23 predice que $V_{1,t}$ es *negativa*. Sin embargo, de acuerdo con las hipótesis no es posible tener valores negativos de $V_{1,t}$. Por tanto, la pendiente de la curva de rendimiento predicha cambia de manera repentina más allá de las condiciones de diseño.

En la figura 14-46 se ilustra también el rendimiento *real* de esta bomba centrífuga. El rendimiento predicho está muy cercano al real en la región cercana a las condiciones de diseño, pero las dos curvas se desvían de manera importante en las regiones alejadas de las condiciones de diseño. Para todos los flujos volumétricos, la carga hidrostática neta real es *inferior* a la carga hidrostática neta pronosticada. La causa son los efectos irreversibles, como la fricción en la superficie de los álabes, fugas de líquido entre los álabes y la carcasa, rotación (remolino) del líquido en la región del ojo antes de entrar al rotor, separación del flujo en los bordes delanteros de los álabes (pérdidas por impacto) o en los ensanchamientos de los pasajes de flujo, pérdidas por flujo circulatorio, pérdidas por cortocircuito y disipación irreversible de remolinos en la voluta, entre otros.

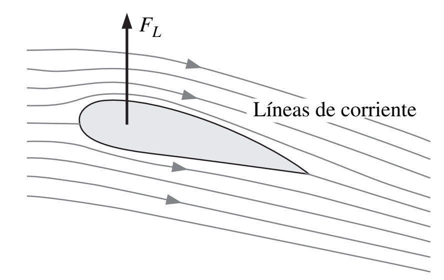


FIGURA 14-47
Los álabes de una bomba de flujo axial se comportan como las alas de un aeroplano. El ala gira el aire hacia abajo cuando genera fuerza de sustentación F_L.

Bombas axiales

No utilizan las fuerzas centrífugas. Los álabes del rotor se comportan más como las alas de los aeroplanos (Fig. 14-47), ya que se genera una fuerza de sustentación con el cambio de la cantidad de movimiento del fluido cuando giran los álabes. El rotor de un helicóptero, por ejemplo es un tipo de bomba axial (Fig. 14-48). La fuerza de sustentación sobre el álabe la causan las diferencias de presión entre las superficies superiores e inferiores del álabe, y el cambio en la dirección del flujo crea un **torbellino descendente** (una columna de aire que desciende) a través del plano del rotor. Desde una perspectiva de tiempo promediado, hay un salto de presión en el plano del rotor inducido por el flujo de aire descendente (Fig. 14-48).

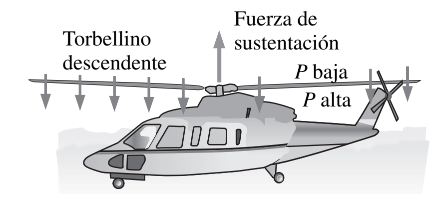


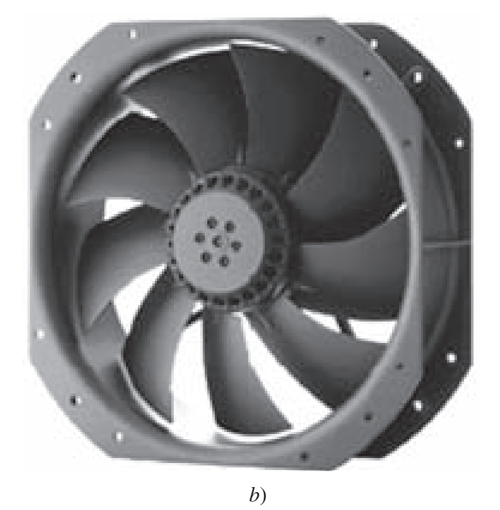
FIGURA 14-48
Torbellino descendente y el incremento de presión en el plano del rotor de un helicóptero; el rotor es un tipo de bomba de flujo axial.

Pero el plano del rotor puede girarse para que quede vertical, y entonces se tiene una hélice (Fig. 14-49*a*). Tanto el rotor del helicóptero como las hélices del aeroplano son ejemplos de **ventiladores abiertos de flujo axial**, puesto que no hay tubo o carcasa que rodee las puntas de los aspas. El ventilador de ventana común que se encuentra en las ventanas de las recámaras opera en verano según los mismos principios, pero el objetivo es hacer que fluya aire y no el ejercer una fuerza. Es seguro que *hay* una fuerza neta que actúa sobre la carcasa del ventilador. Si el aire corre de izquierda a derecha, la fuerza sobre el ventilador actúa a la izquierda, y el ventilador queda sujeto por el marco de la ventana. Otra función de la carcasa que rodea al ventilador es que actúa como un tubo corto, el cual ayuda a dirigir el flujo y elimina algunas pérdidas en las puntas de las aspas. El pequeño ventilador para enfriar que se encuentra dentro de las computadoras es un ejemplo de un ventilador de flujo axial; se parece a un ventilador para las ventanas, pero en miniatura (Fig. 14-49*b*) y es un ejemplo de un **ventilador de flujo axial entubado**.

Si se observa detenidamente un álabe de la hélice del aeroplano que se ilustra en la figura 14-49*a*, un álabe del rotor de un helicóptero, un álabe de la hé-



a)



b)

FIGURA 14-49
Los ventiladores de flujo axial pueden ser abiertos o cubiertos: *a*) una hélice es un ventilador abierto y *b*) el ventilador de enfriamiento de una computadora es un ventilador entubado.

a) Cortesía de Whirl Wind Propellers Corporation. Reproducido con autorización. b) Courtesy ebm-papst Mulfingen GmbH & Co. KG. Reproducido con autorización.

lice de un modelo de aeroplano controndado por radio o hasta un álabe de un ventilador de ventana debidamente diseñado, se ve que la superficie está **torcida**. En particular, el perfil del álabe en un corte transversal cerca de la raíz o la base del álabe está a un **ángulo de inclinación** (θ) mayor que el perfil en su sección transversal cerca de la punta, $\theta_{\text{base}} > \theta_{\text{punta}}$ (Fig. 14-50). La razón es que la velocidad tangencial del álabe se incrementa en forma lineal con el radio:

$$u_\theta = \omega r \tag{14-26}$$

Entonces, a un radio determinado, la velocidad $\vec{V}_{\text{relativa}}$ del aire *relativa con respecto al álabe* en la primera aproximación se estima como la suma vectorial de la velocidad del viento $\vec{V}_{\text{viento}}$ y la velocidad del álabe $\vec{V}_{\text{álabe}}$ opuesta:

$$\vec{V}_{\text{relativa}} \cong \vec{V}_{\text{viento}} - \vec{V}_{\text{álabe}} \tag{14-27}$$

donde la magnitud de $\vec{V}_{\text{álabe}}$ es igual a la velocidad tangencial del álabe u_θ, de acuerdo con la ecuación 14-26. La dirección de $\vec{V}_{\text{álabe}}$ es tangencial a la trayectoria rotacional del álabe. En la posición del álabe que se muestra en la figura 14-50, $\vec{V}_{\text{álabe}}$ está a la izquierda.

En la figura 14-51 se calcula $\vec{V}_{\text{relativa}}$ por un método gráfico por medio de la ecuación 14-27 con dos radios, el radio en la base y el radio en la punta del álabe del rotor que se ilustra en la figura 14-50. Como se puede ver, el ángulo relativo de ataque α es el mismo en cualquier caso. En realidad, la cantidad de deformación por torsión está determinada cuando se establece el ángulo de inclinación ω tal que α es igual en cualquier radio.

Observe también que la magnitud de la velocidad relativa $\vec{V}_{\text{relativa}}$ aumenta desde la base hasta la punta. Se infiere entonces que la presión dinámica que encuentran los cortes transversales del álabe se incrementa con el radio, y la fuerza de sustentación por unidad de ancho normal al plano de la figura 14-51 también se incrementa con el radio. Las hélices tienden a ser más angostas en la base y más amplias hacia la punta, con el objetivo de aprovechar la mayor contribución de la fuerza de sustentación de la región más cercana a la punta. Sin embargo, el álabe está redondeado exactamente en la punta para evitar excesiva *fuerza de arrastre inducida* (capítulo 11) que existiría si el álabe estuviera cortado en forma aguda como en la figura 14-50.

La ecuación 14-27 no es exacta por varias razones. Primero, el movimiento de rotación del rotor impone un movimiento giratorio al flujo de aire (Fig. 14-52).

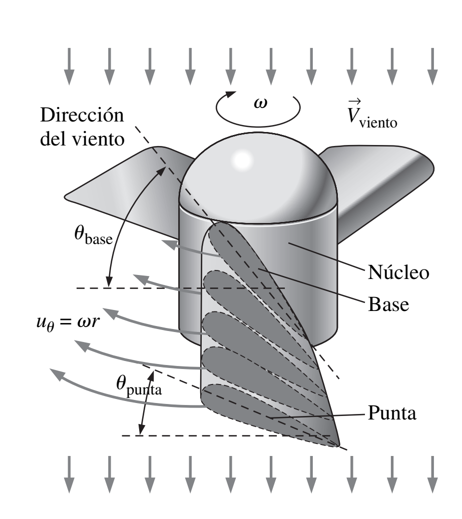
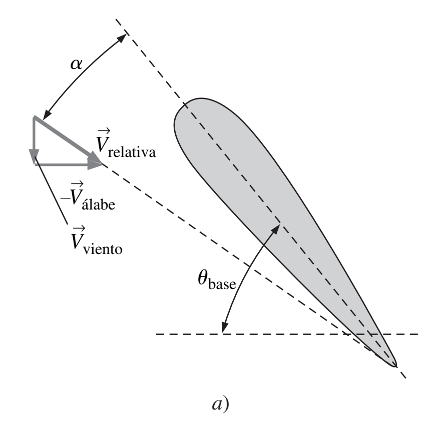


FIGURA 14-50
Un álabe de rotor muy bien diseñado tiene una superficie torsida como lo muestran los cortes transversales en color gris oscuro a través de uno de los tres álabes; el ángulo de inclinación del álabe θ es mayor en la base que en la punta porque la velocidad tangencial del álabe aumenta con el radio.



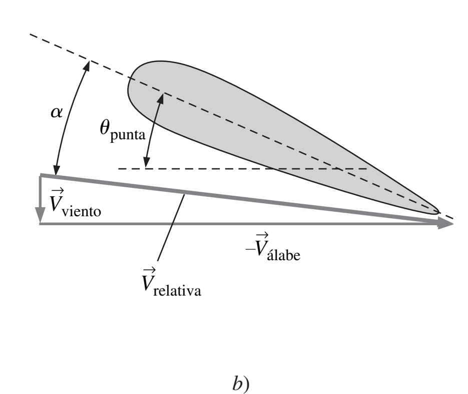


FIGURA 14-51
Cálculo gráfico $\vec{V}_{relativa}$ con dos radios: *a*) base y *b*) punta del álabe del rotor que se ilustra en la figura 14-50.

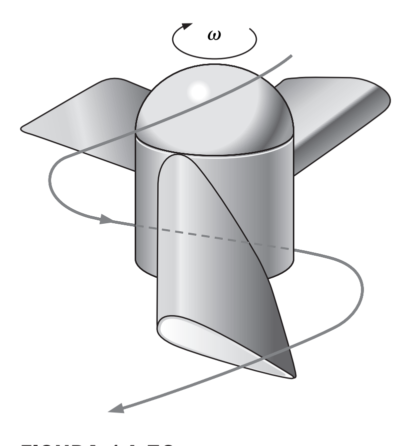


FIGURA 14-52
Los álabes de una hélice que gira inducen el movimiento giratorio en el fluido que los rodea.

Esto reduce la velocidad tangencial efectiva del álabe relativa con respecto al viento. Segundo, puesto que la base del rotor es de tamaño finito, el aire se acelera alrededor de él, con lo que aumenta localmente la velocidad del aire en los cortes transversales del álabe cercanos a la base. Tercero, el eje del rotor o la hélice podría no estar alineado exactamente paralelo al viento. Para concluir, la velocidad del viento no puede determinarse con facilidad, porque resulta que el viento se acelera cuando se aproxima al rotor que está girando. Existen métodos para obtener un valor aproximado de éstos y otros efectos secundarios, pero están fuera de los objetivos de este libro. La aproximación de primer orden que da la ecuación 14-27 es adecuada para plantear un diseño preliminar de rotores e impulsores, como se ilustra en el ejemplo 14-7.

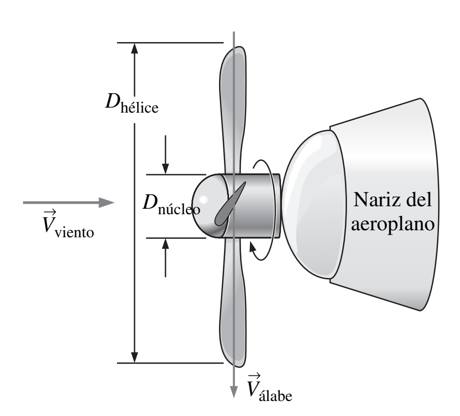


FIGURA 14-53
Esquema para el diseño de la hélice de un modelo de aeroplano del ejemplo 14-7. No está a escala.

EJEMPLO 14-7 Cálculo de la torsión de una hélice de aeroplano

Suponga que se está diseñando la hélice para el modelo de un aeroplano que se controla por radio. El diámetro total de la hélice es de 34.0 cm y el diámetro del núcleo es de 5.5 cm (Fig. 14-53). La hélice gira a 1 700 rpm, y el perfil aerodinámico escogido para el corte transversal de la hélice alcanza su eficiencia máxima a un ángulo de ataque de 14°. Calcule el ángulo de inclinación del álabe, desde la base hasta la punta del álabe, tal que α = 14° en cualquier punto a lo largo del álabe de la hélice cuando el aeroplano vuela a 30 millas por hora (13.4 m/s).

SOLUCIÓN Debe calcularse el ángulo de inclinación θ del álabe desde la base hasta la punta del impulsor, de tal modo que el ángulo de ataque sea de α = 14° en cada radio a lo largo del álabe de la hélice.
Hipótesis **1** El aire a estas velocidades bajas es incompresible. **2** Se ignoran los efectos secundarios de remolinos y aceleración del aire a medida de que se aproxima a la hélice; es decir, se supone que la magnitud de $\vec{V}_{viento}$ es igual a la velocidad de la nave. **3** El aeroplano vuela a tal nivel que el eje de la hélice es paralelo a la velocidad del viento.
Análisis La velocidad del aire con respecto al álabe a cualquier radio en la primera aproximación se calcula mediante la ecuación 14-27. En la figura 14-54 se ilustra un esquema de los vectores de velocidad a un radio arbitrario *r*. De acuerdo con las características geométricas se observa que:

Ángulo de inclinación a un radio arbitrario r: $$\theta = \alpha + \phi \quad \textbf{(1)}$$

y

$$\phi = \arctan \frac{|\vec{V}_{\text{viento}}|}{|\vec{V}_{\text{alábe}}|} = \arctan \frac{|\vec{V}_{\text{viento}}|}{r} \qquad \textbf{(2)}$$

donde se utilizó también la ecuación 14-26 para la velocidad del álabe a radio r. En la base ($r = D_{\text{cubo}}/2 = 2.75$ cm), la ecuación 2 se transforma en:

$$\theta = \alpha + \phi = 14° + \arctan\left[\frac{13.4 \text{ m/s}}{(1\,700 \text{ rot/min})(0.0275 \text{ m})}\left(\frac{1 \text{ rot}}{2\pi \text{ rad}}\right)\left(\frac{60 \text{ s}}{\text{min}}\right)\right] = \mathbf{83.9°}$$

Respecto al ángulo de inclinación en la punta ($r = D_{\text{impulsor}}/2 = 17.0$ cm), éste es:

$$\theta = \alpha + \phi = 14° + \arctan\left[\frac{13.4 \text{ m/s}}{(1\,700 \text{ rot/min})(0.17 \text{ m})}\left(\frac{1 \text{ rot}}{2\pi \text{ rad}}\right)\left(\frac{60 \text{ s}}{\text{min}}\right)\right] = \mathbf{37.9°}$$

En los radios entre la base y la punta, las ecuaciones 1 y 2 se utilizan para calcular θ en función de r. Los resultados se grafican en la figura 14-55.

Discusión El ángulo de inclinación no es lineal debido a la función de arcotangente en la ecuación 2.

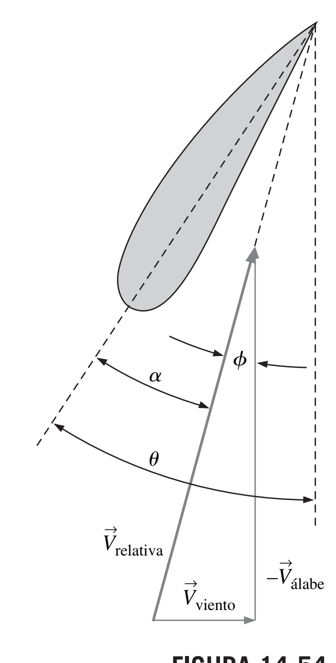


FIGURA 14-54
Vectores de velocidad correspondientes a algún radio arbitrario r de la hélice del ejemplo 14-7.

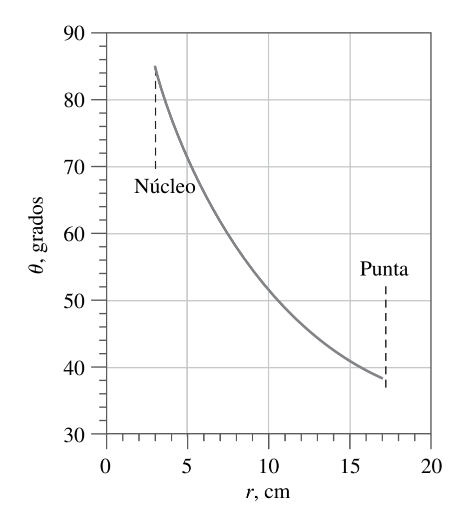


FIGURA 14-55
Ángulo de inclinación del álabe en función del radio para la hélice del ejemplo 14-7.

Las hélices de un aeroplano tienen **el ángulo de inclinación variable**, lo que quiere decir que la inclinación del álabe completo puede ajustarse mediante un mecanismo articulado en el núcleo. Por ejemplo, cuando un aeroplano con la hélice funcionando está en el aeropuerto calentando sus motores a altas revoluciones por minuto, ¿por qué no empieza a desplazarse? Por una simple razón: los frenos están aplicados. Pero lo más importante es que la inclinación de los álabes de la hélice está ajustada de tal modo que el ángulo promedio de ataque de las secciones transversales del perfil aerodinámico de álabe es cero: no se genera ninguna fuerza de propulsión neta. Mientras el aeroplano se mueve hacia la pista de despegue, la inclinación se ajusta de tal manera que se produzca una pequeña fuerza de propulsión. Cuando el aeroplano despega, las rpm del motor son altas, y la inclinación del álabe se ajusta para que la hélice entregue la máxima fuerza de propulsión. En la mayoría de los casos, la inclinación puede ajustarse inclusive “hacia atrás” (ángulo de ataque negativo) para proporcionar **la fuerza de propulsión inversa** la que reduce la velocidad del aeroplano después de aterrizar.

En la figura 14-56 se grafican las curvas cualitativas de rendimiento de una hélice típica. Al contrario que en los ventiladores centrífugos, la potencia al freno tiende a *disminuir* con el caudal. Además, la curva de eficiencia se inclina más hacia la derecha en comparación con la de los ventiladores centrífugos (vea la figura. 14-8). El resultado es que la eficiencia disminuye con rapidez para flujos volumétricos mayores que los del punto de mejor eficiencia. La curva de carga hidrostática neta disminuye también de manera continua con el caudal (aunque hay algunas ondulaciones) y su forma es bastante diferente que la de un ventilador centrífugo. Si no son exageradas las demandas de carga hidrostática, las hélices pueden funcionar más allá del punto de eficiencia máxima para alcanzar flujos volumétricos más altas. Puesto que bhp disminuye a valores altos de $\dot{V}$, no hay una penalización de potencia cuando el ventilador funciona con caudales altos. Por esta razón es tentador instalar un ventilador de un *tamaño un poco menor*, y lanzarlo a que trabaje más allá de su punto de mejor eficiencia. Por otro lado, si opera *por abajo* del punto de su eficiencia máxima, el flujo podría ser ruidoso e inestable, lo cual es indicio de que el ventilador tal vez es de *tamaño un poco mayor* de lo necesario. Debido a estas razones, por lo general

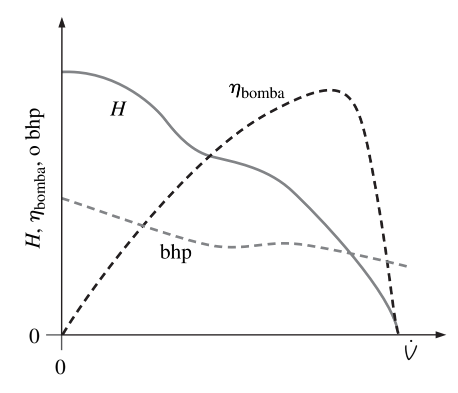
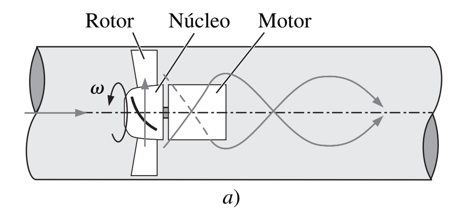
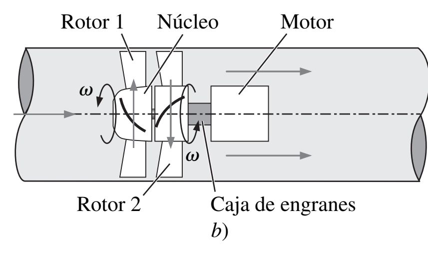


FIGURA 14-56
Curvas de rendimiento de una hélice típica que es un ventilador de flujo axial.





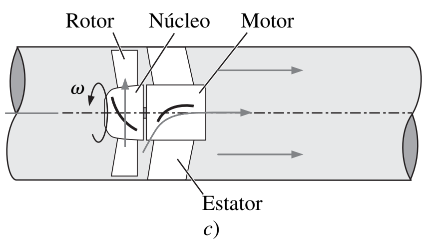


FIGURA 14-57
Un *ventilador de flujo axial entubado a*) impone el movimiento giratorio al flujo existente, mientras que *b*) un *ventilador de flujo axial con el segundo rotor contrarrotatorio* y *c*) un *ventilador de flijo axial con el estator de álabes guía* están diseñados para eliminar el movimiento giratorio.

es mejor operar una hélice en su punto de eficiencia máxima o ligeramente por arriba de éste.

Cuando un ventilador de flujo axial de un solo rotor se usa para mover un fluido en una tubería se le llama **ventilador axial de tubo** (Fig. 14-57*a*). En numerosas aplicaciones prácticas de ingeniería de los ventiladores de flujo axial, como los extractores de aire de las cocinas, ventiladores entubados para los sistemas de aire acondicionado de edificios, campanas de extracción de humo y ventiladores para enfriar el radiador de los automóviles no importa el movimiento giratorio que producen los álabes al girar (Fig. 14-57*a*). Pero el movimiento giratorio y la intensidad incrementada de la turbulencia pueden continuar por buena distancia corriente abajo, y hay aplicaciones donde el flujo giratorio (o su ruido y turbulencia que lo acompañan) es totalmente indeseable. Entre los ejemplos se encuentran ventiladores en túneles de viento y algunos ventiladores especializados para ventilar minas. Existen dos diseños básicos que eliminan en gran medida el movimiento giratorio: se instala un segundo rotor, que gira en la *dirección opuesta*, en serie con el rotor ya existente para formar un par de rotores de los sentidos de giro opuestos; tal ventilador se denomina **ventilador contrarrotatorio de flujo axial** (Fig. 14-57*b*). El movimiento giratorio que genera el rotor corriente arriba es anulado por el movimiento giratorio en la dirección opuesta que produce un rotor corriente abajo. Otra opción es añadir un conjunto de **álabes de estator**, corriente arriba o corriente abajo del rotor. Como lo indica su nombre, los álabes de estator son aletas guía *estacionarias* (no giran), que simplemente redireccionan el fluido. Un ventilador de flujo axial con un conjunto de álabes de rotor (la **rueda móvil** o el **rodete o impulsor**) *y* un conjunto de álabes de estator llamadas **guías** (el **estator**) se denomina **ventilador axial con aletas de guía** (Fig. 14-57*c*). El diseño del álabe del estator del ventilador axial con aletas de guía, es mucho más simple y menos caro de implantar que el diseño de un ventilador contrarrotatorio de flujo axial.

El movimiento giratorio del fluido corriente abajo de un ventilador axial de tubo desperdicia energía cinética y tiene alto grado de turbulencia; el ventilador axial con aletas de guía recupera parte de esta energía cinética desperdiciada y disminuye el grado de turbulencia. Por tanto, los ventiladores axiales con aletas de guía son más silenciosos y más eficientes en el uso de energía que los ventiladores axiales de tubo. Un ventilador contrarrotatorio de flujo axial con un diseño adecuado puede ser más silencioso y más eficiente en el uso de la energía. Además, ya que hay dos conjuntos de álabes rotatorios, se obtiene un incremento de presión superior con el diseño contrarrotaorio. La construcción de un ventilador contrarrotatorio de flujo axial es más compleja, naturalmente, porque necesita dos motores sincronizados o una caja de engranes.

Los ventiladores de flujo axial pueden accionarse por una banda o por transmisión directa. El motor de un ventilador axial con aletas de guía y transmisión directa se instala en la mitad del tubo. Es práctica común (y diseño adecuado) utilizar *los álabes de estator* para proporcionar apoyo físico al motor. En la figura 14-58 se presentan fotografías de un ventilador axial de tubo que se acciona mediante una banda y un ventilador axial con aletas de guía y transmisión directa. Los álabes de estator del ventilador axial con aletas de guía se localizan atrás (corriente abajo) de los álabes del rotor en la figura 14-58*b*. Otro diseño podría ser colocar los álabes del estator *corriente arriba* del rotor, lo que impone el movimiento giratorio previo a la entrada al rotor. El movimiento giratorio impuesto por los álabes del rotor elimina después este movimiento giratorio previo.

El diseño de la forma de los álabes es directo en todos estos diseños de ventiladores de flujo axial, por lo menos en la primera aproximación. Para simplificar, se supone que los álabes son delgados (es decir, los álabes son de láminas de metal) y no álabes de forma aerodinámica. Por ejemplo, considere un ventilador de flujo axial con aletas de guía con álabes de rotor ubicados corriente arriba de los álabes del estator (Fig. 14-59). La distancia entre el rotor y el estator



a)



b)

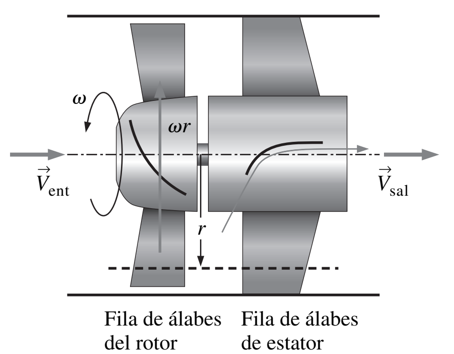
FIGURA 14-58
Ventiladores de flujo axial: *a*) ventilador de flujo axial entubado accionado por banda sin estator con álabes guía y *b*) ventilador, accionado por motor, de flujo axial con el estator con álabes guía para reducir el movimiento giratorio y mejorar la eficiencia.

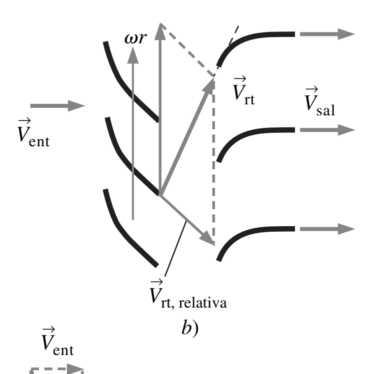
a) © Barry Blower, ASC LP. Reproducido con autorización. b) Fotografía cortesía de Howden Buffalo, Inc. Reproducido con autorización.

se ha exagerado en la figura para poder dibujar los vectores velocidad entre los álabes. Se supone que el radio del núcleo del estator es igual que el radio del núcleo del rotor, de modo que el área de flujo de la sección transversal es constante. Al igual que se hizo con la hélice, se considera la sección transversal del álabe del rotor cuando pasa verticalmente frente al observador. Ya que hay múltiples álabes, el siguiente álabe pasa poco después. Con un radio elegido r, se efectúa la aproximación bidimensional de que los álabes pasan *como una serie infinita* de álabes bidimensionales, que se denomina **fila de álabes** o **cascada**. Una suposición similar se plantea para los álabes del estator, aun cuando son estacionarios. Ambas coronas de álabes se ilustran en la figura 14.59.

En la figura 14-59*b*, los vectores de velocidad se ven desde un marco de referencia absoluto, es decir, el de un observador inmóvil que mira horizontalmente al ventilador de flujo axial con aletas de guía. El flujo entra desde la izquierda a una velocidad V_{ent} en la dirección horizontal (axial). La fila de álabes del rotor se desplaza a una velocidad constante ωr vertical hacia arriba en este marco de referencia, como se señala. Estos álabes en movimiento hacen girar al flujo, que abandona el borde posterior hacia arriba y a la derecha, como se indica en la figura 14-59*b* como vector $\vec{V}_{rt}$ (el subíndice significa borde posterior del rotor). Para hallar la magnitud y dirección de $\vec{V}_{rt}$ se vuelven a dibujar las filas de álabes y los vectores en un marco de referencia *relativo* (el marco de referencia del álabe del rotor) en la figura 14-59*c*. Este marco de referencia se obtiene cuando se resta la velocidad del álabe del rotor (sumando un vector de magnitud ωr que apunta verticalmente hacia abajo) de todos los vectores velocidad. De acuerdo con la figura 14-59*c*, el vector de velocidad relacionado con el borde delantero del álabe del rotor es $\vec{V}_{ent,\ relativa}$, calculado como la suma de vectores de $\vec{V}_{ent}$ y el vector dirigido hacia abajo de magnitud ωr. La inclinación del álabe del rotor se ajusta de tal manera que la velocidad $\vec{V}_{ent,\ relativa}$ es paralela (tangencial) al borde delantero del álabe del rotor en esta sección transversal.

El álabe del rotor hace girar el flujo. Se supone que el flujo que abandona el álabe del rotor es paralelo al borde posterior del álabe (desde el marco de referencia relativo), como se ilustra en la figura 14-59*c* como vector $\vec{V}_{rt,\ relativa}$. También se sabe que la componente horizontal (axial) de vector $\vec{V}_{rt,relativa}$ debe ser igual a vector $\vec{V}_{ent}$ con objeto de conservar la masa. Observe en la figura 14-59 que se supone un flujo incompresible y un área de flujo constante, que es normal a la página. Por consiguiente, la componente axial de la velocidad debe ser en todas partes igual a V_{ent}. Esta información establece la magnitud del vector $\vec{V}_{rt,\ relativa}$, que no es la misma que la magnitud de vector $\vec{V}_{ent,\ relativa}$. Regresando al marco de referencia absoluto de la figura 14-59*b*, la velocidad absoluta vector $\vec{V}_{rt}$ se calcula como la suma vectorial de vector $\vec{V}_{rt,\ relativa}$ y el vector vertical hacia arriba de magnitud ωr.





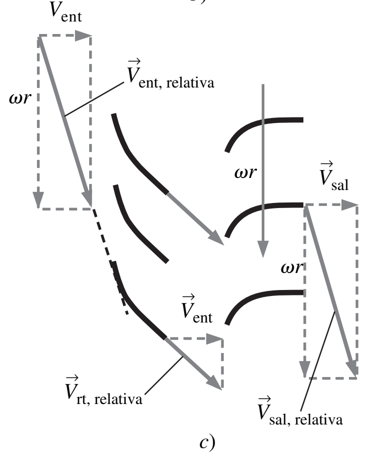


FIGURA 14-59
Análisis de un ventilador de flujo axial con álabes guía a un radio *r* al usar la aproximación bidimensional de la fila de álabes; *a*) vista completa, *b*) marco de referencia absoluto y *c*) marco de referencia relacionado con los álabes del rotor giratorio (impulsor).

Para finalizar, el álabe del estator se diseña de tal manera que $\vec{V}_{rt}$ es paralela al borde delantero del álabe del estator. Una vez más, se hace girar al flujo, esta vez lo hace el álabe del estator. Su borde posterior es horizontal de modo que el flujo sale axialmente (sin movimiento giratorio). La velocidad final del flujo de salida debe ser idéntica a la de entrada por la ley de conservación de la masa si se supone flujo incompresible y área de flujo constante que es normal a la página. En otras palabras, $\vec{V}_{sal} = \vec{V}_{ent}$. Para que la información esté completa, la velocidad del flujo a la salida en el marco de referencia relativo se traza en la figura 14-59*c*. Asimismo, se tiene que $\vec{V}_{sal,\ relativa} = \vec{V}_{ent,\ relativa}$.

Ahora, suponga que se repite el análisis para *todos* los radios desde el núcleo hasta la punta. Al igual que en caso de la hélice, se diseñarían los álabes con un cierto torcimiento, ya que el valor de ωr aumenta con el radio. Se puede lograr una modesta ganancia en la eficiencia a las condiciones de diseño si se usan formas aerodinámicas, en vez de láminas de metal para los álabes; la mejora es más importante en condiciones que no son de diseño.

Si se encuentran, por decir algo, siete álabes en el rotor de un ventilador de flujo axial con aletas de guía, ¿cuántos álabes de estator debe haber allí? Podría decirse que siete, para que el estator correspondiera con el rotor, pero ¡éste sería un diseño pésimo! ¿Por qué? Porque en el instante de tiempo en que un álabe del rotor pase directamente frente a un álabe del estator, los seis de sus hermanos estarán haciendo lo mismo. Cada uno de los álabes del estator encontraría a la vez el flujo agitado de la estela del álabe de un rotor. El flujo resultante sería tanto pulsátil como ruidoso, y la unidad entera vibraría severamente. Para no llegar a estos extremos, una práctica adecuada de diseño es escoger el número de álabes del estator de tal manera que *no haya un común denominador* con el número de álabes del rotor. Combinaciones como siete y ocho, siete y nueve, seis y siete o nueve y once son elecciones correctas. Las combinaciones como ocho y diez (el común denominador es dos) o nueve y doce (el común denominador es tres) *no* son elecciones correctas.

En la figura 14-60 se grafican las curvas de rendimiento de un ventilador de flujo axial con aletas de guía típico. Las formas generales son muy similares a las de la hélice (Fig. 14-56). El lector puede referirse a esa parte. Después de todo, un ventilador de flujo axial con aletas de guía es en realidad lo mismo que un ventilador de hélice o uno de tubo axial, excepto por los álabes del estator adicionales que enderecen el flujo y tienden a suavizar las curvas de rendimiento.

Ya se comentó que un ventilador de flujo axial entrega un gasto volumétrico alto, pero a bajo incremento de presión. Algunas aplicaciones necesitan *tanto* caudal elevado *como* incremento de presión alto. En estos casos pueden combinarse *en serie* varios pares de estator-rotor, casi siempre con una flecha o eje común y núcleo también común (Fig. 14-61). Cuando dos o más pares de rotor-estator se combinan así, entonces se habla de una **bomba de flujo axial de varias etapas**. Se efectúa un análisis a la fila de álabes similar al de la figura 14-59 para cada una de las etapas sucesivas. Los detalles del análisis pueden ser complicados a causa de los efectos de la compresibilidad y porque el área de flujo desde el núcleo hasta la punta podría no ser constante. Por ejemplo, en un **compresor de flujo axial de varias etapas**, el área de flujo disminuye corriente abajo. Los álabes de cada etapa sucesiva se vuelven más pequeños a medida que el aire se comprime aún más. En una **turbina de flujo axial de varias etapas**, el área de flujo casi siempre *aumenta* corriente abajo a medida que la presión se pierde en cada etapa sucesiva de la turbina.

Un ejemplo muy conocido de una turbomáquina que utiliza compresores de flujo axial de varias etapas y turbinas de flujo axial de varias etapas es el **motor de turboventilador**, que se usa para impulsar los modernos aeroplanos comerciales. En la figura 14-62 se ilustra un diagrama de un motor de turboventilador. Parte del aire pasa por el ventilador, el cual crea la fuerza de propulsión bastante semejante a una hélice. El resto del aire pasa por un compre-

sor de baja presión, un compresor de alta presión, una cámara de combustión, una turbina de alta presión y, por último, por una turbina de baja presión. El aire y los productos de combustión son descargados a alta velocidad para proporcionar aún más la fuerza de propulsión. Los paquetes de la dinámica de fluidos computacional (CFD, *Computational fluid dynamics*, por sus siglas en inglés) son muy útiles en el diseño de estas turbomáquinas tan complejas (capítulo 15).

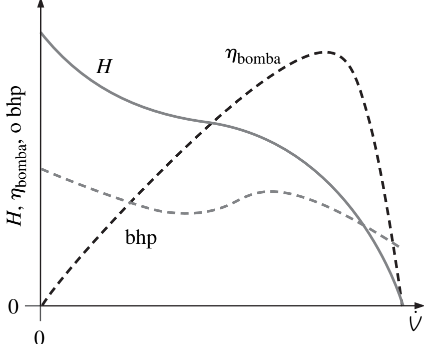


FIGURA 14-60
Curvas de rendimiento típicas de un ventilador de flujo axial con álabes guía.

EJEMPLO 14-8 Diseño de un ventilador de flujo axial con aletas guía para un túnel de viento

Se desea diseñar un ventilador de flujo axial con aletas guía para accionar un túnel de viento. No debe haber movimiento giratorio corriente abajo del ventilador. Se decidió que los álabes del estator deben estar *corriente arriba* de los álabes del rotor (Fig. 14-63) para proteger los álabes del rotor contra el daño que le pudieran causar de manera accidental objetos que caigan en el ventilador. Para reducir costos, los álabes del estator y los del rotor se construirán con lámina de metal. El borde delantero de cada álabe del estator está alineado en forma axial (β_{bae} = 0.0°) y su borde posterior está a un ángulo de β_{bpe} = 60.0° a partir del eje como se muestra en el esquema (el subíndice “bde” indica borde delantero del estator, y “bpe” significa borde posterior del estator). Hay 16 álabes de estator. Para condiciones de diseño, la velocidad del flujo axial por los álabes es 47.1 m/s, y el rotor gira a 1 750 rpm. A un radio r = 0.40 m, calcule los ángulos del borde delantero y del borde posterior del álabe del rotor, y realice un esquema de la forma del álabe. ¿Cuántos álabes debe haber en el rotor?

SOLUCIÓN Se diseñará el álabe del rotor para condiciones de flujo y forma del álabe del estator dadas. Específicamente, se calcularán los ángulos del borde delantero y del borde posterior del álabe del rotor y se delineará su forma. También se decidirá cuántos álabes de rotor deben construirse.

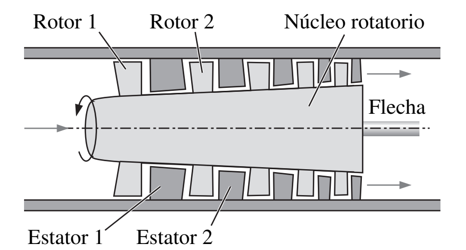


FIGURA 14-61
Una bomba de flujo axial y de varias etapas consiste en dos o más pares de rotor y estator.

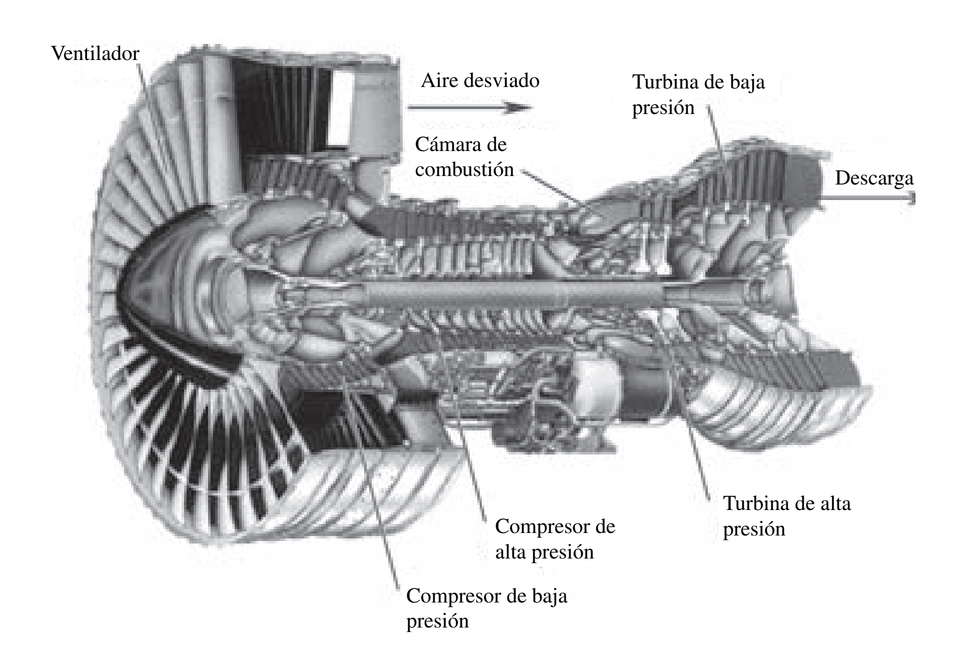


FIGURA 14-62
Turboventilador Pratt & Whitney PW 4 000; un ejemplo de una turbomáquina de flujo axial de varias etapas.
Cortesía de Pratt & Whitney. Reproducido con autorización.

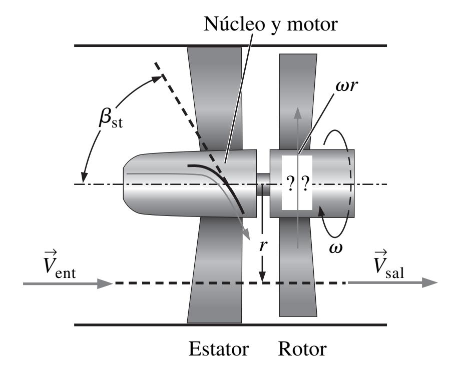


FIGURA 14-63
Esquema del ventilador de flujo axial con álabes guía del ejemplo 14-8. El estator precede al rotor, y se desconoce la forma del álabe, que es la que debe diseñarse.

Hipótesis **1** El aire es aproximadamente incompresible. **2** El área de flujo entre el núcleo y la punta es constante. **3** Es apropiado el análisis bidimensional de la fila de álabes.

Análisis Primero se analiza el flujo por el estator desde un marco de referencia absoluto mediante la aproximación bidimensional de una cascada (fila de álabes) de los álabes del estator (Fig. 14-64). El flujo entra en forma axial (horizontalmente) y gira 60.0° hacia abajo. Debido a que la componente axial de la velocidad debe permanecer constante por la ley de conservación de masa, la magnitud de la velocidad cuando el flujo deja el borde posterior del álabe del estator $\vec{V}_{bpe}$, se calcula que es:

$$V_{st} = \frac{V_{in}}{\cos \beta_{st}} = \frac{47.1 \text{ m/s}}{\cos(60.0°)} = 94.2 \text{ m/s} \quad \textbf{(1)}$$

Se supone que la dirección de $\vec{V}_{bpe}$ es la del borde posterior del estator. En otras palabras, se supone que el flujo gira precisamente por la fila de álabes y sale paralelo al borde posterior del álabe, como se muestra en la figura 14-64.

Se pasa $\vec{V}_{bpe}$ al marco de referencia *relativo* que se desplaza con los álabes del rotor. A un radio de 0.40 m, la velocidad tangencial de los álabes del rotor es:

$$u_\theta = \omega r = (1750 \text{ rot/min})\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rot}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)(0.40 \text{ m}) = 73.30 \text{ m/s} \quad \textbf{(2)}$$

Debido a que la fila de álabes del rotor se mueve hacia arriba como se muestra en la figura 14-63, se añade una velocidad *hacia abajo* con la magnitud que da la ecuación 2 para trasladar a $\vec{V}_{bpe}$ al marco de referencia delineado en la figura 14-65. El ángulo del borde delantero del rotor, β_{bar}, se determina mediante las leyes trigonométricas,

$$\beta_{rl} = \arctan \frac{\omega r + V_{in} \tan \beta_{st}}{V_{in}}$$

$$= \arctan \frac{(73.30 \text{ m/s}) + (47.1 \text{ m/s}) \tan(60.0°)}{47.1 \text{ m/s}} = 73.09° \quad \textbf{(3)}$$

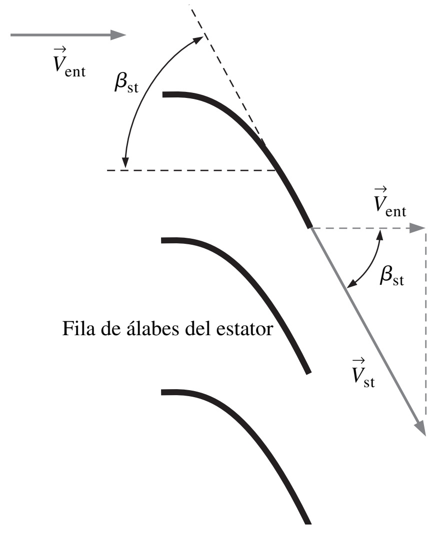


FIGURA 14-64
Análisis de los vectores de velocidad del flujo sobre la fila de álabes guía del estator del ventilador de flujo axial del ejemplo 14-8; marco de referencia absoluto.

La fila de álabes hace girar al aire de tal manera que éste deja el borde posterior del álabe del rotor en un ángulo cero (en forma axial, sin movimiento giratorio) a partir de un marco de referencia absoluto. Esto determina el ángulo del borde posterior del rotor, β_{rt}. Específicamente, cuando se añade una velocidad *hacia arriba* de magnitud ωr (Ec. 2) a la velocidad relativa cuando sale del borde posterior del rotor, $\vec{V}_{rt,\text{ relativa}}$, es necesario transformar una vez más al marco de referencia absoluto, con lo que se obtiene $\vec{V}_{rt}$, la velocidad al dejar el borde posterior del rotor. Es esta velocidad, $\vec{V}_{rt}$, la que debe ser axial (horizontal). Además, por la ley de conservación la masa, $\vec{V}_{rt}$, debe ser igual a $\vec{V}_{ent}$, ya que se supone un flujo incompresible. Si se trabaja hacia atrás se construye $\vec{V}_{rt,\text{ relativa}}$ en la figura 14-66. Cuando se aplican las leyes trigonométricas se tiene:

$$\beta_{rt} = \arctan \frac{\omega r}{V_{in}} = \arctan \frac{73.30 \text{ m/s}}{47.1 \text{ m/s}} = 57.28° \quad \textbf{(4)}$$

Se llega a la conclusión que el álabe del rotor con este radio tiene un ángulo del borde delantero de casi 73.1° (Ec. 3) y un ángulo del borde posterior de casi 57.3° (Ec. 4). Un esquema del álabe del rotor con este radio se ilustra en la figura 14-65; la curvatura total es pequeña, a saber, menor de 16° desde el borde delantero al posterior.

Por último, para evitar interacciones de la estela del álabe del estator con el borde delantero del álabe del rotor, se escoge la cantidad de álabes del rotor de tal manera que no haya común denominador con el número de álabes del estator. Dado que son 16 los álabes del estator, se eligen 13, 15 o 17 álabes para el ro-

tor. No sería apropiado elegir 14 porque comparte un denominador común, el 2, con el número 16. Si se escoge el 12 sería peor, porque comparte los denominadores comunes 2 y 4.

Discusión Se puede repetir el cálculo para todos los radios desde el núcleo hasta la punta, que completaría el diseño de todo el rotor. Habría torsión de la superficie del álabe, como se mencionó ya.

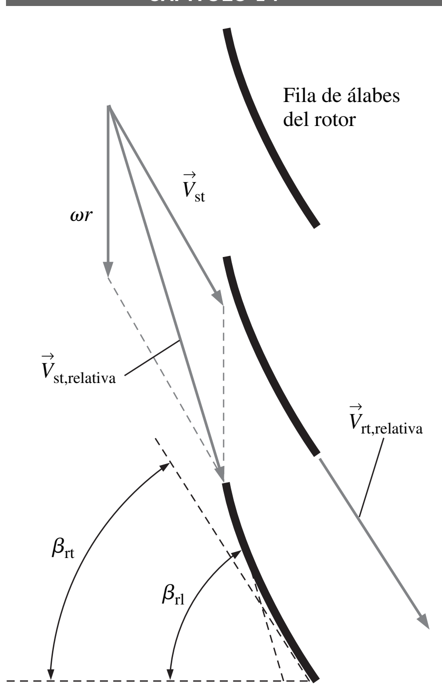


FIGURA 14-65
Análisis de la velocidad del flujo en el borde posterior del álabe guía del estator cuando el flujo incide al borde delantero del álabe del rotor; marco de referencia relativo.

14-3 ▪ LEYES DE SEMEJANZA PARA BOMBAS

Análisis dimensional

La turbomaquinaria es un ejemplo muy práctico del poder y utilidad del *análisis dimensional* (capítulo 7). Se aplica el *método de variables de repetición* a la relación entre gravedad multiplicada por la carga hidrostática neta (gH) y las propiedades de la bomba como gasto volumétrico ($\dot{V}$); cierta longitud característica, por lo común el diámetro de las álabes del rotor (D); la altura de rugosidad de la superficie del álabe (ε) y la velocidad rotacional del rotor (ω), junto con las propiedades del fluido densidad (ρ) y viscosidad (μ). Note que se trata al grupo gH como una variable. Los grupos adimensionales Pi se muestran en la figura 14-67; el resultado es la siguiente relación en la que intervienen parámetros adimensionales:

$$\frac{gH}{\omega^2 D^2} = \text{función de}\left(\frac{\dot{V}}{\omega D^3}, \frac{\rho\omega D^2}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \tag{14-28}$$

Un análisis similar con la potencia al freno de entrada como una función de las mismas variables da como resultado:

$$\frac{\text{bhp}}{\rho\omega^3 D^5} = \text{función de}\left(\frac{\dot{V}}{\omega D^3}, \frac{\rho\omega D^2}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \tag{14-29}$$

El segundo parámetro adimensional (o grupo Π) en la parte derecha de ambas ecuaciones 14-28 y 14-29 es obviamente un *número de Reynolds,* porque ωD es una velocidad característica:

$$\text{Re} = \frac{\rho\omega D^2}{\mu}$$

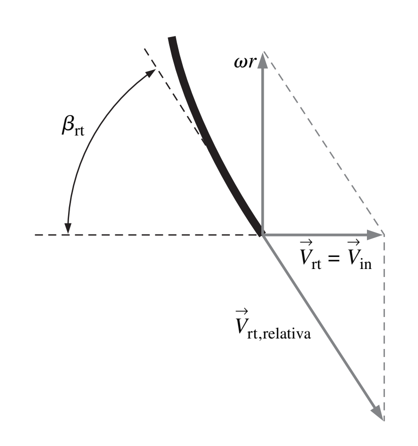


FIGURA 14-66
Análisis de la velocidad del flujo en el borde posterior del rotor; marco de referencia absoluto.

El tercer grupo Π en la parte derecha es el *parámetro de rugosidad adimensional*. Se asignan símbolos a los tres nuevos grupos dimensionales en estas dos ecuaciones y se les nombra de la siguiente manera:

Parámetros de bomba adimensionales:

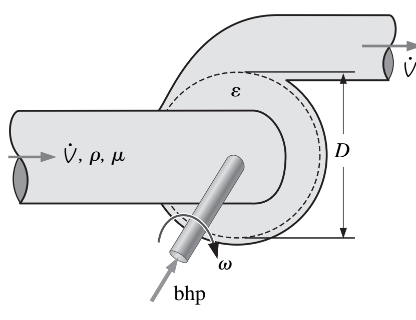
$$C_H = \text{Coeficiente de carga hidrostática} = \frac{gH}{\omega^2 D^2}$$

$$C_Q = \text{Coeficiente de capacidad} = \frac{\dot{V}}{\omega D^3} \tag{14-30}$$

$$C_P = \text{Coeficiente de potencia} = \frac{\text{bhp}}{\rho\omega^3 D^5}$$

Note el subíndice Q en el símbolo para el coeficiente de capacidad. Esto viene de la nomenclatura encontrada en muchos libros de mecánica de fluidos y turbo-





$gH = f(\dot{V}, D, \varepsilon, \omega, \rho, \mu)$

$k = n - j = 7 - 3 = 4\Pi$ esperadas.

$\Pi_1 = \dfrac{gH}{\omega^2 D^2} \qquad \Pi_2 = \dfrac{\dot{V}}{\omega D^3}$

$\Pi_3 = \dfrac{\rho \omega D^2}{\mu} \qquad \Pi_4 = \dfrac{\varepsilon}{D}$

FIGURA 14-67
Análisis dimensional de una bomba.

maquinaria, de que Q y no $\dot{V}$ es el gasto volumétrico de la bomba. Se usa la notación C_Q para ser congruentes con la convención de turbomaquinaria, aun cuando se emplea $\dot{V}$ para el gasto volumétrico para evitar confusión con la transferencia de calor.

Cuando se bombean líquidos, la cavitación debe analizarse y se necesita otro parámetro adimensional relacionado con la carga de aspiración neta positiva necesaria. Por fortuna, se sustituye simplemente la $\text{NPSH}_{\text{necesaria}}$ en vez de H en el análisis dimensional, debido a que tienen dimensiones idénticas (longitud). El resultado es:

$$C_{\text{NPSH}} = \text{Coeficiente de aspiración} = \frac{g\text{NPSH}_{\text{necesaria}}}{\omega^2 D^2} \tag{14-31}$$

Otras variables, como la distancia entre las puntas de los álabes y la carcasa de la bomba y el grosor del álabe, pueden agregarse al análisis dimensional si es necesario. Por fortuna, estas variables por lo general son sólo de menor importancia y no se consideran aquí. De hecho, podría afirmarse que dos bombas no son inclusive estrictamente *similares desde el punto de vista geométrico* a menos que se modifique a escala la distancia entre las puntas de los álabes y la carcasa, el grosor del álabe y la rugosidad de la superficie.

Las relaciones obtenidas mediante el análisis dimensional, como las ecuaciones 14-28 y 14-29, pueden interpretarse de la siguiente manera: si dos bombas, A y B, son *geométricamente similares* (la bomba A es proporcional a la bomba B, aunque sean de tamaño distinto), y si las Π *independientes* son iguales entre sí (en este caso si $C_{Q,\text{A}} = C_{Q,\text{B}}$, $\text{Re}_\text{A} = \text{Re}_\text{B}$ y $\varepsilon_\text{A}/D_\text{A} = \varepsilon_\text{B}/D_\text{B}$), entonces se garantiza que las Π *dependientes* son iguales entre sí también. En particular, $C_{H,\text{A}} = C_{H,\text{B}}$ de la ecuación 14-28 y $C_{P,\text{A}} = C_{P,\text{B}}$ de la ecuación 14-29. Si se establecen estas condiciones, se dice que las dos bombas son *dinámicamente similares* (Fig. 14-68). Cuando se logra la similitud dinámica, se dice que el punto de operación en la curva de rendimiento de la bomba A y el punto de operación correspondiente en la curva de rendimiento de la bomba B son **homólogos.**

La necesidad de igualdad de los tres parámetros adimensionales independientes, puede atenuarse un poco. Si los números de Reynolds de la bomba A y la bomba B numéricamente exceden varios miles, dentro de las bombas existen condiciones de flujo turbulento. Resulta que para flujo turbulento, si los valores de Re_A y Re_B no son iguales, pero tampoco demasiado alejados, la similitud dinámica entre las dos bombas es no obstante una aproximación razonable. Esta condición afortunada se llama **independencia del número de Reynolds** (note que si las bombas operan en régimen *laminar*, el número de Reynolds, por lo regular, debe permanecer como un parámetro de escala). En la mayoría de los casos de análisis prácticos de ingeniería de turbomaquinaria, el efecto de diferencias en el parámetro de rugosidad es también pequeño, a menos que las diferencias de rugosidad sean grandes, como cuando se pasa de una bomba muy pequeña a una bomba muy grande (o viceversa). Así, para numerosos problemas prácticos, puede ignorarse el efecto de Re y ε/D. Así, las ecuaciones 14-28 y 14-29 se reducen a:

$$C_H \cong \text{función de } C_Q \qquad C_P \cong \text{función de } C_Q \tag{14-32}$$

Como siempre, el análisis dimensional no predice la *forma* de las relaciones funcionales de la ecuación 14-32, pero una vez que estas relaciones se obtienen para una bomba particular, pueden generalizarse para bombas similares desde el punto de vista geométrico que son de diámetros distintos, operan a velocidades rotacionales y flujos diferentes y funcionan inclusive con fluidos de densidad y viscosidad distintas.

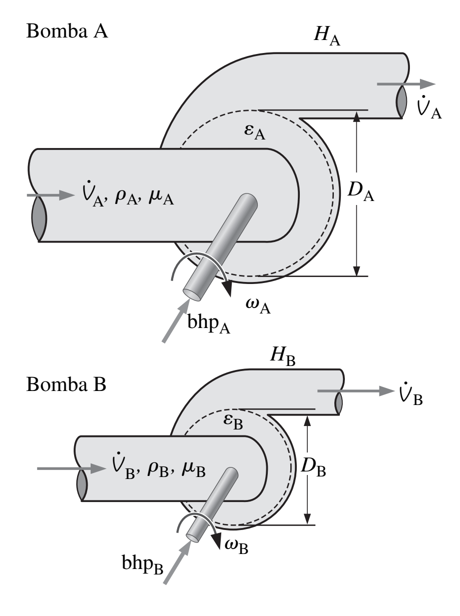


FIGURA 14-68
El análisis dimensional es útil para modificar a escala dos bombas *geométricamente similares*. Si todos los parámetros adimensionales de la bomba A equivalen a los de la bomba B, las dos bombas son *dinámicamente similares*.

Se transforma la ecuación 14-5 para la eficiencia de la bomba en una función de parámetros adimensionales de la ecuación 14-30:

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{\rho(\dot{V})(gH)}{\text{bhp}} = \frac{(\omega D^3 C_Q)(\omega^2 D^2 C_H)}{\rho\omega^3 D^5 C_P} = \frac{C_Q C_H}{C_P} = \text{función de } C_Q \quad \textbf{(14-33)}$$

Puesto que η_{bomba} es ya adimensional, es por sí mismo otro parámetro de bomba adimensional. Debido a que la ecuación 14-33 revela que η_{bomba} se puede formar mediante la combinación de otros treparámetros adimensionales Π, η_{bomba} es *innecesaria* para el análisis de bomba adimensional. Sin embargo, es, de hecho, un parámetro *útil*. Dado que C_H, C_P y η_{bomba} son funciones sólo de C_Q, es común graficar estos tres parámetros como funciones de C_Q en la misma gráfica, y se genera un conjunto de **curvas de rendimiento adimensionales para bombas**. En la figura 14-69 se proporciona un ejemplo para el caso de una bomba centrífuga típica. Las formas de curva para otros tipos de bombas serían, por supuesto, diferentes.

Las leyes de similitud simplificadas de las ecuaciones 14-32 y 14-33 fallan cuando el prototipo de escala completa es significativamente mayor que su modelo (Fig. 14-70); el rendimiento del prototipo es por lo general *mejor*. Hay varias razones para esto: la bomba prototipo suele operar a números de Reynolds altos que no se logran en el laboratorio. Se sabe del diagrama de Moody, que el factor de fricción disminuye con el número de Reynolds, como también el espesor de la capa límite. Por lo tanto, la influencia de las capas límite viscosas es menos importante cuando aumenta el tamaño de la bomba porque las capas límite ocupan un porcentaje menos importante del flujo que pasa por el rotor. Además, la rugosidad relativa (ε/D) en las superficies de los álabes del rotor prototipo podría ser significativamente más pequeña que la de los álabes de la bomba modelo a menos que las superficies del modelo sean pulidas a microescala. Por último, las bombas grandes de escala completa tienen más pequeña la distancia entre las puntas de los álabes y la carcasa en relación con el diámetro del álabe; por lo tanto, las pérdidas y las fugas en las puntas de los álabes son menos importantes. Se han desarrollado algunas ecuaciones empíricas para considerar el incremento de eficiencia entre un modelo pequeño y un prototipo de escala completa. Moody sugirió una ecuación para turbinas (1926), pero también se puede usarla como una corrección de primera aproximación para bombas:

Ecuación de Moody de corrección de eficiencia para bombas:

$$\eta_{\text{bomba, prototipo}} \cong 1 - (1 - \eta_{\text{bomba, modelo}})\left(\frac{D_{\text{modelo}}}{D_{\text{prototipo}}}\right)^{1/5} \quad \textbf{(14-34)}$$

Velocidad específica de la bomba

Otro parámetro adimensional útil, conocido como **velocidad específica de la bomba** (N_{Sp}) se forma mediante una combinación de parámetros C_Q y C_H:

Velocidad específica de la bomba:
$$N_{\text{Sp}} = \frac{C_Q^{1/2}}{C_H^{3/4}} = \frac{(\dot{V}/\omega D^3)^{1/2}}{(gH/\omega^2 D^2)^{3/4}} = \frac{\omega \dot{V}^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \quad \textbf{(14-35)}$$

Si los ingenieros observaran sus unidades de manera cuidadosa, N_{Sp} se listaría siempre como un parámetro adimensional. Por desgracia, los ingenieros en su práctica diaria se han acostumbrado a usar unidades inconsistentes en la ecuación 14-35, lo cual convierte el parámetro adimensional N_{Sp} en un una cantidad dimensional inconveniente (Fig. 14-71). Surge una confusión todavía mayor, porque algunos ingenieros prefieren unidades de revoluciones por minuto (rpm) para la velocidad rotacional, mientras que otros utilizan revoluciones por segundo (Hz), esta última es más común en Europa. Además, los ingenieros en Esta-

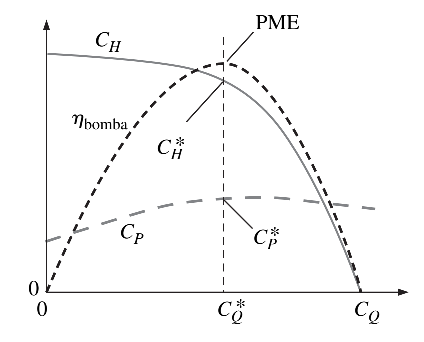
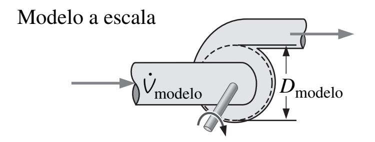


FIGURA 14-69
Cuando la curvas de rendimiento de una familia de bombas geométricamente similares se grafican en términos de parámetros adimensionales, se reducen a un solo conjunto de *curvas de rendimiento adimensionales*. Los valores en el punto de la mejor eficiencia se indican con asteriscos.



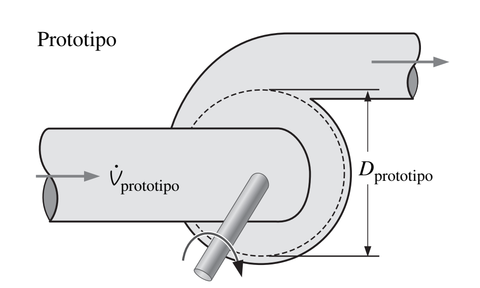


FIGURA 14-70
Cuando se prueba un modelo a pequeña escala para predecir el rendimiento de una bomba prototipo a escala completa, la eficiencia medida del modelo es por lo común un poco *menor* que la del prototipo. Existen ecuaciones de corrección empíricas, como la ecuación 14-34, para considerar que la eficiencia de la bomba de mayor tamaño es mejor.



FIGURA 14-71
Aunque la velocidad específica de la bomba es un parámetro adimensional, es común escribirla como una cantidad dimensional mediante un conjunto de unidades incongruente.

dos Unidos en su práctica diaria ignoran por lo general la constante gravitacional en la definición de N_{Sp}. En este libro, se añaden los subíndices "Eur" o "EUA (US)" a N_{Sp} para distinguir las formas dimensionales de la velocidad específica de bomba de la forma adimensional. En Estados Unidos se acostumbra escribir H en unidades de pies (la carga hidrostática neta se expresa como una altura de columna equivalente del fluido que se bombea), $\dot{V}$ en unidades de galones por minuto (gpm) y la velocidad de rotación en términos de $\dot{n}$ (rpm) en lugar de ω (rad/s). Por medio de la ecuación 14-35, se define:

Velocidad de la bomba, unidades usuales de US:

$$N_{Sp,\,US} = \frac{(\dot{n},\,\text{rpm})(\dot{V},\,\text{gpm})^{1/2}}{(H,\,\text{ft})^{3/4}} \tag{14-36}$$

En Europa se acostumbra escribir H en unidades de metros (e incluir g = 9.81 m/s^2 en la ecuación), $\dot{n}$ en unidades de m^3/s, y la velocidad de rotación $\dot{V}$ en unidades de revoluciones por *segundo* (Hz) en lugar de ω (rad/s) o $\dot{n}$ (rpm). Con la ecuación 14-35, se define:

Velocidad de la bomba, unidades usuales europeas:

$$N_{Sp,\,Eur} = \frac{(\dot{n},\,\text{Hz})(\dot{V},\,\text{m}^3/\text{s})^{1/2}}{(gH,\,\text{m}^2/\text{s}^2)^{3/4}} \tag{14-37}$$

Las conversiones entre estas tres formas de velocidad específica de la bomba se proporcionan en la figura 14-72 como relaciones, para conveniencia del lector. Cuando llegue a practicar la ingeniería debe tener cuidado de saber qué forma de velocidad específica de bomba se emplea, aunque esto no siempre podría ser evidente.

Desde el punto de vista técnico, la velocidad específica de la bomba se podría aplicar a cualquier condición de operación y sería sólo otra función de C_Q. Sin embargo, ésa no es la manera como se usa habitualmente. En cambio, es común definir la velocidad específica de la bomba en *sólo un punto de operación*, a saber, el punto nominal, o el punto de mejor eficiencia (MPE, BEP por sus siglas en inglés) de la bomba. El resultado es un solo número que caracteriza a la bomba.

> La velocidad específica de la bomba se usa para identificar la operación de una bomba en sus condiciones óptimas (punto nominal, o punto de mejor eficiencia) y es útil para la selección preliminar de la bomba.

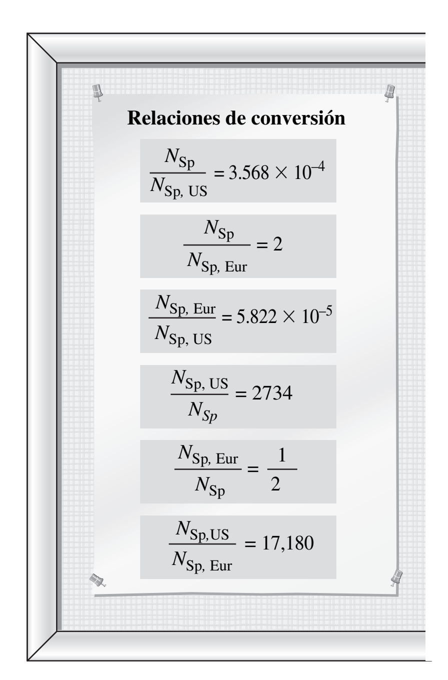


FIGURA 14-72
Conversiones entre las tres definiciones de la velocidad específica de la bomba: adimensional, expresada en unidades usuales en Estados Unidos. y expresada en unidades usuales en Europa. Los valores numéricos se dan hasta cuatro cifras significativas. En caso de la conversión a $N_{Sp,\,US}$ se supone la gravedad terrestre estándar.

Según la gráfica de la figura 14-73, las bombas centrífugas tienen un rendimiento óptimo para N_{Sp} cercano a 1, mientras que las bombas de flujo mixto y las axiales se desempeñan mejor a N_{Sp} cercano a 2 y 5, respectivamente. Resulta que si N_{Sp} es menor que alrededor de 1.5, una bomba centrífuga es la mejor elección. Si N_{Sp} es mayor que cerca de 3.5, debe usarse una bomba axial. Estos intervalos se indican en la figura 14-73 en términos de N_{Sp}, $N_{Sp,USA}$ y $N_{Sp,Eur}$. En la gráfica se ilustran los tipos de álabes para referencia.

EJEMPLO 14-9 Uso de la velocidad específica en el diseño preliminar de la bomba

Se diseña una bomba para entregar 320 gpm de gasolina a temperatura ambiente. La carga hidrostática neta necesaria es de 23.5 ft (de gasolina). Ya se determinó que la flecha de la bomba girará a 1 170 rpm. Calcule la velocidad específica de la bomba en forma adimensional y en la forma usual de EUA. Con base en su resultado, decida qué clase de bomba dinámica sería más adecuada para esta aplicación.

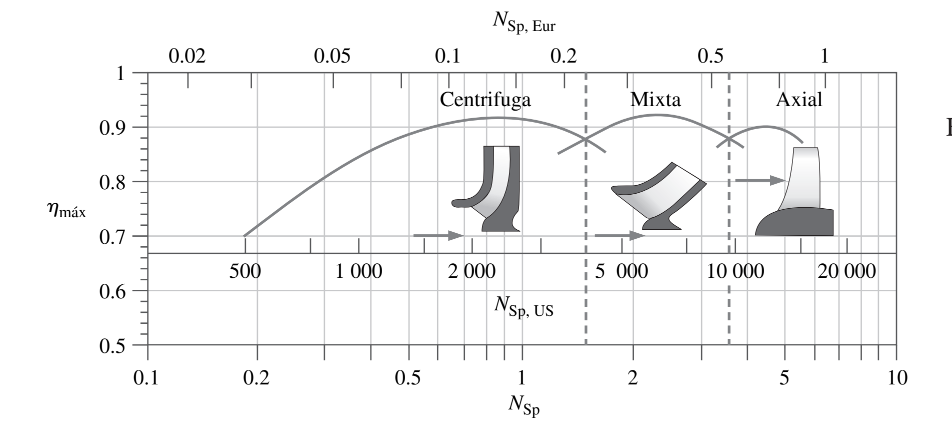


FIGURA 14-73
Eficiencia máxima como función de la velocidad específica de la bomba para los tres tipos principales de bomba dinámica. Las escalas horizontales muestran la velocidad específica adimensional (N_{Sp}), la velocidad específica en unidades usuales en Estados Unidos ($N_{Sp,USA}$) y la velocidad específica en unidades usuales en Europa ($N_{Sp,Eur}$).

SOLUCIÓN Se calculará la velocidad específica de la bomba y luego se determinará una bomba centrífuga, de flujo mixto o axial como la mejor opción para esta aplicación particular.
Hipótesis La bomba opera cerca de su punto de mejor eficiencia. **2** La curva de eficiencia máxima en función de la velocidad específica de la bomba sigue la figura 14-73 razonablemente bien.
Análisis Primero, se calcula la velocidad específica de la bomba en unidades usuales de EUA:

$$N_{Sp,\,US} = \frac{(1\,170\text{ rpm})(320\text{ gpm})^{1/2}}{(23.5\text{ ft})^{3/4}} = \mathbf{1\,960} \tag{1}$$

Se convierte a la velocidad específica normalizada mediante el factor de conversión dado en la figura 14-72:

$$N_{Sp} = N_{Sp,\,US}\left(\frac{N_{Sp}}{N_{Sp,\,US}}\right) = 1\,960(3.658 \times 10^{-4}) = \mathbf{0.717} \tag{2}$$

Usando el resultado de la ecuación 1 o la 2, la figura 14-73 muestra que **una bomba centrífuga es la elección más adecuada**.
Discusion Observe que las propiedades del fluido nunca entraron en los cálculos. El hecho de que se esté bombeando gasolina y no algún otro líquido como el agua es irrelevante. Sin embargo, la potencia al freno necesaria para hacer funcionar la bomba sí depende de la densidad del fluido.

Leyes de semejanza

Se han creado grupos adimensionales útiles para relacionar dos bombas cualesquiera, que son similares tanto desde el punto de vista geométrico como dinámico. Es conveniente resumir las relaciones de similitud como *proporciones*. Algunos autores llaman a estas relaciones **reglas de similitud**, otros las llaman **leyes de afinidad** o **leyes de semejanza**. Para dos estados homólogos cualesquiera A y B:

$$\frac{\dot{V}_B}{\dot{V}_A} = \frac{\omega_B}{\omega_A}\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^3 \tag{14-38a}$$

Leyes de afinidad:

$$\frac{H_B}{H_A} = \left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^2\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^2 \tag{14-38b}$$

$$\frac{\text{bhp}_B}{\text{bhp}_A} = \frac{\rho_B}{\rho_A}\left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^3\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^5 \tag{14-38c}$$

V: gasto volumétrico $\quad \dfrac{\dot{V}_B}{\dot{V}_A} = \left(\dfrac{\omega_B}{\omega_A}\right)^1 = \left(\dfrac{\dot{n}_B}{\dot{n}_A}\right)^1$

H: carga hidrostática $\quad \dfrac{H_B}{H_A} = \left(\dfrac{\omega_B}{\omega_A}\right)^2 = \left(\dfrac{\dot{n}_B}{\dot{n}_A}\right)^2$

P: potencia $\quad \dfrac{\text{bhp}_B}{\text{bhp}_A} = \left(\dfrac{\omega_B}{\omega_A}\right)^3 = \left(\dfrac{\dot{n}_B}{\dot{n}_A}\right)^3$

FIGURA 14-74
Cuando se aplican las leyes de afinidad a una sonda bomba, en la que lo único que varía es la velocidad rotacional de la flecha, ω, o rpm de flecha, $\dot{n}$, las ecuaciones 14-38 se reducen a las que se muestran, para las que puede usarse una ayuda mnemotécnica para recordar el exponente en ω (o en $\dot{n}$):

V**ery **H**ard **P**roblems are as easy as **1**, **2**, **3 (Los problemas muy difíciles son tan fáciles como 1, 2, 3).

Las ecuaciones 14-38 se aplican a bombas y turbinas. Los estados A y B pueden ser dos estados homólogos *cualesquiera* entre *cualquier* par de turbomáquinas geométricamente similares, o inclusive entre dos estados homólogos de la *misma* máquina. Algunos ejemplos son: cambiar la velocidad rotacional o bombear un fluido diferente con la misma bomba. Para el caso simple de una bomba en la que varía ω, pero se bombea el mismo fluido, $D_A = D_B$ y $\rho_A = \rho_B$. En este caso, las ecuaciones 14-38 se reducen a las formas que se muestran en la figura 14-74. Se ha creado una combinación de palabras para ayudar a recordar el exponente sobre ω, como se indica en la figura. Note también que dondequiera que haya una relación de dos velocidades rotacionales (ω), pueden sustituirse los valores apropiados de rpm ($\dot{n}$) ya que la conversión es la misma en el numerador y el denominador.

Las leyes de semejanza de las bombas son bastante útiles como una *herramienta de diseño*. En particular, suponga que se conocen las curvas de rendimiento de una bomba existente, y la bomba opera con eficiencia y confiabilidad razonables. El fabricante de la bomba decide diseñar una nueva bomba más grande para otras aplicaciones, por ejemplo, bombear un fluido mucho más pesado o entregar una carga hidrostática neta considerablemente mayor. En lugar de comenzar desde cero, los *ingenieros suelen aumentar la escala de un diseño existente*. Las leyes de semejanza para bombas permiten que tal cambio de escala se realice con una cantidad mínima de esfuerzo.

EJEMPLO 14-10 Efectos de duplicar la velocidad de la bomba

El profesor Seymour Fluids emplea un pequeño túnel de agua de ciclo cerrado para realizar la investigación de visualización de flujo. Le gustaría duplicar la velocidad del agua en la sección de prueba del túnel y comprende que la manera menos cara de hacerlo es duplicar la velocidad rotacional de la bomba de flujo. Lo que ignora es la potencia adicional del nuevo motor eléctrico. Si el profesor duplica la velocidad de flujo, aproximadamente ¿en qué factor debe incrementarse la potencia?

SOLUCIÓN Para duplicar el valor de ω, se calculará el factor por el que debe incrementarse la potencia del motor de la bomba.

Hipótesis **1** El agua permanece a la misma temperatura. **2** Después de duplicar la velocidad, la bomba opera en condiciones homólogas a las originales.

Análisis Puesto que ni el diámetro ni la densidad cambian, la ecuación 14-38*C* se reduce a:

Razón de potencia al freno necesaria:
$$\frac{\text{bhp}_B}{\text{bhp}_A} = \left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^3 \tag{1}$$

Cuando se establece $\omega_B = 2\omega_A$ en la ecuación 1 se obtiene $\text{bhp}_B = 8\text{bhp}_A$. Así, **la potencia para el motor de la bomba se debe incrementar por un factor de 8.** Un análisis similar con la ecuación 14-38b muestra que la carga hidrostática neta de la bomba se incrementa en un factor de 4. Como se ve en la figura 14-75, tanto la carga hidrostática neta como la potencia se incrementan con rapidez cuando se incrementa la velocidad de la bomba.

Discusión El resultado es sólo aproximado, porque no se incluyó ningún análisis del sistema de tubería. Si duplicar la velocidad de flujo por la bomba incrementa la carga hidrostática disponible por un factor de 4, duplicar la velocidad de flujo por el túnel de agua no necesariamente incrementa la carga hidrostática *necesaria* del sistema por el mismo factor de 4 (por ejemplo, el factor de fricción disminuye con el número de Reynolds, excepto a valores muy altos de éste). En otras palabras, la suposición 2 no es forzosamente correcta. Por supues-

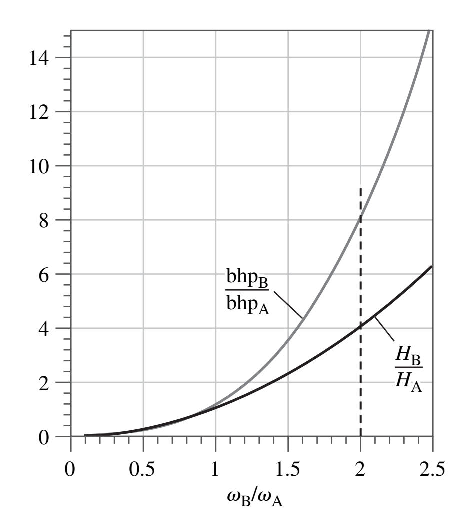


FIGURA 14-75
Cuando se incrementa la velocidad de la bomba, la carga hidrostática neta aumenta de manera muy rápida; la potencia al freno se incrementa de manera aún más rápida.

to que el sistema se ajustará a un punto de operación en el cual coinciden la carga hidrostática necesaria y la disponible, pero este punto no es por necesidad homólogo con el punto de operación original. Sin embargo, la aproximación es útil como resultado de primera aproximación. El profesor Fluids podría preocuparse también por la posibilidad de cavitación a la velocidad mayor.

EJEMPLO 14-11 Diseño de una nueva bomba geométricamente similar

Después de la graduación, el lector entra a trabajar a una compañía que fabrica bombas. Uno de los productos más vendidos de su compañía es una bomba de agua, la cual se llamará bomba A. Su diámetro de rotor es D_A = 6.0 cm, y sus datos de rendimiento cuando opera a $\dot{n}_A$ = 1 725 rpm (ω_A = 180.6 rad/s) se muestran en la tabla 14.2. El departamento de investigación de mercado recomienda que la compañía diseñe un nuevo producto, a saber, una bomba más grande (a la que se llamará bomba B) que se empleará para bombear líquido refrigerante R-134a a temperatura ambiente. La bomba se diseñará de modo que su punto de mejor eficiencia ocurra lo más cerca posible a un gasto volumétrico de $\dot{V}_B$ = 2 400 cm^3/s y a una carga hidrostática neta de H_B = 450 cm (de R-134a). El ingeniero principal (su jefe) le indica que lleve a cabo algún análisis preliminar por medio de las leyes de semejanza para determinar si se puede diseñar y construir la bomba que sea geométricamente similar y que satisfaga los requerimientos dados. *a*) Grafique las curvas de rendimiento de la bomba A en forma dimensional y adimensional, e identifique el punto de la mejor eficiencia. *b*) Calcule el diámetro requerido de la bomba D_B, la velocidad rotacional $\dot{n}_B$, y la potencia al freno bhp$_B$ para el nuevo producto.

TABLA 14-2

Datos del fabricante de rendimiento de una bomba de agua que opera a 1 725 rpm a temperatura ambiente (Ejemplo 14-11)*

$\dot{V}$, cm^3/s	H, cm	η_{bomba}, %
100	180	32
200	185	54
300	175	70
400	170	79
500	150	81
600	95	66
700	54	38

* La carga hidrostática neta está en centímetros de columna de agua.

SOLUCIÓN *a*) Para determinada tabla de datos de rendimiento de una bomba de agua, se graficarán las curvas de rendimiento en su forma dimensional y adimensional y se identificará el PME(BEP). *b*) Se diseñará una nueva bomba geométricamente similar para el refrigerante R-134a que opere en su PME(BEP) a las condiciones de diseño dadas.

Hipótesis **1** La nueva bomba se puede fabricar de modo que sea geométricamente similar a la bomba existente. **2** Ambos líquidos (agua y refrigerante R-134*a*) son incompresibles. **3** Ambas bombas operan en condiciones estacionarias.

Propiedades A la temperatura ambiente (20ºC), la densidad del agua es r_{agua} = 998.0 kg/m^3 y la del refrigerante R-134a es $\rho_{R\text{-}134a}$ = 1 226 kg/m^3.

Análisis *a*) Primero, se aplica a los datos de la tabla 14.2 un ajuste de mínimos cuadrados de curva polinomial de segundo orden para obtener curvas de rendimiento suaves . Éstas se grafican en la figura 14-76, junto con una curva para la potencia al freno, que se obtiene de la ecuación 14-5. Un cálculo de muestra, con conversión de unidades, se presenta en la ecuación 1 para los datos a $\dot{V}_A$ = 500 cm^3/s, que es casi el punto de la mejor eficiencia:

$$\text{bhp}_A = \frac{\rho_{agua}\, g \dot{V}_A H_A}{\eta_{bomba,A}}$$

$$= \frac{(998.0 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(500 \text{ cm}^3\text{/s})(150 \text{ cm})}{0.81}\left(\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}}\right)^4\left(\frac{\text{W}\cdot\text{s}}{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$

$$= 9.07 \text{ W} \quad \textbf{(1)}$$

Note que el valor real de bhp$_A$ que se encuentra en la figura 14.76 a $\dot{V}_A$ = 500 cm^3/s difiere un poco del de la ecuación 1 debido a que el ajuste de la curva de mínimos cuadrados atenúa la dispersión en los datos tabulados originales.

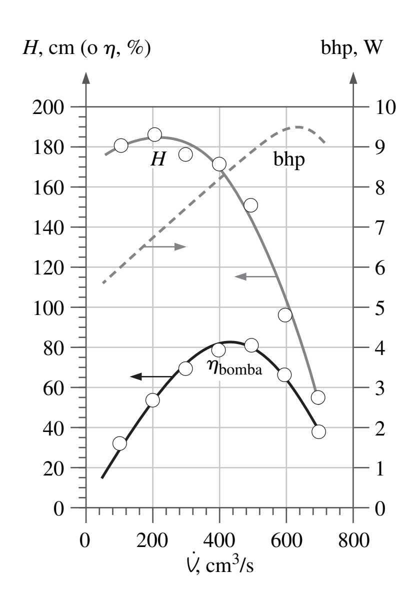


FIGURA 14-76
Curvas de rendimiento dimensionales suavizadas para la bomba de agua del ejemplo 14-11.

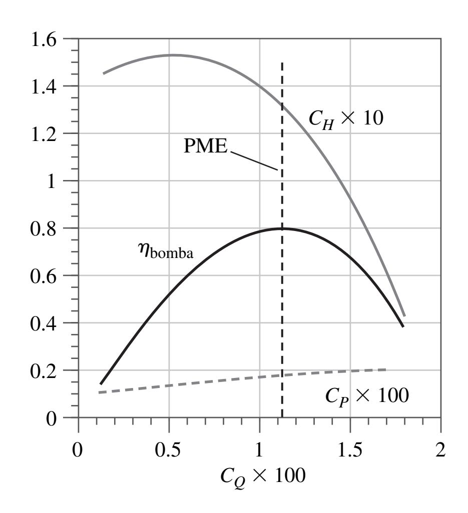


FIGURA 14-77
Curvas de rendimiento adimensionales suavizadas para las bombas del Ejemplo 14-11; el PME(BEP, por sus siglas en inglés) se estima como el punto de operación donde η_{bomba} es máxima.

A continuación se usan las ecuaciones 14-30 para convertir los datos dimensionales de la tabla 14.2 en parámetros adimensionales. Los cálculos de muestra se ilustran en las ecuaciones de 2 a 4 en el mismo punto de operación que antes (en el lugar aproximado del PME, BEP). A $\dot{V}_A$ = 500 cm³/s el coeficiente de capacidad es aproximadamente:

$$C_Q = \frac{\dot{V}}{\omega D^3} = \frac{500 \text{ cm}^3/\text{s}}{(180.6 \text{ rad/s})(6.0 \text{ cm})^3} = 0.0128 \quad \textbf{(2)}$$

El coeficiente de carga hidrostática a este flujo es alrededor de:

$$C_H = \frac{gH}{\omega^2 D^2} = \frac{(9.81 \text{ m/s}^2)(1.50 \text{ m})}{(180.6 \text{ rad/s})^2(0.060 \text{ m})^2} = 0.125 \quad \textbf{(3)}$$

Por último, el coeficiente de potencia a $\dot{V}_A$ = 500 cm³/s es aproximadamente:

$$C_P = \frac{\text{bhp}}{\rho\omega^3 D^5} = \frac{9.07 \text{ W}}{(998 \text{ kg/m}^3)(180.6 \text{ rad/s})^3(0.060 \text{ m})^5}\left(\frac{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{\text{W}\cdot\text{s}}\right) = 0.00198 \quad \textbf{(4)}$$

Estos cálculos se repiten (con ayuda de una hoja de cálculo) a valores de $\dot{V}_A$ entre 100 y 700 cm³/s. Los datos obtenidos se ajustan por el método de mínimos cuadrados para que las curvas de rendimiento normalizadas sean suaves y se grafican en la figura 14-77. Note que η_{bomba} se grafica como una fracción y no como un porcentaje. Además, con la finalidad de ubicar las tres curvas en la misma gráfica con una sonda ordenada, y con la abscisa centrada aproximadamente alrededor de la unidad, se ha multiplicado C_Q por 100, C_H por 10 y C_P por 100. Se encontrará que estos parámetros adimensionales funcionan adecuadamente para una amplia variedad de bombas, desde muy pequeñas hasta muy grandes. También se bosqueja en la figura 14-77 una línea vertical en el PME(BEP) que se obtiene a partir de los datos ajustados por el método de los mínimos cuadrados. Los datos ajustados producen los siguientes parámetros adimensionales de rendimiento de la bomba en el PME(BEP):

$$C_Q^* = 0.0112 \qquad C_H^* = 0.133 \qquad C_P^* = 0.00184 \qquad \eta_{bomba}^* = 0.812 \quad \textbf{(5)}$$

b) Se diseña la nueva bomba de tal manera que su punto de mejor eficiencia sea homólogo al PME(BEP) de la bomba original, pero con un fluido distinto, un diámetro de bomba diferente y otra velocidad rotacional. Con los valores identificados en la ecuación 5, se usan las ecuaciones 14-30 para obtener las condiciones de operación de la nueva bomba. A saber, ya que $\dot{V}_B$ y H_B son cantidades conocidas (condiciones de diseño), las ecuaciones 14-30 se resuelven de manera simultánea para D_B y ω_B. Después de aplicar unas transformaciones algebraicas en las que se elimina ω_B, se calcula el diámetro de diseño para la bomba B:

$$D_B = \left(\frac{\dot{V}_B^2 C_H^*}{(C_Q^*)^2 g H_B}\right)^{1/4} = \left(\frac{(0.0024 \text{ m}^3/\text{s})^2(0.133)}{(0.0112)^2(9.81 \text{ m/s}^2)(4.50 \text{ m})}\right)^{1/4} = \mathbf{0.108 \text{ m}} \quad \textbf{(6)}$$

En otras palabras, la bomba A necesita una modificación de escala por un factor de D_B/D_A = 10.8 cm/6.0 cm = 1.80. Con el valor de D_B conocido, se vuelve a las ecuaciones 14-30 para determinar ω_B, la velocidad rotacional de diseño para la bomba B:

$$\omega_B = \frac{\dot{V}_B}{(C_Q^*)D_B^3} = \frac{0.0024 \text{ m}^3/\text{s}}{(0.0112)(0.108 \text{ m})^3} = 168 \text{ rad/s} \quad \rightarrow \quad \dot{n}_B = \mathbf{1\,610 \text{ rpm}} \quad \textbf{(7)}$$

Por último, la potencia al freno requerida para la bomba B se calcula de las ecuaciones 14-30:

$$\text{bhp}_B = (C_P^*)\rho_B\omega_B^3 D_B^5$$

$$= (0.00184)(1\,226 \text{ kg/m}^3)(168 \text{ rad/s})^3(0.108 \text{ m})^5\left(\frac{\text{W}\cdot\text{s}}{\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}\right) = \mathbf{160 \text{ W}} \quad \textbf{(8)}$$

Otro método es aplicar las leyes de semejanza de modo directo, con lo cual se eliminan algunos pasos intermedios. De las ecuaciones 14-38 a y b se determina D_B cuando se elimina la relación ω_B/ω_A. Luego, se inserta el valor conocido de D_A y los valores de la curva de ajuste de $\dot{V}_A$ y H_A en el PME(BEP) (Fig. 14-78). El resultado concuerda con el que se calculó antes. De manera similar puede calcularse ω_B y bhp_B.

Discusión Aunque el valor deseado de ω_B se calculó de manera precisa, un aspecto práctico es lo difícil (si no es que imposible) de encontrar un motor eléctrico que gire exactamente a las rpm deseadas. Los motores eléctricos estándar monofásicos, 60 Hz, 120 V CA funcionan por lo general a 1 725 o 3 450 rpm. Así, es posible que no pueda satisfacerse la necesidad de rpm con una bomba de toma directa. Por supuesto, si la bomba es impulsada por banda o si hay una caja de engranes o un controlador de frecuencia, se puede ajustar con facilidad la configuración para producir la razón de rotación deseada. Otra opción es que, puesto que ω_B es sólo un poco menos grande que ω_A, se acciona la nueva bomba a velocidad de motor estándar (1 725 rpm), de modo que se proporciona una bomba un poco más poderosa de lo necesario. La desventaja de esta opción es que la nueva bomba operaría entonces en un punto que no es exactamente el PME(BEP).

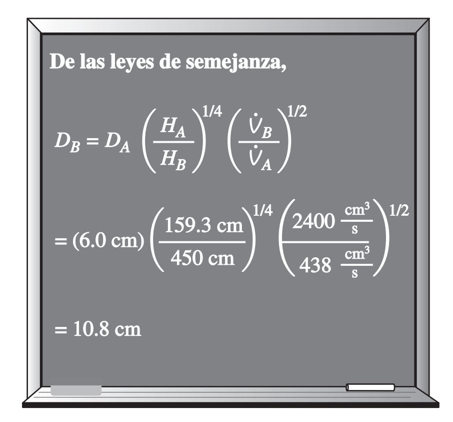


FIGURA 14-78
Las leyes de semejanza pueden emplearse con el fin de obtener una expresión para el nuevo diámetro de la bomba D_B; w_B y bhp_B pueden obtenerse de manera similar (no se muestra).

14-4 ▪ TURBINAS

Las turbinas se han sido utilizado durante siglos para convertir la energía mecánica libre disponible de ríos y el viento en trabajo mecánico útil, por lo general mediante un eje rotatorio. La parte giratoria de una bomba se llama impulsor o rotor (en América Latina) o rodete (en España), y la parte rotatoria de una hidroturbina se llama en castellano **rotor o rodete.** Cuando el fluido de trabajo es agua, las turbomáquinas se llaman **turbinas hidráulicas** o **hidroturbinas**. Cuando el fluido de trabajo es aire y la energía se extrae del viento, la máquina se llama **turbina de viento o turbina eólica**. La palabra **molino de viento** debe aplicarse técnicamente sólo cuando la salida de energía mecánica se usa para moler granos, como en la antigüedad (Fig. 14-79). Sin embargo, la mayoría de las personas emplean la palabra *molino de viento* para describir cualquier turbina de viento, ya sea que se utilice para moler granos, bombear agua o generar electricidad. En las centrales eléctricas, alimentadas con carbón o energía nuclear, el medio de trabajo por lo general es vapor; por consiguiente, las turbomáquinas que convierten la energía del vapor en energía mecánica mediante una flecha rotatoria se llaman **turbinas de vapor**. Un nombre más genérico para las turbinas que emplean un gas comprimible como medio de trabajo es **turbinas de gas** (la turbina en un comercial moderno motor de propulsión es un tipo de turbina de gas).

En general, las turbinas que producen energía tienen una eficiencia global un poco mayor que las bombas que absorben energía. Las hidroturbinas grandes, por ejemplo, alcanzan eficiencias globales arriba de 95 por ciento, mientras que la mejor eficiencia de bombas grandes es un poco más de 90 por ciento. Hay varias razones para esto. Primera, las bombas de manera normal operan a velocidades rotacionales mayores que las turbinas; por lo tanto, los esfuerzos de corte y las pérdidas por fricción son mayores. Segunda, la conversión de energía cinética en energía de flujo (bombas) tiene, inherentemente mayores pérdidas que la operación inversa (turbinas). Esto puede considerarse de la siguiente manera: debido a que la presión *aumenta* en una bomba (gradiente de presión adverso), pero *disminuye* en una turbina (gradiente de presión favorable), las capas límite tienen menos probabilidades de separarse en una turbina que en una bomba. Tercera, las turbinas (en particular las turbomáquinas) suelen ser mucho más grandes que las bombas, y las pérdidas viscosas se vuelven menos importantes a me-

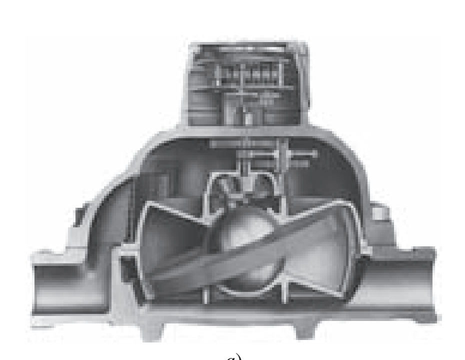


FIGURA 14-79
Un molino de viento restaurado en Brewster, MA, que se empleó en la centuria de 1800 para moler grano (note que las aspas deben estar cubiertas para funcionar). Los modernos "molinos de viento" que generan electricidad se denominan más adecuadamente *turbinas de viento*.

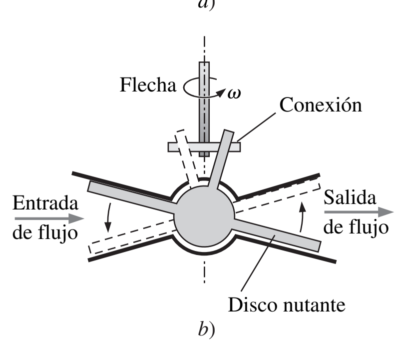
Cortesía de Brewster Historical Society Museum, Brewster, MA. Reproducido con autorización.

dida que aumenta el tamaño. Por último, mientras que las bombas operan por lo general en una amplia variedad de flujos, la mayoría de las turbinas utilizadas para generar electricidad funcionan dentro de un rango de condiciones de operación más estrecho y a una velocidad constante controlada; por lo tanto, pueden diseñarse para que operen de manera muy eficiente en esas condiciones. En Estados Unidos, el suministro eléctrico estándar de CA es de 60 Hz (3 600 ciclos por minuto); así, la mayoría de las turbinas de viento, agua y vapor operan a velocidades que son fracciones naturales de esto, a saber, 7 200 rpm divididas entre el número de polos en el generador, por lo general un número par. Las hidroturbinas grandes operan usualmente a velocidades bajas como 7 200/60 = 120 rpm o 7 200/48 = 150 rpm. Las turbinas de gas que se emplean para la generación de potencia funcionan a velocidades mucho más grandes, ¡algunas hasta 7 200/2 = 3 600 rpm!

Igual que las bombas, las turbinas se clasifican en dos amplias categorías, de *desplazamiento positivo* y *dinámicas*. En su mayoría, las turbinas de desplazamiento positivo son dispositivos pequeños que se emplean para medir el gasto volumétrico, mientras que las turbinas dinámicas van desde las diminutas hasta las enormes y se usan para medir el flujo y la producción de potencia. A continuación de detallan ambas categorías.



a)



b)

FIGURA 14-80
El *flujómetro de líquido de disco nutante* es un tipo de *turbina de desplazamiento positivo* que se emplea para medir caudal: *a*) vista de corte y *b*) diagrama que muestra el movimiento de un disco nutante. Este tipo de flujómetro se emplea de manera común como medidor de agua doméstico.

Foto cortesía de Niagara Meters, Spartanburg, SC.

Turbinas de desplazamiento positivo

Una **turbina de desplazamiento positivo** podría considerarse como una bomba de desplazamiento positivo que funciona de la manera opuesta: cuando el fluido entra a un volumen cerrado, hace girar una flecha o desplaza una varilla reciprocante. El volumen de fluido encerrado es desplazado hacia fuera cuando entra más fluido al dispositivo. El fluido experimenta una pérdida de carga neta al pasar por la turbina de desplazamiento positivo; en otras palabras, se extrae energía del fluido móvil y se convierte en energía mecánica. Sin embargo, las turbinas de desplazamiento positivo en general *no* se usan para producir potencia, sino para medir flujo volumétrico o volumen de fluido.

El ejemplo más común es el medidor de agua doméstico (Fig. 14-80). En muchos medidores de agua comerciales se emplea un **disco nutante** que se bambolea y gira cuando pasa agua por el medidor. Tiene una esfera en su centro con uniones apropiadas que transforma el movimiento de giro excéntrico del disco nutante en rotación de un eje. El volumen de fluido que pasa a través del dispositivo cuando el eje gira 360º, se conoce con precisión , por lo tanto, el dispositivo registra el volumen total de agua. Cuando el agua fluye a velocidad moderada desde un grifo en la casa, puede oírse a veces un sonido burbujeante que proviene del medidor de agua, éste es el sonido del disco nutante que se bambolea dentro del medidor. Existen, por supuesto, otros diseños de turbina de desplazamiento positivo, del mismo modo que existen varios diseños de bombas de desplazamiento positivo.

Turbinas dinámicas

Las turbinas dinámicas se usan como dispositivos para medir flujo y también como generadores de potencias. Por ejemplo, los meteorólogos emplean un anemómetro de tres copas para medir la velocidad del viento (Fig. 14-81*a*). Los investigadores de mecánica de fluidos experimental utilizan pequeñas turbinas de varias formas (la mayoría de ellas semejan pequeñas hélices) para medir la velocidad del aire o la velocidad del agua (capítulo 8). En estas aplicaciones, la salida de potencia de la flecha y la eficiencia de la turbina son de poco interés. Más bien, estos instrumentos están diseñados de modo que su velocidad rotacional puede calibrarse con exactitud para la velocidad del fluido. Entonces, cuando se



a)



b)

FIGURA 14-81
Ejemplos de turbinas dinámicas: *a*) un típico anemómetro de tres copas empleado para medir la velocidad del viento y *b*) un aeroplano de investigación Piper PA28, con turbinas diseñadas para extraer energía de los vórtices de las puntas de alas.

cuenta de manera electrónica el número de rotaciones por segundo de los álabes, el dispositivo calcula y muestra la velocidad del fluido.

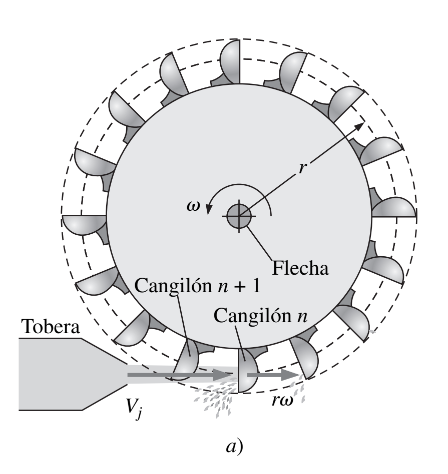
Una aplicación novedosa de una turbina dinámica se muestra en la figura 14-81*b*. Los investigadores de la NASA montaron turbinas en las puntas de las alas de un aeroplano de investigación Piper PA28, para extraer energía de los vórtices de las puntas de las alas (capítulo 11); la energía extraída se convirtió en electricidad que se utiliza para satisfacer la demanda de energía a bordo.

En este capítulo se enfatiza en las turbinas dinámicas grandes que se diseñan para producir electricidad. La mayor parte de la explicación que aquí se da se relaciona con hidroturbinas que utilizan el gran cambio de elevación en una presa para generar electricidad. Existen dos tipos básicos de turbina dinámica, de *impulso* y de *reacción*, cada uno de los cuales se analiza con cierto detalle. Cuando se comparan las dos turbinas dinámicas que producen potencia, las turbinas de impulso demandan una carga hidrostática mayor, pero pueden operar con cantidades de volumen más pequeñas. Las turbinas de reacción pueden operar con una carga hidrostática mucho menor, pero necesitan mayor cantidad de flujo.

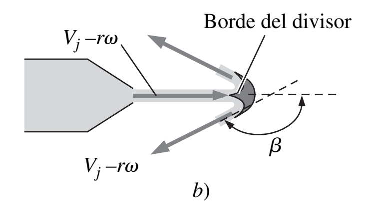
Turbinas de impulsión o acción

En una **turbina de impulsión**, el fluido se envía por una tobera aceleradora de modo que la mayor parte de su energía mecánica se convierte en energía cinética. El chorro a alta velocidad choca con los álabes en forma de cubeta llamados **cucharas** o **cucharones** o **cangilones** o **paletas** que transfieren la energía a la flecha de la turbina, como se ilustra en la figura 14-82. Lester A. Pelton (1829-1908) inventó en 1878 la turbina de impulsión moderna y más eficiente, y la rueda giratoria ahora se llama **rueda de Pelton** en su honor. Los cangilones de una rueda de Pelton están diseñados para que dividan el flujo a la mitad y cambien la dirección del flujo casi 180º (respecto a un marco de referencia que se mueve con el aspa), según se ilustra en la figura 14-82*b*. Según la leyenda, Pelton modeló la arista del divisor según las fosas de la nariz de una vaca. Una porción de la parte extrema de cada cangilón se corta para que la mayor parte del chorro pueda atravesar el cangilón que no está alineado con el chorro (cangilón $n + 1$ en la figura 14-82) para alcanzar el cangilón más alineado (cangilón n en la figura 14-82). De esta manera, se utiliza la cantidad máxima de cantidad de movimiento del chorro. Estos detalles se observan en una fotografía de una rueda Pelton (Fig. 14-83). En la figura 14-84 se muestra una rueda Pelton en operación; se observa con claridad la división y el cambio de dirección del chorro de agua.

Se analiza la salida de potencia de una turbina de Pelton mediante la ecuación de Euler para la turbomáquina. La salida de potencia de la flecha es igual a ωT_{flecha}, donde T_{flecha} se expresa por medio de la ecuación 14-14:



a)



b)

FIGURA 14-82
Esquema de una *turbina de impulsión* tipo Pelton; la flecha de la turbina gira cuando el fluido de alta velocidad de uno o más chorros incide en los cangilones montados en el eje de la turbina. *a*) Vista lateral, marco de referencia absoluto, y *b*) vista desde el fondo de una sección transversal del cangilón *n*, marco de referencia rotatorio.

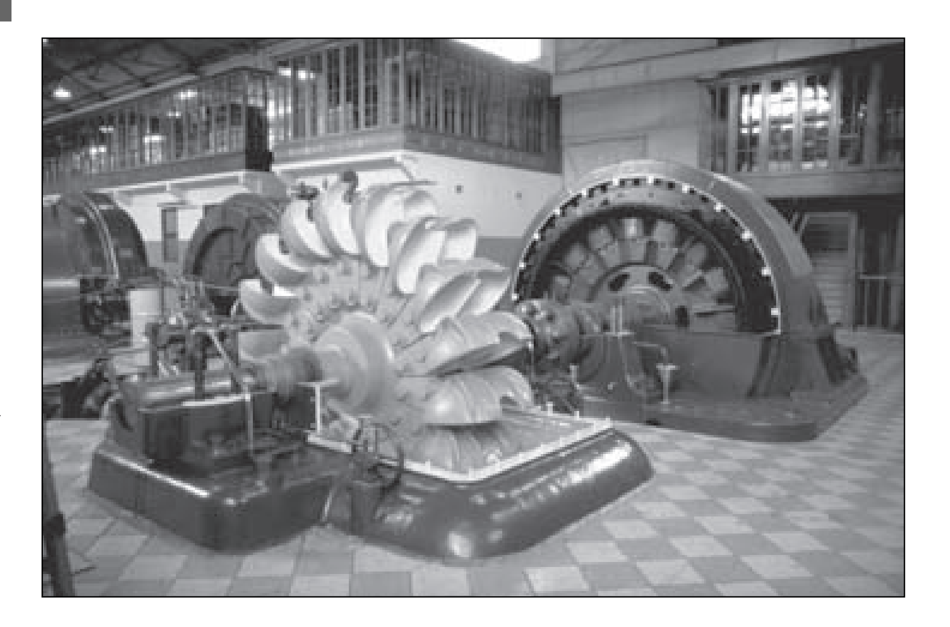


FIGURA 14-83
Vista de cerca de una turbina Pelton que muestra el diseño detallado de los cangilones; el generador eléctrico está a la derecha. Esta rueda Pelton se encuentra en el museo de la estación de energía de Waddamana, cerca de Bothwell, Tasmania.
Cortesía de Hydro Tasmania, www.hydro.com.au Reproducida con autorización.

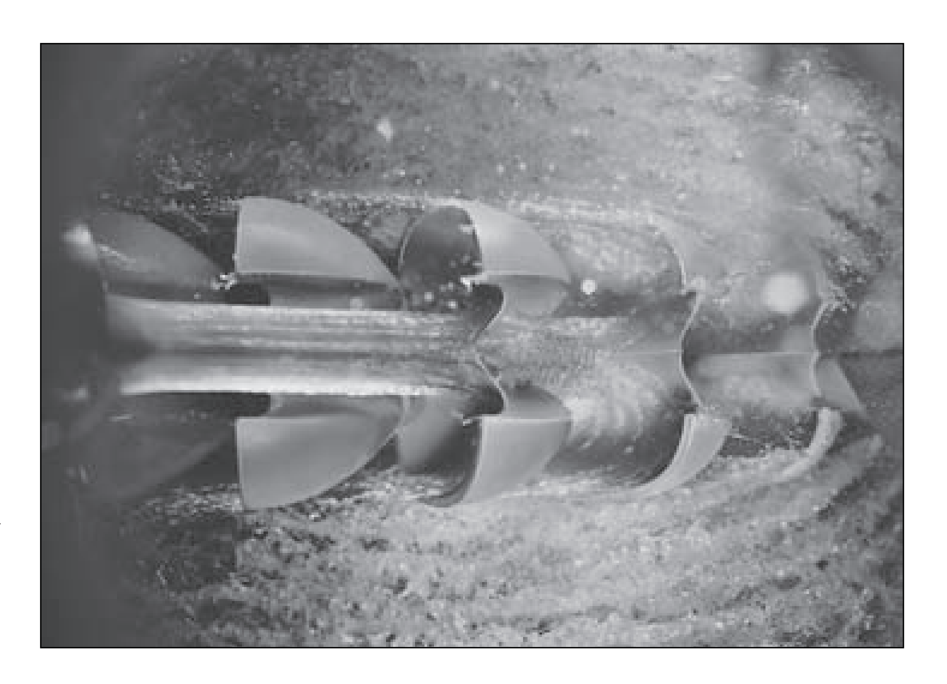


FIGURA 14-84
Vista desde el fondo de una rueda Pelton en operación que ilustra la separación y desviación del chorro de agua en el cangilón. El chorro de agua entra desde la izquierda, y la rueda Pelton gira a la derecha.
Cortesía de VA TECH HYDRO. Reproducida con autorización.

Ecuación de Euler para una turbina:

$$\dot{W}_{\text{flecha}} = \omega \mathrm{T}_{\text{flecha}} = \rho\omega\dot{V}(r_2V_{2,\,t} - r_1V_{1,\,t}) \tag{14-39}$$

Debe tenerse cuidado con los signos negativos, debido a que éste es un dispositivo que *produce* energía y no uno que *absorbe* energía. Para las turbinas, es conveniente definir el punto 2 como la entrada y el punto 1 como la salida. El centro del cangilón se mueve a velocidad tangencial *rw*, como se ilustra en la figura 14-82. Se simplifica el análisis si se supone que como hay una abertura en la parte extrema de cada cangilón, el chorro completo choca con el cangilón que está en el fondo de la rueda en el instante en consideración (cangilón *n* en la figura 14-82). Además, ya que el tamaño del cangilón y el diámetro del chorro de

agua son pequeños en comparación con el radio de la rueda, se aproximan r_1 y r_2 como iguales a r. Por último, se supone que el agua se desvía un ángulo β sin perder velocidad; en el marco de referencia relativo que se mueve con el cangilón, la velocidad de salida relativa es $V_j - r\omega$ (la misma que la velocidad relativa de entrada) como se ilustra en la figura 14-82. Volviendo al marco de referencia absoluto, que es necesario para la aplicación de la ecuación 14-39, la componente tangencial de la velocidad en la entrada $V_{2,t}$, es simplemente la velocidad del chorro, V_j. Se construye un diagrama de velocidad en la figura 14-85 como ayuda para calcular la componente tangencial de la velocidad absoluta a la salida, $V_{1,t}$. Después de aplicar un poco de trigonometría puede comprobarse después de notar que sen $(\beta - 90º) = -\cos b$:

$$V_{1,\,t} = r\omega + (V_j - r\omega)\cos\beta$$

Cuando se sustituye esta ecuación, la ecuación 14-39 produce:

$$\dot{W}_{\text{flecha}} = \rho r\omega\dot{V}\{V_j - [r\omega + (V_j - r\omega)\cos\beta]\}$$

que se simplifica:

Potencia de flecha producida:
$$\dot{W}_{\text{flecha}} = \rho r\omega\dot{V}(V_j - r\omega)(1 - \cos\beta) \qquad \textbf{(14-40)}$$

Es obvio que la potencia máxima se logra en teoría si $\beta = 180º$. Sin embargo, si ése fuera el caso, el agua que sale de un cangilón golpearía la parte posterior del cangilón vecino que viene detrás, así que se reduciría el par de torsión y la potencia generados. Resulta que en la práctica, la potencia máxima se logra cuando se reduce β a alrededor de 160º a 165º. El factor de eficiencia debido a β menor de 180º es:

Factor de eficiencia debido a β:
$$\eta_\beta = \frac{\dot{W}_{\text{flecha, real}}}{\dot{W}_{\text{flecha, real}}} = \frac{1 - \cos\beta}{1 - \cos(180°)} \qquad \textbf{(14-41)}$$

Cuando $\beta = 160º$, por ejemplo, $\eta_\beta = 0.97$, que corresponde a una pérdida de cerca de 3 por ciento. Por último, se ve de la ecuación 14-40 que la salida de potencia de flecha $\dot{W}_{\text{flecha}}$ es cero si $r\omega = 0$ (la rueda no gira en absoluto). $\dot{W}_{\text{flecha}}$ es también cero si $r\omega = V_j$ (el cangilón se mueve a la velocidad del chorro). En alguna parte entre estos dos extremos se ubica la velocidad óptima de la rueda. Si se iguala a cero la derivada de la ecuación 14-40 respecto a $r\omega$, se encuentra que esto ocurre cuando $r\omega = V_j/2$ (el cangilón se mueve a la mitad de la velocidad del chorro, como se ilustra en la figura 14-86).

Para una turbina de Pelton real, existen otras pérdidas además de la de la ecuación 14-41: la fricción mecánica, el arrastre de los cangilones, la fricción a lo largo de las superficies internas de los cangilones, el desalineo del chorro y el cangilón cuando gira, la salpicadura hacia atrás y las pérdidas en la tobera acelerdora. Aun así, la eficiencia de una turbina de Pelton diseñada adecuadamente se aproxima a 90 por ciento. En otras palabras, hasta 90 por ciento de la energía mecánica disponible del agua se transforma en energía rotatoria de flecha.

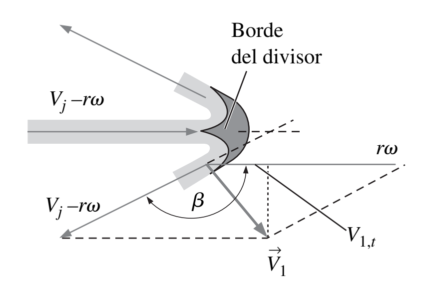


FIGURA 14-85
Diagrama de velocidad del flujo que entra y sale de un cangilón de turbina Pelton. Se traslada la velocidad del flujo de descarga del marco de referencia móvil al marco de referencia absoluto cuando se añade la velocidad del cangilón ($r\omega$) a la derecha.

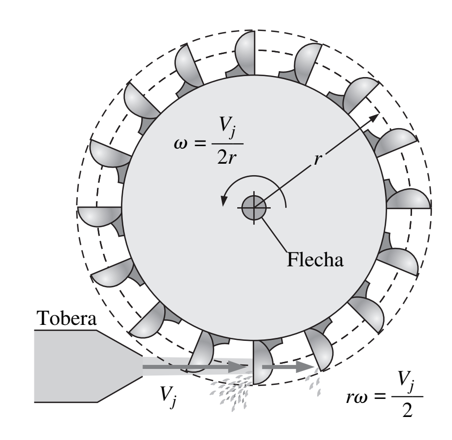


FIGURA 14-86
La potencia máxima teórica que se logra con una turbina Pelton ocurre cuando la rueda gira *a* $\omega = V_j/(2r)$, es decir, cuando el cangilón se mueve a la mitad de la velocidad del chorro de agua.

Turbinas de reacción

El otro tipo principal de hidroturbina para producir energía es la **turbina de reacción**, que consta de aspas guía fijas llamadas **aspas directrices fijas** o **aspas del distribuidor fijas**; aspas guía ajustables denominadas también **aspas del distribuidor ajustables** o **aspas** (o álabes) **guía** (o directrices) **ajustables** (u orientables) o **compuertas distribuidoras**; y unas aspas giratorias conocidas como **aspas del rodete** o **rotor** (Fig. 14-87). El flujo entra tangencialmen-

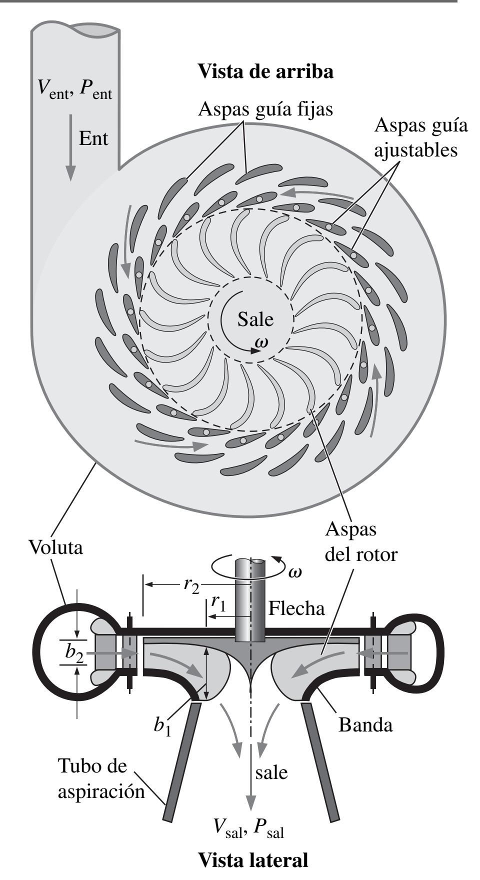


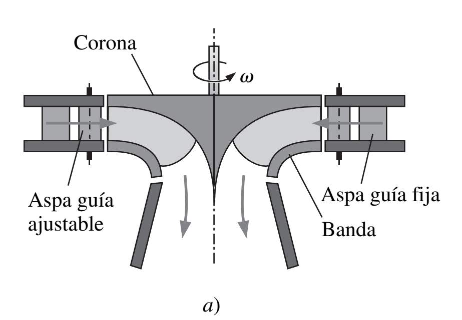
FIGURA 14-87
Una *turbina de reacción* difiere considerablemente de una turbina de impulsión; en vez de usar chorros de agua, se llena una *voluta* con agua arremolinada que impulsa al rotor. Para aplicaciones de hidroturbinas, el eje es por lo común vertical. Se muestran las vistas superior y lateral, incluidas las *aspas guía fijas* y las *aspas guía ajustables*.

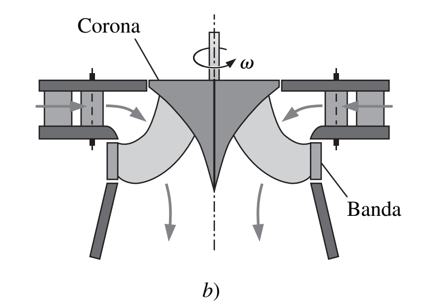
te a presión alta, es desviado hacia el rotor mediante las aspas del distribuidor fijas a medida que se desplaza a lo largo de la carcasa en espiral o **voluta**, y luego pasa por las aspas del distribuidor ajustables con una componente de velocidad tangencial grande. La cantidad de movimiento se intercambia entre el fluido y el rotor a medida que gira este último, y hay una gran caída de presión. A diferencia de la turbina de impulsión, el agua llena por completo la carcasa de una turbina de reacción. Por esta razón, una turbina de reacción produce, por lo general, más potencia que una turbina de impulsión de los mismos diámetro, carga hidrostática neta y flujo volumétrico. La variación del ángulo de las aspas del distribuidor ajustables sirve para controlar el gasto volumétrico en el rotor (en la mayoría de los diseños las aspas del distribuidor ajustables pueden aproximarse entre sí, de modo que se reduce el flujo de agua hacia el rotor). En condiciones de diseño, el flujo que sale de las aspas del distribuidor ajustables choca paralelo al borde del aspa del rotor (desde un marco de referencia giratorio) para evitar pérdidas por impacto. Note que en un diseño adecuado, el número de aspas del distribuidor ajustables no comparte un denominador común con el número de aspas del rotor. De lo contrario, habría vibración intensa causada por el impacto simultáneo de dos o más estelas de las aspas del distribuidor ajustables en los bordes delanteros de las aspas del rotor. Por ejemplo, en la figura 14-87 hay 17 aspas móviles y 20 directrices. Éstos son números representativos para muchas hidroturbinas de reacción grandes, como se ilustra en las fotografías de las figuras 14-89 a 14-90. El número de aspas del distribuidor fijas y aspas del distribuidos ajustables es por lo general el mismo (hay 20 aspas del distribuidor fijas en la figura 14-87). Esto no es un problema, ya que ninguna de ellas gira, y no interesa la interacción de estela no estacionaria.

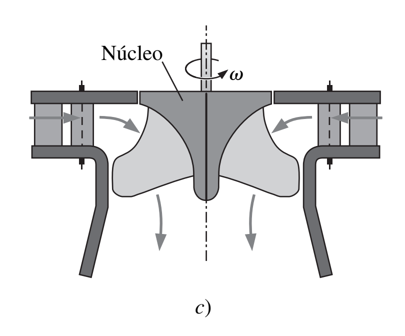
Existen dos tipos principales de turbinas de reacción, *Francis* y *Kaplan*. La **turbina Francis** es algo similar en configuración geométrica a una bomba centrífuga o de flujo mixto, pero con el flujo en dirección contraria. Sin embargo, note que una bomba típica que opera a la inversa *no* sería una turbina muy efectiva. La turbina Francis se nombra en honor a James B. Francis (1815-1892), quien la diseñó en la década de 1840. En contraste, la **turbina Kaplan** se parece a un ventilador de *flujo axial* que funciona en sentido contrario. Si alguna vez ha visto a un ventilador de ventana comenzar a girar en la dirección equivocada cuando el viento sopla fuerte hacia la ventana, puede imaginar el principio de operación básico de una turbina Kaplan. La turbina Kaplan se nombra en honor de su inventor, Viktor Kaplan (1876-1934). En realidad existen varias subcategorías de las turbinas Francis y Kaplan, y la terminología que se emplea en el campo de las hidroturbinas no siempre es estándar.

Recuerde que las bombas dinámicas se clasifican según el ángulo al que el flujo sale del álabe del rotor: centrífuga (radial), de flujo mixto, o axial (figura 14-31). De manera similar, pero inversa, se clasifican las turbinas de reacción de acuerdo con el ángulo al que *entra* el flujo al rotor (Fig. 14-88). Si el flujo entra de manera radial al rotor como en la figura 14-88*a*, la turbina se llama **turbina Francis de flujo radial** (vea también la figura 14-87). Si el flujo entra al rotor a cierto ángulo entre radial y axial (Fig. 14-88*b*), la turbina se llama **turbina Francis de flujo mixto**. Este último es más común. Algunos ingenieros de hidroturbinas usan el término “turbina Francis” sólo cuando hay una **banda** en el rotor como en la figura 14-88*b*. Las turbinas Francis son más adecuadas para cargas hidrostáticas que están entre las cargas hidrostáticas altas de las turbinas Pelton y las cargas hidrostáticas bajas de turbinas Kaplan. Una turbina Francis grande típica podría tener 16 o más aspas de rotor y puede lograr una eficiencia de turbina de 90 a 95 por ciento. Si el rotor no tiene banda y el flujo entra al rotor parcialmente girado, se llama **turbina de hélice de flujo mixto** o sólo **turbina de flujo mixto** (Fig. 14-88*c*). Por último, si el flujo es desviado axialmente *antes* de entrar al rotor (Fig. 14-88*d*), la turbina se denomina **turbina de flujo**









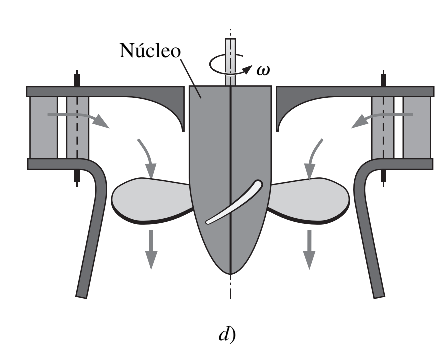


FIGURA 14-88
Las características distintivas de las cuatro subcategorías de turbinas de reacción: *a*) *flujo radial de turbina Francis*, *b*) *Flujo mixto (radioaxial) de turbina Francis*, *c*) *flujo mixto de turbina de hélice, d*) *flujo axial de turbina de hélice*. La diferencia principal entre *b* y *c* es que los rotores de flujo mixto de turbina Francis tienen una *banda* que gira con el rotor, no así los rotores de flujo mixto de turbina de hélice. Existen dos tipos de turbinas de hélice de flujo mixto: las turbinas *Kaplan* tienen el mecanismo que permite ajustar el ángulo de inclinación de las aspas del rotor, pero las aspas del rotor de las *turbinas de hélice son fijas*. Note que la terminología que se emplea aquí no es universal entre los libros de texto de turbomaquinaria ni entre los fabricantes de hidroturbinas.

axial. Los rotores de una turbina de flujo axial por lo general tienen sólo de tres a ocho aspas, menos que las turbinas Francis. De éstas existen dos tipos: turbinas Kaplan y turbinas de hélice. Se dice que las turbinas Kaplan son de **doble regulación** porque el flujo se controla de dos maneras, al girar las aspas de distribuidor ajustables y al cambiar el ángulo de inclinación de las aspas pivotadas del rotor. Las turbinas de hélice son casi idénticas a las turbinas Kaplan, excepto que las aspas del rotor están fijas (el ángulo de inclinación no es ajustable), y el caudal se regula sólo por medio de las aspas de distribuidor ajustables (**regulación simple**). En comparación con las turbinas Pelton y Francis, las turbinas Kaplan y las de hélice son más adecuadas para carga hidrostática baja y gasto volumétrico alto. Sus eficiencias compiten con las de las turbinas Francis y pueden ser tan altas como 94 por ciento.

La figura 14-89 es una fotografía del rotor de flujo radial de una turbina Francis de flujo radial. Se muestra a los trabajadores para dar una idea del tamaño de los rotores en una central hidroeléctrica. La figura 14-90 es una fotografía del rotor de flujo mixto de una turbina Francis, y la figura 14-91 es una fotografía del rotor de flujo axial de una turbina Kaplan. La vista es desde la entrada (parte superior).

En la figura 14-92 se muestra una presa hidroeléctrica representativa que utiliza turbinas de reacción Francis para generar electricidad. La **caída total** o global H_{total} se define como la diferencia de elevación entre la superficie del depósito corriente arriba de la presa y la superficie del agua que sale de la presa, $H_{total} = z_A - z_E$. Si no hubiera pérdidas irreversibles *en cualquier parte* del sistema, la cantidad máxima de potencia que podría generarse con la turbina sería:

Producción de potencia ideal: $$\dot{W}_{ideal} = g\dot{V}H_{total} \quad \text{(14-42)}$$

Por supuesto, hay pérdidas irreversibles en todo el sistema, de modo que la potencia producida en realidad es menor que la potencia ideal que se expresa en la ecuación 14-42.

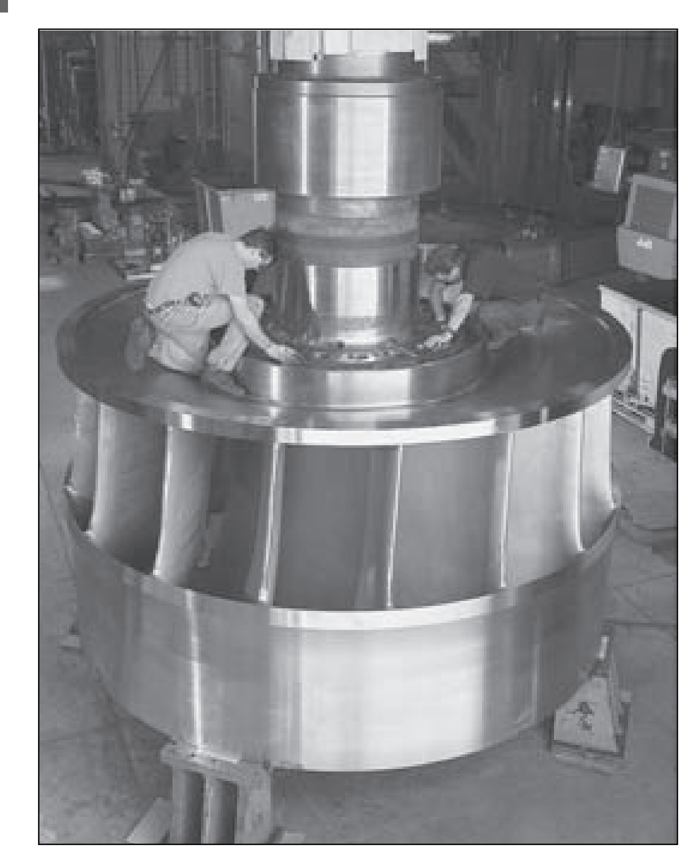


FIGURA 14-89
Rotor de una turbina Francis de flujo radial utilizado en la estación hidroeléctrica de Round Butte, en Madras, OR. Hay 17 aspas de rotor de diámetro externo 11.8 ft (3.60 m). La turbina gira a 180 rpm y produce 119 MW de potencia a un caudal de 127 m^3/s a partir de una carga hidrostática neta de 105 m.

Foto cortesía de American Hydro Corporation, York, PA. Reproducida con autorización.

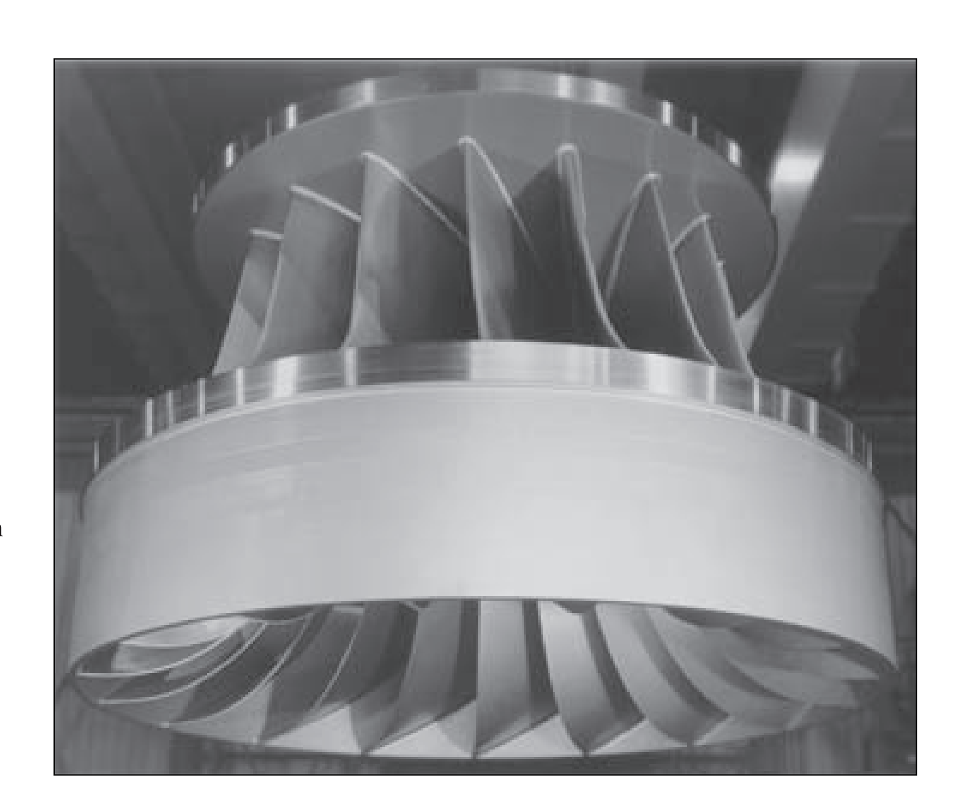


FIGURA 14-90
Rotor de una turbina Francis de flujo mixto empleada en la estación hidroeléctrica de Smith Mountain, en Roanoke, VA. Hay 17 aspas de rotor de diámetro externo 20.3 ft (6.19 m). La turbina gira a 100 rpm y produce 194 MW de potencia a un caudal de 375 m^3/s a partir de una carga hidrostática neta de 54.9 m.

Foto cortesía de American Hydro Corporation, York, PA. Reproducida con autorización.

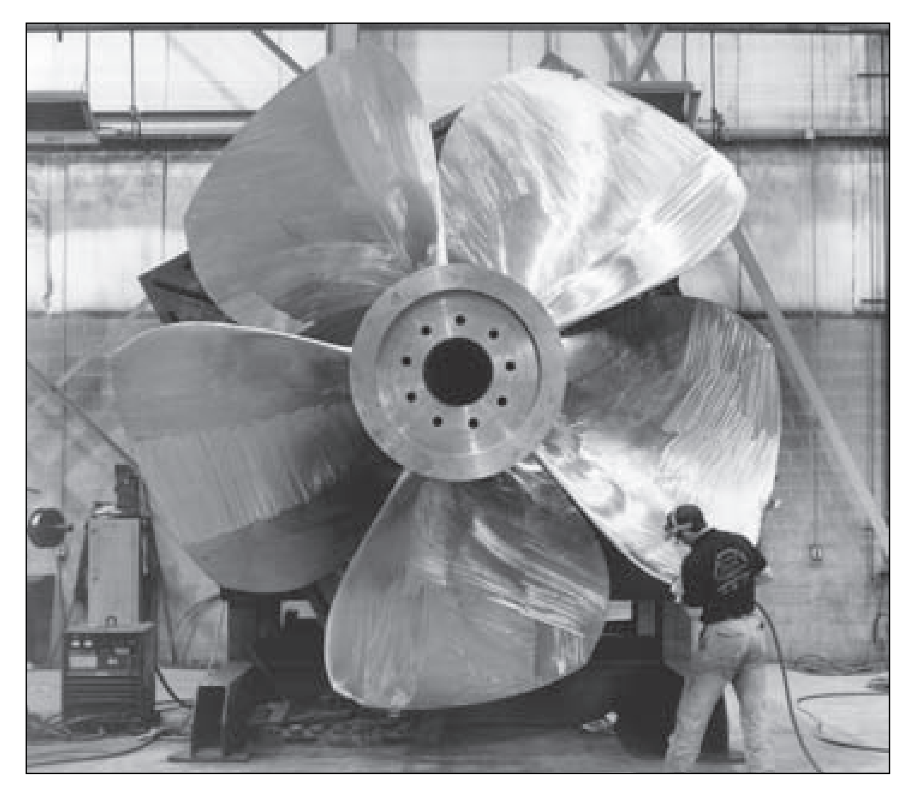


FIGURA 14-91
Hélice de cinco aspas de una turbina Kaplan que se emplea en la estación hidroeléctrica de Warwick, en Cordele, GA. Hay cinco aspas de rotor de diámetro externo 12.7 ft (3.87 m). La turbina gira a 100 rpm y produce 5.37 MW de potencia a un caudal de 63.7 m^3/s a partir de una carga hidrostática neta de 9.75 m.

Foto cortesía de American Hydro Corporation, York, PA. Reproducida con autorización.

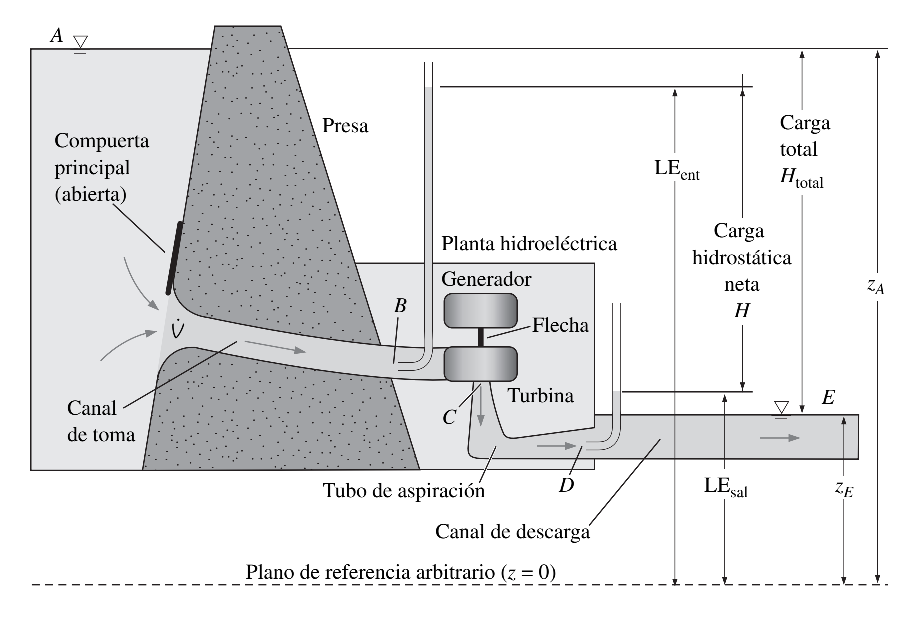


FIGURA 14-92
Configuración característica y terminología para una planta hidroeléctrica que utiliza una turbina Francis para generar electricidad; el esquema no está a escala. Los tubos de Pitot se muestran sólo para propósitos ilustrativos.

Se sigue el flujo de agua por todo el sistema de la figura 14-92, y se definen términos y analizan pérdidas a lo largo del trayecto. Se empieza en el punto A corriente arriba de la presa, donde el agua está sin movimiento, a presión atmosférica y en su elevación más alta z_A. El agua fluye a un gasto volumétrico $\dot{V}$ por un gran tubo llamado **canal de toma** que pasa por la presa. El flujo al canal de toma puede detenerse cuando se cierra una gran compuerta llamada **compuerta de aguas arriba** en la entrada del canal de toma. Si se insertara un tubo Pitot en el punto *B,* en el extremo del canal de toma justo antes de la turbina, como se ilustra en la figura 14-92, el agua en el tubo subiría hasta una altura de columna igual a la altura total o altura de la línea de energía en la entrada de la turbina $LE_{entrada}$ (EGL, por sus siglas en inglés). Esta altura de columna es menor que el nivel del agua en el punto *A*, debido a pérdidas irreversibles en el canal de toma y su entrada. El flujo pasa entonces por la turbina, que se conecta mediante una flecha al generador eléctrico. Note que el generador eléctrico por sí mismo tiene pérdidas irreversibles. Desde una perspectiva de la mecánica de fluidos, sin embargo, interesan sólo las pérdidas en la turbina y corriente abajo de la turbina.

Después de pasar por el rotor, el fluido que sale (punto *C*) aún tiene energía cinética considerable y quizá movimiento giratorio. Para recuperar algo de esta energía cinética (que de otro modo se desperdiciaría), el flujo entra a un difusor de área extensible llamado **tubo de aspiración**, que vuelve horizontal al flujo y lo desacelera, al mismo tiempo que incrementa la presión antes de descargar en el agua corriente abajo, en el denominado **canal de descarga**. Si se insertara otro tubo de Pitot en el punto *D* (la salida del tubo de aspiración), el agua en el tubo subiría hasta una altura de columna igual a la altura de la línea de energía indicada como LE_{salida} en la figura 14-92 (EGL, por sus siglas en inglés). Puesto que el tubo de aspiración se considera parte integral de la turbina, la carga hidráulica neta en la turbina se especifica como la diferencia entre $LE_{entrada}$ y LE_{salida},

Carga hidrostática neta para una turbina hidráulica:

$$H = LE_{entra} - LE_{sale} \qquad \textbf{(14-43)}$$

Expresada en palabras:

> La carga hidrostática neta de una turbina se define como la diferencia entre la altura de la línea de energía justo corriente arriba de la turbina y la altura de la línea de energía en la salida del tubo de aspiración.

En la salida del tubo de aspiración (punto *D*) la velocidad de flujo es considerablemente menor que en el punto *C* corriente arriba del tubo de aspiración; sin embargo, es *finita*. Toda la energía cinética que sale del tubo de aspiración se disipa en el canal de descarga. Esto representa una pérdida de carga hidrostática irreversible y la razón de que la LE_{salida}sea mayor que la elevación de la superficie del canal de descarga, z_E. Sin embargo, en un tubo de aspiración diseñado adecuadamente ocurre una recuperación de presión importante. El tubo de aspiración hace que la presión en la salida del rotor (punto *C*) disminuya *por abajo* de la presión atmosférica. Esto permite que la turbina utilice la carga hidrostática disponible de manera más eficiente. En otras palabras, el tubo de aspiración causa que la presión en la salida del rotor sea menor que la que se tendría sin el tubo de aspiración, así que se incrementa el cambio de presión desde la entrada hasta la salida de la turbina. No obstante, los diseñadores deben ser cuidadosos porque las presiones por abajo de la presión atmosférica podrían originar cavitación, la cual es indeseable por muchas razones, como se explicó antes.

Si se tuviera interés en la eficiencia neta de toda la central hidroeléctrica, se definiría esta eficiencia como la desazón entre la potencia eléctrica real a la potencia ideal (Ec. 14-42), con base en la caída total. En este capítulo se da mayor

importancia a la eficiencia de la turbina. Por costumbre, la **eficiencia de la turbina** *se basa en la carga hidrostática neta H y no en la caída total* H_{total}. En particular, $\eta_{turbina}$ se define como la razón entre la salida de potencia al freno (potencia de flecha de la turbina real) y la potencia útil (potencia extraída del agua que fluye por la turbina):

Eficiencia de la turbina:
$$\eta_{turbina} = \frac{\dot{W}_{flecha}}{\dot{W}_{potencia\ útil}} = \frac{bhp}{\rho g H \dot{V}} \tag{14-44}$$

Note que la eficiencia de la turbina $\eta_{turbina}$ es el recíproco de la eficiencia de la bomba η_{bomba}, puesto que bhp es la *salida real* en lugar de la *entrada requerida* (Fig. 14-93).

Observe también que se está considerando sólo una turbina a la vez en esta explicación. La mayoría de las centrales hidroeléctricas tiene *varias* turbinas dispuestas en paralelo. Esto ofrece a la compañía de luz la oportunidad de apagar algunas de las turbinas durante las horas de poca demanda de energía y para dar mantenimiento. La presa Hoover, en Boulder City, Nevada, por ejemplo, tiene 17 turbinas en paralelo, 15 de las cuales son turbinas Francis grandes idénticas, que pueden producir casi 130 MW de electricidad cada una (Fig. 14-94). La caída total máxima es de 590 ft (180 m). La producción de potencia máxima total de la central sobrepasa 2 GW (2 000 MW).

Se realizan diseños y análisis preliminares de turbinas de la misma manera que se hizo antes para bombas, mediante la ecuación de Euler para turbomáquina y diagramas de velocidad. De hecho, se mantiene la misma notación, a saber, r_1 para el radio interno y r_2 para el radio externo de las aspas rotatorias. Sin embargo, para una turbina la dirección de flujo es opuesta a la de la bomba, de modo que la entrada está en el radio r_2 y la salida está en el radio r_1. Para un análisis de primera aproximación se supone que las aspas son infinitamente delgadas. Se supone también que las aspas están alineadas de manera que el flujo es siempre tangente a la superficie del aspa, y se ignoran los efectos viscosos (capas lí-

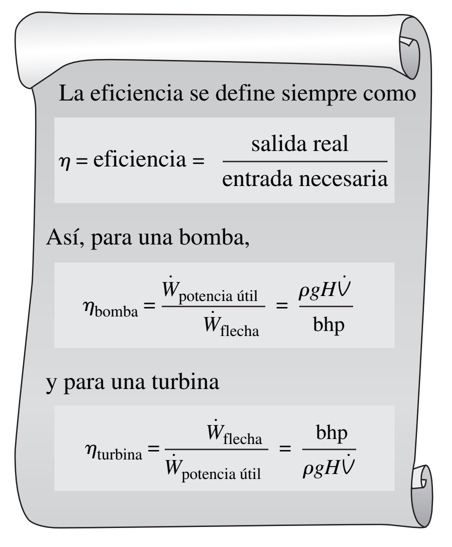
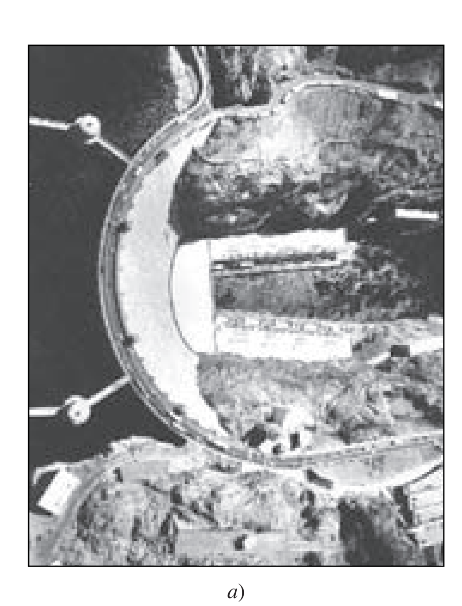


FIGURA 14-93
Por definición, la eficiencia debe ser menor que unidad. La eficiencia de turbina es inversa de la eficiencia de bomba.



a)



b)

FIGURA 14-94
a) Vista aérea de la presa Hoover y *b*) la porción superior (visible) de varios generadores eléctricos en paralelo impulsados por turbinas hidráulicas en la presa Hoover.

a) United States Department of the Interior. Bureau of Reclamation-Lower Colorado Region; b) Foto de Jim Steinhart, PlanetWare.

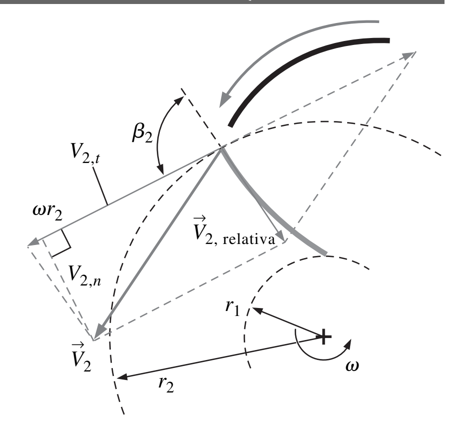


FIGURA 14-95
Vectores de velocidad relativa y absoluta y configuración geométrica para el radio externo del rotor de una turbina Francis. Los vectores de velocidad absoluta están en negritas.

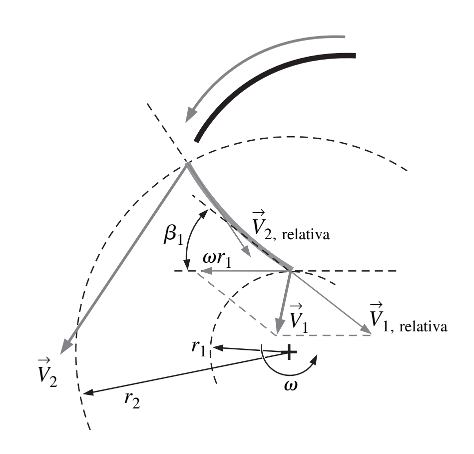


FIGURA 14-96
Vectores de velocidad relativa y absoluta y configuración geométrica para el radio interno de un rotor de una turbina Francis. Los vectores de velocidad absoluta están en negritas.

mite) en las superficies. Las mejores aproximaciones se obtienen al usar los paquetes de dinámica de fluidos computacional.

Considere, por ejemplo, la vista superior de la turbina Francis de la figura 14-87. Los vectores de velocidad se trazan en la figura 14-95 para el marco de referencia absoluto y el marco de referencia relativo que gira con el rotor. Comienza con el aspa guía fija (línea negra gruesa en la figura 14-95), el flujo y se desvía de modo que choca con el aspa del rotor (línea gris gruesa) a velocidad absoluta $\vec{V}_2$. Pero el aspa del rotor gira en contrasentido a las manecillas del reloj, y en el radio r_2 se desplaza tangencialmente al extremo inferior izquierdo a velocidad ωr_2. Para trasladar al marco de referencia rotatorio, se forma el vector suma de $\vec{V}_2$ y el *negativo* de ωr_2, como se ilustra en el bosquejo. La resultante es el vector $\vec{V}_{2,\text{relativa}}$, que es paralelo al borde delantero del aspa del rotor (ángulo β_2 desde la recta tangente al círculo r_2). La componente tangencial $V_{2,t}$, del vector de velocidad absoluta $\vec{V}_2$ se necesita para la ecuación de Euler de turbomáquina (Ec. 14-39). Después de aplicar algunas operaciones trigonométricas:

Borde principal del rotor: $$V_{2,\,t} = \omega r_2 - \frac{V_{2,\,n}}{\tan\,\beta_2} \qquad \textbf{(14-45)}$$

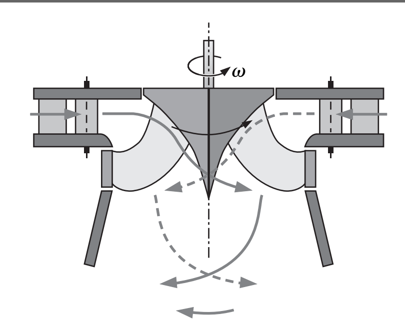
Cuando se sigue el flujo a lo largo del aspa del rotor en el marco de referencia relativo (rotatorio), se ve que el flujo se desvía de modo que sale paralelo al borde posterior del aspa del rotor (ángulo β_1 desde la línea tangente al círculo r_1). Por último, para trasladar de nuevo al marco de referencia absoluto se suma vectorialmente $\vec{V}_{1,\text{relativa}}$ y la velocidad del aspa ωr_1, que actúa a la izquierda como se ilustra en la figura 14-96. La resultante es el vector absoluto $\vec{V}_1$. Puesto que la masa debe conservarse, las componentes normales de los vectores de velocidad absoluta $V_{1,n}$ y $V_{2,n}$ se relacionan por medio de la ecuación 14-12, donde los anchos de las aspas b_1 y b_2 se definen en la figura 14-87. Después de aplicar algo de trigonometría (que resulta ser idéntica a la del borde delantero), se genera una expresión para la componente tangencial $V_{1,t}$ del vector de velocidad absoluta $\vec{V}_1$ para uso en la ecuación de Euler de turbomáquina:

Borde posterior del rotor: $$V_{1,\,t} = \omega r_1 - \frac{V_{1,\,n}}{\tan\,\beta_1} \qquad \textbf{(14-46)}$$

Los lectores atentos notarán que la ecuación 14-46 para una turbina es idéntica a la ecuación 14-23 para una bomba. Esto no es fortuito, pero resulta del hecho de que los vectores de velocidad, ángulos, etc., se definen de la misma manera para una turbina que para una bomba excepto que todo fluye en sentido contrario.

Se puede ver de la ecuación de Euler de turbomáquina que la potencia máxima se obtiene cuando $V_{1,t} < 0$, es decir, cuando la aspa del rotor desvía el flujo tanto que la dirección del movimiento giratorio a la salida del rotor es *contraria* a la rotación del rotor. Esta situación se llama **el movimiento giratorio invertido** (Fig. 14-97). En la práctica, los rotores de aspa fija en la mayoría de las hidroturbinas Francis se diseñan de manera que suministren una pequeña cantidad del movimiento giratorio invertido al flujo que sale del rotor. Sin embargo, no se desea un *gran* movimiento giratorio invertido. Resulta que la eficiencia de la turbina disminuye con rapidez a medida que aumenta la cantidad del movimiento giratorio invertido porque a mayor movimiento giratorio, mayor es la energía cinética del agua a la salida de la turbina, gran parte de la cual termina siendo desperdiciada (los tubos de aspiración no son 100 por ciento eficientes). Además, si el movimiento giratorio invertido puede incrementar la potencia de salida, el giro extra necesita una carga hidrostática neta mayor para un determinado gasto volumétrico. Resulta obvio que se necesita mucho ajuste para diseñar la hidroturbina más eficiente dentro de las restricciones de diseño impuestas. Debe recordarse también que el flujo es tridimensional; hay una componente *axial* de la velocidad cuando el flujo cambia de dirección hacia abajo en el tubo de aspi-

ración. No toma mucho tiempo entender que las herramientas de simulación por computadora son de valiosa ayuda para los diseñadores de turbinas. De hecho, con la ayuda de paquetes modernos de dinámica de fluidos computacional (DFC, CFD por sus siglas en inglés), la eficiencia de las turbinas se ha incrementado hasta el punto en que las mejoras de turbinas antiguas en plantas hidroeléctricas son aconsejables desde el punto de vista económico. Un ejemplo de resultado de DFC se muestra en la figura 14-98 para una turbina Francis de flujo mixto.

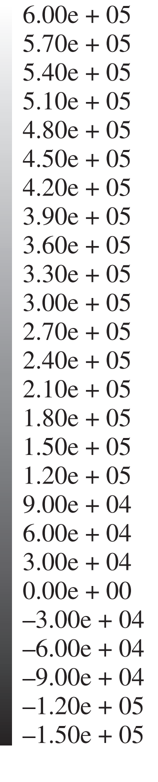


Movimiento giratorio invertido

FIGURA 14-97
En muchas hidroturbinas Francis modernas de flujo mixto, el flujo que sale del rotor gira en dirección opuesta a la del rotor. Esto se llama *movimiento giratorio invertido*.

EJEMPLO 14-12 Diseño de hidroturbina

Se rediseña una hidroturbina Francis de flujo radial para remplazar una turbina antigua en una presa hidroeléctrica. La nueva turbina debe satisfacer las siguientes restricciones de diseño con el fin de acoplarse con la instalación existente: el radio de entrada del rotor es r_2 = 8.20 ft (2.50 m) y su radio de salida es r_1 = 5.80 ft (1.77 m). El ancho de las aspas del rotor son b_2 = 3.00 ft (0.914 m) y b_1 = 8.60 ft (2.62 m) en la entrada y la salida, respectivamente. El rotor debe girar a $\dot{n}$ = 120 rpm (ω = 12.57 rad/s) para impulsar el generador eléctrico de 60 Hz. Las aspas directrices ajustables desvían el flujo en un ángulo α_2 = 33º desde la dirección radial en la entrada del rotor, y el flujo a la salida del rotor tendrá un ángulo α_1 entre −10º y 10ºC desde la dirección radial (Fig. 14-99) para el flujo apropiado por el tubo de aspiración. El gasto volumétrico en condiciones de diseño es 9.50 × 10^6 gpm (599 m^3/s), y la carga total que proporciona la presa es H_{total} = 303 ft (92.4 m). *a*) Calcule los ángulos de aspa del rotor de entrada y salida, β_2 y β_1, respectivamente, y prediga la salida de potencia y la carga hidrostática neta necesaria si se ignoran las pérdidas irreversibles para el caso de α_1 = 10º desde la dirección radial (con el movimiento giratorio). *b*) Repita los



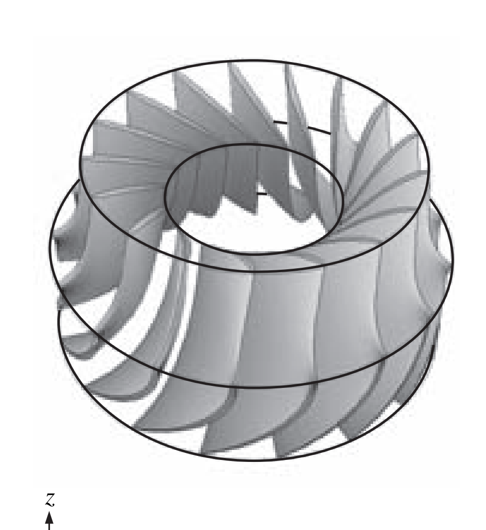


FIGURA 14-98
Distribución de presión estática (gráfica de contorno en escala de grises) en las superficies de las aspas del rotor según se calcula mediante un paquete de DFC; la presión está en pascales. Se muestra un rotor de turbina Francis de flujo mixto que gira en contrasentido a las manecillas de reloj respecto al eje *z*. Sólo se modeló una corona de aspas, pero la imagen se reproduce 16 veces debido a la simetría. Las presiones mayores (regiones claras) se encuentran cerca de los bordes delanteros de las aspas del rotor del lado de superficie de presión, mientras que las presiones menores (regiones oscuras) ocurren en la superficie de succión de las aspas del rotor cerca del borde posterior.

Foto cortesía de American Hydro Corporation, York, PA. Reproducida con autorización.

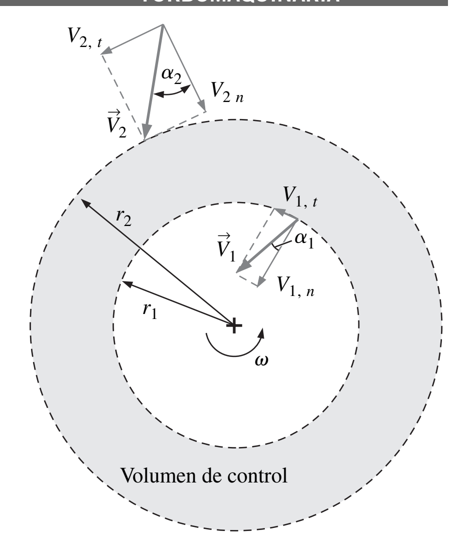


FIGURA 14-99
Vista de arriba de las velocidades absolutas y ángulos de flujo en el rotor de una turbina Francis que se diseña para una presa hidroeléctrica. El volumen de control se extiende de la entrada a la salida del rotor.

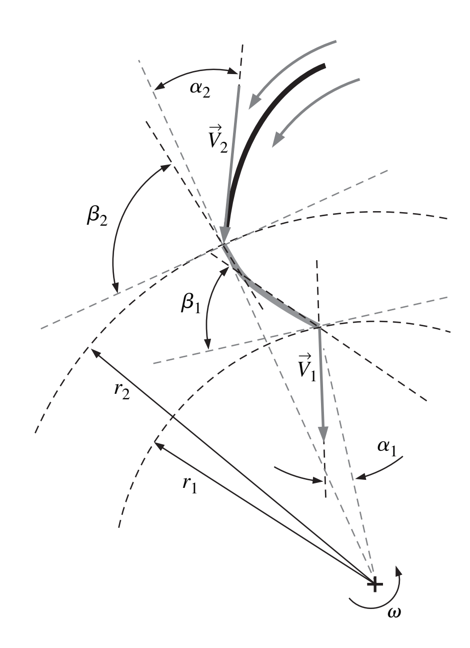


FIGURA 14-100
Bosquejo del diseño del aspa del rotor del ejemplo 14.12, vista de arriba. Se ilustran también un aspa guía fija y los vectores de velocidad absoluta.

cálculos para el caso de $\alpha_1 = 0°$ desde la dirección radial (sin movimiento giratorio). *c*) Repita los cálculos para el caso de $\alpha_1 = -10°$ desde la dirección radial (el movimiento giratorio invertido).

SOLUCIÓN Para determinado conjunto de criterios para el diseño de una hidroturbina se calcularán los ángulos de aspa del rotor, la carga hidrostática neta necesaria y la salida de potencia para tres casos, dos con el movimiento giratorio a la salida del rotor y uno sin tal.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El fluido es agua a 20ºC. **3** Las aspas son infinitesimalmente delgadas. **4.** El flujo es tangente en todas partes a las aspas del rotor. **5** Se ignoran las pérdidas irreversibles en la turbina.

Propiedades Para el agua a 20ºC, $\rho = 998.0$ kg/m³.

Análisis *a*) De la ecuación 14-12 se despeja la componente normal de la velocidad a la entrada:

$$V_{2,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_2 b_2} = \frac{599 \text{ m}^3/\text{s}}{2\pi(2.50 \text{ m})(0.914 \text{ m})} = 41.7 \text{ m/s} \tag{1}$$

Con la figura 14-99 como guía, la componente de la velocidad tangencial a la entrada es:

$$V_{2,t} = V_{2,n} \tan \alpha_2 = (41.7 \text{ m/s}) \tan 33° = 27.1 \text{ m/s} \tag{2}$$

Ahora, de la ecuación 14-45 se despeja el ángulo del borde delantero β_2:

$$\beta_2 = \arctan\left(\frac{V_{2,n}}{\omega r_2 - V_{2,t}}\right) = \arctan\left(\frac{41.7 \text{ m/s}}{(12.57 \text{ rad/s})(2.50 \text{ m}) - 27.1 \text{ m/s}}\right) = \mathbf{84.1°} \tag{3}$$

Las ecuaciones 1 a 3 se repiten para la salida del rotor, con los siguientes resultados:

$$\textit{Salida de rotor}: \quad V_{1,n} = 20.6 \text{ m/s}, \quad V_{1,t} = 3.63 \text{ m/s}, \quad \beta_1 = \mathbf{47.9°} \tag{4}$$

La vista superior de esta aspa del rotor se bosqueja (a escala) en la figura 14-100.

Con las ecuaciones 2 y 4, se estima la potencia de salida de la flecha a partir de la ecuación de Euler para turbomáquina, ecuación 14-39:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{\text{flecha}} &= \rho\omega\dot{V}(r_2 V_{2,t} - r_1 V_{1,t}) = (998.0 \, kg/m^3)(12.57 \text{ rads/s})(599 \text{ m}^3/\text{s}) \\ &\times [(2.50 \text{ m})(27.2 \text{ m/s}) - (1.77 \text{ m})(3.63 \text{ m/s})]\left(\frac{\text{MW} \cdot \text{s}}{10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}\right) \\ &= 461 \text{ MW} = \mathbf{6.18 \times 10^5 \text{ hp}} \end{aligned} \tag{5}$$

Por último, se calcula la carga hidrostática neta necesaria con la ecuación 14-44, y se supone que $\eta_{\text{turbina}} = 100$ por ciento puesto que se ignoran las irreversibilidades,

$$H = \frac{\text{bhp}}{\rho g \dot{V}} = \frac{461 \text{ MW}}{(998.0 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(599 \text{ m}^3/\text{s})}\left(\frac{10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}{\text{MW} \cdot \text{s}}\right) = \mathbf{78.6 \text{ m}} \tag{6}$$

b) Cuando se repiten los cálculos para el caso de ausencia del movimiento giratorio en la salida del rotor ($\alpha_1 = 0$º), el ángulo de borde posterior del aspa del rotor se reduce a **42.8º**, y la potencia de salida se incrementa a 509 MW (**6.83 × 10⁵ hp**). La carga hidrostática neta necesaria se incrementa a **86.8 m**.



c) Cuando se repiten los cálculos para el caso del movimiento giratorio *invertido* en la salida del rotor ($\alpha_1 = -10°$), el ángulo de borde posterior del aspa se reduce a **38.5°**, y la potencia producida se incrementa a 557 MW (**7.47 × 10⁵ hp**). La carga hidrostática neta necesaria se incrementa a **95.0 m**. Una gráfica de potencia y carga hidrostática neta en función del ángulo de flujo a la salida del rotor α_1 se muestra en la figura 14-101. Puede verse que tanto la potencia al freno como *H* se incrementan con la disminución de α_1.

Discusión La potencia de salida teórica se incrementa en alrededor de 10 por ciento cuando se elimina el movimiento giratorio a la salida del rotor y en casi otro 10 por ciento cuando hay 10° del movimiento giratorio invertido. Sin embargo, la carga total disponible desde la presa es sólo de 92.4 m. Así, el caso del movimiento giratorio invertido del inciso *c*) es imposible, ya que se necesita que la predicha carga hidrostática neta sea mayor que H_{total}. Recuerde que éste es un diseño preliminar en el que se ignoran las irreversibilidades. La salida de potencia real será menor y la carga hidrostática neta necesaria real será mayor que los valores predichos aquí.

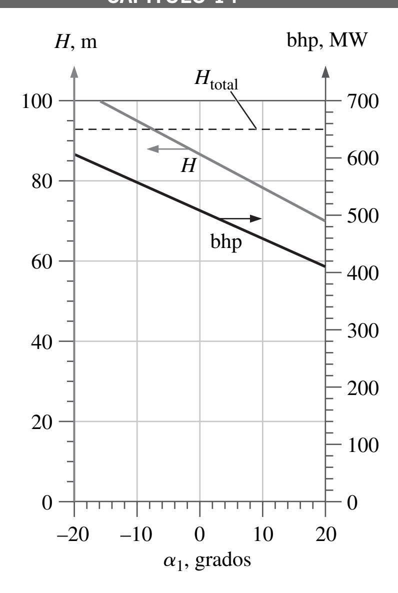


FIGURA 14-101
Carga hidrostática neta necesaria ideal y potencia al freno como funciones del ángulo de flujo saliente del rotor para la turbina del ejemplo 14-12.

14-5 ▪ LEYES DE SEMEJANZA PARA TURBINAS

Parámetros adimensionales de turbinas

Se definen los grupos adimensionales (grupos Pi) para turbinas de manera muy parecida a como se hizo en la sección 14-3 para bombas. Sin considerar el número de Reynolds y los efectos de la rugosidad, se trata con las mismas variables dimensionales: la gravedad multiplicada por la carga hidrostática neta (gH), gasto volumétrico ($\dot{V}$), diámetro de las aspas del rotor (D), velocidad rotacional del rotor (ω), la potencia al freno producida (bhp) y la densidad del fluido (ρ), como se ilustra en la figura 14-102. De hecho, el análisis dimensional es idéntico ya sea que se analice una bomba o una turbina, excepto por el hecho de que para las turbinas se toma la potencia al freno en vez de $\dot{V}$ como la variable independiente. Además, se emplea $\eta_{turbina}$ (Ec. 14-44) en lugar de η_{bomba} como la eficiencia adimensional. A continuación se incluye un resumen de los parámetros adimensionales.

Parámetros de turbina adimensionales:

$$C_H = \text{Coeficiente de carga hidrostática} = \frac{gH}{\omega^2 D^2} \qquad C_Q = \text{Coeficiente de capacidad} = \frac{\dot{V}}{\omega D^3} \tag{14-47}$$

$$C_P = \text{Coeficiente de potencia} = \frac{\text{bhp}}{\rho\omega^3 D^5} \qquad \eta_{turbina} = \text{Eficiencia de turbina} = \frac{\text{bhp}}{\rho g H \dot{V}}$$

Cuando se grafican las curvas de rendimiento de la turbina se usa C_P en vez de C_Q como el parámetro independiente. En otras palabras, C_H y C_Q son funciones de C_P, y, por lo tanto, $\eta_{turbina}$ es una función de C_P, puesto que:

$$\eta_{turbina} = \frac{C_P}{C_Q C_H} = \text{función de } C_P \tag{14-48}$$

Las leyes de semejanza (Ecs. 14-38) pueden aplicarse a turbinas y también a bombas, lo que permite aumentar o disminuir a escala el tamaño de las turbinas (Fig. 14-103). Se emplean también para predecir el rendimiento de determinada turbina que opera a diferentes velocidades y flujos igual como se hizo antes para bombas.

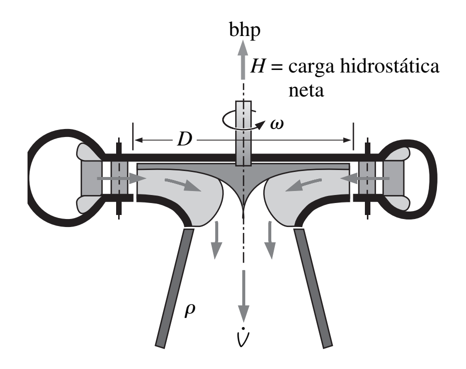
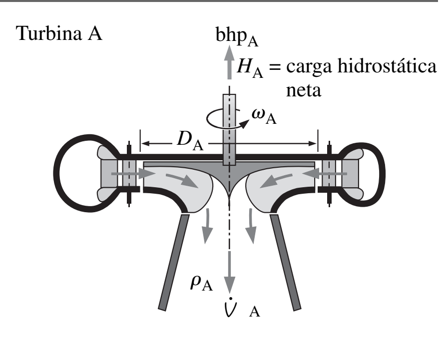


FIGURA 14-102
Variables principales empleadas para el análisis dimensional de una turbina.



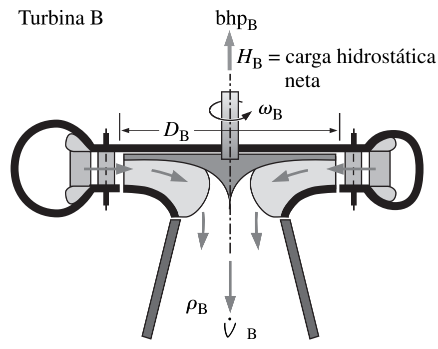


FIGURA 14-103
El análisis dimensional es útil para la adaptación a escala de dos turbinas *geométricamente similares*. Si los parámetros adimensionales de la turbina A son equivalentes a los de la turbina B, las dos turbinas son *dinámicamente similares*.

Las simples leyes de semejanza son estrictamente válidas si el modelo y el prototipo funcionan a número de Reynolds idénticos y son similares de manera exacta desde el punto de vista geométrico (inclusive la rugosidad superficial relativa y la distancia entre las puntas de aspas y la carcasa). Por desgracia, no siempre es posible satisfacer todos estos criterios cuando se realizan pruebas de modelo, porque el número de Reynolds que puede lograrse en este tipo de pruebas es por lo común mucho menos grande que el del prototipo, y las superficies de modelo tienen rugosidad y la distancia entre las puntas de aspas y la carcasa relativos más grandes. Cuando el prototipo de escala completa es considerablemente más grande que el modelo, el rendimiento del prototipo es por lo general *mejor*, por las mismas razones explicadas antes para las bombas. Existen ecuaciones empíricas para considerar el incremento de eficiencia entre un modelo pequeño y un prototipo de escala completa. Moody (1926) recomendó una de esas ecuaciones y puede usarse como corrección de primera aproximación:

Ecuación de Moody de corrección para eficiencia de turbinas:

$$\eta_{\text{turbina, prototipo}} \cong 1 - (1 - \eta_{\text{turbina, modelo}})\left(\frac{D_{\text{modelo}}}{D_{\text{prototipo}}}\right)^{1/5} \qquad \textbf{(14-49)}$$

Note que la ecuación 14-49 se usa también como una corrección de primera aproximación cuando se ajustan las bombas modelo a escala completa (Ec. 14-34).

En la práctica, los ingenieros de hidroturbinas encuentran por lo general que el incremento real de eficiencia del modelo al prototipo es sólo de alrededor de dos tercios del incremento que se expresa en la ecuación 14-49. Por ejemplo, suponga que la eficiencia de un modelo a escala de un décimo es 93.2 por ciento. La ecuación 14-49 predice una eficiencia de prototipo de escala completa de 95.7 por ciento, o un incremento de 2.5 por ciento. En la práctica, se esperan sólo cerca de dos tercios de este incremento, o 93.2 + 2.5(2/3) = 94.9 por ciento. Algunas ecuaciones de corrección más avanzadas se obtienen de la **International Electrotechnical Commission (IEC**, por sus siglas en inglés), una organización a nivel mundial para estandarización.

EJEMPLO 14-13 Aplicación de las leyes de semejanza para turbinas

Se diseña una turbina para una presa hidroeléctrica. En vez de partir desde cero, los ingenieros deciden adaptar geométricamente una turbina diseñada con anterioridad que tiene excelente historia de rendimiento. La turbina existente (turbina A) tiene diámetro D_A = 2.05 m y gira a $\dot{n}_A$ = 120 rpm (ω_A = 12.57 rad/s). En su punto de mejor eficiencia, $\dot{V}_A$ = 350 m^3/s, H_A = 75.0 m de agua y bhp$_A$ = 242 MW. La nueva turbina (turbina B) es para una instalación más grande. Su generador girará a la misma velocidad (120 rpm), pero su carga hidrostática neta será mayor (H_B = 104 m). Calcule el diámetro de la nueva turbina de modo que funcione con mayor eficiencia y calcule $\dot{V}_B$, bhp$_B$ y $\eta_{\text{turbina,B}}$.

SOLUCIÓN Se diseñará una nueva hidroturbina ajustando una ya existente. En particular se calculará el diámetro de la nueva turbina, el gasto volumétrico y la potencia al freno.

Hipótesis **1** La nueva turbina es, desde el punto de vista geométrico, similar a una hidroturbina existente. **2** Los efectos de número de Reynolds y los de la rugosidad son despreciables. **3** La nueva compuerta también es similar a la existente, de modo que el flujo que entra a la nueva turbina (perfil de velocidad, turbulencia, intensidad, etcétera) es similar al de la turbina existente.

Propiedades La densidad del agua a 20ºC es ρ = 998.0 kg/m^3.

Análisis Puesto que la nueva turbina B es dinámicamente similar a la turbina existente A, se tiene interés sólo en un punto de operación homólogo particular de ambas turbinas, a saber, el punto de la mejor eficiencia. De la ecuación 14-38*b* se despeja D_B:

$$D_B = D_A\sqrt{\frac{H_B}{H_A}}\frac{\dot{n}_A}{\dot{n}_B} = (2.05\text{m})\sqrt{\frac{104\text{ m}}{75.0\text{ m}}}\frac{120\text{ rpm}}{120\text{ rpm}} = \mathbf{2.41\text{ m}}$$

Luego, de la ecuación 14-38 se despeja $\dot{V}_B$,

$$\dot{V}_B = \dot{V}_A\left(\frac{\dot{n}_B}{\dot{n}_A}\right)\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^3 = (350\text{ m}^3/\text{s})\left(\frac{120\text{ rpm}}{120\text{ rpm}}\right)\left(\frac{2.41\text{ m}}{2.05\text{ m}}\right)^3 = \mathbf{572\text{ m}^3/\text{s}}$$

Por último, de la ecuación 14-38c se despeja bhp_B,

$$\text{bhp}_B = \text{bhp}_A\left(\frac{\rho_B}{\rho_A}\right)\left(\frac{\dot{n}_B}{\dot{n}_A}\right)^3\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^5$$

$$= (242\text{ MW})\left(\frac{998.0\text{ kg/m}^3}{998.0\text{ kg/m}^3}\right)\left(\frac{120\text{ rpm}}{120\text{ rpm}}\right)^3\left(\frac{2.41\text{ m}}{2.05\text{ m}}\right)^5 = \mathbf{548\text{ MW}}$$

Como comprobación, se calculan los parámetros de turbina adimensionales de la ecuación 14-47 para ambas turbinas con el fin de mostrar que de hecho estos dos puntos de operación son homólogos (Fig. 14-104). Sin embargo, como se explicó, la similitud dinámica total no puede lograrse en realidad entre las dos turbinas como resultado de los efectos de escala (las turbinas más grandes tienen por lo general mayor eficiencia). El diámetro de la nueva turbina es más o menos de 18 por ciento mayor que el de la turbina existente, así que el incremento de eficiencia debido al tamaño de la turbina no debe ser importante. Esto se comprueba mediante la ecuación de Moody de corrección para eficiencia (Ec. 14-49), se considera a la turbina A como el "modelo" y la B como el "prototipo":

Corrección de eficiencia:

$$\eta_{\text{turbina, B}} \cong 1 - (1 - \eta_{\text{turbina, A}})\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^{1/5} = 1 - (1 - 0.942)\left(\frac{2.05\text{ m}}{2.41\text{ m}}\right)^{1/5} = \mathbf{0.944}$$

o 94.4 por ciento. De hecho, la corrección de primera aproximación produce una eficiencia predicha para la turbina más grande que es sólo una fracción de un porcentaje mayor que el de la turbina más pequeña.

Discusión Si el flujo que entra a la nueva turbina desde la compuerta no fuera similar al de la turbina existente (por ejemplo, tenga el perfil de velocidad e intensidad de turbulencia diferentes), no podría esperarse la similitud dinámica exacta.

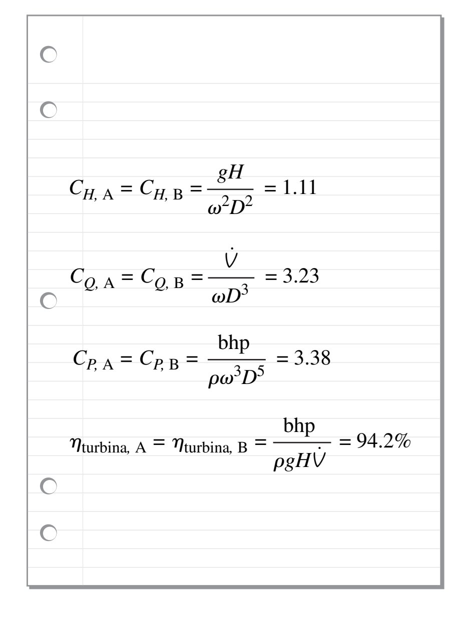


FIGURA 14-104
Parámetros adimensionales para ambas turbinas del ejemplo 14-13. Puesto que las dos turbinas operan en puntos homólogos, sus parámetros adimensionales deben coincidir.

Velocidad específica de las turbinas

En el análisis previo de bombas se definió otro parámetro adimensional útil, la velocidad específica de la bomba (N_{Sp}), con base en C_Q y C_H. Podría emplearse la misma definición de la velocidad específica para turbinas, pero como para turbinas C_P en vez de C_Q es el parámetro adimensional independiente, se define de modo distinto la **velocidad específica de la turbina** (N_{St}), a saber, en términos de C_P y C_H:

Velocidad específica de la turbina:

$$N_{St} = \frac{C_P^{1/2}}{C_H^{5/4}} = \frac{(\text{bhp}/\rho\omega^3 D^5)^{1/2}}{(gH/\omega^2 D^2)^{5/4}} = \frac{\omega(\text{bhp})^{1/2}}{\rho^{1/2}(gH)^{5/4}} \qquad \textbf{(14-50)}$$

Motor/generador
(actúa como motor)

Bomba-turbina
(actúa como bomba)

a)

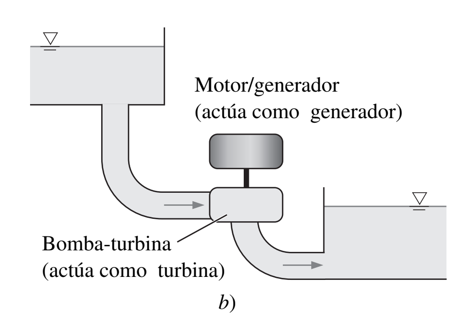


FIGURA 14-105
En algunas plantas de energía se emplea una *bomba-turbina* para almacenar energía: *a*) la bomba-turbina bombea agua durante los periodos de baja demanda de energía y *b*) la bomba-turbina genera electricidad durante los periodos de alta demanda de energía.

La velocidad específica de la turbina se llama también **velocidad específica de potencia** en algunos libros de texto. Se deja como ejercicio comparar las definiciones de velocidad específica de la bomba (Ec. 14-35) y la velocidad específica de la turbina (Ec. 14-50) con el fin de mostrar que:

Relación entre N_{St} *y* N_{Sp}:
$$N_{St} = N_{Sp}\sqrt{\eta_{turbina}} \qquad \textbf{(14-51)}$$

Note que la ecuación 14-51 *no* se aplica a una bomba que opera hacia atrás como una turbina o viceversa. *Hay* aplicaciones en las que la misma turbomáquina se emplea como bomba *y* como turbina; estos dispositivos de denominan de modo apropiado **turbinas-bombas**. Por ejemplo, una central eléctrica que se acciona con energía nuclear o al quemar el carbón mineral podría bombear agua a una mayor elevación durante los tiempos de baja demanda de energía, y luego hacer circular esa agua por la misma turbomáquina (que opera como una turbina) durante los tiempos de mayor demanda de energía (Fig. 14-105). Este tipo de instalaciones suele aprovechar las diferencias de elevación naturales en sitios montañosos y logran cargas totales importantes (arriba de 1 000 ft) sin la construcción de una presa. En la figura 14-106 se muestra una fotografía de una turbina-bomba.

Note que hay ineficiencias en la turbina-bomba cuando funciona como bomba y también cuando opera como turbina. Además, puesto que una turbomáquina debe estar diseñada para operar como bomba *y* turbina, ni η_{bomba} ni $\eta_{turbina}$ son tan altas como lo serían para una bomba o turbina construidas para funcionar como tales. No obstante, la eficiencia global de este tipo de almacenamiento de energía es de más o menos 80 por ciento para una turbina-bomba bien diseñada.

En la práctica, la turbina-bomba podría operar a gasto volumétrico y rpm distintos cuando funciona como turbina en comparación a cuando opera como bomba, debido a que el punto de la mejor eficiencia de la turbina no necesariamente es el mismo que el de la bomba. Sin embargo, para el caso simple en el que el flujo y las rpm son los mismos para las operaciones de bomba y turbina, se emplean las ecuaciones 14-35 y 14-50 para comparar la velocidad específica de la bomba y la de la turbina. Después de aplicar algunas operaciones algebraicas:

Relación de velocidad específica de la turbina y la bomba a los mismos gasto y rpm:

$$N_{St} = N_{Sp}\sqrt{\eta_{turbina}}\left(\frac{H_{bomba}}{H_{turbina}}\right)^{3/4} = N_{Sp}(\eta_{turbina})^{5/4}(\eta_{bomba})^{3/4}\left(\frac{\text{bhp}_{bomba}}{\text{bhp}_{turbina}}\right)^{3/4} \qquad \textbf{(14-52)}$$



FIGURA 14-106
Rotor de una bomba-turbina empleada en la estación de embalse de agua bombeada de Yards Creek, en Blairstown, NJ. Hay siete aspas de rotor de diámetro externo 17.3 ft (5.27 m). La turbina gira a 240 rpm y produce 112 MW de potencia a un caudal de 56.6 m^3/s a partir de una carga hidrostática neta de 221 m.
Foto cortesía de American Hydro Corporation, York, PA. Reproducida con autorización, pág. 799.

Ya se analizaron algunos problemas con las unidades de velocidad específica de la bomba, pero estos mismos problemas podrían ocurrir con la velocidad específica de la turbina. A saber, aunque N_{St} es por definición un parámetro adimensional, los ingenieros están acostumbrados a usar unidades incongruentes que transforman a N_{St} en una cantidad adimensional problemática. En Estados Unidos, la mayoría de los ingenieros de turbinas escriben la velocidad rotacional en unidades de revoluciones por minuto (rpm), bhp en unidades de caballos de fuerza y H en unidades de pies. Además, pasan por alto la constante gravitacional g y la densidad ρ en la definición de N_{St} (se supone que la turbina trabaja en la tierra y que el fluido de trabajo es agua). Se define:

Velocidad específica de la turbina, unidades usuales de EUA:

$$N_{St,\,US} = \frac{(\dot{n},\ \text{rpm})\ (\text{bhp},\ \text{hp})^{1/2}}{(H,\ \text{ft})^{5/4}} \tag{14-53}$$

Existe cierta discrepancia en las publicaciones de turbomaquinaria acerca de las conversiones entre las dos formas de velocidad específica de la turbina. Para convertir $N_{St,USA}$ a N_{St}, se divide entre $g^{5/4}$ y $\rho^{1/2}$, y después se usan las relaciones de conversión para cancelar las unidades. Se fija $g = 32.174$ ft/s^2 y se supone que el agua tiene una densidad de $\rho = 62.40$ lbm/ft^3. Cuando se transforma de manera apropiada ω a rad/s, el favor de conversión es $N_{St,US} = 0.02301 N_{St}$ o $N_{St} = 43.46 N_{St,US}$. Sin embargo, algunos autores convierten ω a *revoluciones* por segundo al introducir un factor de 2π en la conversión, es decir, $N_{St,US} = 0.003662 N_{St}$ o $N_{St} = 273.1 N_{St,US}$. La primera conversión es más común y se resume en la figura 14-107.

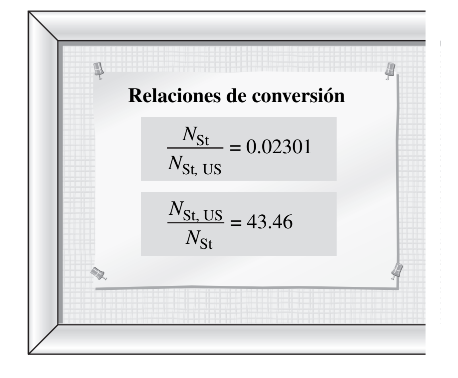


FIGURA 14-107
Conversiones entre las definiciones de la velocidad específica de la turbina: adimensional y en unidades usuales en Estados Unidos. Los valores numéricos se expresan hasta cuatro cifras significativas. En las conversiones se supone gravedad terrestre estándar y agua como medio de trabajo.

Desde el punto de vista técnico, la velocidad de turbina específica se podría aplicar a cualquier condición de operación y sería sólo otra función de C_P. Sin embargo, ésta no es la manera como se emplea usualmente. En cambio, es común definir la velocidad específica de la turbina sólo en el punto de la mejor eficiencia (PME, BEP por sus siglas en inglés) de la turbina. El resultado es un solo número que identifica a la turbina.

> La velocidad específica de la turbina se emplea para identificar la operación de una turbina en sus condiciones óptimas (punto de mejor eficiencia) y es útil para la selección preliminar de la turbina.

Como se grafica en la figura 14-108, las turbinas de impulsión tienen un rendimiento óptimo para N_{St} cercano a 0.15, mientras que las turbinas Francis y Kaplan funcionan mejor a N_{St} cercano a 1 y 2.5, respectivamente. Resulta que si N_{St} es menor que cerca de 0.3, una turbina de impulsión es la mejor elección. Si N_{St} está entre alrededor de 0.3 y 2, una turbina Francis es la mejor elección.

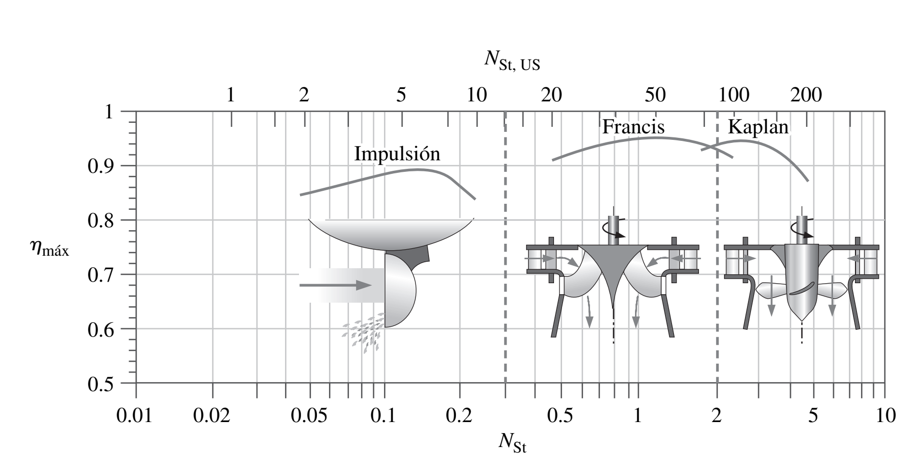


FIGURA 14-108
Eficiencia máxima como función de la velocidad específica de turbina para tres tipos principales de turbina dinámica. Las escalas horizontales muestran la velocidad específica adimensional (N_{St}) y la velocidad específica de turbina en unidades usuales de Estados Unidos ($N_{St,US}$). En la gráfica se proporcionan también los dibujos de los tipos de aspas para referencia.

Cuando N_{St} es mayor que casi 2, debe emplearse una turbina Kaplan. Estos intervalos se indican en la figura 14-108 en términos de N_{St} y $N_{St,US}$.

EJEMPLO 14-14 **Velocidad específica de la turbina**

Calcule y compare la velocidad específica de la turbina para la turbina pequeña A y la turbina B grande del Ejemplo 14-13.

SOLUCIÓN Se comparará la velocidad específica de dos turbinas dinámicamente similares.

Propiedades La densidad del agua a T = 20°C es ρ = 998.0 kg/m³.

Análisis Se calcula la velocidad específica adimensional para la turbina A:

$$N_{St,\,A} = \frac{\omega_A (\text{bhp}_A)^{1/2}}{\rho_A^{1/2}(gH_A)^{5/4}}$$

$$= \frac{(12.57\text{ rad/s})(242 \times 10^6\text{ W})^{1/2}}{(998.0\text{ kg/m}^3)^{1/2}[(9.81\text{ m/s}^2)(75.0\text{ m})]^{5/4}}\left(\frac{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{\text{W}\cdot\text{s}}\right)^{1/2} = 1.615 \cong \mathbf{1.62}$$

y para la turbina B:

$$N_{St,\,B} = \frac{\omega_B (\text{bhp}_B)^{1/2}}{\rho_B^{1/2}(gH_B)^{5/4}}$$

$$= \frac{(12.57\text{ rad/s})(548 \times 10^6\text{ W})^{1/2}}{(998.0\text{ kg/m}^3)^{1/2}[(9.81\text{ m/s}^2)(104\text{ m})]^{5/4}}\left(\frac{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{\text{W}\cdot\text{s}}\right)^{1/2} = 1.615 \cong \mathbf{1.62}$$

Se observa que las velocidades específicas para las dos turbinas son las mismas. Como comprobación de los conocimientos de álgebra se calcula N_{St} en la figura 14-109 de una manera diferente por medio de su definición en términos de C_P y C_H (Ec. 14-50). El resultado es el mismo (excepto por el error de redondeo). Por último, se calcula la velocidad específica de turbina en unidades usuales de EUA a partir de las conversiones de la figura 14-107.

$$N_{St,\,US,\,A} = N_{St,\,US,\,B} = 43.46 N_{St} = (43.46)(1.615) = \mathbf{70.2}$$

Discusión Debido a que las turbinas A y B operan en puntos homólogos, no es sorpresa que sus velocidades específicas de turbina sean las mismas. De hecho, si no lo fueran , sería una señal segura de un error algebraico o de cálculo. De la figura 14-108, una turbina Francis es de hecho la elección apropiada para una velocidad específica de turbina de 1.6.

Velocidad específica de turbina:

$$N_{St} = \frac{C_P^{1/2}}{C_H^{5/4}} = \frac{(3.38)^{1/2}}{(1.11)^{5/4}} = 1.61$$

FIGURA 14-109
Cálculo de la velocidad específica de turbina mediante los parámetros adimensionales C_P y C_H para el ejemplo 14-14 (vea la figura 14-104 para valores de C_P y C_H para la turbina A y la turbina B).

Turbinas de gas y de vapor

Hasta el momento, la mayor parte del análisis ha sido acerca de hidroturbinas. Ahora se analizan las turbinas que están diseñadas para uso con *gases*, como productos de combustión o vapor. En una planta de energía que se alimenta con carbón o energía nuclear, el vapor de alta presión se produce mediante una caldera y luego se envía a una turbina para producir electricidad. Debido a que el recalentamiento, la regeneración y otros esfuerzos incrementan la eficiencia global, estas turbinas de vapor usualmente tienen dos etapas (alta presión y baja presión). La mayoría de las turbinas de vapor de plantas de energía son dispositivos de flujo axial multietapas, como el que se muestra en la figura 14-110. No se muestran los álabes del estator que dirigen el flujo entre cada conjunto de álabes de la turbina. El análisis de turbinas de flujo axial es muy similar al de ventiladores de flujo axial, como se analizó en la sección 14-2.

Turbinas de flujo axial similares se emplean en los motores de propulsión (Fig. 14-62) y en los generadores de turbinas de gas (Fig. 14-111). Un generador de turbina de gas es similar a un motor de propulsión, excepto que en vez de proveer empuje, la turbomáquina está diseñada para transferir lo más posible de energía del combustible hacia el eje rotatorio, que está conectado a un generador eléctrico. Las turbinas de gas utilizadas para generar potencia son, por lo general, mucho más grandes que los motores de propulsión, por supuesto, ya que están en tierra. Como en el caso de la hidroturbinas, se logra una ganancia importante en eficiencia a medida que aumenta el tamaño de la turbina.

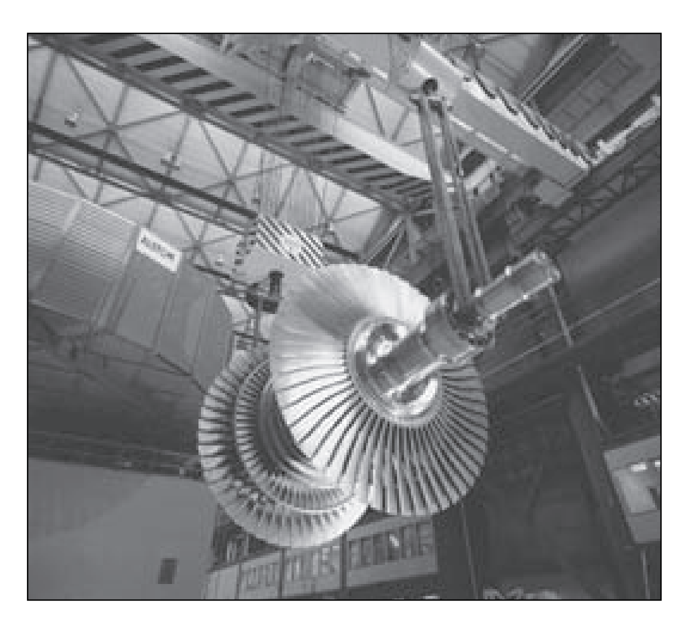


FIGURA 14-110
Álabes de una turbina de vapor de dos etapas típica empleada en una central eléctrica alimentada con carbón o energía nuclear. El flujo va de izquierda a derecha, con la etapa de presión alta a la izquierda y la etapa de presión baja a la derecha.
Cortesía, Alstom. Reproducida con autorización.

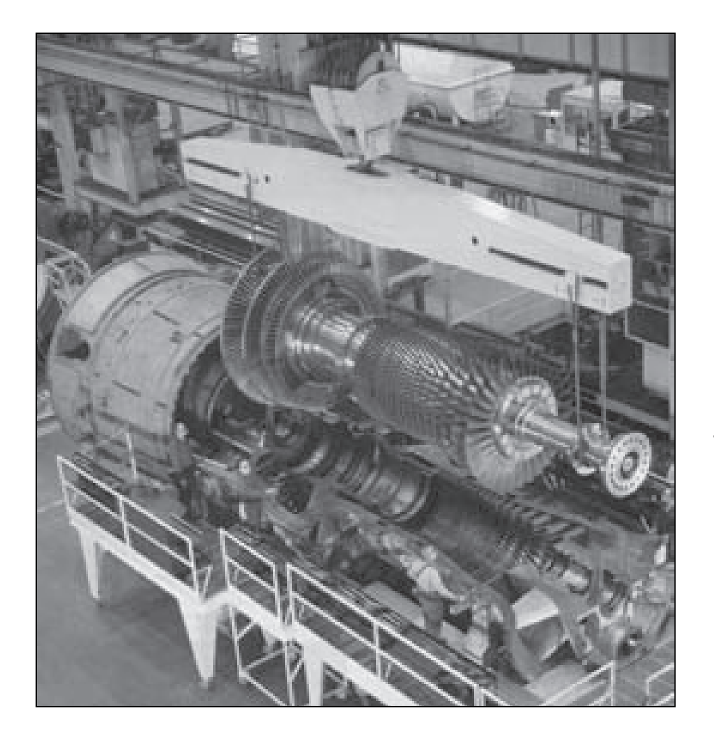


FIGURA 14-111
Ensamble del rotor de la turbina de gas MS7001F en descenso hacia la mitad inferior de la carcasa de la turbina. El flujo va de derecha a izquierda, con el conjunto de álabes del rotor corriente arriba que incluyen el compresor de varias etapas, y el conjunto de álabes del rotor corriente abajo que incluyen la turbina de varias etapas. Los álabes del estator del compresor y los álabes del estator de la turbina se observan en la mitad inferior de la carcasa de la turbina de gas. Esta turbina de gas gira a 3600 rpm y produce más de 135 MW de potencia.
Cortesía de General Electric Power Systems. Reproducido con autorización.

PROYECTOR DE APLICACIONES ■ Atomizadores de combustible rotatorios

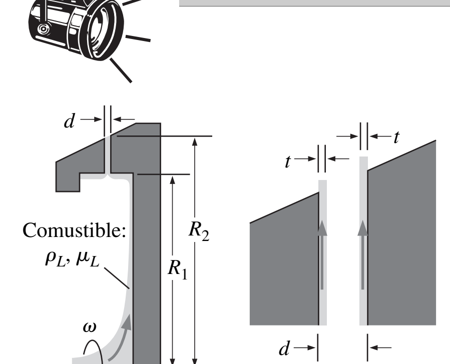


FIGURA 14-112
Esquema de *a*) un atomizador de combustible rotatorio y *b*) vista de acercamiento de la película de combustible líquido a lo largo de las paredes del canal.

Autor invitado: Werner J. A. Dahm, University of Michigan

Las tasas de rotación muy altas a las que operan los dispositivos de turbinas de gas pequeños, que con frecuencia se aproximan a 100 000 rpm, permiten a los atomizadores centrífugos rotatorios crear la dispersión de combustible líquido que se quema en el combustor. Note que un atomizador que gira a 30 000 rpm imparte 490 000 m/s^2 de aceleración (50 000 *g*) al combustible líquido, que permite a estos atomizadores de combustible la posibilidad de producir tamaños de gota muy pequeños.

Los tamaños reales de gota dependen de las propiedades del fluido, inclusive las densidades del líquido y del gas ρ_L y ρ_G, las viscosidades μ_L y μ_G, y la tensión superficial líquido-gas σ_s. En la figura 14-112 se muestra un atomizador rotatorio que gira a una velocidad ω, con canales radiales en el borde a radio nominal $R \equiv (R_1 + R_2)/2$. El combustible fluye hacia los canales debido a la aceleración $R\omega^2$ y forma una película líquida en las paredes de los canales. La fuerte aceleración origina un grosor de película *t* característico de sólo alrededor de 10 μm. La forma del canal es tal que produce un rendimiento de atomización deseable. Para una forma específica, los tamaños de gota resultantes dependen de la velocidad de flujo cruzado $V_c \equiv R\omega$ hacia el que emana la película en la salida del canal, junto con las propiedades del gas y el líquido. De éstas, existen cuatro grupos adimensionales que determinan el rendimiento de atomización: las razones de la densidades líquido-gas y viscosidades $r \equiv [\rho_L/\rho_G]$ y $m \equiv [\mu_L/\mu_G]$, el *número de Weber* para la película $\text{We}_t \equiv [\rho_G V_c^2 t/\sigma_s]$, y el *número de Ohnesorge* $\text{Oh}_t \equiv [\mu_L/(\rho_L \sigma_s t)^{1/2}]$.

Note que We_t da la razón característica entre las fuerzas aerodinámicas que ejerce el gas sobre la película líquida y las fuerzas de tensión superficial que actúan en la superficie del líquido, mientras que Oh_t proporciona la razón entre las fuerzas viscosas en la película líquida y las fuerzas de tensión superficial que actúan sobre la película. Juntas, expresan la importancia relativa de los tres efectos físicos principales relacionados con el proceso de atomización: *inercia, difusión viscosa* y *tensión superficial*.

En la figura 14-113 se muestran ejemplos del proceso de separación del líquido para varias formas de canal y velocidades de rotación, se observa mediante una fotografía láser por pulsos de 10 ns. Los tamaños de gota resultan ser relativamente insensibles a cambios en el número de Ohnesorge, ya que los valores para atomizadores de combustible prácticos están en el límite $\text{Oh}_t \ll 1$ y, por lo tanto, los efectos viscosos son relativamente de poca importancia. Sin embargo, el número de Weber es crucial puesto que los efectos de tensión superficial e inercia dominan el proceso de atomización. A números de We_t pequeños, el líquido experimenta separación *subcrítica,* en la cual la tensión superficial jala la delgada capa líquida hacia una sonda columna que después se separa para formar gotas relativamente grandes. A valores *supercríticos* de We_t, la delgada película líquida se separa de forma aerodinámica en finos tamaños de gota del orden del grosor de la película *t*. De resultados como éstos, los ingenieros elaboran de manera exitosa atomizadores de combustible rotatorios para aplicaciones prácticas.

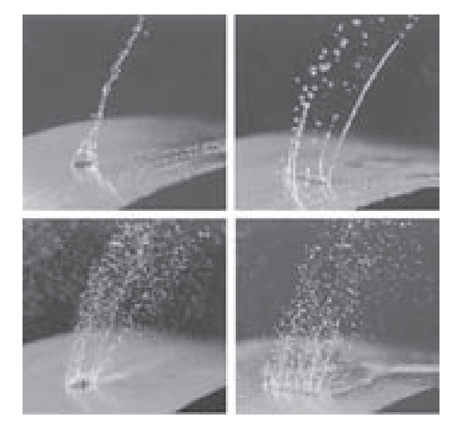


FIGURA 14-113
Fotografías de la atomización del líquido mediante atomizadores de combustible rotatorios, que muestran la desintegración subcrítica a valores relativamente bajos de We_t (*parte superior*), para los cuales los efectos de tensión superficial son suficientemente fuertes en relación con la inercia para jalar la delgada película líquida hacia columnas grandes y la desintegración supercrítica a valores mayores de We_t (*parte inferior*), para los cuales la inercia domina sobre la tensión superficial y la delgada película se atomiza en finas gotas.

Reimpresa con autorización de Werner J. A. Dahm, University of Michigan.

Referencias

Dahm, W. J. A., Patel, P. R., y Lerg, B. H., “Visualization and Fundamental Análisis of Liquid Atomization by Fuel Slingers in Small Gas Turbines”, *AIAA Paper núm. 2002-3183*, AIAA, Washington, DC, 2002.

RESUMEN

La turbomaquinaria se clasifica en dos categorías amplias, *bombas* y *turbinas*. La palabra *bomba* es un término general para cualquier máquina de fluido que *añade* energía *a* un fluido. Se explica cómo ocurre esta transferencia de energía para varios tipos de diseños de bomba, tanto *bombas de desplazamiento positivo* como *bombas dinámicas*. La palabra *turbina* se refiere a una máquina de fluido que *extrae* energía de un fluido. Existen también *turbinas de desplazamiento positivo* y *turbinas dinámicas* de varios tipos.

La ecuación más útil para el diseño preliminar de turbomaquinaria es la *ecuación de Euler de turbomáquina*,

$$T_{\text{flecha}} = \rho\dot{V}(r_2V_{2,\,t} - r_1V_{1,\,t})$$

Note que para bombas, la entrada y la salida están a los radios r_1 y r_2, respectivamente, mientras que para turbinas, la entrada está al radio r_2 y la salida está al radio r_1. Se muestran varios ejemplos donde las formas de álabes para bombas y turbinas están diseñadas con base en las velocidades de flujo deseadas. Luego, con la ecuación de Euler de turbomáquina, se predice el rendimiento de la turbomáquina.

Las *leyes de semejanza de turbomaquinaria* ilustran una aplicación práctica del análisis dimensional. Las leyes de semejanza se emplean en el diseño de nuevas turbomáquinas, que son similares desde el punto de vista geométrico a las turbomáquinas existentes. Tanto para bombas como para turbinas, los parámetros adimensionales principales son el coeficiente de carga hidrostática, el coeficiente de capacidad y el coeficiente de potencia, definidos, respectivamente, como:

$$C_H = \frac{gH}{\omega^2D^2} \qquad C_Q = \frac{\dot{V}}{\omega D^3} \qquad C_P = \frac{\text{bhp}}{\rho\omega^3D^5}$$

Además de éstos, se define la *eficiencia de la bomba* y la *eficiencia de la turbina* como recíprocas entre sí:

$$\eta_{\text{bomba}} = \frac{\dot{W}_{\text{potencia útil}}}{\dot{W}_{\text{flecha}}} = \frac{\rho g\dot{V}H}{\text{bhp}}$$

$$\eta_{\text{turbina}} = \frac{\dot{W}_{\text{flecha}}}{\dot{W}_{\text{potencia útil}}} = \frac{\text{bhp}}{\rho g\dot{V}H}$$

Por último, se definen otros dos parámetros adimensionales útiles llamados *velocidad específica de la bomba* y *velocidad específica de la turbina*, respectivamente, como:

$$N_{\text{Sp}} = \frac{C_Q^{1/2}}{C_H^{3/4}} = \frac{\omega\dot{V}^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \qquad N_{\text{St}} = \frac{C_P^{1/2}}{C_H^{5/4}} = \frac{\omega(\text{bhp})^{1/2}}{\rho^{1/2}(gH)^{5/4}}$$

Estos parámetros son útiles para la selección preliminar del tipo de bomba o turbina que es más apropiado para determinada aplicación.

El diseño de turbomaquinaria asimila el conocimiento de varias áreas importantes de la mecánica de fluidos, entre otras análisis de masa, energía y cantidad de movimiento (capítulos 5 y 6); análisis dimensional y modelado (capítulo 7); flujo en tuberías (capítulo 8); análisis diferencial (capítulos 9 y 10), y aerodinámica (capítulo 11). Además, para turbinas de gas y otros tipos de turbomáquinas que operan con gases, se necesita el análisis de flujo compresible (capítulo 12). Por último, la dinámica de fluidos computacional (capítulo 15) tiene un papel importante en el diseño de turbomáquinas altamente eficientes.

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. ASHRAE (American Society of Heating, Refrigerating and Air Conditioning Engineers, Inc.). *ASHRAE Fundamentals Handbook*, ASHRAE, 1791 Tullie Circle, NE, Atlanta, GA, 30329; ediciones cada cuatro años: 1993, 1997, 2001, etcétera.
2. L. F. Moody. “The Propeller Type Turbine”, *ASCE Trans.*, 89, p. 628, 1926.
3. Earl Logan, Jr., ed. *Handbook of Turbomachinery*. Nueva York: Marcel Dekker, Inc., 1995.
4. A. J. Glassman, ed. *Turbine Design and Application*. NASA Sp-290, NASA Scientific and Technical Information Program. Washington, DC, 1994.
5. D. Japikse y N. C. Baines. *Introduction to Turbomachinery*. Norwich, VT: Concepts ETI, Inc., y Oxford: Oxford University Press, 1994.
6. Earl Logan, Jr. *Turbomachinery: Basic Theory and Applications*, 2a ed. Nueva York: Marcel Dekker, Inc., 1993.
7. R. K. Turton. *Principles of Turbomachinery*, 2a ed. Londres: Chapman & Hall, 1995.
8. Terry Wright. *Fluid Machinery: Performance, Análisis, and Design*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999.

PROBLEMAS*

Problemas generales

14-1C ¿Cuál es el término más común para una *turbomáquina que produce energía*? ¿Y respecto a una *turbomáquina que absorbe energía*? Explique esta terminología. En particular, ¿desde cuál marco de referencia se definen estos términos, el del fluido o el de los alrededores?

14-2C ¿Cuáles son las diferencias principales entre ventiladores, sopladores y compresores? Explique en términos de aumento de presión y gasto volumétrico.

14-3C Liste por lo menos dos ejemplos comunes de ventiladores, de sopladores y de compresores.

14-4C Analice la diferencia principal entre una *turbomáquina de desplazamiento positivo* y una *turbomáquina dinámica*. Dé un ejemplo de cada una para bombas y turbinas.

14-5C Para una bomba, explique la diferencia entre *potencia al freno* y *potencia útil*, y defina también la eficiencia de la bomba en términos de estas cantidades.

14-6C Para una turbina, explique la diferencia entre *potencia al freno* y *potencia útil*, y defina también la eficiencia de la turbina en términos de estas cantidades.

14-7C Explique por qué hay un término "extra" en la ecuación de Bernoulli en un marco de referencia rotatorio.

14-8 Una bomba de agua incrementa la presión del agua a través de ella (Fig. P14-8). Se supone que el agua es incompresible. Para cada uno de los tres casos listados a continuación, ¿cómo cambia la velocidad promedio del agua en la bomba? En particular, V_{salida} es menor, igual o mayor que $V_{entrada}$? Muestre sus ecuaciones y explíquelas.

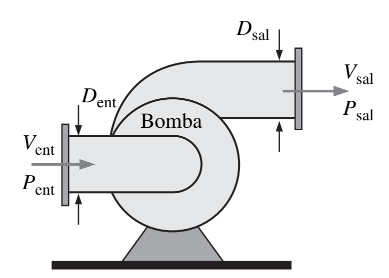


FIGURA P14-8

*Los problemas designados por una "C" son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos. Los problemas con el ícono se resuelven con la aplicación del EES y las resoluciones completas, junto con estudios paramétricos, se incluyen en el DVD adjunto a este libro. Los problemas con el ícono son de naturaleza detallada y se pretende que se resuelvan con una computadora, de preferencia aplicando el software de EES que acompaña a este libro.

a) El diámetro de salida es menor que el diámetro de entrada ($D_{salida} < D_{entrada}$).
b) Los diámetros de salida y entrada son iguales ($D_{salida} = D_{entrada}$).
c) El diámetro de salida es mayor que el diámetro de entrada ($D_{salida} > D_{entrada}$).

14-9 Un compresor de aire incrementa la presión ($P_{salida} > P_{entrada}$) y la densidad ($\rho_{salida} > \rho_{entrada}$) del aire que pasa por él (Fig. P14-9). Para el caso en el que los diámetros de entrada y salida son iguales ($D_{salida} = D_{entrada}$), ¿cómo cambia la velocidad promedio en el compresor? En particular, ¿V_{salida} es menor, igual o mayor que $V_{entrada}$? Explíquelo. *Respuesta:* menor que

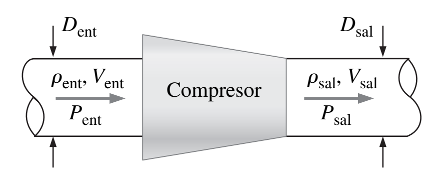


FIGURA P14-9

Bombas

14-10C Hay tres categorías principales de bombas dinámicas. Haga una lista y defínalas.

14-11C Para cada enunciado acerca de bombas centrífugas elija si es verdadero o falso y explique su respuesta de manera breve.

a) Una bomba centrífuga con álabes radiales tiene una eficiencia mayor que la misma bomba con álabes inclinados hacia atrás.

b) Una bomba centrífuga con álabes radiales produce un aumento de presión más grande que la misma bomba con álabes inclinados hacia atrás en un intervalo amplio de $\dot{V}$.

c) Una bomba centrífuga con álabes inclinados hacia delante es una buena elección para proveer un aumento de presión grande en un intervalo amplio de gastos volumétricos.

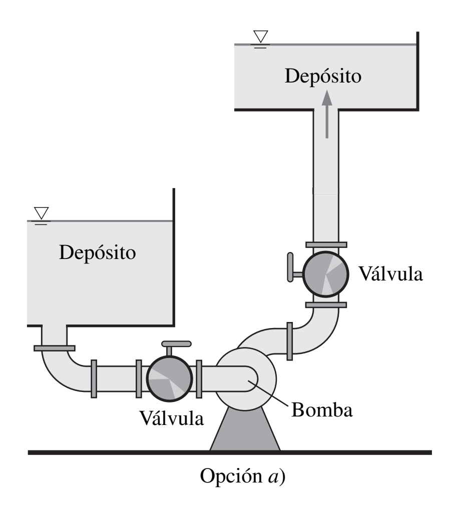
d) Una bomba centrífuga con álabes inclinados hacia delante quizá tendría menos álabes que una bomba del mismo tamaño con álabes inclinados hacia atrás o radiales.

14-12C La figura P14-12C muestra dos ubicaciones posibles para una bomba de agua en un sistema de tuberías que bombea agua de un depósito inferior a uno superior. ¿Cuál lugar es mejor? ¿Por qué?

14-13C Defina la *carga de aspiración neta positiva* y la *carga de aspiración neta positiva necesaria*, y explique cómo se emplean estas dos cantidades para garantizar que no ocurra cavitación en una bomba.

14-14C Considere el flujo a través de una bomba de agua. Para cada enunciado elija si es verdadero o falso, y explique de manera breve su respuesta.

a) Cuanto más rápido sea el flujo por una bomba, hay más probabilidades de que ocurra cavitación.



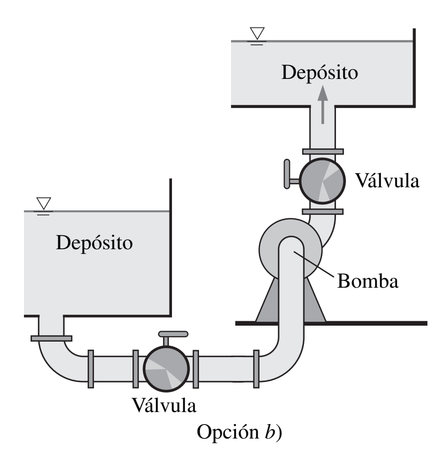


FIGURA P14-12C

b) Cuando aumenta la temperatura del agua, la $\text{NPSH}_{\text{necesaria}}$ también aumenta.

c) Cuando aumenta la temperatura del agua, la NPSH disponible aumenta también.

d) Cuando aumenta la temperatura del agua, es probable que ocurra cavitación.

14-15C Explique por qué, usualmente, no es recomendable colocar en serie o en paralelo dos (o más) bombas distintas.

14-16C Considere una típica bomba centrífuga. Seleccione el inciso de cierto o falso y discuta brevemente su respuesta.

a) $\dot{V}$ en la *descarga libre* de la bomba es mayor que $\dot{V}$ en su *punto de mejor eficiencia*.

b) En la carga al cierre de la bomba, la *eficiencia de la bomba* es cero.

c) En el *punto de la mejor eficiencia*, su *carga neta* está en su valor máximo.

d) En la *descarga libre* de la bomba, la *eficiencia de la bomba* es cero.

14-17C Escriba la ecuación que define la carga de aspiración neta positiva, NPSH (disponible) real. De esta definición, explique por lo menos cinco formas de disminuir la probabilidad de cavitación en la bomba, para los mismos líquido, temperatura y gasto volumétrico.

14-18C Considere un flujo estacionario, incompresible, por dos bombas idénticas (bombas 1 y 2), ya sea en serie o en paralelo. Para cada enunciado elija si éste es verdadero o falso y explique su respuesta de manera breve.

a) El gasto volumétrico o caudal por las dos bombas en serie es igual a $\dot{V}_1 + \dot{V}_2$.

b) La carga hidrostática neta global por las dos bombas en serie es igual a $H_1 + H_2$.

c) El caudal por las dos bombas en paralelo es igual a $\dot{V}_1 + \dot{V}_2$.

d) La carga hidrostática neta global por las dos bombas en paralelo es igual a $H_1 + H_2$.

14-19C En la figura P14-19C se muestra una gráfica de la carga hidrostática neta de la bomba como una función del caudal o capacidad de la bomba. En la figura, indique la carga al cierre, la descarga libre, la curva de rendimiento de la bomba, la curva del sistema y el punto de operación.

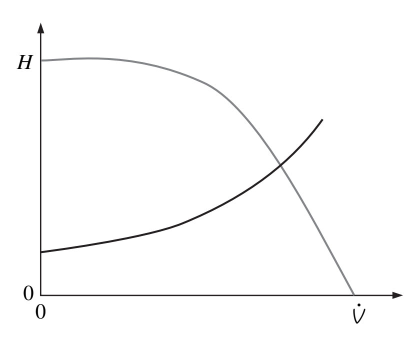


FIGURA P14-19C

14-20 Suponga que la bomba de la figura P14-19C se sitúa entre dos depósitos de agua con sus superficies libres abiertas a la atmósfera. ¿Cuál superficie libre está a mayor altura, la que corresponde al depósito que suministra agua a la entrada de la bomba o la que corresponde al depósito conectado a la salida de la bomba? Justifique su respuesta mediante la ecuación de la energía entre las dos superficies libres.

14-21 Suponga que la bomba de la figura P14-19C está situada entre dos grandes depósitos de agua con sus superficies libres abiertas a la atmósfera. Explique de manera cuantitativa lo que sucedería con la curva de rendimiento de la bomba si la superficie libre del depósito de salida aumentara de altura con todo lo demás igual. Repita para la curva del sistema. Qué sucedería con el punto de operación, ¿disminuiría el caudal en el punto de operación, aumentaría o permanecería igual? Indique el cambio en la gráfica cualitativa de *H* contra $\dot{V}$, y explíquelo (sugerencia: emplee la ecuación de la energía entre la superficie

libre del depósito corriente arriba de la bomba y la superficie libre del depósito corriente abajo de la bomba).

14-22 Suponga que la bomba de la figura P14-19C se sitúa entre dos grandes depósitos de agua con sus superficies libres abiertas a la atmósfera. Explique de manera cuantitativa qué sucedería con la curva de rendimiento de la bomba si se cambiara una válvula en la tubería 100 por ciento abierta a 50 por ciento abierta, con todo lo demás sin cambio. Repita para la curva del sistema. Qué sucedería con el punto de operación, ¿el caudal disminuiría, aumentaría o permanecería sin cambio en el punto de operación? Indique el cambio en una gráfica cualitativa de H $\dot{V}$, y explíquelo (sugerencia: emplee la ecuación de la energía entre la superficie libre del depósito corriente arriba y la superficie libre del depósito corriente abajo.)
Respuesta: disminuye

14-23 Considere el sistema de flujo ilustrado en la figura P14-23. El fluido es agua y la bomba es de tipo centrífuga. Genere una gráfica *cualitativa* de la carga hidrostática neta de la bomba como una función de la capacidad de la bomba. En la figura, indique la carga al cierre, la descarga libre, la curva de rendimiento de la bomba, la curva del sistema, y el punto de operación (sugerencia: considere con cuidado la carga hidrostática neta necesaria en condiciones de flujo cero).

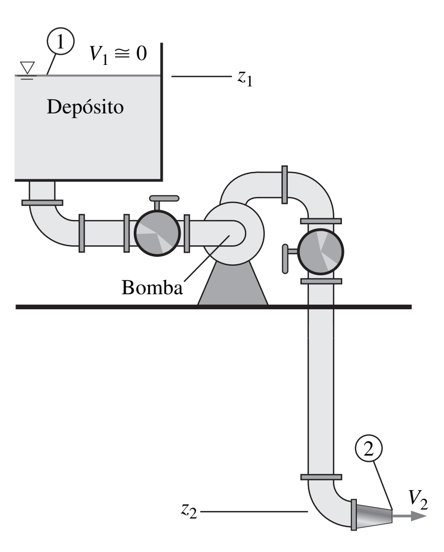


FIGURA P14-23

14-24 Suponga que la bomba de la figura P14-23 opera en *condiciones de descarga libre*. La tubería, tanto corriente arriba como corriente abajo de la bomba, tiene un diámetro interno de 2.0 cm y rugosidad casi cero. El coeficiente de pérdidas menores relacionado con la entrada de borde agudo es 0.50, cada válvula tiene un coeficiente de pérdidas menores igual a 2.4 y cada uno de los tres codos tiene un coeficiente de pérdidas menores de 0.90. La contracción a la salida reduce el diámetro por un factor de 0.60 (60 por ciento del diámetro de la tubería), y el coeficiente de pérdidas menores de la contracción es 0.15. Note que este coeficiente de pérdidas menores se basa en la velocidad de *salida* promedio, no en la velocidad promedio por la tubería. La longitud de la tubería es de 6.7 m y la diferencia de alturas es $(z_1 - z_2) = 4.6$ m. Estime el caudal por esta tubería.
Respuesta: 36.0 Lpm

14-25 Repita el problema 14-24, pero con una tubería rugosa de $\varepsilon = 0.50$ mm de rugosidad. Suponga que se emplea una bomba modificada, de modo que la nueva bomba opera en sus condiciones de descarga libre, como en el problema 14-24. Suponga que las otras dimensiones y parámetros son los mismos que para este problema. ¿Sus resultados concuerdan con la intuición? Explíquelo.

14-26 Considere el sistema de tubería de la figura P14-23, con todas las dimensiones, parámetros, coeficientes de pérdidas menores, etcétera, del problema 14-24. La curva característica de la bomba sigue un ajuste de curva parabólica, $H_{\text{disponible}} = H_0 - a\dot{V}^2$, donde $H_0 = 17.6$ m es la carga al cierre para la bomba y $a = 0.00426$ m/(Lpm)^2 es un coeficiente del ajuste de curva. Estime el caudal de operación $\dot{V}$ en Lpm (litros por minuto) y compare con el del problema 14-24. Explíquelo.

14-27E Los datos de rendimiento de una bomba centrífuga para agua se muestran en la Tabla P14-27E para agua a 77ºF (gpm = galones por minuto). *a*) Para cada renglón de datos, calcule la eficiencia de la bomba (por ciento). *Muestre las unidades y conversiones de unidades para certidumbre total*. *b*) Estime el gasto volumétrico (gpm) y la carga hidrostática neta (pies) en el PME(BEP) de la bomba.

TABLA P14-27E

$\dot{V}$, gpm	H, ft	bhp, hp
0.0	19.0	0.06
4.0	18.5	0.064
8.0	17.0	0.069
12.0	14.5	0.074
16.0	10.5	0.079
20.0	6.0	0.08
24.0	0.0	0.078

14-28 Transforme cada columna de los datos de rendimiento de la bomba del problema 14-27E a unidades métricas: $\dot{V}$ en Lpm (litros por minuto), H en m y bhp en W. Calcule la eficiencia de la bomba (por ciento) usando estos valores métricos, y compare con los del problema 14-27E.

14-29E Para la bomba centrífuga del problema 14-27E, grafique los datos de rendimiento de la bomba: H (pies), bhp (hp) y η_{bomba} (por ciento) como funciones de $\dot{V}$ (gpm). Sólo utilice valores numéricos (sin trazar las líneas). Efectúe los ajustes de curva polinominal por método de mínimos cuadrados lineal para todos los tres parámetros, y grafique las curvas ajustadas como líneas (no simbólicamente) en la misma gráfica. Para uniformidad, use un ajuste de curva de primer orden para H como una función de $\dot{V}^2$, emplee un ajuste de curva de segundo orden para bhp como una función de $\dot{V}$ y $\dot{V}^2$, y utilice ajuste de curva de tercer orden para h_{bomba} como una función de $\dot{V}$, $\dot{V}^2$ y $\dot{V}^2$. Haga una lista de las ecuaciones de ajuste de curvas y los coeficientes (con unidades) para certidumbre total. Calcule el PME (BEP) de la bomba con base en las expresiones de ajuste de curvas.

14-30E Suponga que la bomba de los problemas 14-27 y 14-29E se emplea en un sistema de tubería que tiene la demanda de $H_{\text{necesaria}} = (z_2 - z_1) + b\dot{V}^2$, donde la diferencia de elevación $z_2 - z_1 = 15.5$ ft, y el coeficiente $b = 0.00986$ ft/(gpm)^2. Estime el punto de operación para el sistema, a saber, $\dot{V}_{\text{operación}}$ (gpm) y $H_{\text{operación}}$ (ft). *Respuestas:* 9.14 gpm, 16.3 ft

14-31 Los datos de rendimiento para una bomba centrífuga de agua se muestran en la tabla P14-31 para agua a 20ºC (Lpm = litros por minuto). *a*) Para cada renglón de datos, calcule la eficiencia de la bomba (por ciento). *Muestre todas las unidades y conversiones para certidumbre total*. *b*) Estime el caudal (Lpm) y la carga hidrostática neta (m) en PME (BEP) de la bomba.

TABLA P14-31

$\dot{V}$, Lpm	H, m	bhp, W
0.0	47.5	133
6.0	46.2	142
12.0	42.5	153
18.0	36.2	164
24.0	26.2	172
30.0	15.0	174
36.0	0.0	174

14-32 Para la bomba centrífuga del problema 14-31, grafique los datos de rendimiento de la bomba: H (m), bhp (W) y η_{bomba} (por ciento) como funciones de $\dot{V}$ (Lpm). Sólo utilice los valores numéricos (no tracen las líneas). Realice los ajustes de curva polinominal por método de mínimos cuadrados lineal para los tres parámetros y grafique las curvas ajustadas como líneas (no simbólicamente) en la misma gráfica. Para tener congruencia, use un ajuste de curva de primer orden para H como una función de $\dot{V}^2$, emplee un ajuste de curva de segundo orden para bhp como una función de $\dot{V}$ y $\dot{V}^2$, y utilice un ajuste de curva de tercer orden para η_{bomba} como una función de $\dot{V}$, $\dot{V}^2$ y $\dot{V}^3$. Haga una lista de las ecuaciones y coeficientes de ajuste de curvas (con unidades) para credibilidad total. Calcule el PME de la bomba con base en las expresiones de ajuste de curvas.

14-33 Suponga que la bomba de los problemas 14-31 y 14-32 se emplea en un sistema de tuberías que tiene un requerimiento de sistema $H_{\text{requerida}} = (z_2 - z_1) + b\,\dot{V}^2$, donde la diferencia de alturas $z_2 - z_1 = 10.0$ m, y el coeficiente $b = 0.0185$ m (Lpm)^2. Estime el punto de operación del sistema, a saber, $\dot{V}_{\text{operación}}$ (Lpm) y $H_{\text{operación}}$ (m).

14-34 Suponga que considera comprar una bomba de agua con los datos de rendimiento que se muestran en la tabla P14-34. Su supervisor le pide cierta información acerca de la bomba. *a*) Estime la carga al cierre H_0 y la descarga libre $\dot{V}_{\text{máx}}$ de la bomba (sugerencia: ejecute un ajuste de curva por método de mínimos cuadrados (análisis de regresión) de H disponible contra $\dot{V}^2$, y calcule los valores del mejor ajuste de los coeficientes H_0 y a que traducen los datos tabulados de la tabla P14-34 en una expresión parabólica, $H_{\text{disponible}} = H_0 - a\,\dot{V}^2$. De estos coeficientes, estime la descarga libre de la bomba). *b*) La aplicación requiere 57.0 Lpm de flujo a un aumento de presión por la bomba de 5.8 psi. ¿Esta bomba es capaz de satisfacer las necesidades? Explíquelo.

TABLA P14-34

$\dot{V}$, Lpm	H, m
20	21
30	18.4
40	14
50	7.6

14-35E Un fabricante de bombas pequeñas de agua enlista los datos de rendimiento para una familia de sus bombas como un ajuste de curva parabólica, $H_{\text{disponible}} = H_0 - a\dot{V}^2$, donde H_0 es la carga al cierre de la bomba y a es un coeficiente. Tanto H_0 como a se enlistan en una tabla para la familia de bombas, junto con la descarga libre de la bomba. La carga de la bomba se da en unidades de pies de columna de agua, y la capacidad se da en unidades de galones por minuto. *a*) ¿Cuáles son las unidades del coeficiente a? *b*) Obtenga una expresión para la descarga libre de la bomba $\dot{V}_{\text{máx}}$ en términos de H_0 y a. *c*) Suponga que una de las bombas del fabricante se emplea para transportar agua desde un gran depósito a otro a una mayor altura. Las superficies libres de ambos depósitos están expuestas a la presión atmosférica. La curva del sistema se simplifica a $H_{\text{requerida}} = (z_2 - z_1) + b\dot{V}^2$. Calcule el punto de operación de la bomba ($\dot{V}_{\text{operación}}$ y $H_{\text{operación}}$) en términos de H_0, a, b y la diferencia de alturas $z_2 - z_1$.

14-36 Los datos de rendimiento de una bomba de agua siguen el ajuste de curva $H_{\text{disponible}} = H_0 - a\dot{V}^2$, donde la carga al cierre de la bomba es $H_0 = 5.30$ m, el coeficiente es $a = 0.0453$ m/(Lpm)^2, las unidades de la carga hidrostática de la bomba H son metros y las unidades de $\dot{V}$**,** litros por minuto (Lpm). La bomba se emplea para llevar agua desde un gran depósito a otro a una mayor altura. Las superficies libres de ambos depósitos están expuestas a la presión atmosférica. La curva del sistema se simplifica a $H_{\text{necesaria}} = (z_2 - z_1) + b\dot{V}^2$, donde la diferencia de alturas $z_2 - z_1 = 3.52$ m y el coeficiente $b = 0.0261$ m(Lpm)^2. Calcule el punto de operación de la bomba ($\dot{V}_{\text{operación}}$ y $H_{\text{operación}}$) en unidades apropiadas (Lpm y metros, respectivamente). *Respuestas:* 4.99 Lpm, 4.17 m

14-37I Una bomba de agua se usa para llevar agua desde un gran depósito a otro que está a mayor altura. Las superficies libres de ambos depósitos están expuestas a la presión atmosférica, como se ilustra en la figura P14-37I. Las dimensiones y coeficientes de pérdidas menores aparecen en la figura. El rendimiento de la bomba se aproxima por medio de la expresión $H_{\text{disponible}} = H_0 - a\dot{V}^2$, donde la carga al cierre es $H_0 = 125$ pies de columna de agua, el coeficiente es $a = 2.50$ pies/gpm^2, la carga disponible de la bomba $H_{\text{disponible}}$ está en unidades de pies de columna de agua y la capacidad $\dot{V}$ está en unidades de galones por minuto (gpm). Estime la capacidad de descarga de la bomba. *Respuesta:* 6.34 gpm

$z_2 - z_1$ = 22.0 ft (diferencia de elevación)
D = 1.20 in (diámetro de tubería)
$K_{L,\text{ entrada}}$ = 0.50 (entrada de la tubería)
$K_{L,\text{ válvula 1}}$ = 2.0 (válvula 1)
$K_{L,\text{ válvula 2}}$ = 6.8 (válvula 2)
$K_{L,\text{ codo}}$ = 0.34 (cada codo, hay 3)
$K_{L,\text{ salida}}$ = 1.05 (salida de tubería)
L = 124 ft (largo total de la tubería)
ε = 0.0011 in (tubería menos densa)

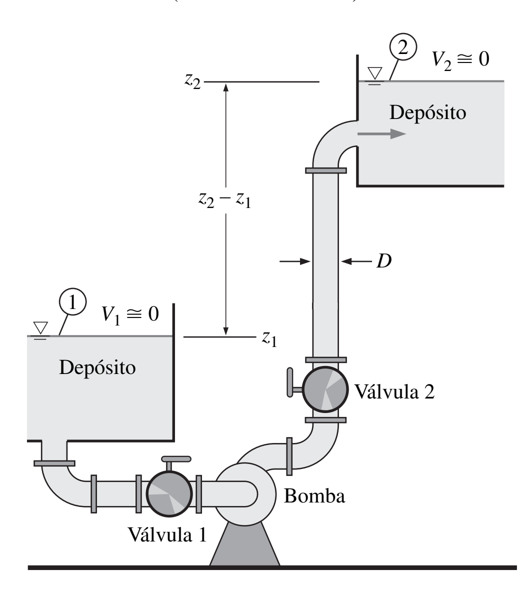


FIGURA P14-37E

14-38I Para la bomba y el sistema de tubería del problema 14-37I, grafique la carga necesaria de la bomba $H_{\text{necesaria}}$ (pies de columna de agua) como una función del caudal $\dot{V}$ (gpm). En la misma gráfica, compare la carga disponible de la bomba $H_{\text{disponible}}$ en función de $\dot{V}$ y marque el punto de operación. Explíquelo.

14-39I Suponga que los dos recipientes del problema 14-37I están separados 1 000 ft horizontalmente a la misma altura. Todas las constantes y parámetros son idénticos a los del problema 14-37I excepto que la longitud total de la tubería es 1 124 ft en vez de 124 ft. Calcule el caudal para este caso y compare con el resultado del problema 14-37I. Explíquelo.

14-40E Paul comprende que la bomba del problema 14-37I no es la más adecuada para esta aplicación, ya que su carga al cierre (125 ft) es mucho mayor que su carga neta necesaria (menor que 30 ft), y su capacidad es bastante baja. En otras palabras, la bomba está diseñada para aplicaciones de baja capacidad y carga hidrostática alta, mientras que la aplicación en estudio es de carga hidrostática bastante baja, y se desea una capacidad mayor. Paul intenta convencer a su supervisor de que una bomba menos costosa, con menor carga al cierre, pero mayor descarga libre, produciría un flujo mucho mayor entre los dos depósitos. Paul busca en algunos folletos en línea y encuentra una bomba con los datos de rendimiento que se muestran en la tabla P14-40I. Su supervisor le pide predecir el caudal entre los dos depósitos si la bomba existente se reemplazara con la nueva bomba. *a*) Ejecute un ajuste de curva de mínimos cuadrados (análisis de regresión) de $H_{\text{disponible}}$ como una función de $\dot{V}^2$, y calcule los valores de mejor ajuste de los coeficientes H_0 y a que traducen los datos tabulados de la Tabla P14-40I en la expresión parabólica $H_{\text{disponible}} = H_0 - a\,\dot{V}^2$. Grafique los datos como los valores numéricos y la curva de ajuste como una línea para comparación. *b*) Estime el caudal de operación de la nueva bomba si fuera a reemplazar la bomba existente con todo lo demás igual. Compare el resultado del problema 14-37I y explique. ¿Tiene Paul la razón? *c*) Elabore una gráfica de la carga hidrostática neta necesaria y la carga hidrostática neta disponible como funciones del caudal e indique el punto de operación en la gráfica.

TABLA P14-40E

$\dot{V}$, gpm	H, ft
0	38
4	37
8	34
12	29
16	21
20	12
24	0

14-41 Se emplea una bomba para llevar agua de un gran depósito a otro que está a mayor altura. Las superficies libres de ambos depósitos están expuestas a la presión atmosférica, como se ilustra en la figura P14-41. Las dimensiones y los coeficientes de pérdidas menores se ilustran en la figura. El rendimiento

$z_2 - z_1$ = 7.85 m (diferencia de elevación)
D = 2.03 cm (diámetro de tubería)
$K_{L,\text{ entrada}}$ = 0.50 (entrada de la tubería)
$K_{L,\text{ válvula}}$ = 17.5 (válvula)
$K_{L,\text{ codo}}$ = 0.92 (cada codo, hay 5)
$K_{L,\text{ salida}}$ = 1.05 (salida de tubería)
L = 176.5 m (largo total de la tubería)
ε = 0.25 mm (tubería menos densa)

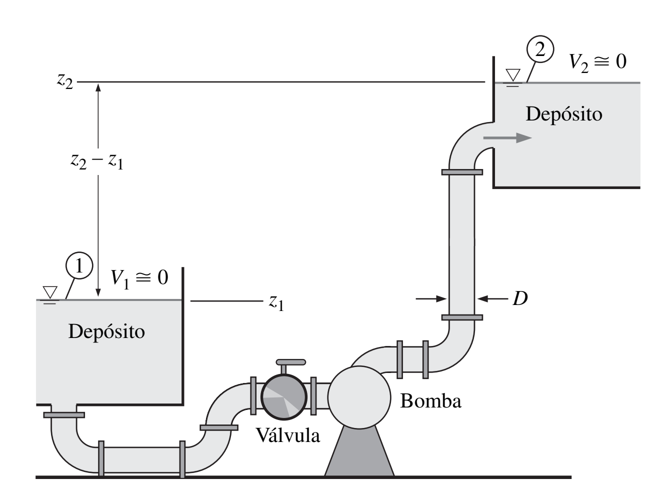


FIGURA P14-41

de la bomba se aproxima por medio de la expresión $H_{disponible} = H_0 - a\dot{V}^2$, donde la carga al cierre es $H_0 = 24.4$ m de columna de agua, el coeficiente es $a = 0.0678$ m/Lpm^2, la carga hidrostática disponible de la bomba $H_{disponible}$ está en unidades de metros de columna de agua y la capacidad $\dot{V}$ está en unidades de litros por minuto (Lpm). Estime la capacidad de descarga de la bomba. *Respuesta:* 11.6 Lpm

14-42 Para la bomba y el sistema de tubería del problema 14-41, grafique la carga hidrostática requerida $H_{necesaria}$ de la bomba (m de columna de agua) como una función del caudal $\dot{V}$ (Lpm). En la misma gráfica, compare la carga hidrostática disponible $H_{disponible}$ de la bomba en función de $\dot{V}$ y marque el punto de operación. Explíquelo.

14-43 Suponga que la superficie libre del depósito de entrada en el problema 14-41 mide 5.0 m más de altura, de modo que $z_2 - z_1 = 2.85$ m. Todas las constantes y parámetros permanecen idénticos a los del problema 14-41 excepto por la diferencia de altura. Calcule el caudal para este caso y compare con el resultado del problema 14-41. Explíquelo.

14-44 El supervisor de April le pide encontrar una bomba de reemplazo que incremente el caudal por la tubería del problema 14-41 por un factor de 2 o mayor. April busca en algunos folletos en línea y encuentra una bomba con los datos de rendimiento que se muestran en la tabla P14-44. Las dimensiones y parámetros son los mismos que en el problema 14-41, sólo se cambia la bomba. *a*) Efectúe un ajuste de curva de mínimos cuadrados (análisis de regresión) de $H_{disponible}$ contra $\dot{V}^2$, y calcule los valores de mejor ajuste de los coeficientes H_0 y a que traducen los datos tabulados de la tabla P14-44 en la expresión parabólica $H_{disponible} = H_0 - a\,\dot{V}^2$. Grafique los datos como los valores numéricos y el ajuste de curva como una línea para comparación. *b*) Use la expresión obtenida en el inciso *a*) para estimar el caudal de operación de la nueva bomba si se reemplazara la bomba existente con todo lo demás igual. ¿Logró su objetivo April? *c*) Construya una gráfica de la carga hidrostática neta requerida y la carga hidrostática neta disponible como funciones de caudal e indique el punto de operación sobre la gráfica.

TABLA P14-44

$\dot{V}$, Lpm	*H*, m
0	46.5
5	46
10	42
15	37
20	29
25	16.5
30	0

14-45 Calcule el caudal entre los depósitos del problema 14-41 para el caso en el que se duplica el diámetro de la tubería, con todo lo demás igual. Explíquelo.

14-46 Cuando se comparan los resultados de los problemas 14-41 y 14-45, se observa que el caudal se incrementa como se esperaba cuando se duplica el diámetro interno de la tubería. ¿Se podría esperar que se incremente también el número de Reynolds? ¿Se incrementa? Explíquelo.

14-47 Repita el problema 14-41, pero ignore todas las pérdidas menores. Compare el caudal con el del problema 14-41. ¿Son importantes las pérdidas menores en este problema? Explíquelo.

14-48 Considere la bomba y la tubería del problema 14-41. Suponga que el depósito inferior es enorme y que su superficie no cambia de elevación, pero el depósito superior no es tan grande, y su superficie aumenta poco a poco conforme se llena. Construya una curva de gasto volumétrico $\dot{V}$ (Lpm) como una función de $z_2 - z_1$ en el intervalo 0 al valor de $z_2 - z_1$, en el que la bomba ya no bombea más agua. ¿A qué valor de $z_2 - z_1$ ocurre esto? ¿La curva es lineal? Explique por qué sí o por qué no. ¿Qué sucedería si $z_2 - z_1$ fuera mayor que este valor? Explíquelo.

14-49E Un sistema de ventilación local (un sistema de campana y ducto) se emplea para eliminar aire y contaminantes que se producen cuando se suelda un objeto (Fig. P14-49I). El diámetro interno (DI) del conducto es $D = 9.06$ in, su rugosidad promedio es 0.0059 in y longitud total es $L = 34.0$ ft. Hay tres codos a lo largo del conducto, cada uno con un coeficiente de pérdidas menores de 0.21. El manual del fabricante de la campana indica que el coeficiente de pérdida de la entrada de la campana es de 4.6 con base en la velocidad del conducto. Cuando el regulador de tiro está abierto totalmente, su coeficiente de pérdida es 1.8. Se dispone de un ventilador centrífugo de jaula de ardilla con una entrada de 9.0 in. Sus datos de rendimiento se ajustan a una curva parabólica de la forma $H_{disponible}$

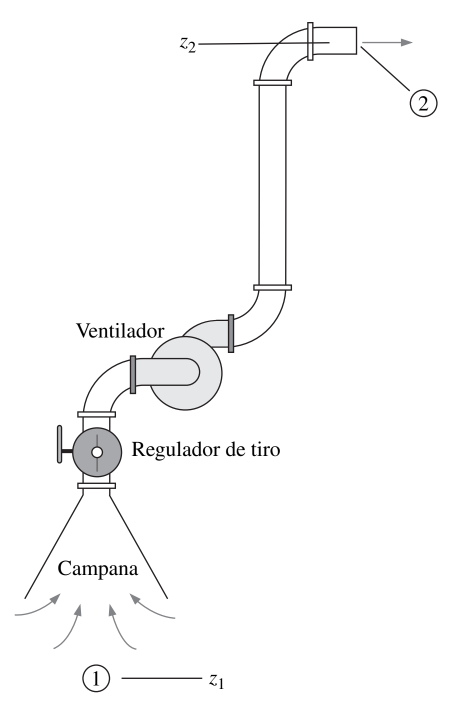


FIGURA P14-49E

$= H_0 - a\dot{V}^2$, donde la carga al cierre es $H_0 = 2.30$ in (pulg) de columna de agua, el coeficiente es $a = 8.50 \times 10^{-6}$ in (pulg) de columna de agua entre (PCME)^2 (pies cúbicos por minuto estándares, *standard cubic feet per minute*, en inglés), la carga hidrostática disponible $H_{\text{disponible}}$ está en unidades de pulgadas de columna de agua, y la capacidad $\dot{V}$ está en unidades de pies cúbicos por minuto estándares (PCME, a 77ºF). Estime el caudal en PCME por este sistema de ventilación. *Respuesta:* 452 PCME

14-50I Para el ducto y el ventilador del problema 14-49I, el cierre parcial del regulador de tiro disminuiría el flujo. Si todo lo demás permanece igual, estime al coeficiente de pérdidas menores del regulador de tiro necesario para disminuir el gasto volumétrico en un factor de 2.

14-51I Repita el problema 14-49I sin considerar las pérdidas menores. ¿Qué tan importantes son las pérdidas menores en este problema? Explíquelo.

14-52 Un sistema de ventilación local (una campana y un ducto) se emplea para sacar aire y contaminantes de un laboratorio farmacéutico (Fig. P14-52). El diámetro interno (DI) del ducto es $D = 150$ mm, su rugosidad promedio es 0.15 mm y su longitud total es $L = 24.5$ m. Hay tres codos a lo largo del ducto, cada uno con un coeficiente de pérdidas menores de 0.21. En el manual del fabricante se indica el coeficiente de pérdidas menores de la entrada como 3.3 con base en la velocidad del ducto. Cuando el controlador de tiro está totalmente abierto, su coeficiente de pérdida es 1.8. El coeficiente de pérdidas menores por la T-ramificación de 90º es 0.36. Por último, se instala una válvula unidireccional (de charnela) para evitar que los contaminantes de una segunda campana entren a la habitación. El coeficiente de pérdidas menores de la válvula unidireccional (abierta) es 6.6. Los datos de rendimiento del ventilador se ajustan a una curva parabólica de la forma $H_{\text{disponible}} = H_0 - a\dot{V}^2$, donde la carga al cierre es $H_0 = 60.0$ mm de columna de agua, el coeficiente es $a = 2.50 \times 10^{-7}$ mm de columna de agua por (Lpm)^2, la carga hidrostática disponible $H_{\text{disponible}}$ está en unidades de mm de columna de agua y la capacidad $\dot{V}$ está en unidades de Lpm de aire. Estime el caudal en Lpm por este sistema de ventilación. *Respuesta:* 7 090 Lpm

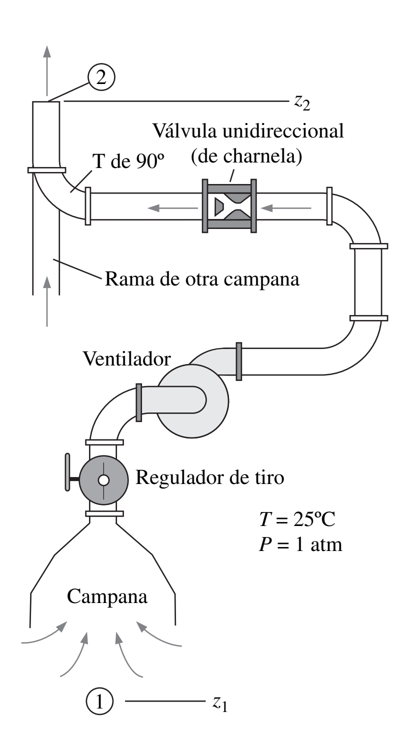


FIGURA P14-52

14-53 Para el sistema del problema 14-52, grafique la carga hidrostática necesaria $H_{\text{necesaria}}$ (mm de columna de agua) como una función del gasto volumétrico $\dot{V}$ (Lpm). En la misma gráfica, compare la carga hidrostática disponible del ventilador $H_{\text{disponible}}$ en función de $\dot{V}$, y marque el punto de operación. Explíquelo.

14-54 Repita el problema 14-52 sin considerar las pérdidas menores. ¿Qué tan importantes son las pérdidas menores en este problema?

14-55 Suponga que falla la válvula unidireccional de la figura P14-52 debido a la corrosión y está obstruida en su posición de cierre completo (no puede pasar aire). El ventilador está encendido y las otras condiciones son idénticas a las del problema 14-52. Calcule la presión manométrica (en pascales y en mm de columna de agua) en un punto justo corriente abajo del ventilador. Repita para un punto justo corriente arriba de la válvula unidireccional (de charnela).

14-56I Se emplea una bomba centrífuga para bombear agua a 77ºF desde un depósito cuya superficie está 20 ft arriba de la línea central de la entrada de la bomba (Fig. P14-56I). El sistema de tubería consiste en 67.5 ft de tubo de PVC con un DI de 1.2 in y altura de rugosidad interna promedio despreciable. La longitud de la tubería desde el fondo del depósito inferior hasta la entrada de la bomba es 12 ft. Hay varias pérdidas menores en la tubería: una entrada de borde agudo ($K_L = 0.5$), dos codos normales de 90º lisos embridados ($K_L = 0.3$ cada uno), dos válvulas de globo embridadas totalmente abiertas ($K_L = 6.0$ cada una) y una pérdida de salida hacia el depósito superior ($K_L = 1.05$). El fabricante provee la carga de aspiración neta positiva requerida de la bomba como un ajuste de curva: $\text{NPSH}_{\text{requerida}} = 1.0 \text{ ft} + (0.0054 \text{ ft/gpm}^2)\dot{V}^2$, donde el caudal está en gpm. Estime el caudal máximo (en unidades de gpm) que puede bombearse sin cavitación.

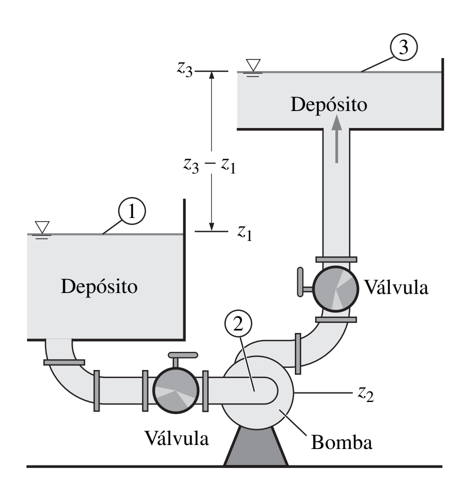


FIGURA P14-56E

14-57I Repita el problema 14-56I, pero con una temperatura del agua de 150ºF. Explíquelo.

14-58 Se emplea una bomba centrífuga de autocebado para bombear agua a 25ºC desde un depósito cuya superficie está 2.2 m arriba de la línea central de la entrada de la bomba (Fig. P14-58). La tubería es de PVC con un DI de 24.0 mm y altura de rugosidad interna promedio despreciable. La longitud de la tubería desde la entrada sumergida hasta la entrada de la bomba es 2.8 m. Sólo hay dos pérdidas menores desde la entrada de la tubería hasta la entrada de la bomba: una entrada reentrante de borde agudo (K_L = 0.85) y un codo normal liso de 90º embridado (K_L = 0.3). La carga de aspiración neta positiva necesaria de la bomba se obtiene del fabricante como un ajuste de curva: $NPSH_{necesaria}$ = 2.2 m + (0.0013 m/Lpm^2)$\dot{V}^2$, donde el caudal está en Lpm. Estime el caudal máximo (en unidades de Lpm) que se pueden bombear sin cavitación.

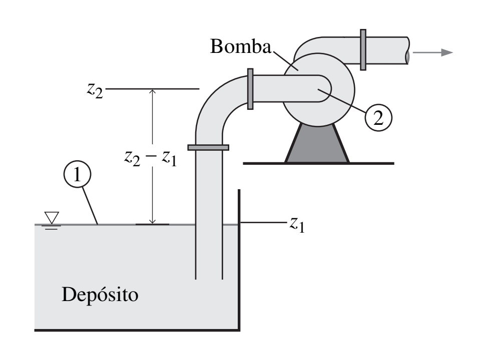


FIGURA P14-58

14-59 Repita el problema 14-58, pero con una temperatura del agua de 80ºC. Repita con 90ºC. Explíquelo.

14-60 Repita el problema 14-58, pero con el diámetro de tubo incrementado por un factor de 2 (lo demás no cambia). El caudal al que ocurre cavitación en la bomba ¿aumenta o disminuye con la tubería más grande? Explíquelo.

14-61 Dos bombas de agua están dispuestas en *serie*. Los datos de rendimiento para ambas bombas siguen un ajuste de curva parabólica $H_{disponible} = H_0 - a\dot{V}^2$. Para la bomba 1, H_0 es de 5.30 m y el coeficiente es a = 0.0438 m/Lpm^2; para la bomba 2, H_0 = 7.80 m y el coeficiente a = 0.0347 m/Lpm^2. En cualquier caso, las unidades de carga hidrostática neta de la bomba H son m, y las unidades de capacidad $\dot{V}$ son Lpm. Calcule la carga al cierre y la descarga libre combinadas para las dos bombas que trabajan juntas en serie. ¿A qué flujo debe desconectarse la bomba 1 y desviar el flujo de modo que no pase por ella? Explíquelo. *Respuestas:* 13.1 m, 15.0 Lpm, 11.0 Lpm

14-62 Las dos mismas bombas de agua del problema 14-61 se conectan en *paralelo*. Calcule la carga hidrostática al cierre y la descarga libre de las dos bombas que funcionan juntas en paralelo. ¿A qué carga neta combinada debe desconectarse la bomba 1 y hacer que el flujo no pase por la ramificación que le corresponde? Explíquelo.

14-63I La bomba rotatoria de doble lóbulo que se ilustra en la figura P14-63I mueve 0.145 gal de una lechada de carbón en cada volumen de lóbulo $\dot{V}_{lóbulo}$. Calcule caudal de la lechada (en gpm) para el caso donde $\dot{n}$ = 300 rpm. *Respuesta:* 174 gpm

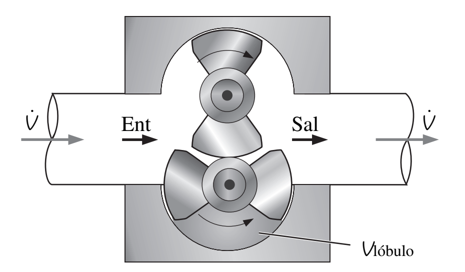


FIGURA P14-63E

14-64I Repita el problema 14-63I para el caso en el que la bomba tiene *tres* lóbulos en cada rotor en lugar de dos, y $\dot{V}_{lóbulo}$ = 0.087 gal.

14-65 Una bomba rotatoria de desplazamiento positivo con doble lóbulo, similar a la de la figura 14-30, mueve 3.64 cm^3 de pasta de tomate en cada volumen de lóbulo $\dot{V}_{lóbulo}$. Calcule el flujo volumétrico de pasta de tomate para el caso donde $\dot{V}$ = 400 rpm.

14-66 Considere la bomba de engranajes de la figura 14-26*c*. Suponga que el volumen del fluido confinado entre dos dientes de engrane es 0.350 cm^3. ¿Cuánto fluido se bombea por rotación? *Respuesta:* 9.80 cm^3

14-67 Una bomba centrífuga gira a $\dot{n}$ = 750 rpm. El agua entra al rotor normal a los álabes (α_1 = 0º) y sale a un ángulo de 35º desde la dirección radial (α_2 = 35º). El radio de entrada es r_1 = 12.0 cm, al cual el ancho de álabe es b_1 = 18.0 cm. El radio de salida es r_2 = 24.0 cm, al cual el ancho de álabe es b_2 = 14.0 cm. El caudal es 0.573 m^3/s. Se supone una eficiencia de 100 por ciento, calcule la carga neta que produce esta bomba en cm de altura de columna de agua. Calcule también la potencia al freno requerida en W.

14-68 Se diseña un ventilador de flujo axial con álabes guía del estator ubicados corriente arriba de los álabes del rotor (Fig.

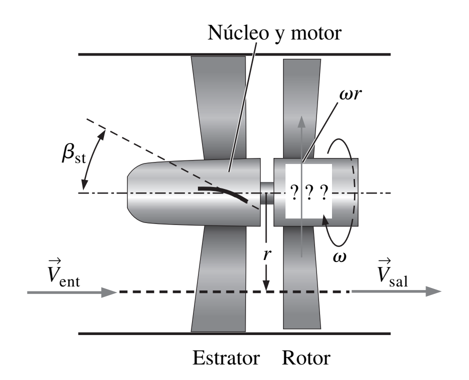


FIGURA P14-68

P14-68). Para reducir gastos, los álabes del estator y el rotor se construirán de lámina metálica. El álabe del estator es un arco circular simple con su borde delantero alineado axialmente y su borde posterior a un ángulo $\beta_{ep} = 26.6°$ desde el eje, como se muestra en el dibujo (el subíndice indica borde posterior del estator). Hay 18 álabes de estator. En condiciones de diseño, la velocidad de flujo axial por los álabes es 31.4 m/s, y el rotor gira a 1 800 rpm. A un radio de 0.50 m, calcule los ángulos de borde delantero y posterior del álabe del rotor y dibuje la forma del álabe. ¿Cuántos álabes de rotor debe haber?

Turbinas

14-69C Dé por lo menos dos razones de por qué las turbinas suelen tener mayores eficiencias que las bombas.

14-70C Explique de manera breve la diferencia principal en que las bombas dinámicas y las turbinas de reacción se clasifican como centrífugas (radiales), de flujo mixto o axiales.

14-71C ¿Qué es un *tubo de aspiración* y cuál es el propósito de usarlo? Describa qué sucedería si los diseñadores de turbomaquinaria no pusieran atención al diseño del tubo de aspiración.

14-72C Nombre y describa con brevedad las diferencias entre los dos tipos básicos de turbina dinámica.

14-73C Describa el significado de *movimiento giratorio invertido* en hidroturbinas de reacción, y explique por qué es deseable cierto movimiento giratorio invertido. Use una ecuación para apoyar su respuesta. ¿Por qué *no* es aconsejable tener demasiado movimiento giratorio invertido?

14-74 Pruebe que para una determinada velocidad de chorro, caudal, ángulo de desviación y radio de rueda, la potencia máxima de flecha que produce una rueda Pelton ocurre cuando el cangilón de la turbina se mueve a la mitad de la velocidad del chorro.

14-75 Se emplea una turbina Pelton para producir potencia hidroeléctrica. El radio promedio de la rueda es de 1.83 m, y la velocidad de chorro es 102 m/s desde una tobera aceleradora con diámetro de salida igual a 10.0 cm. El ángulo de desviación de flujo por los cangilones es $\beta = 165°$. *a*) Calcule el caudal por la turbina en m^3/s. *b*) ¿Cuál es la razón de rotación óptima (en rpm) de la rueda (para potencia máxima)? *c*) Calcule la potencia de flecha producida en MW si la eficiencia de la turbina es 82 por ciento. *Respuestas: a*) 0.801 m^3/s, *b*) 266 rpm, *c*) 3.35 MW

14-76 Algunos ingenieros evalúan posibles sitios para una pequeña presa hidroeléctrica. En uno de los lugares, la caída total es 650 m, y estiman que el caudal de agua por cada turbina sería 1.5 m^3/s. Estime la producción de potencia ideal por turbina en MW.

14-77I Se diseña una planta de energía hidroeléctrica. La caída total desde el depósito al canal de descarga es 1 065 ft, y el caudal de agua por cada turbina es 203 000 gpm a 70ºF. Hay 12 turbinas idénticas conectadas en paralelo, cada una con una eficiencia de 95.2 por ciento, y se estima que todas las otras pérdidas de energía mecánica (por el canal de descarga, entre otros elementos) disminuyen la capacidad en 3.5 por ciento. El generador tiene una eficiencia de 94.5 por ciento. Estime la producción de potencia eléctrica por la planta en MW.

14-78 Se diseña una hidroturbina Francis de flujo radial con las siguientes dimensiones: $r_2 = 2.00$ m, $r_1 = 1.42$ m, $b_2 = 0.731$ m y $b_1 = 2.20$ m. El rotor gira a $\dot{n} = 180$ rpm. Las aspas directrices desvían el flujo por un ángulo $\alpha_2 = 30°$ desde la dirección radial en la entrada del rotor, y el flujo en la salida del rotor está a un ángulo $\alpha_1 = 10°$ desde la dirección radial (Fig. P14-78). El caudal en las condiciones de diseño es 340 m^3/s y la carga total que proporciona la presa es $H_{total} = 90.0$ m. Para el diseño preliminar, las pérdidas irreversibles son despreciables. Calcule los ángulos de las aspas del rotor interno y externo β_2 y β_1, respectivamente, y prediga la producción de potencia (MW) y la carga hidrostática neta requerida (m). ¿Es posible el diseño?

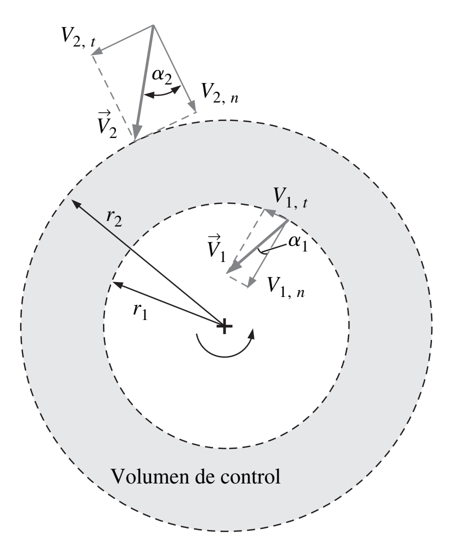


FIGURA P14-78

14-79 Reconsidere el problema 14-78. Con el Software EES (u otro), investigue el efecto del ángulo de salida del rotor a_1 sobre la carga neta necesaria y la potencia producida. Permita que el ángulo varíe de −20° a 20° en incrementos de 1°, y grafique sus resultados. Determine el valor mínimo posible de α_1 tal que el flujo no viole las leyes de la termodinámica.

14-80 Una hidroturbina Francis de flujo radial tiene las siguientes dimensiones, donde la ubicación 2 es la entrada y la ubicación 1 es la salida: $r_2 = 2.00$ m, $r_1 = 1.30$ m, $b_2 = 0.85$ m y $b_1 = 2.10$ m. Los ángulos de aspas del rotor son $\beta_2 = 66°$ and $\beta_1 = 18.5°$ en la entrada y la salida de la turbina, respectivamente. El rotor gira a $\dot{n} = 100$ rpm. El caudal en condiciones de diseño es 80.0 m^3/s. Las pérdidas irreversibles se ignoran en este análisis preliminar. Calcule el ángulo α_2 por el que las aspas directrices deben desviar el flujo, donde α_2 se mide desde la dirección radial en la entrada del rotor (Fig. P14-78). Calcule el ángulo de movimiento giratorio α_1, donde α_1 se mide desde la dirección radial en la salida del rotor (Fig. P14-78). ¿Tiene esta turbina movimiento giratorio en la dirección del giro del rotor o

movimiento giratorio invertido? Prediga la producción de potencia (MW) y la carga hidrostática neta necesaria (m).

14-81E Una hidroturbina Francis de flujo radial tiene las siguientes dimensiones, donde la ubicación 2 es la entrada y la ubicación 1 es la salida: $r_2 = 6.60$ ft, $r_1 = 4.40$ ft, $b_2 = 2.60$ ft y $b_1 = 7.20$ ft. Los ángulos de las aspas del rotor son $\beta_2 = 82°$ y $\beta_1 = 46°$ en la entrada y la salida de la turbina, respectivamente. El rotor gira a $\dot{n} = 120$ rpm. El caudal en las condiciones de diseño es 4.70×10^6 gpm. En este análisis preliminar se ignoran las pérdidas irreversibles. Calcule el ángulo α_2 por el que las aspas directrices deben desviar el flujo, donde α_2 se mide desde la dirección radial en la entrada del rotor (Fig. P14-78). Calcule el ángulo de movimiento giratorio α_1, donde α_1 se mide desde la dirección radial en la salida del rotor (Fig. P14-78). ¿Esta turbina tiene movimiento giratorio en la dirección del giro del rotor o movimiento giratorio invertido? Prediga la potencia producida (hp) y la carga neta necesaria (ft).

14-82E Por medio del software EES, ajuste el ángulo del borde posterior de la aspa del rotor β_1 del problema 14-81I, sin modificar los otros parámetros, de modo que no haya movimiento giratorio en la salida de la turbina. Determine β_1 y la potencia de flecha correspondiente.

Leyes de semejanza de bombas y turbinas

14-83C Busque la palabra *afinidad* en un diccionario. ¿Por qué supone que algunos ingenieros se refieren a las leyes de semejanza de turbomaquinaria como *relaciones de afinidad*?

14-84C Para cada enunciado elija si es falso o verdadero y explique su respuesta de manera breve.

a) Si se duplican las rpm de una bomba, con todo lo demás igual, la capacidad de la bomba aumenta por un factor alrededor de 2.

b) Si se duplican las rpm de una bomba, sin modificar lo demás, la carga neta de la bomba aumenta por un factor de casi 2.

c) Si sólo se duplican las rpm de una bomba su carga neta aumenta por un factor de más o menos 4.

d) Si se duplican las rpm de una turbina, y lo demás permanece sin cambio, la potencia de flecha necesaria de la turbina aumenta en un factor alrededor de 8.

14-85C Exprese qué parámetro adimensional de rendimiento de la bomba se emplea por lo común como el parámetro independiente. Conteste para el caso de turbinas en lugar de bombas. Explíquelo.

14-86 Considere la bomba del problema 14-41. El diámetro de la bomba es 1.80 cm, y ésta opera a $\dot{n} = 4\,200$ rpm. No asigne dimensiones a la curva de rendimiento de la bomba, es decir, grafique C_H en función de C_Q. Despliegue los cálculos de muestra de C_H y C_Q a $\dot{V} = 14.0$ Lpm.

14-87 Calcule la velocidad específica de la bomba del problema 14-86 en el punto de la mejor eficiencia para el caso en el que el PME ocurre a 14.0 Lpm. Dé las respuestas tanto en forma adimensional como en unidades usuales de EUA. ¿De qué tipo de bomba se trata? *Respuestas:* 0.199, 545, centrífuga

14-88 Considere el ventilador del problema 14-52. El diámetro del ventilador es 30.0 cm y opera a $\dot{n} = 600$ rpm. No asigne dimensiones a la curva de rendimiento de la bomba, es decir, grafique C_H en función de C_Q. Presente los cálculos de C_H y C_Q a $\dot{V} = 13\,600$ Lpm.

14-89 Calcule la velocidad específica de bomba del ventilador del problema 14-88 en el punto de la mejor eficiencia para el caso en el que PME ocurra a 13 600 Lpm. Dé las respuestas en forma adimensional y en unidades usuales de EUA. ¿De qué clase de ventilador se trata?

14-90 Calcule la velocidad específica de la bomba del Ejemplo 14-11 en su punto de mejor eficiencia. Dé las respuestas tanto en forma adimensional como en unidades usuales de EUA. ¿Qué tipo de bomba es ésta?

14-91 A Len se le pide diseñar una pequeña bomba de agua para un acuario. La bomba debe entregar 18.0 Lpm de agua a una carga hidrostática neta de 1.6 m en su punto de mejor eficiencia. Se cuenta con un motor que gira a 1 200 rpm. ¿Qué tipo de bomba (centrífuga, mixta o axial) debe diseñar Len? Muestre todos sus cálculos y justifique su elección. Estime la máxima eficiencia que Len puede esperar de esta bomba.. *Respuesta:* centrífuga, 75%

14-92I Se diseña una gran bomba de agua para un reactor nuclear. La bomba debe entregar 2 500 gpm de agua a una carga hidrostática neta de 45 ft en su punto de mejor eficiencia. Se tiene un motor que gira a 300 rpm. ¿Qué clase de bomba (centrífuga, mixta o axial) debe diseñarse? Muestre todos los cálculos y justifique su elección. Estime la eficiencia máxima que puede esperarse de esta bomba. Estime la potencia (potencia al freno) necesaria para hacer funcionar la bomba.

14-93 Considere la bomba del problema 14-91. Suponga que la bomba se modifica al anexarle un motor diferente cuyas rpm son la mitad de las de la bomba original. Si las bombas operan en puntos homólogos (a saber, el PME) para ambos casos, prediga el caudal y la carga neta de la bomba modificada. Calcule la velocidad específica de la bomba modificada y compárela con la de la bomba original. Explíquelo.

14-94 Compruebe que la velocidad específica de turbina y la velocidad específica de bomba se relacionan como sigue: $N_{St} = N_{Sp}\sqrt{\eta_{\text{turbina}}}$.

14-95 Considere una turbina-bomba que opera como bomba y como turbina. En condiciones en las que la velocidad rotacional ω y el caudal $\dot{V}$ son los mismos para la bomba y la turbina, compruebe que la velocidad específica de turbina y la velocidad específica de bomba se relacionan como:

$$N_{St} = N_{Sp}\sqrt{\eta_{\text{turbina}}}\left(\frac{H_{\text{bomba}}}{H_{\text{turbina}}}\right)^{3/4}$$

$$= N_{Sp}(\eta_{\text{turbina}})^{5/4}(\eta_{\text{bomba}})^{3/4}\left(\frac{\text{bhp}_{\text{bomba}}}{\text{bhp}_{\text{turbina}}}\right)^{3/4}$$

14-96 Aplique los factores de conversión necesarios para probar la relación entre la velocidad específica adimensional de turbina y la velocidad específica de turbina en unidades usuales

de EUA, $N_{St} = 43.46N_{St,US.}$ Note que se supone al agua como el fluido y la gravedad terrestre estándar.

14-97 Calcule la velocidad específica de la hidroturbina Round Butte de la figura 14-89. ¿Cae dentro del intervalo de N_{St} apropiado para ese tipo de turbina?

14-98 Calcule la velocidad específica de la hidroturbina Smith Mountain de la figura 14-90. ¿Cae dentro del intervalo de N_{St} apropiado para ese tipo de turbina?

14-99 Calcule la velocidad específica de la hidroturbina Warwick de la figura 14-91. ¿Cae dentro del intervalo de N_{St} apropiado para ese tipo de turbina?

14-100 Calcule la velocidad específica de la turbina del ejemplo 14-12 para el caso donde $\alpha_1 = 10°$. Dé las respuestas tanto en forma adimensional como en unidades usuales de EUA. ¿Se ubica en el intervalo normal para una turbina Francis? Si no, ¿qué tipo de turbina sería más apropiado?

14-101 Calcule la velocidad específica de la turbina del problema 14-80. Provea las respuestas tanto en forma adimensional como en unidades usuales de EUA. ¿Está en el intervalo normal para una turbina Francis? En caso contrario, ¿qué tipo de turbina sería más apropiado?

14-102I Calcule la velocidad específica de la turbina del problema 14-81I. Utilice unidades usuales de EUA. ¿Está en el intervalo normal para una turbina Francis? Si no es así, ¿qué tipo de turbina sería más apropiado?

14-103 Calcule la velocidad específica de la turbina del problema 14-78. Dé las respuestas tanto en forma adimensional como en unidades usuales de EUA. ¿Está en el intervalo normal para una turbina Francis? Si no, ¿qué tipo de turbina sería más apropiado?

14-104 Un modelo a escala uno a cinco de una turbina de agua se prueba en un laboratorio a $T = 20°C$. El diámetro del modelo es 8.0 cm, su caudal es 17.0 m³/h, gira a 1 500 rpm y opera con una carga neta de 15.0 m. En su punto de mejor eficiencia entrega 450 W de potencia de flecha. Calcule la eficiencia de la turbina modelo. ¿Cuál es el tipo de turbina con más probabilidades de ser probada? *Respuestas:* 64.9%, impulsión

14-105 La turbina prototipo que corresponde a la turbina modelo a escala uno a cinco descrita en el problema 14-104 operará con una carga neta de 50 m. Determine las rpm y el caudal apropiados para la mejor eficiencia. Prediga la salida de potencia al freno de la turbina prototipo, suponiendo similitud geométrica exacta.

14-106 Pruebe que la turbina modelo (problema 14-104) y la turbina prototipo (problema 14-105) operan en puntos homólogos comparando la eficiencia y la velocidad específica de turbina para ambos casos.

14-107 En el problema 14-106, se ampliaron los resultados de prueba de la turbina modelo al prototipo de escala completa, al suponer similitud dinámica exacta. Sin embargo, como se explicó en el texto, un prototipo grande produce, por lo general, mayor eficiencia que el modelo. Estime la eficiencia real de la turbina prototipo. Explique de manera breve por qué la eficiencia es mayor.

14-108 Un grupo de ingenieros diseña una nueva hidroturbina al mejorar una que ya existe. La turbina existente (turbina A) tiene diámetro D_A = 1.50 m, y gira a $\dot{V}_A$ = 150 rpm. En su punto de mejor eficiencia, $\dot{V}_A$ = 162 m³/s, H_A = 90.0 m de columna de agua y bhp_A = 132 MW. La nueva turbina (turbina B) girará a 120 rpm, y su carga hidrostática neta será H_B = 110 m. Calcule el diámetro de la nueva turbina de modo que opere con mayor eficiencia, y calcule $\dot{V}_B$ y bhp_B. *Respuestaa:* 2.07 m, 342 m³/s, 341 MW

14-109 Calcule y compare la eficiencia de las dos turbinas del problema 14-108. Deben ser las mismas ya que se supone similitud dinámica. Sin embargo, la turbina más grande será en realidad más eficiente que la turbina más pequeña. Use la ecuación de Moody de corrección de eficiencia, para predecir la eficiencia real esperada de la nueva turbina. Explíquelo.

14-110 Calcule y compare la velocidad específica de turbina para las turbinas pequeña A y grande B del problema 14-108. ¿Qué tipo de turbinas es más probable que sean éstas?

Problemas de repaso

14-111C Elija si cada enunciado es verdadero o falso y explique su respuesta de manera breve.

a) Una bomba de engranes es un tipo de bomba de desplazamiento positivo.

b) Una bomba rotatoria es un tipo de bomba de desplazamiento positivo.

c) La curva de rendimiento (carga hidrostática neta *contra* capacidad) de una bomba de desplazamiento positivo es casi vertical en su intervalo de operación recomendado a determinada velocidad rotacional.

d) A una velocidad rotacional específica, la carga hidrostática neta de una bomba de desplazamiento positivo *disminuye* con la viscosidad del fluido.

14-112C El medidor de agua común que se encuentra en la mayoría de las casas, puede considerarse como un tipo de turbina, debido a que extrae energía del agua que fluye para hacer girar la flecha conectada al mecanismo de cuenta de volumen (Fig. P14-112C). Desde el punto de vista de un sistema de tubería, sin embargo (capítulo 8), ¿qué clase de dispositivo es un medidor de agua? Explíquelo.

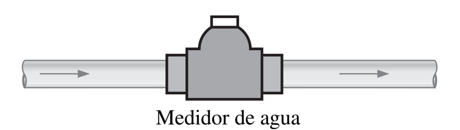


FIGURA P14-112C

14-113C La velocidad específica de bomba y la velocidad específica de turbina son parámetros "extra" que no son necesarios en las leyes de semejanza para bombas y turbinas. Explique, entonces, su propósito.

14-114C ¿Qué es una *bomba-turbina*? Describa una aplicación donde sea útil una bomba-turbina.

14-115 Para dos bombas similares desde el punto de vista dinámico, utilice los parámetros de bomba adimensionales para mostrar que $D_B = D_A(H_A/H_B)^{1/4}(\dot{V}_B/\dot{V}_A)^{1/2}$. ¿Se aplica la misma relación a dos turbinas dinámicamente similares?

14-116 Para dos turbinas con similitud dinámica, utilice los parámetros de turbina adimensionales para mostrar que $D_B = D_A(H_A/H_B)^{3/4}(\rho_A/\rho_B)^{1/2}(\text{bhp}_B/\text{bhp}_A)^{1/2}$. ¿Se aplica la misma relación a dos bombas dinámicamente similares?

Problemas de diseño y ensayo

14-117 Desarrolle una aplicación general de computadora (con el software EES u otro) que emplee las leyes de semejanza para diseñar una nueva bomba B dinámicamente similar a una bomba dada A. Las variables de entrada para la bomba A son diámetro, carga hidrostática neta, capacidad, densidad, velocidad rotacional y eficiencia de la bomba. Las datos de entrada para la bomba B son densidad (ρ_B podría ser diferente de ρ_A), la carga hidrostática neta deseada y la capacidad deseada. Los datos de salida para la bomba B son diámetro, velocidad rotacional y potencia de flecha requerida. Pruebe su programa con los siguientes datos de entrada: D_A = 5.0 cm, H_A = 120 cm, $\dot{V}_A$ = 400 cm^3/s, ρ_A = 998.0 kg/m^3, $\dot{n}_A$ = 1 725 rpm, $h_{bomba,A}$ = 81 por ciento, ρ_B = 1 226 kg/m^3, H_B = 450 cm y $\dot{V}_B$ = 2 400 cm^3/s. Compruebe sus resultados manualmente. *Respuestas:* D_B = 8.80 cm, $\dot{n}_B$ = 1 898 rpm, y bhp_B = 160 W

14-118 Los experimentos realizados en una bomba existente A producen los siguientes datos de PME (BEP): D_A = 10.0 cm, H_A = 210 cm, $\dot{V}_A$ = 1 350 cm^3/s, ρ_A = 998.0 kg/m^3, $\dot{n}_A$ = 1 500 rpm, $\eta_{bomba,A}$ = 87 por ciento. Se pide diseñar una nueva bomba B que tiene los siguientes requerimientos: ρ_B = 998.0 kg/m^3, H_B = 570 cm y $\dot{V}_B$ = 3 670 cm^3/s. Aplique el software que elaboró en el problema 14-117 para calcular D_B (cm), $\dot{n}_B$ (rpm) y bhp_B (W). Calcule también la velocidad específica de la bomba. ¿Qué tipo de bomba es ésta (la más probable)?

14-119 Elabore una aplicación general de computadora (con el software EES u otro) que emplee las leyes de semejanza para diseñar una nueva turbina B dinámicamente similar a una turbina determinada A. Los datos de entrada para la turbina A son diámetro, carga hidrostática neta, capacidad, densidad, velocidad rotacional y potencia al freno. Los datos de entrada para la turbina B son densidad (ρ_B podría ser diferente de ρ_A), carga hidrostática neta disponible y velocidad rotacional. Los datos de salida para la turbina B son diámetro, capacidad y potencia al freno. Pruebe su programa con los siguientes valores de entrada: D_A = 1.40 m, H_A = 80 m, $\dot{V}_A$ = 162 m^3/s, ρ_A = 998.0 kg/m^3, $\dot{n}_A$ = 150 rpm,bhp_A = 118 MW, ρ_B = 998.0 kg/m^3, H_B = 95 m y $\dot{n}_B$ = 120 rpm. Compruebe sus resultados de manera manual. *Respuestas:* D_B = 1.91 m, $\dot{V}_B$ = 328 m^3/s, y bhp_B = 283 MW

14-120 Los experimentos realizados en una turbina existente A produjeron los siguientes datos: D_A = 86.0 cm, H_A = 22.0 m, $\dot{V}_A$ = 69.5 m^3/s, ρ_A = 998.0 kg/m^3, $\dot{n}_A$ = 240 rpm, bhp_A = 11.4 MW. Se le pide diseñar una nueva turbina B que tiene las siguientes características: ρ_B = 998.0 kg/m^3, H_B = 95.0 m y $\dot{n}_B$ = 210 rpm. Aplique el programa de computadora que elaboró en el problema 14-119 para calcular D_B (m), $\dot{V}_B$ (m^3/s) y bhp_B (MW). Calcule también la velocidad específica de turbina. ¿Qué tipo de turbina es ésta (el más probable)?

14-121 Calcule y compare la eficiencia de las dos turbinas del problema 14-120. Deben ser las mismas puesto que se supone similitud dinámica. Sin embargo, la turbina más grande será en realidad un poco más eficiente que la turbina más pequeña. Use la ecuación de Moody de corrección de eficiencia para predecir la eficiencia real esperada de la nueva turbina. Explíquelo.

CAPÍTULO

15

INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL

En este capítulo se presenta una breve introducción a la dinámica de fluidos computacional (DFC, CFD por sus siglas en inglés). Aunque cualquier persona inteligente, con conocimientos de computación puede utilizar un paquete de DFC, los resultados que obtenga podrían ser físicamente incorrectos. De hecho, si la malla no se genera de manera apropiada, o si las condiciones de frontera o los parámetros de flujo se aplican inadecuadamente, los resultados inclusive podrían ser erróneos por completo. Por lo tanto, el objetivo de este capítulo es presentar *indicaciones generales* acerca de cómo generar una malla, cómo especificar las condiciones de frontera y cómo determinar si el resultado que se obtiene de la computadora tiene sentido. Se destaca la *aplicación* de la DFC a problemas de ingeniería, en vez de dar detalles acerca de las técnicas de generación de mallas, esquemas de discretización, algoritmos de DFC o estabilidad numérica.

Los ejemplos que se presentan aquí se obtuvieron mediante el paquete de dinámica de fluidos computacional **FLUENT**. Otros paquetes de DFC producirían resultados similares, pero no idénticos. Las soluciones de DFC que se presentan como ejemplos se dan para flujos laminar y turbulento, tanto incompresible como compresible, y para flujos con transferencia de calor y flujos con superficies libres. Como siempre, se aprende mejor cuando se ponen “manos a la obra”. Por esta razón, se proporcionan varios problemas de tarea que utilizan FLUENT FLOWLAB®, al cual de aquí en adelante se hará referencia como **FlowLab**, un paquete de DFC amigable, que está disponible con la compra de este libro.

OBJETIVOS

Cuando el estudiante termine de leer este capítulo debe ser capaz de:

- Entender la importancia de una adecuada malla (red) de alta calidad y buena resolución.
- Aplicar las condiciones de frontera apropiadas a los dominios computacionales.
- Entender cómo aplicar la DFC a problemas de ingeniería básicos y cómo determinar si el resultado tiene sentido desde el punto de vista físico.
- Entender que se necesita práctica constante y estudio más profundo para saber usar con éxito la DFC.



FIGURA 15-1
Cálculos de la DFC del ascenso del vehículo de lanzamiento del transbordador espacial. La malla consta de más de 16 millones de puntos, y se muestran los contornos de la presión. Las condiciones de flujo libre son Ma = 1.25 y el ángulo de ataque es −3.3°.
NASA/Photo by Ray J. Gomez. Reproducido con autorización.

15-1 ▪ INTRODUCCIÓN Y FUNDAMENTOS

Motivación

Existen dos métodos fundamentales para diseñar y analizar sistemas de ingeniería relacionados con el flujo de fluidos: experimentación y cálculo. El primero conlleva, por lo general, la construcción de modelos que son probados en túneles de viento u otras instalaciones (capítulo 7), mientras que el segundo implica resolver ecuaciones diferenciales, ya sea de manera analítica (capítulos 9 y 10) o computacional. En este capítulo, se da una introducción breve a la **dinámica de fluidos computacional** (**DFC**), el campo de estudio dedicado a solucionar ecuaciones del flujo de fluidos con computadora (o, en fechas recientes, con computadoras que trabajan en paralelo). Los ingenieros modernos aplican tanto análisis experimental *como* DFC, y los dos métodos se complementan entre sí. Por ejemplo, los ingenieros podrían obtener *propiedades globales*, como sustentación, fuerza de arrastre, caída de presión o potencia, experimentalmente; pero emplean la DFC para obtener *detalles* acerca del campo de flujo, como los esfuerzos de corte, velocidad y perfiles de presión (Fig. 15-1) y líneas de corriente. Además, los datos experimentales se emplean con frecuencia para *validar* soluciones de DFC al comparar las cantidades globales determinadas de manera computacional y experimental. La DFC se emplea entonces para abreviar el ciclo de diseño por estudios paramétricos que son controlados con cuidado, de modo que se reduce la cantidad necesaria de análisis experimental.

El estado actual de la dinámica de fluidos computacional es éste: puede manejar flujos laminares con facilidad, pero los flujos turbulentos de interés práctico son imposibles de resolver sin tener que recurrir a los *modelos de turbulencia*. Por desgracia, ningún modelo de turbulencia es *universal*, y una solución de la DFC de flujo turbulento es tan buena dependiendo qué tan apropiado es el modelo de turbulencia aplicado. Pese a esta limitación, los modelos de turbulencia estándares producen resultados razonables para muchos problemas de ingeniería prácticos.

Existen varios aspectos de la DFC que no se tratan en este capítulo como son: técnicas de generación de malla, algoritmos numéricos, esquemas de diferencias finitas y método de volumen finito, temas de estabilidad numérica, modelado de turbulencia, entre otros. Es necesario estudiar estos temas para entender por completo las posibilidades y las limitaciones de la dinámica de fluidos computacional. En este capítulo, solamente se trata de manera superficial este campo interesante. El objetivo es presentar los fundamentos de la DFC desde un punto de vista de un usuario, y dar indicaciones generales acerca de cómo determinar si el resultado que se obtiene por computadora tiene sentido físico.

Esta sección empieza con la presentación de las ecuaciones diferenciales de flujo de fluidos que se resolverán, y luego se describe un procedimiento de solución. Las secciones ulteriores de este capítulo se dedican a ejemplificar las soluciones de la DFC para flujo laminar, flujo turbulento, flujos con transferencia de calor, flujo compresible y flujo en canal abierto.

Ecuaciones de movimiento

Para el flujo laminar estacionario de un fluido viscoso, newtoniano, incompresible y sin efectos de superficie libre, las ecuaciones de movimiento son la *ecuación de continuidad*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{15-1}$$

y la *ecuación de Navier-Stokes:*

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P' + \nu\nabla^2\vec{V} \tag{15-2}$$

En realidad, la ecuación 15-1 es una **ecuación de conservación** de masa, mientras que la ecuación 15-2 es una **ecuación de transporte** que representa el transporte de cantidad de movimiento lineal en el dominio computacional. En las ecuaciones 15-1 y 15-2, $\vec{V}$ es la velocidad del fluido, ρ es su densidad y ν es la viscosidad cinética ($\nu = \mu/\rho$). La falta de efectos de superficie libre permite usar la *presión modificada* P' y, por lo tanto, se elimina el término de gravedad de la ecuación 15-2 (vea el capítulo 10). Note que la ecuación 15-1 es una ecuación *escalar*, mientras que la ecuación 15-2 es una ecuación *vectorial*. Las ecuaciones 15-1 y 15-2 se aplican sólo a flujos incompresibles en los que también se supone que ρ y ν son constantes. Por lo tanto, para el flujo tridimensional en coordenadas cartesianas son cuatro ecuaciones diferenciales acopladas para cuatro incógnitas u, ν, w y P' (Fig. 15-2). Si el flujo fuera compresible, se necesitaría modificar de manera apropiada las ecuaciones 15-1 y 15-2, como se analizará en la sección 15-5. Los flujos de líquidos pueden tratarse casi siempre como incompresibles, y en el caso de muchos flujos de gas, el flujo está a un número de Mach suficientemente bajo para que se interprete como un fluido casi incompresible.

Continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

cantidad de movimiento en *x*:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{P'}{x\partial} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

cantidad de movimiento en *y*:

$$u\frac{\partial \nu}{\partial x} + \nu\frac{\partial \nu}{\partial y} + w\frac{\partial \nu}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2}\right)$$

cantidad de movimiento en *z*:

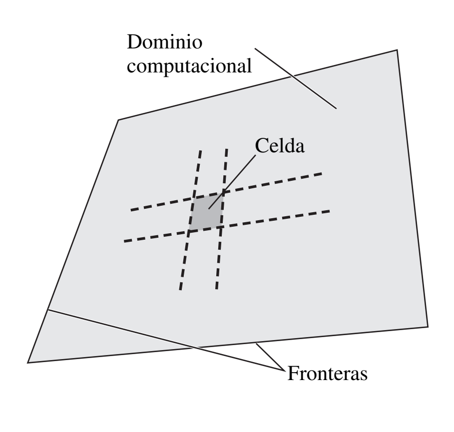
$$u\frac{\partial w}{\partial x} + \nu\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

FIGURA 15-2
Las ecuaciones de movimiento pueden resolverse mediante la DFC para el caso de flujo estacionario, incompresible, laminar de un fluido newtoniano con propiedades constantes y sin efectos de superficie libre. Se utiliza un sistema coordenado cartesiano. Hay cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas: u, ν, w y P'.

Procedimiento de solución

Para resolver de manera numérica las ecuaciones 15-1 y 15-2 se efectúan los siguientes pasos. Note que el orden de algunos de los pasos (en particular los pasos 2 al 5) es intercambiable.

1. Se elige un **dominio computacional** y se genera una **malla** (conocida también como **red de nodos**); el dominio se divide en muchos elementos pequeños llamados **celdas**. Para dominios de dos dimensiones (2-D), las celdas son *áreas*, mientras que para dominios tridimensionales (3-D) las celdas son *volúmenes* (Fig. 15-3). Puede considerarse a cada celda como un pequeño volumen de control en el que se resuelven las versiones separadas de las ecuaciones de conservación y transporte. Note que aquí el análisis se limita a paquetes de DFC basados en el método de volumen finito centrado en la celda. La calidad de una solución de DFC depende mucho de la calidad de la malla. Por lo tanto, se recomienda cerciorarse que la malla sea de alta calidad antes de proceder con el siguiente paso (Fig. 15-4).
2. Las *condiciones de frontera* se especifican en cada **lado** del dominio computacional (flujos 2-D) o en cada **cara** del dominio (flujos 3-D).
3. Se especifica el tipo de fluido (agua, aire, gasolina, entre otros), junto con las propiedades del fluido (temperatura, densidad, viscosidad, etc.). La mayoría de los paquetes de DFC tienen integrada la base de datos de propiedades de fluidos más comunes, lo que hace este paso relativamente fácil.



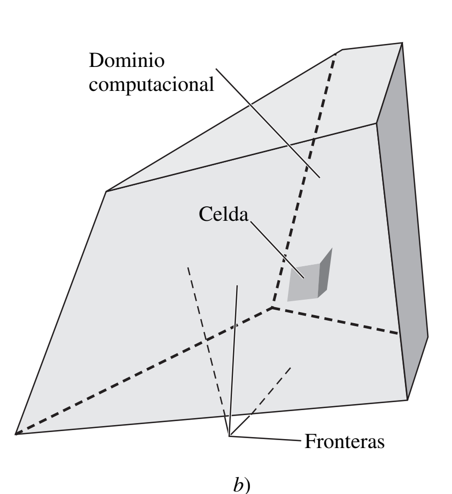


FIGURA 15-3
Un *dominio computacional* es la región en el espacio en la cual las ecuaciones de movimiento se resuelven mediante la DFC. Una *celda* es un subconjunto pequeño del dominio computacional. Se ilustran *a*) un domino bidimensional y celdas cuadriláteras, y *b*) un dominio tridimensional y celdas hexaedrales. Los límites de un domino bidimensional se denominan *lados*, y los límites de un dominio tridimensional se llaman *caras*.



FIGURA 15-4
Una malla de calidad es esencial para una simulación de la DFC de calidad.

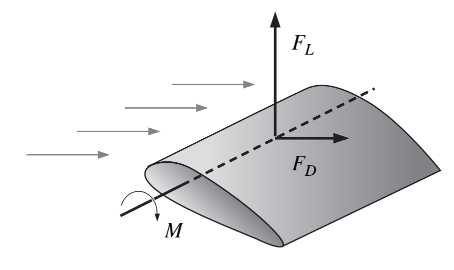


FIGURA 15-5
Las *propiedades globales* de un flujo, como las fuerzas y momentos que actúan sobre un objeto, se determinan después que converge una solución de la DFC. También pueden calcularse durante el proceso de iteración para monitorear la convergencia.

4. Se seleccionan los parámetros numéricos y los algoritmos de solución. Éstos son específicos para cada paquete de DFC, y no se tratan aquí. Los parámetros predeterminados de los paquetes de DFC más modernos son apropiados para los problemas simples que se analizan en este capítulo.
5. Los valores de primera aproximación para las variables de campo de flujo se especifican para cada celda. Éstas son *condiciones iniciales*, que podrían ser correctas o no, pero son necesarias como un punto de partida, para que el proceso de iteración pueda proceder (paso 6). Se nota que para los cálculos apropiados de flujo no estacionario, las condiciones iniciales *deben* ser correctas.
6. Al comenzar con los valores de primera aproximación, las formas discretizadas de las ecuaciones 15-1 y 15-2 se resuelven por iteración, por lo general en el centro de cada celda. Si se trasladaran todos los términos de la ecuación 15-2 a un lado para obtener cero del otro lado de la ecuación, entonces la solución numérica sería "exacta" cuando la suma de todos estos términos, llamada el **residuo**, se volvería cero para cada celda del dominio. En una solución de la de DFC, sin embargo, esta suma *nunca* es igual a cero, pero es de esperar que disminuya conforme se efectúen las iteraciones. Un residuo puede considerarse como una medida de la desviación de una solución numérica para determinada ecuación de conservación o transporte respecto a la solución exacta, y se tiene que monitorear el residuo promedio relacionado con cada ecuación de conservación o transporte para ayudar a determinar cuándo converge la solución. A veces se necesitan cientos, o inclusive miles, de iteraciones para que converja la solución a una solución final, y los residuos pueden disminuir en varios órdenes de magnitud.
7. Cuando converge la solución, las variables de campo de flujo como la velocidad y la presión se trazan y analizan de manera gráfica. Los usuarios pueden definir y analizar también otras funciones particulares que se forman mediante combinaciones algebraicas de variables de campo de flujo. La mayoría de los paquetes de DFC tienen integrados **posprocesadores**, diseñados para analizar el campo de flujo de manera gráfica y rápida. Para esta finalidad existen también paquetes posprocesadores autónomos. Debido a que el resultado gráfico se muestra por lo general en colores brillantes, la DFC se ha ganado el sobrenombre de *dinámica de fluidos colorida*.
8. Las *propiedades globales* del campo de fluido, como la caída de presión, y las *propiedades integrales*, como las fuerzas (de sustentación y de arrastre) y las torques que actúan sobre un cuerpo, se calculan a partir de la solución que se obtiene por convergencia (Fig. 15-5). Con la mayoría de los paquetes de DFC esto puede hacerse "sobre la marcha" a medida que proceden las iteraciones. En numerosos casos, de hecho, es aconsejable monitorear estas cantidades junto con los residuos durante el proceso de iteración; cuando converge una solución, las propiedades globales e integrales deben establecerse en valores constantes también.

Para *flujo no estacionario* se especifica un paso más relacionado con tiempo físico, en el cual se asignan condiciones iniciales apropiadas y se crea un ciclo de iteraciones para resolver las ecuaciones de conservación y transporte con el fin de simular cambios en el campo de flujo en este breve lapso. Puesto que los intervalos entre los instantes de tiempo son cortos, por lo general se necesita un número relativamente pequeño de iteraciones (del orden de las decenas) para cada paso relacionado con tiempo físico. Cuando converge este "ciclo interno", el paquete va al siguiente valor de tiempo. Si un flujo tiene una solución estacionaria, esa solución suele ser más fácil de encontrar si se avanza en el tiempo; después que ha transcurrido tiempo suficiente, las variables de campo de flujo se establecen en sus valores de flujo estacionario. La mayoría de los paquetes de la DFC aprovechan este hecho al especificar internamente pseudo-tiempo (**tiempo**

artificial) y marchar hacia una solución estacionaria. En estos casos, el paso de solución numérica relacionado con pseudo-tiempo puede, inclusive, ser diferente para celdas distintas en el dominio computacional y puede ajustarse de manera apropiada para disminuir el tiempo de convergencia.

Por lo general se emplean otros "trucos" para reducir el tiempo de cálculo, como la **malla múltiple**, en la que las variables de campo de flujo se calculan primero en una malla de celdas amplias con la finalidad de establecer con rapidez las características aproximadas del flujo. Esa solución se interpola después a mallas cada vez más finas. La malla final es la que especifica el usuario (Fig. 15-6). En algunos paquetes comerciales de la DFC podrían ocurrir "tras bambalinas" varias capas de malla múltiple durante el proceso de iteración, sin intervención (o conocimiento) del usuario. Para aprender más acerca de los algoritmos computacionales y otras técnicas numéricas que mejoran la convergencia, puede consultar los libros dedicados a métodos computacionales, por ejemplo el de Tanehill, Anderson y Pletcher, 1997.

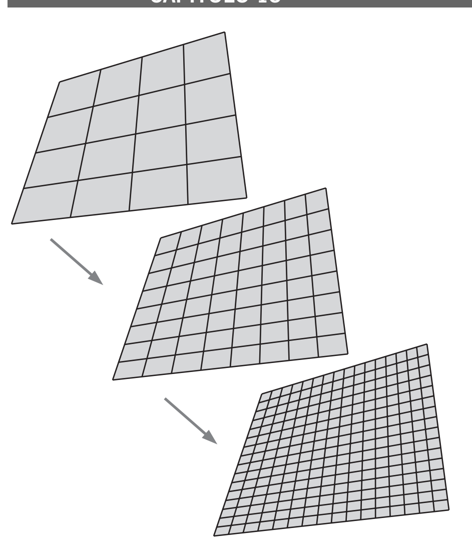


FIGURA 15-6
Con la *malla múltiple*, las soluciones de las ecuaciones de movimiento se obtienen primero en una malla de celdas amplias, y se continúa usando mallas cada vez más finas. Así se acelera la convergencia.

Ecuaciones de movimiento adicionales

Si la transformación de energía o transferencia de calor es importante en el problema, debe resolverse otra ecuación de transporte, la *ecuación de energía*. Si las diferencias de temperatura causan cambios importantes en la densidad, se emplea una *ecuación de estado* (como la ecuación del gas ideal). Si la flotabilidad es importante, el efecto de la temperatura en la densidad se refleja en el término de gravedad (que debe separarse entonces del término de presión modificada en la ecuación 15-2).

Para determinado conjunto de condiciones de frontera, una solución de la DFC para flujo laminar se aproxima a una solución "exacta" limitada sólo por la precisión del esquema de discretización que se emplea para las ecuaciones de movimiento, el nivel de convergencia y el grado al que se resuelve la malla. Lo mismo sería cierto para una simulación de flujo turbulento si la malla pudiera ser lo suficientemente fina para resolver todos los remolinos turbulentos tridimensionales, no estacionarios. Por desgracia, esta clase de simulación directa de flujo turbulento, por lo general, no es posible para aplicaciones de ingeniería prácticas debido a las limitaciones de las computadoras. En cambio, se hacen aproximaciones adicionales en forma de modelos de turbulencia de modo que sean posibles las soluciones de flujo turbulento. Los modelos de turbulencia generan ecuaciones de transporte adicionales que modelan el incrementado proceso de mezclado y la difusión de turbulencia; estas ecuaciones de transporte adicionales deben resolverse junto con las de masa y de cantidad de movimiento. El modelado de turbulencia se analiza con más detalle en la sección 15-3.

Los paquetes modernos de la DFC incluyen opciones para calcular trayectorias de partículas, transporte de especies, transferencia de calor y turbulencia. Los paquetes son fáciles de usar, y las soluciones pueden obtenerse sin conocimiento acerca de las ecuaciones o sus limitaciones. Aquí radica el peligro de la DFC: cuando está en manos de alguien quien desconoce mecánica de fluidos, es probable que ocurran resultados erróneos (Fig. 15-7). Es imprescindible que los usuarios de la DFC tengan cierto conocimiento fundamental de mecánica de fluidos para que puedan discernir si tiene sentido físico la solución de la DFC o no.



FIGURA 15-7
Las soluciones de la DFC son fáciles de obtener, y las gráficas que se obtienen son hermosas; pero las respuestas correctas dependen de los datos correctos y del conocimiento acerca del campo de los fluidos.

Generación de la malla e independencia de la malla

El primer paso (y posiblemente el paso más importante) en una solución de DFC es generar una malla que define las celdas en las que se calculan las variables de flujo (velocidad y presión, entre otras) en todo el dominio computacional. Los modernos paquetes comerciales de la DFC, vienen con sus propios generadores de malla, y también están disponibles programas para generar mallas indepen-

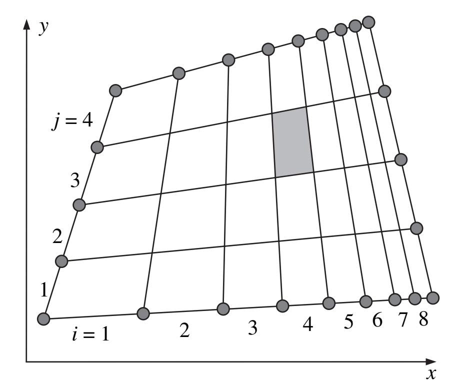


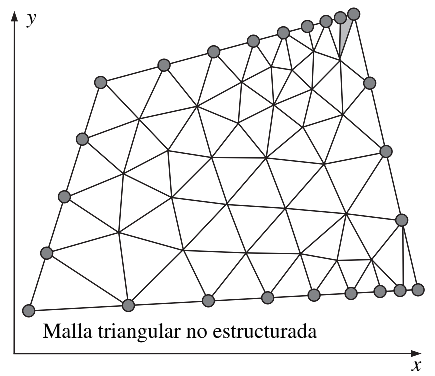
FIGURA 15-8
Ejemplo de malla estructurada bidimensional con nueve nodos y ocho intervalos en los lados superior e inferior, y cinco nodos y cuatro intervalos en los lados izquierdo y derecho. Se muestran los índices i y j. La celda sombreada está en ($i = 4$, $j = 3$).

dientes. Las mallas que se emplean en este capítulo se originan con el paquete de generación de malla **GAMBIT** del paquete de DFC llamado FLUENT.

Numerosos paquetes de DFC se corren con mallas estructuradas o no estructuradas. Una **malla estructurada** consta de celdas planas con cuatro lados (2-D) o celdas volumétricas con seis caras (3-D). Aunque la forma rectangular de las celdas podría estar distorsionada, cada celda se numera de acuerdo con los índices (i, j, k) que no necesariamente corresponden a las coordenadas x, y y z. En la figura 15-8 se ilustra una malla estructurada 2-D. Para construir esta malla, se especifican nueve **nodos** en los lados superior e inferior; estos nodos corresponden a ocho **intervalos** a lo largo de estos lados. De manera similar, se especifican cinco nodos en los lados derecho e izquierdo, que corresponden a cuatro intervalos a lo largo de estos lados. Los intervalos corresponden a $i =$ de 1 al 8 y $j =$ de 1 al 4, y se numeran y marcan en la figura 15-8. Luego, se genera una malla interna que conecta los nodos uno por uno en el dominio del problema de modo que los renglones ($j =$ constante) y columnas ($i =$ constante) se definan con claridad, aunque las celdas por sí mismas podrían estar distorsionadas (no necesariamente rectangulares). En una malla estructurada 2-D, cada celda se especifica de manera única mediante un par de índices (i, j). Por ejemplo, la celda sombreada en la figura 15-8 está en ($i = 4$, $j = 3$). Debe recordarse que algunos paquetes de la DFC numeran *nodos* en vez de intervalos.

Una **malla no estructurada** consta de celdas de varias formas, pero por lo común se emplean triángulos o cuadriláteros (2-D) y tetraedros o hexaedros (3-D). Se generan dos mallas no estructuradas para el mismo dominio que el de la figura 15-8, con la *misma* distribución de intervalo en los lados; estas mallas se muestran en la figura 15-9. A diferencia de la malla estructurada, en la no estructurada, no puede identificarse a las celdas de manera única mediante los índices i y j; en cambio, las celdas se numeran internamente de alguna otra manera por el paquete de la DFC.

Para configuraciones geométricas complejas, por lo general es mucho más fácil para el usuario del paquete de generación de malla crear una no estructurada. Por ejemplo, algunos paquetes de la DFC (usualmente antiguos) están escritos de manera específica para mallas estructuradas; estos paquetes convergen con mayor rapidez, y a menudo con mayor exactitud, por utilizar la identificación de celdas por índices como se hace en caso de las mallas estructuradas. Sin embargo, los modernos paquetes de la DFC de aplicación general pueden manejar mallas estructuras y no estructuradas, esto ya no es un problema. Algo más importante es que *se generan menos celdas con una malla estructurada que con una no estructurada*. En la figura 15-8, por ejemplo, la malla estructurada es de $8 \times 4 = 32$ celdas, mientras que la malla triangular no estructurada de la figura 15-9*a* tiene 76 celdas, y la malla cuadrilátera no estructurada de la figura 15*b* tiene 38 celdas, aun cuando se aplica la distribución de nodos idéntica en los lados en los tres casos. En las capas límite, donde las variables de flujo cambian



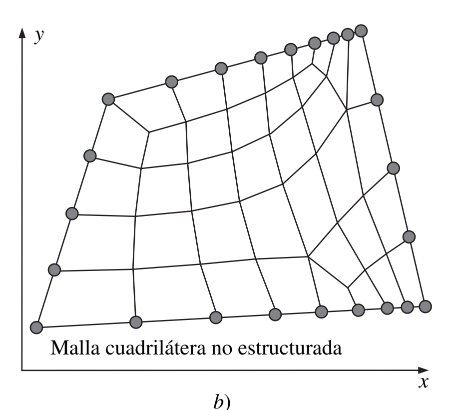


FIGURA 15-9
Ejemplo de mallas no estructuradas bidimensionales con nueve nodos y ocho intervalos en los lados superior e inferior, y cinco nodos y cuatro intervalos en los lados izquierdo y derecho. Estas mallas tienen la misma distribución de nodos que en la figura 15-8: *a*) malla triangular no estructurada y *b*) malla cuadrilátera no estructurada. La celda sombreada en *a*) es moderadamente sesgada.

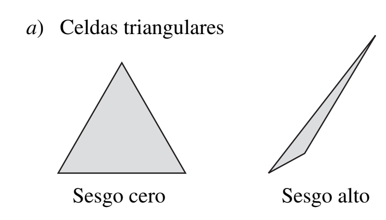
con rapidez en la dirección normal a la pared y se requieren mallas de alta resolución en la cercanía a ésta, las mallas estructuradas permiten una resolución mucho más fina que las no estructuradas para el mismo número de celdas. Esto puede verse cuando se comparan las mallas de las figuras 15-8 y 15-9 cerca del lado derecho. Las celdas de la malla estructurada son más delgadas y están muy compactadas cerca del lado derecho, a diferencia de las celdas de las mallas no estructuradas.

Se debe enfatizar que sin importar el tipo de malla que se elija (estructurada o no estructurada, cuadrilátera o triangular, etc.), es la *calidad* de la malla lo que es más imprescindible para soluciones confiables de la DFC. En particular, debe tenerse siempre cuidado que cada una de las celdas no esté muy sesgada porque esto puede crear dificultades e inexactitudes en convergencia en la solución numérica. La celda sombreada de la figura 15-9*a* es un ejemplo de una celda con **sesgo** moderadamente alto, definido como la desviación respecto de la simetría. Existen varias clases de sesgo, tanto para celdas de dos como de tres dimensiones. El sesgo de celda tridimensional está fuera de los objetivos de este libro; el tipo de sesgo más apropiado para celdas *bidimensionales* es el **sesgo equiángulo**, definido como:

Sesgo equiángulo:
$$Q_{\text{EAS}} = \text{MÁX}\left(\frac{\theta_{\text{máx}} - \theta_{\text{igual}}}{180° - \theta_{\text{igual}}}, \frac{\theta_{\text{igual}} - \theta_{\text{mín}}}{\theta_{\text{igual}}}\right) \quad \textbf{(15-3)}$$

donde $\theta_{\text{mín}}$ y $\theta_{\text{máx}}$ son los ángulos mínimo y máximo (en grados) entre dos lados cualesquiera de la celda, y θ_{igual} es el ángulo entre dos lados de una celda equilátera ideal con el mismo número de lados. Para celdas triangulares $\theta_{\text{igual}} = 60°$ y para celdas cuadriláteras $\theta_{\text{igual}} = 90°$. Se puede mostrar mediante la ecuación 15.3 que $0 < Q_{\text{EAS}} < 1$ para cualquier celda de 2-D. Por definición, un triángulo equilátero tiene sesgo cero. De la misma manera, un cuadrado o rectángulo tiene sesgo cero. Un elemento triangular o cuadrilátero muy distorsionado podría tener un sesgo inaceptablemente alto (Fig. 15-10). Algunos paquetes de generación de malla emplean esquemas numéricos para emparejar la malla con el fin de reducir el sesgo.

Otros factores afectan también la calidad de la malla. Por ejemplo, los cambios abruptos en el tamaño de celda conducen en el paquete de la DFC a dificultades numéricas o de convergencia. También, las celdas con una razón de sus dimensiones muy grande a veces pueden causar problemas. Aunque es posible reducir la cantidad de celdas al usar una malla estructurada en vez de una no estructurada, una malla estructurada no siempre es la mejor elección, lo cual depende de la forma del dominio computacional. Debe estarse consciente siempre



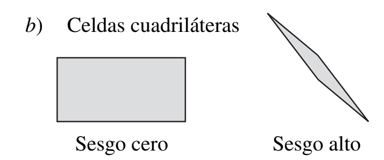


FIGURA 15-10
El sesgo se muestra en dos dimensiones: *a*) un triángulo equilátero tiene cero sesgo, pero un triángulo muy distorsionado tiene mucho sesgo. *b*) De manera similar, un rectángulo tiene sesgo cero, pero una celda cuadrilátera muy distorsionada tiene alto sesgo.

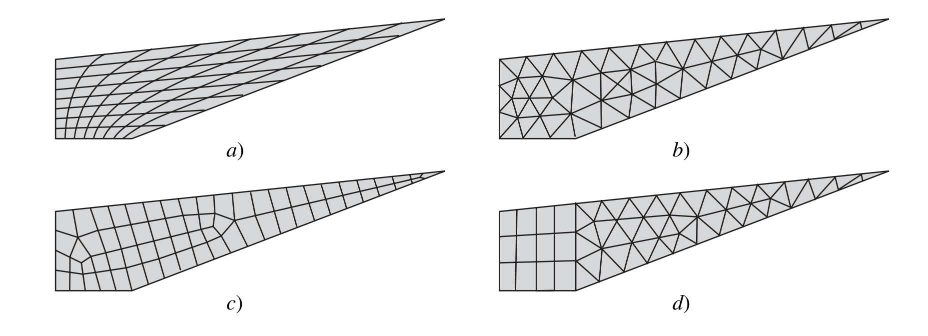


FIGURA 15-11
Comparación de cuatro mallas bidimensionales para un dominio computacional muy distorsionado: *a*) malla estructurada de 8 × 8 con 64 celdas y $(Q_{\text{EAS}})_{\text{máx}} = 0.83$, *b*) malla triangular no estructurada con 70 celdas y $(Q_{\text{EAS}})_{\text{máx}} = 0.76$, *c*) malla cuadrilátera no estructurada con 67 celdas y $(Q_{\text{EAS}})_{\text{máx}} = 0.87$ y *d*) malla híbrida con 62 celdas y $(Q_{\text{EAS}})_{\text{máx}} = 0.76$.

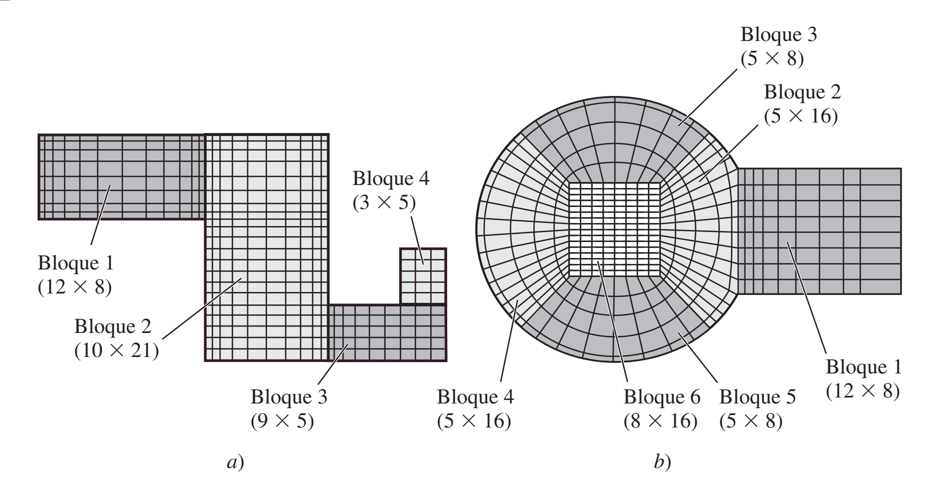


FIGURA 15-12
Ejemplos de mallas estructuradas generadas para el análisis de bloques múltiples de la DFC: *a*) dominio computacional bidimensional simple compuesto de bloques de cuatro lados rectangulares y *b*) un dominio bidimensional un poco más complicado con superficies curvas, pero también integrado por bloques de cuatro lados y celdas cuadriláteras. Se ilustra el número de intervalos *i* y *j* entre paréntesis para cada bloque. Naturalmente, existen otras maneras aceptables para dividir estos dominios computacionales en bloques.

de la calidad de la malla. Recuerde que *una malla no estructurada de alta calidad es mejor que una malla estructurada de mala calidad.* Un ejemplo se muestra en la figura 15-11 para el caso de un dominio computacional con un pequeño ángulo agudo en la esquina superior derecha. En este ejemplo, para comparación directa, se ha ajustado la distribución de nodos de tal modo que la malla en cualquier caso contiene entre 60 y 70 celdas. La malla estructurada (Fig. 15-11*a*) tiene 8 × 8 = 64 celdas; pero inclusive después del emparejamiento, el sesgo equiángulo máximo es 0.83, y las celdas cerca de la esquina superior derecha están muy sesgadas. La malla triangular no estructurada (Fig. 15-11*b*) tiene 70 celdas, pero el sesgo máximo se reduce a 0.76. Lo que es más importante, el sesgo global es menor en el dominio computacional completo. La malla no estructurada de cuadriláteros (Fig. 15-11*c*) tiene 67 celdas. Aunque el sesgo global es mejor que el de la malla estructurada, el sesgo máximo es 0.87, mayor que el sesgo máximo de la malla estructurada. La malla híbrida que se muestra en la figura 15-11*d* se analiza en breve.

A veces surgen situaciones en las que se prefiere una malla estructurada (por ejemplo, si el mismo paquete de la DFC exige mallas estructuradas, o las regiones de capa límite necesitan alta resolución, o la simulación pone a prueba la memoria de la computadora disponible). La generación de una malla estructurada es directa para configuraciones geométricas con lados rectos. Todo lo que se necesita hacer es dividir el dominio computacional en **bloques** o **zonas** de cuatro lados (2-D) o seis lados (3-D). Dentro de cada bloque se genera una malla estructurada (Fig. 15-12*a*). Este tipo de análisis se llama análisis de **múltiples bloques**. Para configuraciones geométricas más complicadas con superficies curvas, se necesita determinar cómo puede dividirse el dominio computacional en bloques individuales que pudieran tener o no lados (2-D) rectos o caras (3-D) planos. Un ejemplo bidimensional con arcos circulares se muestra en la figura 15-12*b*. La mayoría de los paquetes de la DFC exigen que los nodos en los lados o caras comunes entre bloques coincidan entre sí.

Numerosos paquetes de la DFC comerciales permiten dividir los lados o caras de un bloque y asignar diferentes condiciones de frontera a cada segmento del lado o cara. En la figura 15-12*a* por ejemplo, el lado izquierdo del bloque 2 se divide a aproximadamente dos tercios de su lado izquierdo a partir de su punto inferior para acomodar la unión con el bloque 1. El segmento inferior de este lado es una parte de frontera exterior, y el segmento superior de este lado es un lado interior común entre los bloques (éstas y otras condiciones de frontera se analizan a la brevedad). En el lado derecho del bloque 2 y en el lado superior del bloque 3 ocurren situaciones similares. Algunos paquetes de la DFC aceptan sólo **bloques elementales**, a saber, *bloques cuyos lados o caras no pueden dividirse*. Por ejemplo, la malla de cuatro bloques de la figura 15-12*a* necesita siete

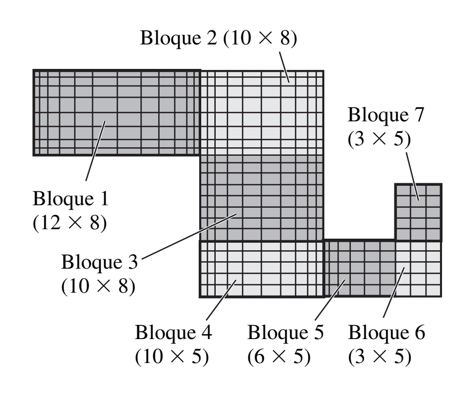


FIGURA 15-13
Malla de bloques múltiples de la figura 15-12*a* modificada para un paquete de la DFC que maneja sólo *bloques elementales.*

bloques elementales con esta limitación (Fig. 15-13). El número total de celdas en ambos casos es el mismo, lo cual puede comprobarse. Por último, para paquetes de la DFC que permiten bloques con lados o caras divididos, pueden combinarse a veces dos o más bloques en uno. Por ejemplo, se deja como ejercicio mostrar cómo puede simplificarse la malla estructurada de la figura 5-11*b* a sólo *tres* bloques no elementales.

Cuando se desarrolla la topología de los bloques con configuraciones geométricas complicadas como en la figura 15-12*b*, el objetivo es crear bloques de manera que ninguna celda de la malla esté muy sesgada. Además, el tamaño de celda no debe cambiar de manera abrupta en ninguna dirección, y la topología de bloques debe refinarse cerca de paredes sólidas para que puedan resolverse las capas límite. Con práctica puede dominarse el arte de crear mallas sofisticadas estructuradas de bloques múltiples. Las mallas de bloques múltiples son *indispensables* para mallas estructuradas de configuración geométrica compleja. Pueden usarse también en mallas no estructuradas, pero las mallas de bloques múltiples no son indispensables en este caso porque las celdas pueden cubrir configuraciones geométricas complejas sin formar los bloques.

Por último, una **malla híbrida** es la que combina regiones o bloques de mallas estructuradas y no estructuradas. Por ejemplo, se puede juntar una malla estructurada cercana a una pared con un bloque de malla no estructurada fuera de la región de influencia de la capa límite. Con frecuencia se emplea una malla híbrida para permitir alta resolución cerca de una pared sin necesitar alta resolución lejos de la pared (Fig. 15-14). Cuando se genera cualquier tipo de malla (estructurada, no estructurada, híbrida) debe tenerse cuidado siempre de que cada una de las celdas no esté muy sesgada. Por ejemplo, ninguna de las celdas de la figura 15-14 tiene algún sesgo importante. Otro ejemplo de una malla híbrida se ilustra en la figura 15-11*d*. Aquí se ha dividido el dominio computacional en dos bloques. El bloque de cuatro lados de la izquierda se cubre con una malla estructurada y el bloque de tres lados de la derecha se cubre con una malla triangular no estructurada. El sesgo máximo es 0.76, el mismo que el de la malla triangular no estructurada de la figura 15-11*b*, pero el número total de celdas se reduce de 70 a 62.

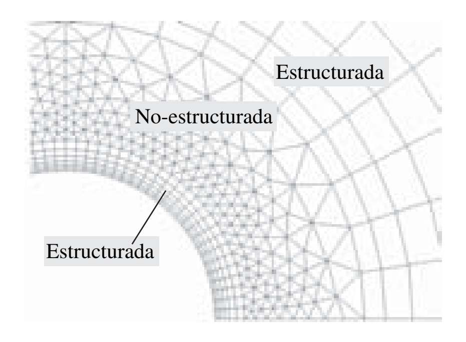


FIGURA 15-14
Ejemplo de malla híbrida bidimensional en cercanía a una superficie curva; se marcan dos regiones estructuradas y una no estructurada.

Los dominios computacionales con ángulos muy pequeños como el que se muestra en la figura 15-11 son difíciles de cubrir con malla en la esquina ahusada, cualquiera que sea el tipo de celda. Uno de los modos de evitar las celdas de grande sesgo en la esquina aguda consta simplemente en cortar o redondear la esquina aguda. Esto debe hacerse muy cerca de la esquina de modo que la modificación geométrica sea imperceptible desde una vista global y tenga poco efecto o ninguno en el flujo, pero mejore en gran medida el desempeño del paquete de la DFC al reducir el sesgo. Por ejemplo, la esquina ahusada problemática del dominio computacional de la figura 15-11 se corta y vuelve a graficarse en la figura 15-15. Mediante varios bloques y mallas híbridas, la malla que se muestra en la figura 15-15 tiene 62 celdas y un sesgo máximo de sólo 0.53, una mejora considerable con respecto de cualquiera de las mallas de la figura 15-11.

Originar una adecuada malla suele ser tedioso y tardado; los ingenieros que emplean la DFC de manera constante estarán de acuerdo en que generar la malla toma más de su tiempo que la solución misma mediante la DFC (el tiempo del ingeniero, no el tiempo del CPU, *central processor unit*). Sin embargo, *el tiem-*

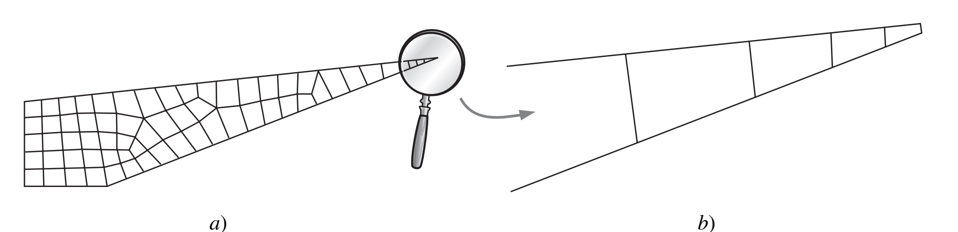


FIGURA 15-15
Malla híbrida para el dominio computacional de la figura 15-11 con la punta aguda cortada: *a*) vista completa: la malla contiene 62 celdas con $(Q_{EAS})_{máx} = 0.53$, *b*) vista amplificada de la punta cortada.



FIGURA 15-16
El tiempo que se dedica para generar una malla adecuada es un tiempo bien invertido.

po invertido en generar una buena malla es tiempo bien empleado porque los resultados de la DFC serán más confiables y podrían convergir con más rapidez (Fig. 15-16). Una malla de alta calidad es imprescindible para una solución de la DFC de buena precisión. Una malla de baja calidad o mala resolución puede, inclusive, dar lugar a una solución *incorrecta*. Por lo tanto, es importante que los usuarios de la DFC prueben si su solución es **independiente de la malla**. El método estándar para probar la independencia de la malla es incrementar la resolución (en un factor de 2 en todas las direcciones si es posible) y repetir la simulación. Si los resultados no cambian de manera considerable, es probable que la malla original sea adecuada. Si, por otro lado, surgen diferencias importantes entre las dos soluciones, la malla original es quizá de resolución inadecuada. En ese caso, debe probarse inclusive una malla más fina hasta que se resuelva de manera satisfactoria. Este método de probar la independencia de la malla es tardado y, por desgracia, no siempre es factible, en particular para problemas grandes de ingeniería en donde la solución pone a prueba los recursos de la computadora. En una simulación 2-D, si se duplica el número de intervalos en cada lado, el número de celdas se incrementa en un factor de $2^2 = 4$; el tiempo de cálculo para la solución de la DFC se incrementa también en aproximadamente un factor de 4. Para flujos tridimensionales, duplicar el número de intervalos en cada dirección incrementa la cantidad de celdas en un factor de $2^3 = 8$. Es posible ver cómo los estudios de independencia de malla rebasan con facilidad los límites de capacidad de memoria de una computadora o disponibilidad del CPU, o ambos. Si no es posible duplicar el número de intervalos debido a las limitaciones de la computadora, una buena regla empírica es que debe incrementarse el número de intervalos en por lo menos 20 por ciento en todas direcciones para probar la independencia de la malla.

En una nota final acerca de la generación de malla, la tendencia en la DFC actual es la generación automatizada de malla, junto con su exactitud automatizada con base en estimaciones de errores. Sin embargo, pese a estas tendencias emergentes es imprescindible que se comprenda cómo la malla impacta la solución de la DFC.

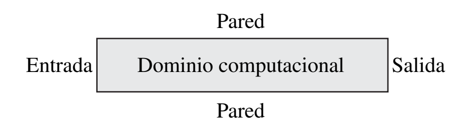


FIGURA 15-17
Las condiciones de frontera deben aplicarse con todo cuidado en *todas* las fronteras del dominio computacional. Se necesitan condiciones de frontera apropiadas para lograr una solución de la DFC de buena precisión.

Condiciones de frontera

Si las ecuaciones de movimiento, el dominio computacional e inclusive la malla pueden ser los mismos para dos cálculos de la DFC diferentes, el tipo de flujo que se modela se determina mediante las condiciones de frontera impuestas. *Las condiciones de frontera apropiadas se necesitan para obtener una solución de DFC exacta* (Fig. 15-17). Existen varios tipos de condiciones de frontera disponibles; las más importantes se enlistan y describen de manera breve a continuación. Los nombres son los que emplea FLUENT; con otros paquetes de la DFC la terminología podría ser un poco distinta, y podrían diferir los detalles de sus condiciones de frontera. En las descripciones dadas, se emplean las palabras *cara* o *plano*, lo que significa flujo tridimensional. Para un flujo de dos dimensiones, la palabra *lado* o *línea* debe reemplazar *cara* o *plano*.

Condiciones de frontera en las superficies sólidas (paredes)

La condición de frontera más simple es la que se formula para una **superficie sólida (pared)**. Puesto que el fluido no puede pasar por una superficie sólida, la componente normal de la velocidad relativa con respecto a la superficie sólida se iguala a cero a lo largo de aquella cara en la cual se establece la condición de frontera. Además, debido a la condición de no deslizamiento, se fija también en cero la componente de la velocidad tangencial a una superficie sólida en reposo. En la figura 15-17, por ejemplo, las condiciones de frontera en los lados superior e inferior de este dominio simple se especifican como condiciones de no

deslizamiento. Si se está resolviendo la ecuación de la energía debe especificarse también la temperatura de la superficie sólida o el flujo de calor en la superficie (pero no ambos; véase la Sección 15-4). Si se está usando un modelo de turbulencia, se resuelven las ecuaciones de transporte, y podría ser necesario especificar la rugosidad de la superficie, debido a que su rugosidad afecta en gran medida a las capas límite turbulentas. Además, los usuarios deben elegir entre varios modelos de turbulencia (**funciones de pared**, etc.). Estas opciones de turbulencia están más fuera de los objetivos de este texto (véase Wilcox, 1998); por fortuna, las opciones predeterminadas de la mayoría de los paquetes de la DFC son suficientes para muchas aplicaciones que implican flujo turbulento.

Las superficies sólidas móviles y superficies con esfuerzos de corte especificados se pueden simular también en numerosos paquetes de la FDC. Existen situaciones donde se desea dejar que el fluido se deslice a lo largo de la pared (a esto se le conoce como "pared invíscida"). Por ejemplo, puede especificarse una condición de frontera como el esfuerzo cortante cero a lo largo de la superficie libre de una alberca o bañera caliente cuando se simula tal flujo (Fig. 15-18). Note que con esta simplificación, se permite que el fluido se "deslice" a lo largo de la superficie, ya que el esfuerzo cortante viscoso que se causa por el aire que se encuentra por arriba del fluido es tan pequeño que se desprecia (Cap. 9). Cuando se hace esta aproximación, sin embargo, las ondas superficiales y sus correspondientes fluctuaciones de presión no pueden tomarse en cuenta.

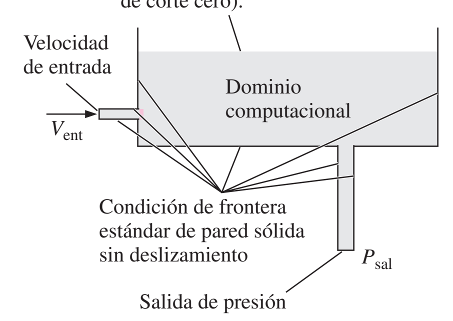


FIGURA 15-18
La condición de frontera estándar (de no deslizamiento) de *pared sólida* se impone en partes de frontera sólidas y en reposo, donde también se impone o una temperatura de la superficie de la pared o un flujo térmico. El esfuerzo cortante a lo largo de la superficie también puede establecerse en cero para simular la superficie libre de un líquido, como se muestra aquí para el caso de una piscina. Hay deslizamiento a lo largo de esta "pared" que simula la superficie libre (en contacto con el aire).

Condiciones de frontera de flujo de entrada o flujo de salida

Existen varias opciones de definir las condiciones de frontera en aquellas partes de frontera a través de las cuales entra el fluido al dominio computacional (flujo de entrada) o sale del dominio (flujo de salida). Se clasifican en general como *condiciones que especifican la velocidad (entrada o salida de velocidad)* o *condiciones que especifican la presión (entrada o salida de presión)*. En una **entrada de velocidad** se especifica la velocidad del flujo entrante a lo largo de la cara de admisión. Si se están resolviendo las ecuaciones de energía o turbulencia, o ambas, deben especificarse también la temperatura o las propiedades de turbulencia, o ambas, del flujo entrante.

En una **entrada de presión** se especifica la presión total a lo largo de la cara de admisión (por ejemplo, el flujo que entra al dominio computacional desde un recipiente presurizado de presión conocida o desde el campo lejano donde se conoce la presión ambiente). En una **salida de presión**, el fluido *sale* del dominio computacional. Se especifica la presión estática a lo largo de la cara de salida; en muchos casos ésta es la presión atmosférica (presión manométrica cero). Por ejemplo, la presión es atmosférica en la salida de una tubería de escape subsónica abierta al aire ambiente (Fig. 15-19). Las propiedades del flujo, como la temperatura, y las propiedades de turbulencia se especifican también en las entradas y salidas de presión. Sin embargo, para el último caso mencionado de una tubería de escape subsónica abierta al aire ambiente, estas propiedades de turbulencia no se usan a menos que la solución demande **flujo invertido** en la salida. *El flujo invertido en la salida de presión es por lo común una indicación de que el dominio computacional no es lo suficientemente grande*. Si persisten las advertencias de flujo invertido a medida que se itera la solución de la DFC, debe ampliarse el dominio computacional.

La presión *no* se especifica en la entrada de velocidad, ya que esto daría lugar a sobreespecificación matemática, porque la presión y la velocidad se *acoplan* en la ecuación de movimiento. Además, la presión en una entrada de velocidad se ajusta por sí misma para coincidir con el resto del campo de flujo. De modo similar, la velocidad no se especifica en una entrada o salida de presión, ya que esto ocasionaría también sobreespecificación matemática. Además, si se estable-

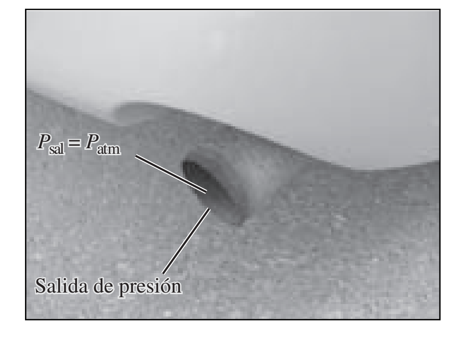


FIGURA 15-19
Cuando se modela un campo de flujo incompresible, con la salida de una tubería o un conducto expuesta a la atmósfera, la condición de frontera apropiada es una salida de presión con $P_{sal} = P_{atm}$. Se ilustra aquí el escape de un automóvil.
Fotografía de Po-Ya Abel Chuang. Reproducida con autorización.

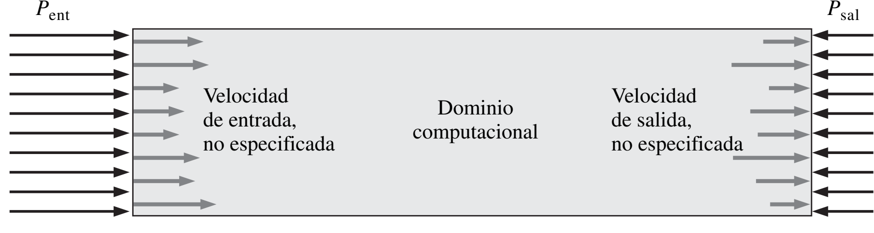


FIGURA 15-20
En una *entrada* o *salida de presión* se especifica la presión sobre la cara, pero no puede especificarse la velocidad a través de la cara. Cuando la solución de la DFC converge, la velocidad se ajusta a sí misma de tal modo que se cumplen las condiciones de frontera de presión prescritas.

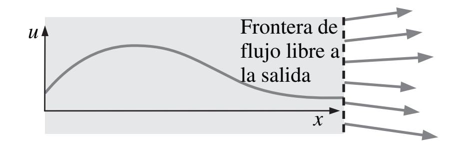


FIGURA 15-21
En una condición de frontera de *flujo libre a la salida*, el gradiente o pendiente de velocidad normal a la cara de la salida del flujo es cero, como se ilustra aquí para *u* como una función de *x* a lo largo de una línea horizontal. Observe que ni la presión ni la velocidad se especifican en caso de la condición de la frontera de flujo libre a la salida.

ce una condición que especifica presión, la velocidad se ajusta por sí misma para coincidir con el resto del campo de flujo (Fig. 15-20).

Otra opción en una salida del dominio computacional es la condición de la frontera de **flujo libre a la salida**. En este caso de la condición de la frontera de flujo libre a la salida, no se especifican propiedades de flujo; al contrario, las propiedades de flujo como velocidad, cantidades de turbulencia y temperatura son forzadas a tener *gradientes cero normales a la cara de flujo de salida* (Fig. 15-21). Por ejemplo, si un conducto es suficientemente largo de modo que el flujo *es totalmente desarrollado* en su salida, sería apropiada la condición de frontera de flujo de salida libre, ya que la velocidad no cambia en la dirección normal a la cara de salida. Note que la dirección de flujo no está restringida a ser perpendicular a la cara de salida, como se ilustra también en la figura 15-21. Si el flujo aún está en desarrollo, pero se conoce la presión a la salida, entonces una condición de frontera que especifica presión en la salida sería más apropiada que una condición de frontera de flujo libre. En flujos rotatorios por lo general en la salida se prefiere la condición de frontera de flujo libre sobre la condición de presión, puesto que el movimiento giratorio origina gradientes de presión radiales que no es fácil emplear si se establece en la salida la condición que especifica la presión.

Una situación común en una aplicación simple de la DFC es especificar velocidad en una o más entradas de flujo al dominio computacional, presión en una o más salidas de flujos, y establecer las condiciones de frontera en las paredes que definen la configuración geométrica del resto del dominio computacional. Por ejemplo, en una alberca (Fig. 15-18), se establece la cara izquierda del dominio computacional como una entrada de velocidad y la cara del fondo como una salida de presión. El resto de las caras son paredes, con la superficie libre modelada como una pared con esfuerzo cortante cero.

Por último, para simulaciones de flujo compresible, las condiciones de frontera en la salida se complican más por la introducción de constantes de Riemann y variables características relacionadas con ondas que entran y salen, cuyo análisis está fuera del objetivo de este texto. Por fortuna, muchos paquetes de la DFC tienen una condición de frontera de **campo lejano de presión** para flujos compresibles. Esta condición en la frontera se emplea para especificar el número de Mach, la presión y la temperatura en una entrada. La misma condición de frontera se puede aplicar a una salida; cuando el flujo sale del dominio computacional, las variables de flujo en la salida se extrapolan desde el interior del dominio. De nuevo debe cerciorarse que no hay flujo invertido en una salida.

Condiciones de frontera diversas

Algunas fronteras de un dominio computacional no son paredes ni entradas o salidas, sino más bien imponen alguna clase de simetría o periodicidad. Por ejemplo, la condición de frontera **periódica** es útil cuando en la configuración geométrica hay repetición. Las variables de campo de flujo a lo largo de una

cara de una frontera periódica están **vinculadas** numéricamente a una segunda cara de manera idéntica (y en la mayoría de los paquetes de la DFC, también a *malla* de cara idéntica). Por lo tanto, el flujo que sale a través de (cruza) la primera frontera periódica puede considerarse que entra a través de (cruza) la segunda frontera periódica con propiedades idénticas (velocidad, presión, temperatura, etc.). Las condiciones de frontera periódicas ocurren siempre en *pares* y son útiles para flujos con configuraciones geométricas repetitivas, como el flujo en los álabes de una turbomáquina o de una configuración de tubos de intercambiador de calor (Fig. 15-22). Las condiciones de frontera periódicas permiten trabajar con un dominio computacional que es mucho más pequeño que el campo de flujo completo y, por lo tanto, se ahorran recursos de computadora. En la figura 15-22 puede imaginarse un número infinito de dominios repetidos (líneas discontinuas) arriba y abajo del dominio computacional real (la región sombreada en gris tenue). Las condiciones de frontera periódicas deben especificarse como **traslacionales** (periodicidad aplicada a dos caras paralelas, como en la figura 15-22) o **rotacionales** (periodicidad aplicada a dos caras con orientación radial). La región de flujo entre dos aspas vecinas de un ventilador (un **pasaje de flujo**) es un ejemplo de un dominio periódico rotacional (vea la Fig. 15-56).

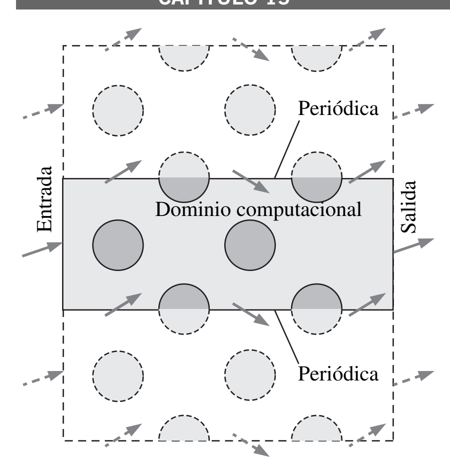


FIGURA 15-22
La condición de frontera *periódica* se impone sobre dos caras idénticas. Cualquier situación que suceda en una de las caras también debe pasar en su parte periódica equivalente, según se ilustra mediante los vectores de velocidad que atraviesan las caras periódicas.

La condición de frontera de **simetría** fuerza a las variables del campo de flujo a aparecer como *imágenes especulares* en un plano de simetría. De forma matemática, los *gradientes* de la mayoría de las variables de campo de flujo en la dirección normal al plano de simetría se igualan a cero en el plano de simetría, aunque algunas variables se especifican como funciones pares y algunas como funciones impares en una condición de frontera de simetría. Para flujos físicos con uno o más planos de simetría, esta condición de frontera permite modelar solamente una *parte* del dominio de flujo físico, así que se ahorran los recursos de computadora. La frontera de simetría difiere de la frontera periódica en que no se necesita ninguna frontera "asociada" para el caso de simetría. Además, el fluido puede correr paralelo a una frontera de simetría, pero no *a través de* una frontera de simetría, mientras que el flujo puede *cruzar* una frontera periódica. Considere, por ejemplo, el flujo que circunda un conjunto de tubos de intercambiador de calor (Fig. 15-22). Si se supone que ningún flujo cruza la frontera periódica del dominio computacional pueden usarse las condiciones de frontera de simetría en vez de las condiciones de frontera periódica. El lector atento notará que inclusive puede reducirse a la mitad el tamaño del dominio computacional al elegir con inteligencia los planos de simetría (Fig. 15-23).

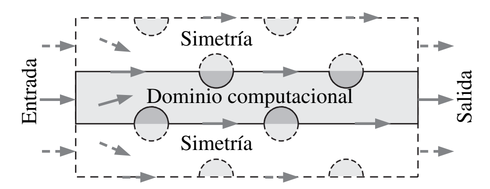


FIGURA 15-23
La condición de frontera de *simetría* se impone sobre una cara de tal modo que el flujo que cruza la cara es una imagen especular del flujo calculado. Se esbozan los dominios imaginarios (líneas interrumpidas) por arriba y por abajo del dominio computacional (región en gris claro) en el cual los vectores de velocidad son imágenes especulares del dominio computacional. En este ejemplo de un intercambiador de calor, la cara izquierda del dominio es una entrada de velocidad, la cara derecha es una salida de presión o salida de flujo libre, sobre los cilindros se impone las condiciones de pared y tanto la cara superior como la inferior son planos de simetría.

Para flujos *axisimétricos*, la condición de frontera **axisimétrica** se aplica al lado recto que representa el eje de simetría (Fig. 15-24*a*). El fluido puede correr *paralelo* al eje, pero no puede fluir *a través del* eje. La geometría axisimétrica permite reducir el problema a sólo dos dimensiones, como se bosqueja en la figura 15-24*b*. El dominio computacional es simplemente un rectángulo en el plano *xy*; se puede imaginar que este plano gira en torno al eje *x* para generar la axisimetría. En el caso de flujos axisimétricos de movimiento giratorio, el fluido puede fluir también de manera *tangencial* a una trayectoria circular alrededor del eje de simetría. Los flujos axisimétricos de movimiento giratorio a veces se denominan **rotacionalmente simétricos**.

Condiciones de frontera interiores

La clasificación final de las condiciones de frontera se impone a las condiciones que se formulan para las caras o lados que no forman la frontera del dominio computacional, sino más bien existen *dentro* del dominio. Cuando una condición de frontera **interior** se especifica en una cara, el usuario no fuerce ningún cambio del flujo que cruza la cara, y se espera que el flujo fluya del mismo modo al pasar de una celda interior a otra (Fig. 15-25). Esta condición de frontera es necesaria para situaciones donde el dominio computacional se divide en blo-

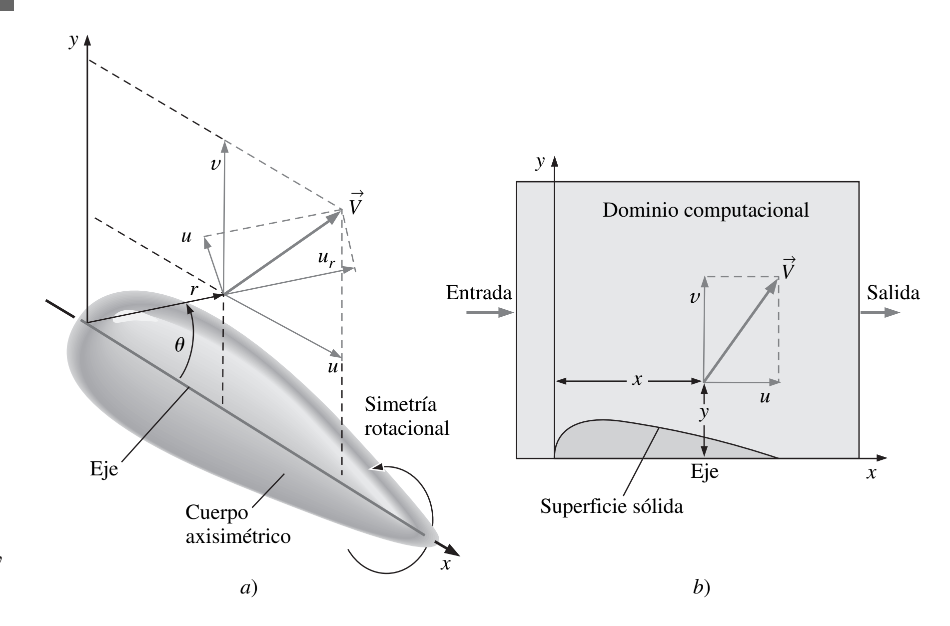


FIGURA 15-24
La condición de frontera de eje se aplica al eje de simetría (en este caso el eje *x*) en un flujo axisimétrico, puesto que hay simetría rotacional respecto al eje *x*. *a*) Se ilustra una sección que define el plano *xy* o *rθ*, y las componentes de la velocidad pueden ser (*u, v*) o (u_r, u_θ). *b*) El dominio computacional (región gris) de este problema se reduce a un plano de dos dimensiones (*x* y *y*). En muchos paquetes de la DFC, *x* y *y* se utilizan como coordenadas axisimétricas, donde se entiende que *y* es la distancia desde el eje *x*.

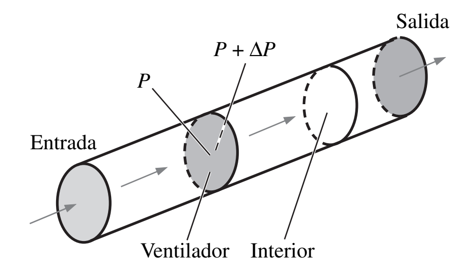


FIGURA 15-25
La condición de frontera de *ventilador* impone un cambio abrupto en la presión a través del plano del ventilador para simular un ventilador de flujo axial en un conducto. Cuando el aumento de presión se especifica como cero, la condición de frontera de ventilador degenera en una condición de frontera *interior*.

ques separados o zonas, y permite la comunicación entre bloques. Se ha encontrado que esta condición de frontera es útil también para posprocesamiento, debido a que una cara predefinida está presente en el campo de flujo, en cuya superficie puede trazarse vectores de velocidad, contornos de presión, etc. En aplicaciones de la DFC más avanzadas donde hay una malla deslizante o rotatoria, la interfase entre los dos bloques se necesita para transferir información sin problemas de un bloque a otro.

La condición de frontera de **ventilador** se especifica en un plano en el que se asigna un incremento (o disminución) de presión repentino. Esta condición de frontera es similar a una condición de frontera interior excepto el caso del aumento de presión forzado. El paquete de la DFC no resuelve detalladamente el campo de flujo no estacionario por cada una de las aspas del ventilador, sino simplemente modela el ventilador como un plano infinitesimalmente delgado en el cual se cambia la presión. La condición de frontera de ventilador es útil, por ejemplo, en caso de un modelo simple de un ventilador dentro de un conducto (Fig. 15-25), un ventilador de techo en una habitación o una hélice o un motor de propulsión. Si el aumento de presión por el ventilador se especifica como cero, esta condición de frontera se comporta igual que una condición de frontera interior.

La práctica lo hace perfecto

La mejor manera de aprender dinámica de fluidos computacional es mediante ejemplos y *práctica*. Se exhorta a experimentar con varias mallas, condiciones de frontera, parámetros numéricos, entre otros, con el fin de percibir cómo es la DFC y empezar a “sentirla”. Antes de enfrentar un problema complicado es mejor resolver problemas más simples, en particular aquéllos para los que se conocen las soluciones analíticas o empíricas (para comparación y comprobación). En las secciones siguientes, de ejemplo, se resuelven varios problemas de interés general en ingeniería para ilustrar numerosas capacidades y limitaciones de la DFC. Se empieza con flujos laminares y luego se proporcionan algunos ejemplos introductorios de flujo turbulento. Por último, se dan ejemplos de flujos con transferencia de calor, flujos compresibles y flujos de líquido con superficie libre. Las imágenes en color de los resultados están disponibles en el sitio de Internet del libro, inclusive algunas animaciones.

15-2 ▪ CÁLCULOS DE LA DFC DE FLUJO LAMINAR

La dinámica de fluidos computacional realiza un trabajo excelente cuando se calcula flujo laminar incompresible, estacionario o no estacionario, siempre que la resolución de la malla sea la adecuada y se especifiquen de manera apropiada las condiciones de frontera. Se muestran ejemplos simples de soluciones de flujo laminar, con atención particular en la resolución de la malla y la aplicación apropiada de condiciones de frontera. En todos los ejemplos de esta sección, los flujos son incompresibles y bidimensionales (o axisimétricos).

Región de entrada de flujo de una tubería a Re = 500

Considere el flujo de agua a temperatura ambiente dentro de una tubería redonda lisa de longitud = 40.0 cm y diámetro D = 1.00 cm. Se supone que el agua entra a una velocidad uniforme igual a V = 0.05024 m/s. La viscosidad cinemática del agua es $\nu = 1.005 \times 10^{-6}$ m^2/s, que produce un número de Reynolds de Re = VD/ν = 500. Se supone flujo laminar y estacionario de fluido incompresible. Se está interesado en la región de entrada en la cual el flujo poco a poco se vuelve desarrollado totalmente. Como resultado de la axisimetría, se establece un dominio computacional que es una porción bidimensional del eje a la pared de la tubería, en vez de un volumen cilíndrico tridimensional (Fig. 15-26). Se generan seis mallas estructuradas para este dominio computacional: *de celdas muy amplias* (40 intervalos en la dirección axial × 8 intervalos en la dirección radial), *de celdas amplias* (80 × 16), *media* (160 × 32), *fina* (320 × 64), *muy fina* (640 × 128) y *ultrafina* (1 280 × 256) (note que el número de intervalos se duplica en ambas direcciones para cada malla sucesiva). En todos los casos los nodos están distribuidos de manera uniforme axialmente, pero se concentran radialmente cerca de la pared, debido a que se esperan los gradientes de velocidad más grandes cerca de la pared de la tubería. En la figura 15-27 se muestran vistas de acercamiento de las tres primeras de estas mallas.

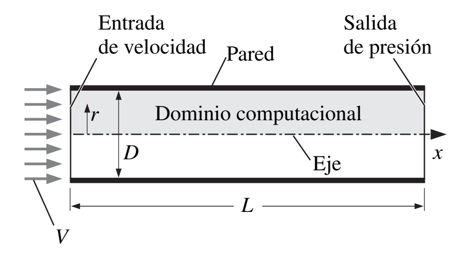


FIGURA 15-26
Debido a la axisimetría respecto al eje x, el flujo en un tubo circular puede calcularse si se usa como el dominio computacional un corte bidimensional del tubo desde $r = 0$ hasta $D/2$. El dominio computacional es la región gris y el esquema no está a escala. Se señalan las condiciones de frontera.

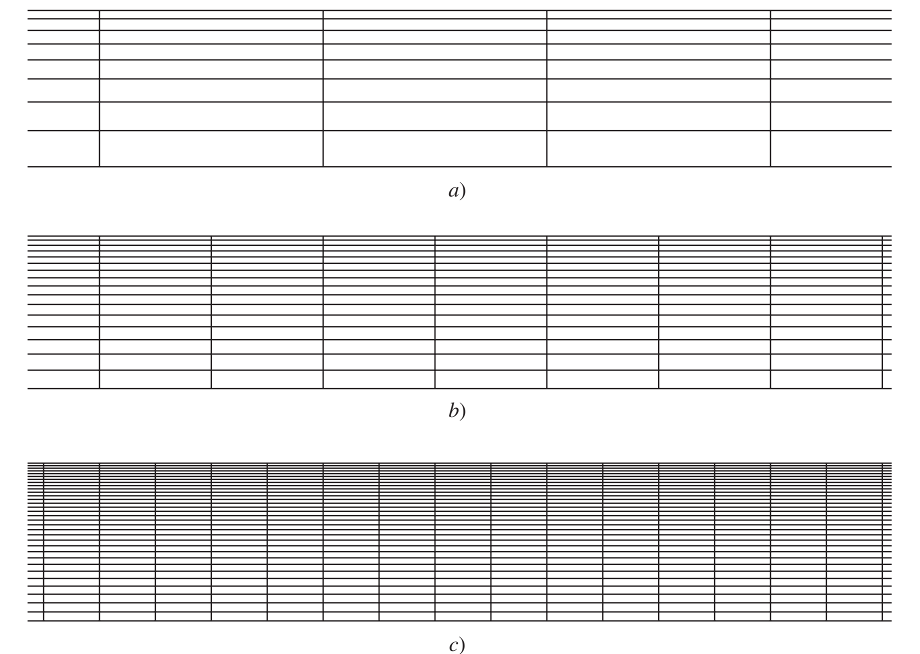


FIGURA 15-27
Porciones de las tres mallas estructuradas de celdas más amplias generadas para el flujo laminar en un tubo: *a*) malla de celdas muy amplias (40 × 8), *b*) malla de celdas amplias (80 × 16), *c*) malla media (160 × 32). La cantidad de celdas computacionales es 320, 1 280 y 5 120, respectivamente. En cada vista, la superficie de la pared del tubo está en la parte superior y el eje del tubo está en la parte inferior, como en la figura 15-26.

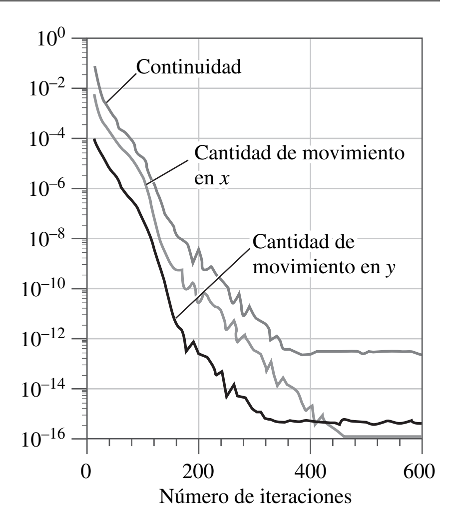
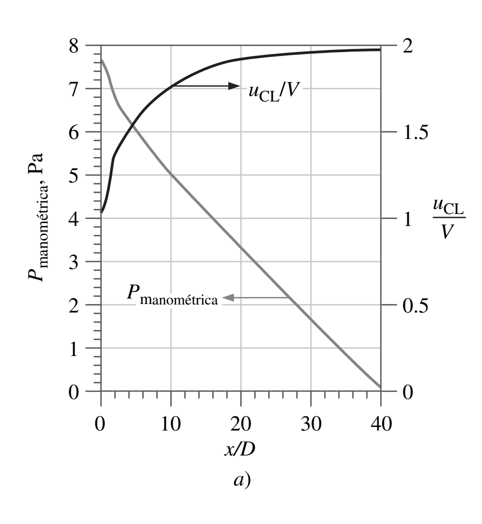


FIGURA 15-28
Decaimiento de los residuos con el número de iteraciones para la solución del flujo laminar en un tubo en el caso de una malla de celdas muy amplias (aritmética de precisión doble).

Se ejecuta el programa de la DFC FLUENT en precisión doble para los seis casos (la aritmética de doble precisión no siempre es necesaria para cálculos de ingeniería; se emplea aquí para obtener la mejor precisión posible en las comparaciones). Puesto que el flujo es laminar, incompresible y axisimétrico, sólo se resuelven las tres ecuaciones: de continuidad, de cantidad de movimiento lineal en *x* y de cantidad de movimiento lineal en *y*. Note que la coordenada *y* se usa en el paquete de la DFC en vez de *r* como la distancia desde el eje de rotación (Fig. 15-24). El paquete de la DFC se corre hasta lograr la convergencia (que los residuos se estabilicen). Recuerde que un residuo es una medida de qué tanto se desvía la solución numérica de la ecuación dada del valor exacto de la solución; a menor residuo, mejor convergencia. Para el caso de la malla de celdas muy amplias, esto ocurre en casi 5 000 iteraciones, y los residuos se estabilizan en menos de 10^{-12} (respecto a sus valores iniciales). La disminución de los residuos se grafican en la figura 15-28 para el caso de celdas muy amplias. Note que para problemas más complicados con mallas más finas, no siempre se pueden esperar estos residuos tan bajos; en algunas soluciones de la DFC, los residuos se estabilizan en valores mucho mayores, como 10^{-3}.

Se define P_1 como la presión promedio en una ubicación axial que se encuentra corriente abajo de la entrada a la distancia igual a un diámetro de tubería. De manera similar, se define P_{20} a 20 diámetros de tubería corriente debajo de la entrada. Así, la caída de presión promedio en la dirección axial a lo largo de la distancia entre 1 y 20 diámetros es $\Delta P = P_1 - P_{20}$, y es igual a 4.404 Pa (a cuatro dígitos significativos de precisión) para el caso de la malla de celdas muy amplias. La presión de línea central y la velocidad axial se grafican en la figura 15-29*a* como funciones de la distancia corriente abajo. La solución al parecer es físicamente razonable. Se ve que el incremento de la velocidad axial de línea central corresponde a la ley de conservación de masa a medida que la capa límite en la pared de la tubería crece corriente abajo. Se observa una caída de presión abrupta cerca de la entrada de la tubería donde los esfuerzos de corte viscosos sobre la pared de la tubería son más altos. La caída de presión tiende a ser lineal al acercarse al extremo de la región de entrada donde el flujo ya está desarrollado casi totalmente, como se esperaba. Por último, se compara en la figura 15-29*b* el perfil de velocidad axial en el extremo de la tubería con la solución analítica conocida para flujo en tubería laminar totalmente desarrollado (ver capítulo 8). La concordancia es excelente, en particular si se considera que sólo hay ocho intervalos en la dirección radial.

¿Es independiente esta solución de la DFC de la malla? Para investigar, se repiten los cálculos con las mallas de celdas amplias, media, fina, muy fina y ul-



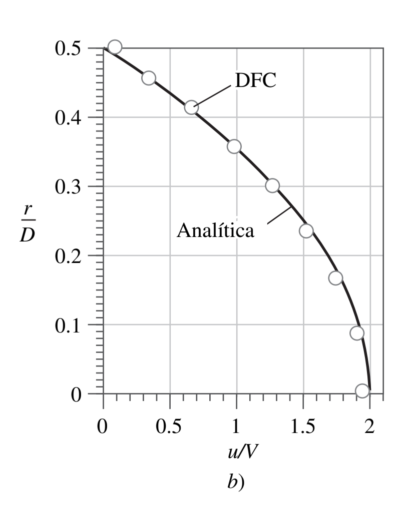


FIGURA 15-29
Resultados de la DFC para simulación de flujo laminar en un tubo para el caso de malla de celdas muy amplias: *a*) desarrollo de presión y velocidad axial a lo largo del eje central con el incremento de la distancia corriente abajo y *b*) perfil de la velocidad axial en la salida del tubo comparado con la predicción analítica.

TABLA 15-1

Caída de presión desde $x/D = 1$ hasta 20 para los distintos casos de resolución de mallas en la región de entrada del flujo para flujo axisimétrico en tubería

Caso	Número de celdas	ΔP, Pa
Muy amplia	320	4.404
Amplia	1 280	3.983
Media	5 120	3.998
Fina	20 480	4.016
Muy fina	81 920	4.033
Ultrafina	327 680	4.035

trafina. La convergencia de los residuos es similar desde el punto de vista cualitativo a la de la figura 15-28 para todos los casos, pero el tiempo del CPU se incrementa de manera considerable conforme mejora la resolución de la malla, y los niveles de los residuos finales no son tan bajos como los del caso de celdas amplias. El número de iteraciones necesarias para lograr la convergencia también se incrementa con la resolución de la malla. La caída de presión de $x/D = 1$ a 20 se lista en la tabla 15-1 para los seis casos. ΔP se grafica también como una función del número de celdas en la figura 15-30. Se ve que, inclusive, la malla de celdas muy amplias realiza un trabajo razonable en la predicción de ΔP. La diferencia entre la caída de presión en caso de la malla de celdas muy amplias y en caso de la malla ultrafina es menor de 10 por ciento. Así, la malla de celdas muy amplias podría ser adecuada para algunos cálculos de ingeniería. Sin embargo, si es necesaria mayor precisión, debe usarse una malla más fina. Se ve la independencia de solución de la malla hasta tres cifras significativas al comparar los resultados con el resultado de la malla más fina. El cambio en ΔP de la malla muy fina a la malla ultrafina es menor de 0.07 por ciento, y resulta que una malla con la resolución tan fina como la de la malla ultrafina es innecesaria en análisis de ingeniería de cualquiera que sea el problema práctico.

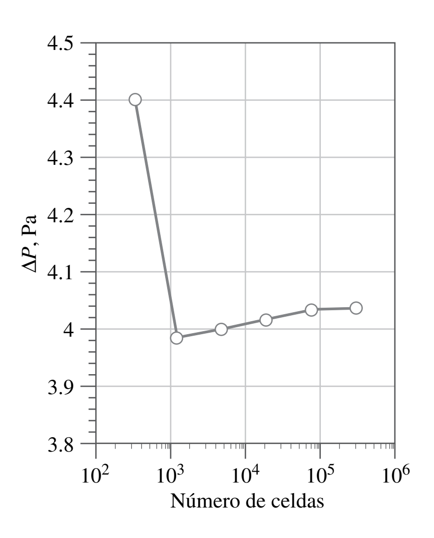


FIGURA 15-30
Caída de presión calculada a partir de $x/D = 1$ a 20 en la región de entrada de flujo axisimétrico en tubo como función del número de celdas.

Las diferencias más notables entre los seis casos ocurren muy cerca de la entrada de la tubería, donde los gradientes de presión y los de velocidad son más grandes. De hecho, se presenta una *singularidad* en la entrada, donde la velocidad axial cambia de manera repentina de V a cero en la pared debido a la condición de no deslizamiento. En la figura 15-31 se trazan gráficas de contorno de la velocidad axial normalizada, u/V, cerca de la entrada de la tubería. Se observa que aunque las propiedades globales del campo de flujo (como la caída de presión global) varían sólo pocos por cientos cuando se refina la malla, los *detalles* del campo de flujo (como los contornos de velocidad que se muestran aquí) cambian de manera considerable con la resolución de la malla. Puede verse que cuando la malla se refina de manera continua, las formas de contorno de la velocidad axial se vuelven más uniformes y mejor definidas. Las mayores diferencias en las formas de contorno ocurren cerca de la pared de la tubería.

Flujo alrededor de un cilindro circular a Re = 150

Para ilustrar que los resultados confiables de la DFC exigen la correcta formulación del problema, considere el problema al parecer simple del flujo bidimensional incompresible, estacionario, sobre un cilindro circular de diámetro $D = 2.0$ cm (Fig. 15-32). El dominio computacional de dos dimensiones que se em-

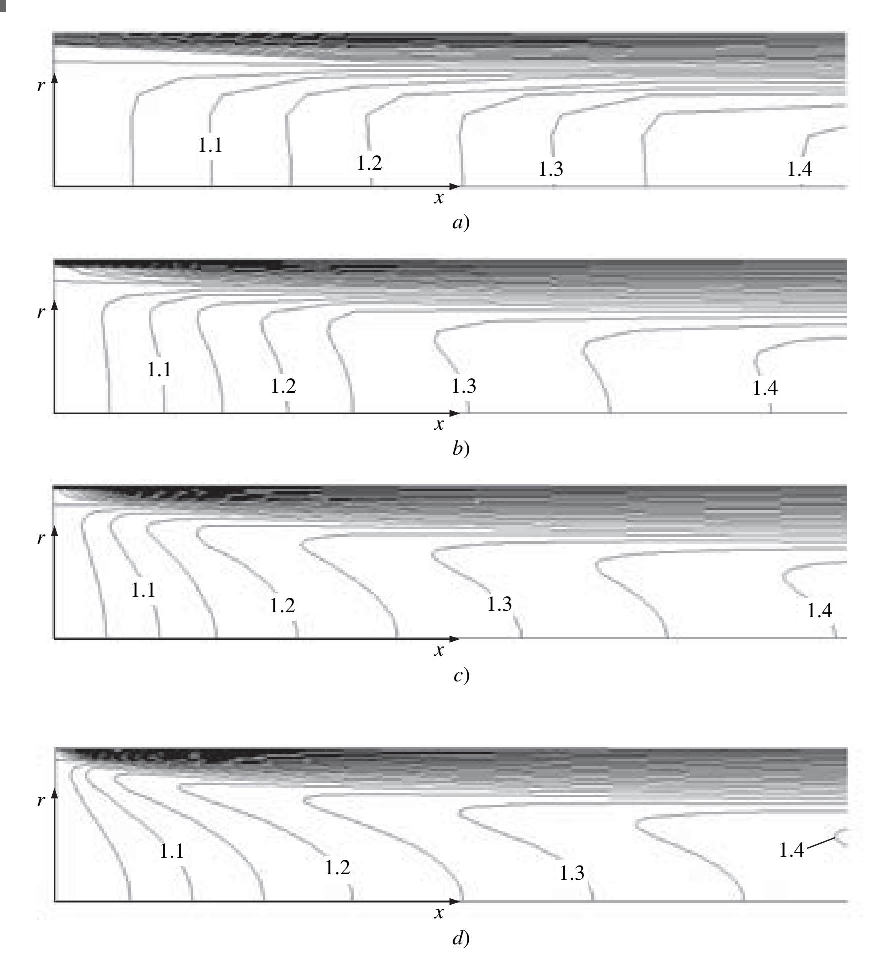


FIGURA 15-31
Contornos de velocidad axial normalizada (u/V) para el ejemplo de flujo laminar en una tubería. Se muestra un acercamiento de la región de entrada de la tubería para cada una de las primeras cuatro mallas: *a*) malla de celdas muy amplias (40×8), *b*) malla de celdas amplias (80×16), *c*) malla media (160×32) y *d*) malla fina (320×64).

plea para esta simulación se bosqueja en la figura 15-33. Sólo se resuelve la mitad superior del campo de flujo, debido a la simetría a lo largo del lado inferior del dominio computacional; se especifica una condición de frontera de simetría a lo largo de este lado para comprobar que ningún flujo cruza el plano de simetría. Con esta condición de frontera impuesta, el tamaño del dominio computacional necesario se reduce en un factor de 2. Se aplica una condición de frontera de pared sin deslizamiento, en reposo, a la superficie del cilindro. La mitad izquierda de aquella parte de la frontera del dominio que corresponde al campo de flujo lejano, obtiene una condición de frontera que especifica la velocidad al establecer las componentes de la velocidad $u = V$ y $v = 0$. A lo largo de la mitad derecha se formula la condición de frontera que especifica presión. (Allí, la presión manométrica se establece en cero sin embargo, ya que, en un paquete de la DFC, el campo de velocidad de fluido incompresible depende sólo de las *diferencias* de presión, no del valor absoluto de presión, el valor de presión que se usa para especificar la condición de frontera en la salida es irrelevante).

Se generan tres mallas estructuradas bidimensionales para comparación: *de celdas amplias* (30 intervalos radiales $\times$ 60 intervalos a lo largo de la superficie del cilindro = 1 800 celdas), *media* (60×120 = 7 200 celdas) y *fina* (120×240 = 28 800 celdas), como se ve en la figura 15-34. Nótese que sólo una pequeña porción del dominio computacional se muestra aquí; el dominio completo se extiende a 15 diámetros del cilindro hacia fuera desde el origen, y las celdas se hacen cada vez más grandes al alejarse del cilindro.

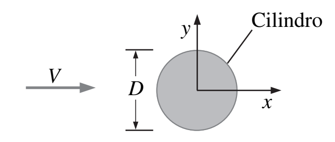


FIGURA 15-32
Flujo de fluido a la velocidad de flujo libre V sobre un cilindro circular bidimensional de diámetro D.

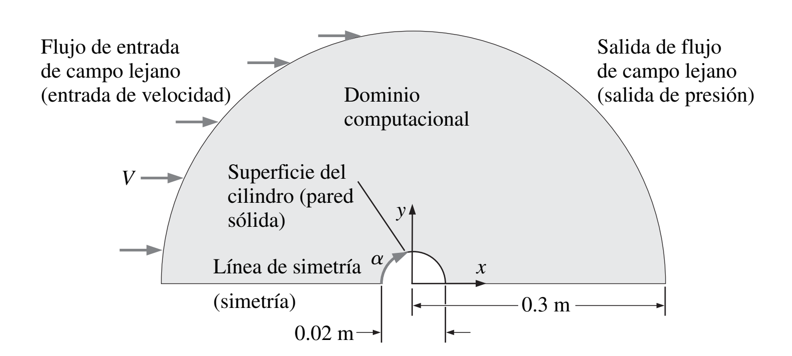


FIGURA 15-33
Dominio computacional (región gris claro) que se usa para simular flujo estacionario bidimensional sobre un cilindro circular (no está a escala). Se supone que el flujo es simétrico con respecto al eje *x*. Se muestran entre paréntesis las condiciones de frontera aplicadas para cada lado del dominio computacional. También se define α, el ángulo medido a lo largo de la superficie del cilindro desde el punto de estancamiento frontal.

Se considera un flujo libre de aire a una temperatura de 25°C, a presión atmosférica estándar, y a velocidad $V = 0.1096$ m/s, de izquierda a derecha alrededor de este cilindro circular. El número de Reynolds del flujo, con base en el diámetro del cilindro ($D = 2.0$ cm), es entonces $\text{Re} = \rho VD/\mu = 150$. Los experimentos a este número de Reynolds revelan que la capa límite es laminar y se separa al ángulo aproximadamente de 10° *antes* del punto superior del cilindro, a $\alpha \cong 82°$ desde el punto de estancamiento frontal. La estela también permanece laminar. En publicaciones científicas, los valores del coeficiente de arrastre medidos de manera experimental a este número de Reynolds muestran mucha diferencia de una publicación a otra; el intervalo es $C_D \cong$ de 1.1 a 1.4, y es muy probable que las diferencias se deban a la calidad del flujo libre y a los efectos tridimensionales (derramamiento de vórtice oblicuo entre otros). (Recuerde que $C_D = 2F_D/\rho V^2 A$, donde A es el área frontal del cilindro y $A = D$ multiplicado por la longitud del cilindro, tomada como longitud unitaria en un cálculo de la DFC de dos dimensiones.)

Las soluciones de la DFC que se obtienen para cada una de las tres mallas al suponer flujo laminar estacionario se muestran en la figura 15-34. Los tres casos convergen sin problemas, pero los resultados no necesariamente concuerdan con la intuición física o con los datos experimentales. Las líneas de corriente se muestran en la figura 15-35 para las tres resoluciones de malla. En todos los casos la imagen se refleja respecto a la línea de simetría, de modo que aunque sólo se resuelva la mitad superior del campo de flujo, éste aparece completo.

Para el caso de resolución de celdas amplias (Fig. 15-35*a*), la capa límite se separa a $\alpha = 120°$, bastante lejos del punto superior del cilindro, y C_D es 1.00. La solución de la capa límite es insuficiente para producir el punto de separación de capa límite apropiado, y el arrastre es un poco más pequeño de lo que debe ser. En la estela se observan dos grandes burbujas de separación con los movimientos giratorios contrarios que se extienden varios diámetros de cilindro corriente abajo. Para el caso de resolución media (Fig. 15-35*b*), el campo de flujo es considerablemente distinto. La capa límite se separa un poco más corriente arriba a $\alpha = 110°$, lo cual concuerda ya un poco mejor con los resultados experimentales, pero C_D ha disminuido a casi 0.982, un valor bastante diferente del valor experimental. Las burbujas de separación en la estela del cilindro han crecido mucho más en comparación con las del caso de la malla de celdas amplias. Al refinar la malla aún más, ¿se mejoran los resultados numéricos? En la figura 15-35*c* se muestran las líneas de corriente para el caso de resolución fina. Los resultados se ven cualitativamente similares a los del caso de resolución media, con $\alpha = 109°$, pero el coeficiente de arrastre es inclusive más pequeño ($C_D = 0.977$), y las burbujas de separación son más largas. En el cuarto cálculo (no se muestra) a una resolución de malla todavía más fina se observa la misma tendencia; las burbujas de separación se alargan corriente abajo y el coeficiente de arrastre disminuye un poco.

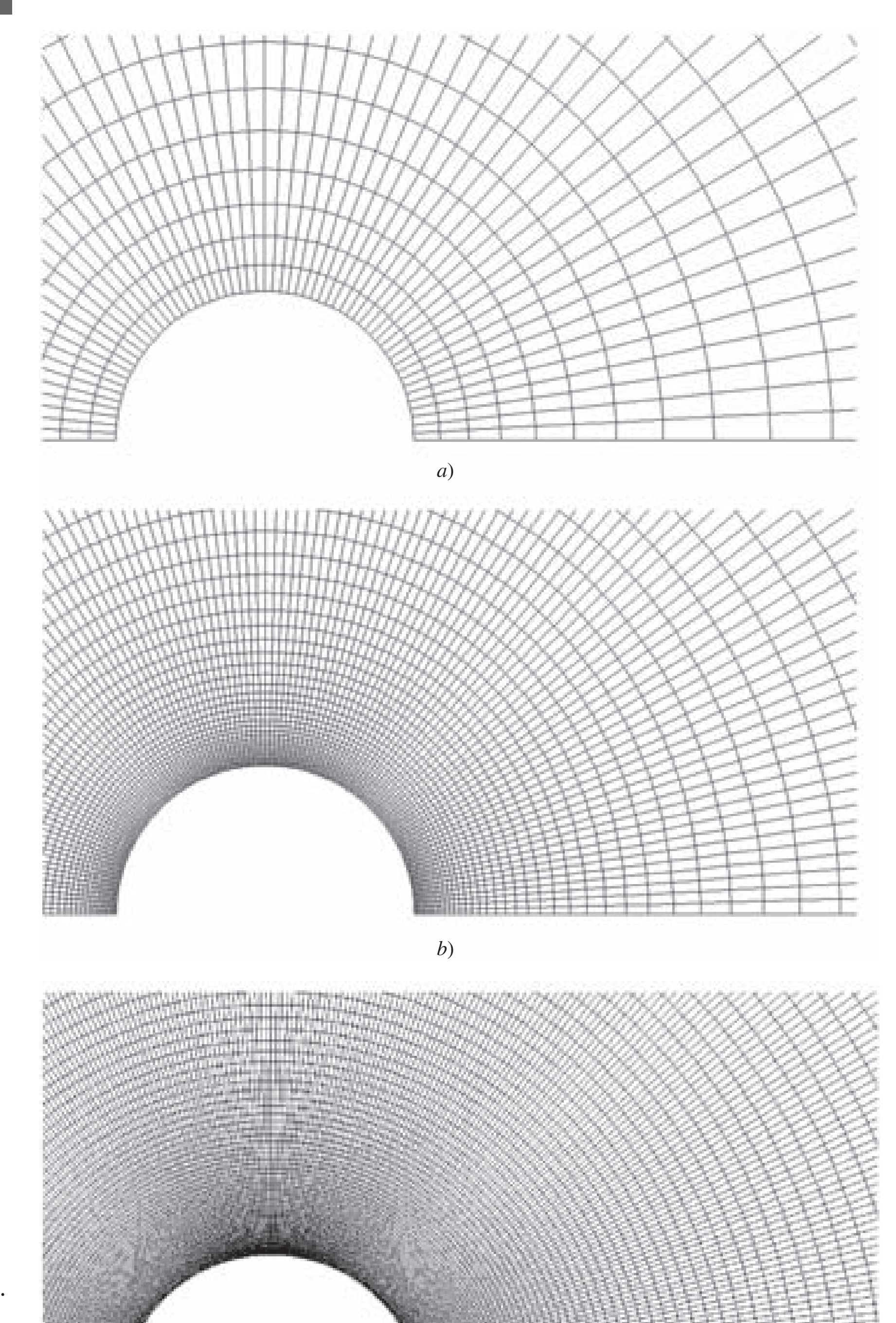


FIGURA 15-34
Mallas estructuradas bidimensionales alrededor de la mitad superior de un cilindro circular: *a*) malla de celdas amplias (30 × 60), *b*) malla mediana (60 × 120), *c*) malla fina (120 × 240). El lado inferior es una línea de simetría. Sólo se muestra una porción de cada dominio computacional: el dominio se extiende mucho más allá de la parte que se muestra aquí.

En la figura 15-36 se muestra una gráfica de contorno de la componente de la velocidad tangencial (u_θ) para el caso de resolución media. Se grafican valores de u_θ en un intervalo muy pequeño alrededor de su valor de cero, de modo que pueda verse con claridad dónde, a lo largo del cilindro, el flujo cambia su dirección. Ésta es, por lo tanto, una manera ingeniosa de localizar el punto de separación a lo largo de la superficie del cilindro. Note que esto funciona sólo para un cilindro circular como resultado de su configuración geométrica única. Una manera más general de determinar el punto de separación es identificar el punto a lo largo de la superficie donde el esfuerzo de corte τ_w es cero; esta técnica funciona para cuerpos de cualquier forma. De la figura 15-36 se observa que la capa límite se separa a un ángulo de $\alpha = 110°$ desde el punto de estancamiento frontal, mucho más corriente abajo que el valor de 82° obtenido de manera experimental. De hecho, todos los resultados de la DFC predicen separación de capa límite en el lado *posterior* y no en el lado frontal del cilindro.

Estos resultados de DFC carecen de sentido físico; las burbujas de separación tan alargadas no podrían permanecer estables en una situación de flujo real, el punto de separación está demasiado lejos corriente abajo y el coeficiente de arrastre es demasiado bajo comparado con los datos experimentales. Además, la exactitud repetida de malla *no* produce la mejora en resultados como se esperaría; por el contrario, *los resultados empeoran con la exactitud de la malla*. ¿Por qué estas simulaciones de la DFC producen tal mala concordancia con el experimento? La respuesta es doble:

1. Se ha forzado la solución de la DFC a ser estacionario, cuando de hecho el flujo sobre un cilindro circular a este número de Reynolds *no* es estacionario. Los experimentos muestran que se forma detrás del cilindro una **estela de vórtices de Kármán** periódica (Tritton, 1977; vea también la Fig. 4-25 de este texto).
2. Los tres casos de la figura 15-35 se resuelven sólo para el plano medio superior, y se supone la simetría respecto al eje *x*. En realidad, el flujo sobre un cilindro circular es muy asimétrico; los vórtices de manera alternada se derraman uno tras otro desde la parte superior del cilindro y la inferior y forman la estela de vórtices de Kármán.

Para corregir ambos problemas es necesario realizar una simulación de la DFC de flujo *no estacionario* e introducir una malla *completa* (las partes superior e inferior), sin imponer la condición de simetría. Se realiza la simulación de un flujo laminar bidimensional no estacionario, con el dominio computacional que se bosqueja en la figura 15-37. Para los lados superior e inferior de la frontera del dominio computacional (campo lejano) se especifica un par de condiciones de frontera periódicas para que no se supriman las oscilaciones asimétricas en la estela (el flujo puede cruzar estas fronteras según sea necesario). Los lados del dominio computacional correspondientes al campo de flujo lejano están también muy alejados del cilindro (de 75 a 200 diámetros de cilindro), de modo que su efecto en los cálculos es insignificante.

La malla es muy fina cerca del cilindro para resolver la capa límite. La malla también es fina en la región de estela para resolver los vórtices sucesivos a medida que viajan aguas abajo. Para esta simulación particular se emplea una malla híbrida un poco parecida a la que se muestra en la figura 15-14. El fluido es aire, el diámetro del cilindro es 1.0 m y la velocidad del aire de flujo libre se establece en 0.00219 m/s. Estos valores producen un número de Reynolds de 150 con base en el diámetro del cilindro. Note que el número de Reynolds es el parámetro importante en este problema, mientras que las elecciones de valores numéricos para *D*, *V* y tipo de fluido no son tan importantes, siempre que produzcan el número de Reynolds deseado (Fig. 15-38).

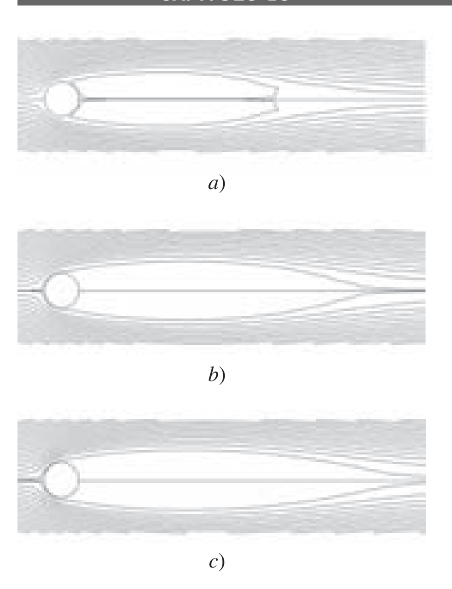


FIGURA 15-35
Líneas de corriente producidas por cálculos de la DFC de flujo en régimen estacionario sobre un cilindro circular a un Re = 150: *a*) malla de celdas amplias (30 × 60), *b*) malla media (60 × 120), *c*) malla fina (120 × 240). Observe que sólo la mitad superior del flujo está calculada, y la mitad inferior se muestra como imagen especular de la parte superior.

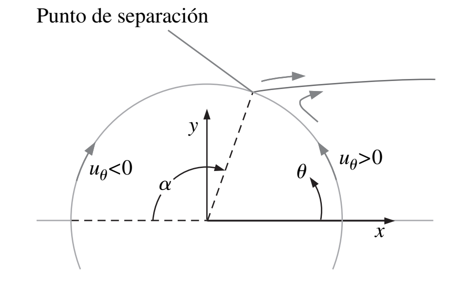


FIGURA 15-36
Gráfica de contorno de una componente de velocidad tangencial u_θ para flujo sobre un cilindro circular a Re = 150 y para el caso de resolución de malla media (60 × 120). Se grafican los valores de magnitud $-10^{-4} < u_\theta < 10^{-4}$ m/s para revelar la ubicación precisa de la separación de la capa límite, es decir, donde u_θ cambia de signo en la cercanía inmediata de la superficie del cilindro, como se muestra en el diagrama. En este caso, el flujo se separa a $\alpha = 110°$.

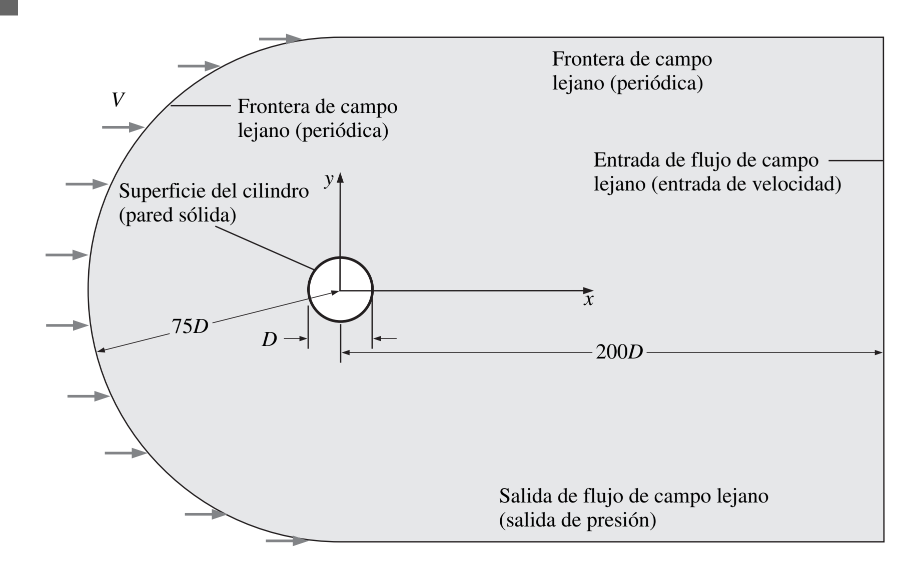


FIGURA 15-37
Dominio computacional (región gris) que se usa para simular un flujo no estacionario, bidimensional y laminar sobre un cilindro circular (no está a escala). Las condiciones de frontera aplicadas están entre paréntesis.

Conforme se avanza en el tiempo, se amplifican las irregularidades pequeñas en el campo de flujo, y el flujo se vuelve no estacionario y asimétrico respecto al eje *x*. Se forma de manera natural una estela de vórtices de Kármán. Después de un tiempo suficiente para que haga su trabajo CPU, el flujo simulado se convierte en un patrón periódico de diseminación de vórtices, muy parecido al flujo real. En la figura 15-39 se muestra una gráfica de contornos de vorticidad en un instante de tiempo, junto con una fotografía que muestra las líneas de traza del mismo flujo obtenidas de manera experimental en un túnel de viento. Es evidente de la simulación de la DFC que los vórtices de Kármán se debilitan corriente abajo, debido a que la magnitud de la vorticidad se reduce con la distancia corriente abajo. Este debilitamiento se debe en parte a los efectos físicos (flujo viscoso) y en parte al efecto artificial (disipación numérica). Sin embargo, los experimentos físicos confirman el debilitamiento de los vórtices de Kármán. El debilitamiento no es tan evidente en la fotografía de líneas de traza (Fig. 15-39*b*); esto se debe a la propiedad de integración con el tiempo de las líneas de traza, como se señaló en el capítulo 4. Una vista de acercamiento de la diseminación de vórtices desde el cilindro en determinado instante se muestra en la figura 15-40, de nuevo con una comparación entre los resultados de la DFC y los resultados experimentales, esta vez de experimentos en un canal de agua. En el sitio de Internet del libro se proporciona una versión animada a color de la figura 5-40, con el fin de poder ver el proceso dinámico de diseminación de vórtices.

El número de Reynolds se define como:

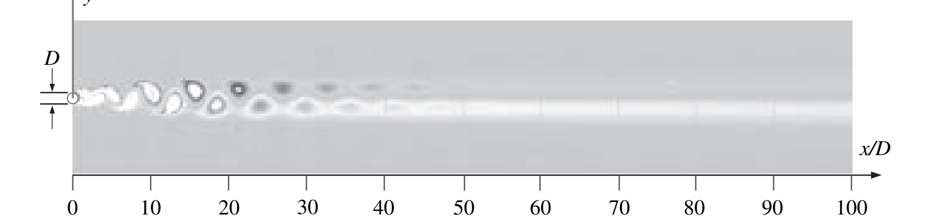
$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

para flujo de velocidad de flujo libre V de un fluido de densidad ρ y viscosidad dinámica μ (viscosidad cinemática ν) sobre un cilindro circular de diámetro D.

FIGURA 15-38
En una simulación de la DFC de flujo incompresible alrededor de un cilindro no es determinante la elección de velocidad de flujo libre, diámetro del cilindro ni el tipo del fluido, si se alcanza el número de Reynolds deseado.

En la tabla 15-2 se comparan los resultados de la DFC con los resultados experimentales. El coeficiente de arrastre promedio calculado para el cilindro es 1.14. Como se mencionó, los valores experimentales de C_D a este número de Reynolds varían de 1.1 a 1.4, así que la concordancia está dentro de la dispersión experimental. Note que la simulación presente es bidimensional, y de este modo se inhibe cualquier clase de diseminación de vórtices oblicuos u otras imperfecciones tridimensionales. Ésta podría ser la razón de que el coeficiente de arrastre calculado esté en el extremo inferior del intervalo experimental descrito. El número de Strouhal de la estela de vórtices de Kármán se define como:

Numero de Strouhal:
$$\text{St} = \frac{f_{\text{diseminación}} D}{V} \tag{15-4}$$



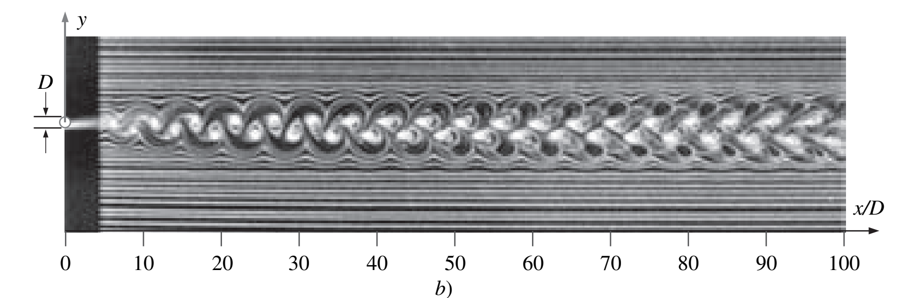
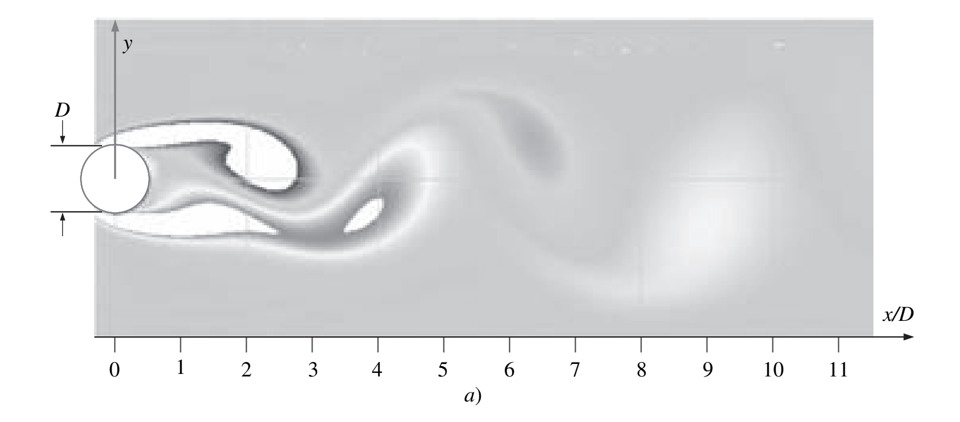


FIGURA 15-39
Flujo laminar en la estela de un cilindro circular a Re ≅ 150: *a*) una toma instantánea de los contornos de vorticidad que produce la DFC y *b*) líneas de traza promediados en tiempo generadas por un hilo de humo que se localiza en $x/D = 5$. Los contornos de vorticidad muestran que los vórtices de Kármán se desintegran con rapidez en la estela, en tanto que las líneas de traza conservan una "memoria" de su historia desde corriente arriba al crear una falsa imagen de que los vórtices aparentemente continúen durante una gran distancia corriente abajo.
Fotografía de Cimbala et al., 1988.



y
D
x/D
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
b)

FIGURA 15-40
Acercamiento de los vórtices que se derraman de un cilindro circular: *a*) gráfica de los contornos de vorticidad instantáneos que produce la DFC a Re = 150 y *b*) líneas de traza teñidas que son generadas por el tinte introducido en la superficie del cilindro a Re = 140. Una versión animada de esta imagen de la DFC se encuentra en el sitio de Internet del libro.
Fotografía b) reproducida con autorización de Sadatoshi Taneda.

TABLA 15-2

Comparación de resultados de la DFC y resultados experimentales para flujo no estacionario laminar sobre un cilindro circular a Re = 150*

	C_D	St
Experimento	1.1 a 1.4	0.18
DFC	1.14	0.16

* La causa principal de que no concuerden se debe con toda probabilidad a los efectos tridimensionales y no a la resolución de la malla o cuestiones numéricas.

donde $f_{\text{diseminación}}$ es la frecuencia de diseminación de la estela de vórtices. De la simulación de la DFC se calcula St = 0.16. El valor que se obtiene de manera experimental del número de Strouhal a este número de Reynolds es casi 0.18 (Williamson, 1989), así que de nuevo la concordancia es razonable, aunque los resultados de la DFC son un poco bajos al comparar con el experimento. Quizá una malla más fina ayudaría un poco, pero es más probable que la razón principal de la discrepancia se deba a efectos tridimensionales inevitables en los experimentos, los cuales no están presentes en estas dos simulaciones. En general esta simulación de la DFC es un éxito, ya que capta los principales fenómenos físicos en el campo de flujo.

Este ejercicio con flujo laminar "simple" sobre un cilindro circular ha demostrado algunas de las capacidades de la DFC, pero también ha revelado varios aspectos de la DFC acerca de los cuales debe tenerse precaución. La resolución de malla deficiente puede originar soluciones incorrectas, en particular respecto a la separación de capa límite, pero la exactitud continua de la malla no lleva a resultados más correctos desde el punto de vista físico si las condiciones de frontera no se establecen de manera apropiada (Fig. 15-41). Por ejemplo, imponer la simetría al flujo al realizar la solución numérica no siempre es aconsejable, inclusive para casos en los que la configuración geométrica del dominio físico del problema es por completo simétrica.

La geometría simétrica no garantiza flujo simétrico.

Además, imponer la suposición del flujo estacionario podría dar resultados incorrectos cuando el flujo en realidad es inherentemente inestable u oscilatorio, o ambos. Asimismo, la supuesta bidimensionalidad podría producir resultados incorrectos cuando el flujo es inherentemente tridimensional.

¿Cómo se puede asegurar entonces que es correcto el cálculo de la DFC laminar? Sólo mediante el estudio sistemático de los efectos del tamaño de dominio computacional, resolución de malla, condiciones de frontera, régimen de flujo (estacionario o no estacionario, 2-D o 3-D, etc.), junto con la validación experimental. Al igual que ocurre con la mayoría de las otras áreas de ingeniería, la *experiencia* es de primordial importancia.



FIGURA 15-41
La resolución de malla deficiente puede generar resultados de la DFC incorrectos, pero una malla más fina no es garantía de que se obtendrá una solución físicamente más correcta. Si las condiciones de frontera no se especifican de manera apropiada, los resultados podrían ser inútiles, sin importar qué tan fina sea la malla.

15-3 ▪ CÁLCULOS DE LA DFC TURBULENTA

Las simulaciones de flujo turbulento son mucho más difíciles que las de flujo laminar, inclusive para casos donde el campo de flujo es estacionario en promedio (los estadísticos se refieren a esta condición como **estacionaria**). La razón es que en la consideración más detallada el campo de flujo turbulento *siempre* es no estacionario y tridimensional; las estructuras vorticiales aleatorias, de movimiento giratorio, llamadas **remolinos de turbulencia**, surgen de todas las orientaciones en un flujo turbulento (Fig. 15-42). En algunos cálculos de la DFC se emplea una técnica llamada **simulación numérica directa (SND, DNS** por sus siglas en inglés), donde se intenta resolver el movimiento no estacionario de *todas* las escalas del flujo turbulento. Sin embargo, las diferencias en tamaño y en escala de tiempo entre los remolinos mayor y menor pueden ser de varios órdenes de magnitud ($L \gg \eta$ en la figura 15-42). Además, estas diferencias se incrementan con el número de Reynolds (Tennekes y Lumley, 1972), lo cual hace los cálculos de SND de flujo turbulento aún más difíciles a medida que aumenta el número de Reynolds. Las soluciones de SND demandan mallas tridimensionales muy finas, computadoras grandes y una enorme cantidad de tiempo del CPU. Con las computadoras actuales, los resultados de SND no son factibles inclusive para problemas prácticos de interés ingenieril que incluyen los flujos turbulentos con número de Reynolds alto, como el flujo sobre un aeroplano de dimensiones reales. No se espera que la situación cambie durante varias décadas más, inclusive si la rapidez fantástica de mejoramiento de las computadoras continúa al ritmo actual.

Por lo tanto, es necesario hacer algunas suposiciones que permitan simplificar con el fin de simular campos complejos de flujo turbulento con número de Reynodls alto. El siguiente nivel abajo de la SND es la **simulación de remolinos grandes** (**SRG, LES** por sus siglas en inglés). Con esta técnica se obtienen a la escala grande las características no estacionarias de los remolinos turbulentos, mientras que *se modelan* los remolinos turbulentos disipativos de pequeña escala (Fig. 15-43). La suposición básica es que los remolinos turbulentos más pequeños son **isotrópicos**; es decir, se supone que los remolinos pequeños son independientes de la orientación de sistema de coordenadas y siempre se comportan de manera estadísticamente similar y predecible, cualquiera que sea el campo de flujo turbulento. En comparación con SND, SRG demanda una cantidad de los recursos computacionales considerablemente menores porque se elimina la necesidad de resolver los remolinos más pequeños presentes en el campo de flujo. Pese a esto, las características que se exigen de la computadora para el análisis y los diseños de la práctica ingenieril son inclusive extraordinarias para el nivel de la tecnología actual. Una descripción más detallada de la SND y la SRG está fuera de los objetivos de este texto, pero éstas son áreas de intensa investigación actual.

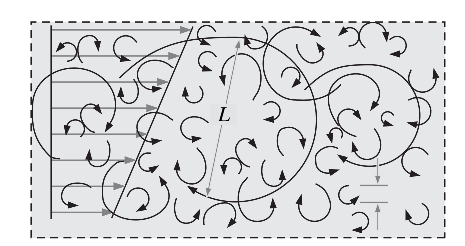


FIGURA 15-42
Todos los flujos turbulentos, inclusive los estables en sus características promedio (*estacionarios*), contienen *remolinos turbulentos*, tridimensionales y no estacionarios de varios tamaños. Se muestra el perfil de la velocidad promedio y algunos de los remolinos; los remolinos turbulentos más pequeños (tamaño *h*) son del orden de magnitud más pequeños que los remolinos turbulentos más grandes (tamaño *L*). La *simulación numérica directa* (SND, DNS por sus siglas en inglés) es una técnica de la DFC que simula *todos* los remolinos turbulentos pertinentes del flujo.

El siguiente nivel de decreciente complejidad es modelar *todos* los remolinos turbulentos no estacionarios con alguna clase de **modelo de turbulencia**. No se hace algún intento por resolver las características no estacionarias de los remolinos turbulentos de ninguna escala, ni inclusive los más grandes (Fig. 15-44). En cambio, los modelos matemáticos se emplean para tomar en cuenta el incremento de intensidad de mezclado y difusión debido a los remolinos turbulentos. Por sencillez, se considera sólo el flujo incompresible estacionario. Cuando se usa un modelo de turbulencia, la ecuación de Navier-Stokes (Ec. 15-2) se reemplaza por lo que se llama ecuación de **Navier-Stokes de número de Reynolds promedio** (**NSRP**, **RANS** por sus siglas en inglés), que se muestra aquí para flujo turbulento, incompresible, estacionario,

Ecuación de NSRP de flujo estacionario:

$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P' + \nu\nabla^2\vec{V} + \vec{\nabla}\cdot(\tau_{ij,\ \text{turbulento}}) \quad \textbf{(15-5)}$$

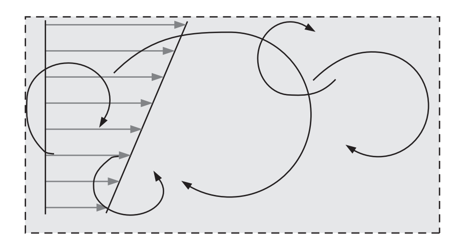


FIGURA 15-43
Simulación de remolinos grandes (SRG, LES por sus siglas en inglés) es una simplificación de la simulación numérica directa en la cual se calculan sólo los remolinos *grandes*, mientras que los remolinos pequeños se *modelan*, lo cual reduce de manera importante los recursos computacionales necesarios. Se ilustra en la figura el perfil de velocidad promedio y los remolinos calculados.

Comparada con la ecuación 15-2, hay un término adicional en el lado derecho de la ecuación 15-5 que justifica las fluctuaciones turbulentas. $\tau_{ij,\text{turbulento}}$ es un tensor conocido como **tensor de esfuerzo específico de Reynolds**, denominado así debido a que actúa de modo similar al tensor de esfuerzo viscoso τ_{ij} (Cap. 9). En coordenadas cartesianas, $\tau_{ij,\text{turbulento}}$ es:

$$\tau_{ij,\text{turbulento}} = -\begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad \textbf{(15-6)}$$

donde la barra superior indica el promedio en tiempo del producto de dos componentes de velocidad fluctuantes y los apóstrofos denotan componentes de velocidad fluctuantes. Puesto que el esfuerzo de Reynolds es simétrico, se introducen al problema seis incógnitas más. Estas nuevas incógnitas se modelan de varias maneras mediante modelos de turbulencia. Una descripción detallada de los modelos de turbulencia está fuera de los objetivos de este texto; consulte a Wilcox, 1998, o Chen y Jaw 1998 para más detalles.

Existen numerosos modelos de turbulencia que se emplean en la actualidad, entre otros los modelos algebraicos, de una ecuación, dos ecuaciones y el de esfuerzo de Reynolds. Tres de los modelos de turbulencia más populares son el modelo k-ε el modelo k-ω y el modelo q-ω. Éstos denominados **modelos de turbulencia de dos ecuaciones** añaden dos ecuaciones más a la formulación matemática del problema, que deben resolverse de manera simultánea con las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento lineal (y también

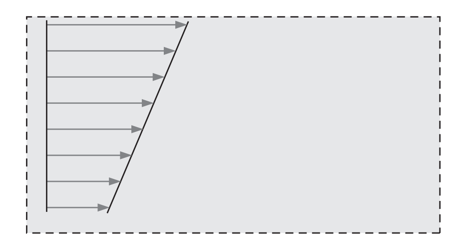


FIGURA 15-44
Cuando se usa un *modelo de turbulencia* para un cálculo de la DFC, se modelan *todos* los remolinos turbulentos y sólo se calculan las propiedades de flujo a un número de Reynolds promedio. Se muestra un perfil de velocidad promedio. *No* hay remolinos turbulentos calculados.

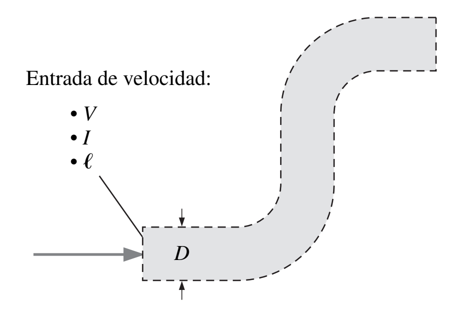


FIGURA 15-45
Una regla útil y práctica común al establecer las propiedades de turbulencia en una condición de frontera en la entrada de presión o en la entrada de velocidad es especificar una intensidad de turbulencia de 10 por ciento y una longitud característica de turbulencia igual a la mitad de alguna longitud característica del problema por resolver ($\ell = D/2$).

de la energía si se está utilizando esta ecuación también). Junto con las dos ecuaciones adicionales que deben resolverse cuando se usa un modelo de turbulencia de dos ecuaciones, es necesario especificar otras dos *condiciones de frontera* para las propiedades de turbulencia en entradas y salidas del dominio computacional. (Note que no se especifican las propiedades en las salidas a menos que se espere el flujo invertido en la salida.) Por ejemplo, en el modelo k-ε puede especificarse tanto k (**energía cinética turbulenta**) como ε (**razón de disipación turbulenta**). Sin embargo, los valores apropiados de estas variables no siempre se conocen. Una opción más útil es especificar la **intensidad de turbulencia *I*** (razón de velocidad característica de remolino turbulento a velocidad de flujo libre o alguna otra velocidad característica o velocidad promedio) y la **longitud característica de remolinos turbulentos** ℓ (longitud característica de los remolinos turbulentos que tienen energía). Si no están disponibles los datos de turbulencia, una adecuada regla empírica es establecer en las entradas I en 10 por ciento y fijar ℓ a la mitad de alguna longitud característica del campo de flujo (Fig. 15-45).

Se enfatiza que los modelos de turbulencia son *aproximaciones* que dependen en gran medida de constantes empíricas para el cierre matemático de las ecuaciones. Los modelos se calibran con ayuda de simulación numérica directa y datos experimentales obtenidos de campos de flujo simples como las capas límite sobre la placa plana, capas de esfuerzos de corte y el debilitamiento de la turbulencia isotrópica corriente abajo de las placas perpendiculares al flujo libre incidente. Por desgracia, ningún modelo de turbulencia es **universal**, lo que significa que aunque el modelo funcione bien para flujos similares que se emplean para calibrar, no se garantiza dar una solución física correcta cuando se aplica a campos de flujo turbulento generales, en particular los que impliquen separación de flujo y su reapegamiento a la superficie o su dependencia del tiempo a gran escala, o ambas situaciones.

> Las soluciones de la DFC de flujo turbulento son sólo tan buenas como idóneo y válido es el modelo de turbulencia que se emplea en los cálculos.

Es conveniente subrayar que también este enunciado es cierto sin importar qué tan fina se hace la malla computacional. Cuando se aplica la DFC a flujos laminares, con frecuencia puede mejorarse la exactitud física de la simulación con refinar la malla. Éste *no* es siempre el caso para análisis de la DFC de flujo turbulento mediante modelos de turbulencia. Aunque una malla mejorada produce mayor *exactitud numérica*, la *exactitud física* de la solución está limitada siempre por la exactitud física del modelo de turbulencia como tal.

Con base en estas advertencias, ahora se presentan ejemplos prácticos de cálculos de la DFC de campos de flujo turbulento. En todos los ejemplos de flujo turbulento analizados en este capítulo, se emplea el modelo de turbulencia k-ε con funciones de pared. Este modelo es de turbulencia predeterminado en muchos paquetes de la DFC comerciales como FLUENT. En todos los casos se supone flujo estacionario; no se hace algún intento para modelar características no estacionarias del flujo, como la diseminación de vórtices en la estela de un cuerpo romo. *Se supone que el modelo de turbulencia considera todos los efectos no estacionarios inherentes debido a los remolinos turbulentos en el campo de flujo*. Note que los flujos turbulentos no estacionarios se resuelven también con modelos de turbulencia, mediante esquemas de avance en el tiempo (cálculos de NSRP para flujo no estacionario), pero sólo cuando el tiempo característico de los efectos no estacionarios es mucho más grande que el de cada uno de los remolinos turbulentos. Por ejemplo, suponga que se calculan las fuerzas y momentos en un dirigible durante una ráfaga de viento (Fig. 15-46). En la frontera de entrada se impondrían la velocidad del viento con variación en el tiempo y los niveles de turbulencia, y podría calcularse entonces una solución de flujo turbulento no estacionario mediante modelos de turbulencia. Las características

globales del flujo a gran escala (separación de flujo, fuerzas y momentos en el cuerpo, entre otros) serían no estacionarios, pero las características de escala fina de la capa límite turbulenta, por ejemplo, se modelarían mediante el modelo de turbulencia cuasiestacionario.

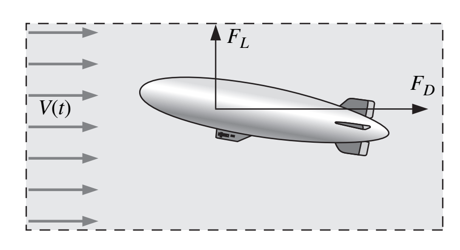


FIGURA 15-46
La mayor parte de los cálculos de la DFC con modelos de turbulencia son *estacionarios* (permanentes en promedio), pero también es posible calcular campos de flujo turbulento *no estacionario* si se usan modelos de turbulencia. En el caso de flujo sobre un cuerpo pueden imponerse condiciones de frontera no estacionarios y avanzar en el tiempo para predecir características generales del campo de flujo no estacionario.

Flujo alrededor de un cilindro circular a Re = 10 000

Como primer ejemplo de una solución de la DFC de flujo turbulento, se calcula el flujo sobre un cilindro circular a Re = 10 000. Para ilustración, se usa el mismo dominio computacional de dos dimensiones que se usó para los cálculos de flujo laminar alrededor del cilindro, como se bosqueja en la figura 15-33. Igual que en el cálculo de flujo laminar, aquí sólo se resuelve la mitad superior del campo de flujo, debido a la simetría a lo largo del lado inferior del dominio computacional. Se utilizan las mismas tres mallas empleadas para el caso de flujo laminar: de celdas amplias, media y fina (Fig. 15-34). Sin embargo, se señala que las mallas designadas para cálculos de flujo turbulento (en especial las que emplean modelos de turbulencia con funciones de pared) por lo general no son las mismas que las designadas para flujo laminar de la misma configuración geométrica, en especial cerca de paredes.

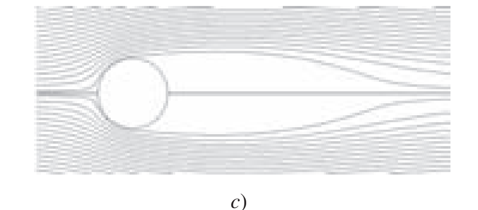
Se considera un flujo libre de aire a 25°C y a velocidad V = 7.304 m/s de izquierda a derecha alrededor de este cilindro circular. El número de Reynolds del flujo, con base en el diámetro del cilindro (D = 2.0 cm), es casi 10 000. Los experimentos a este número de Reynolds revelan que la capa límite es laminar y se separa varios grados corriente arriba de la parte superior del cilindro (a $\alpha \cong 82°$). La estela, sin embargo, es turbulenta; tal combinación de flujo laminar y turbulento es especialmente difícil de analizar por los paquetes de la DFC. El coeficiente de arrastre medido a este número de Reynolds es $C_D \cong 1.15$ (Tritton, 1977). Las soluciones de la DFC se obtienen para cada una de las tres mallas, al suponer flujo turbulento estacionario (estacionario en promedio). Se emplea el modelo de turbulencia k-ε con funciones de pared. El nivel de turbulencia de entrada se establece en 10 por ciento con una longitud característica de remolinos de 0.01 m (la mitad del diámetro del cilindro). Los tres casos convergen bastante bien. Las líneas de corriente se grafican en la figura 15-47 para los tres casos de resolución de malla. En cada gráfica, la imagen se refleja respecto a la línea de simetría de modo que aun cuando se resuelve sólo la mitad, se ve todo el campo de flujo.




a)



b)



c)

FIGURA 15-47
Líneas de corriente generadas por cálculos de la DFC de flujo turbulento estacionario sobre un cilindro circular a Re = 10 000: *a*) malla de celdas amplias (30 × 60), *b*) malla media (60 × 120), *c*) malla fina (120 × 240). Observe que se calcula sólo la mitad superior del flujo, la mitad inferior es una imagen especular de la parte superior.

Para el caso de celdas amplias (Fig. 15-47*a*), la capa límite se separa bastante más allá del punto superior del cilindro, a $\alpha \approx 140°$. Además, el coeficiente de arrastre C_D es sólo 0.647, casi en un factor de 2 más pequeño de lo que debería ser. Se procede a verificar si una malla más fina mejora la concordancia con los datos experimentales. Para el caso de malla de resolución media (Fig. 15-47*b*), el campo de flujo es muy diferente. La capa límite se separa cerca del punto superior del cilindro, a $\alpha = 104°$ y C_D se incrementa a casi 0.742, más cerca, pero todavía considerablemente menor que el valor experimental. Se observa también que los remolinos recirculantes en la estela del cilindro han aumentado de longitud en casi un factor de 2 en comparación con los del caso de la malla de celdas amplias. En la figura 15-47*c* se muestran las líneas de corriente para el caso de malla de resolución fina. Los resultados se ven muy similares a los del caso de resolución media, y el coeficiente de arrastre se ha incrementado sólo poco ($C_D = 0.753$). El punto de separación de capa límite para este caso es a $\alpha = 102°$.

Mejorar más la malla (lo cual no se muestra) no cambia los resultados de manera notable respecto a los resultados del caso de la malla fina. En otras palabras, al parecer la malla fina tiene la resolución suficiente, pero los resultados no concuerdan con el experimento. ¿Por qué? Hay varios problemas con los

cálculos: se está modelando un flujo estacionario, aunque el flujo físico real es no estacionario; se impone simetría respecto al eje *x*, aun cuando el flujo físico es asimétrico (puede observarse una estela de vórtices de Kármán en los experimentos a este número de Reynolds), y se está usando un modelo de turbulencia en vez de resolver todos los remolinos pequeños del flujo turbulento. Otra causa de error significativa en los cálculos es que el paquete de la DFC se corre con el modelo de turbulencia activado para modelar de modo razonable la región de estela, que es turbulenta; sin embargo, la capa límite en la superficie del cilindro es en realidad todavía *laminar*. La ubicación predicha del punto de separación corriente abajo de la parte superior del cilindro concuerda más con la separación de capa límite *turbulenta*, pero la capa turbulenta no ocurre hasta valores de número de Reynolds mucho mayores (después del punto crítico a Re mayor que 2×10^5 correspondiente a "la crisis de arrastre" (transición de flujo laminar al turbulento).

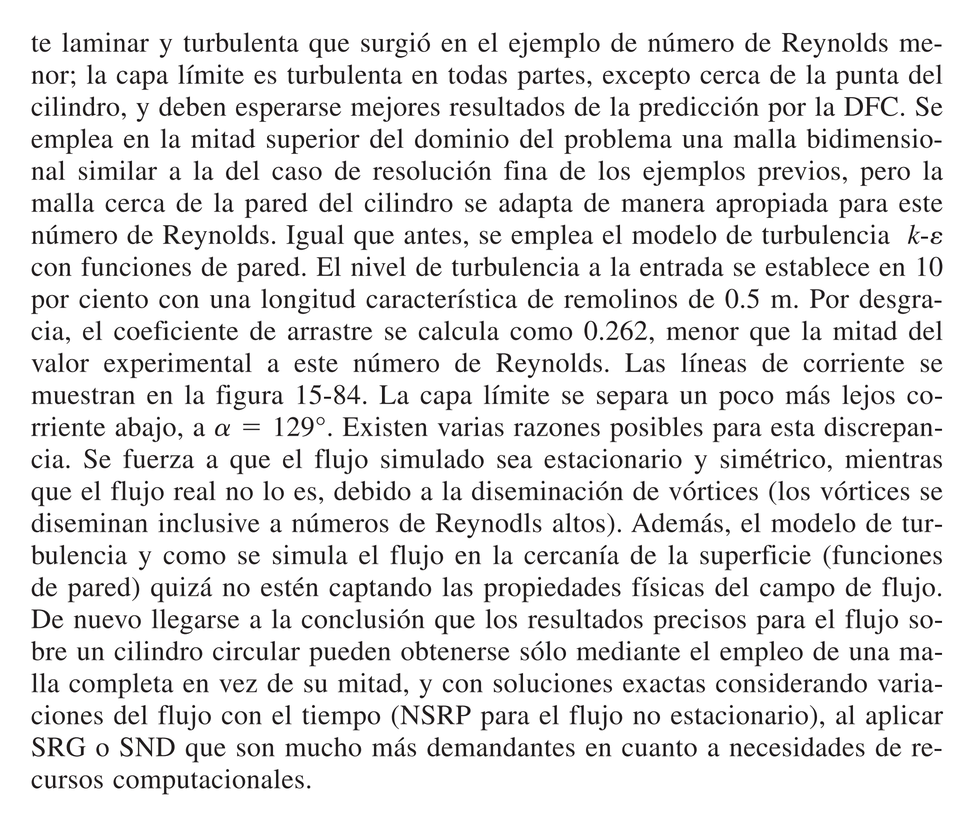
La razón básica es que los paquetes de la DFC encuentran dificultades en el régimen transicional entre el flujo laminar y turbulento, y cuando se combinan flujos laminar y turbulento en el mismo dominio computacional. De hecho, la mayoría de los paquetes de la DFC comerciales ofrece al usuario una opción entre laminar y turbulento, pero no hay "punto intermedio". En estos cálculos se modela una capa límite turbulenta, aunque la capa límite física sea laminar; entonces, no debe sorprender que los resultados de los cálculos no concuerden con el experimento. Si en cambio se hubiera especificado flujo laminar en todo el dominio computacional, los resultados de la DFC habrían sido inclusive peores (menos adecuados desde el punto de vista de interpretación física).

¿Hay alguna manera de evitar este problema de exactitud física deficiente para el caso de flujo combinado laminar y turbulento? Quizá. En algunos paquetes de la DFC puede especificarse que el flujo sea laminar o turbulento en diferentes regiones del flujo. Pero, entonces, el proceso de transición de flujo laminar a turbulento sea abrupto, y de nuevo no perfecto desde el punto de vista de interpretación física. Además, se necesitaría saber previamente dónde ocurre la transición. Esto va en contra de un cálculo de la DFC independiente para predecir el flujo de fluido. Para flujos en cercanía de las superficies sólidas, siguen creándose modelos avanzados que quizá algún día realicen mejor trabajo en la región de transición. También se crean algunos modelos de turbulencia nuevos más apropiados para la turbulencia a número de Reynolds bajo.

En resumen, no puede modelarse con exactitud el problema de flujo combinado laminar y turbulento sobre un cilindro a Re $\sim$ 10 000 con modelos de turbulencia estándares y la ecuación de Navier-Stokes de número de Reynolds promedio (NSRP) para flujo estacionario. Al parecer pueden obtenerse resultados exactos sólo si se buscan las soluciones exactas de NSRP para el flujo no estacionario, al aplicar SRG o SND que son mucho más demandantes desde el punto de vista computacional en comparación con la aplicación de modelos de turbulencia.

Flujo alrededor de un cilindro circular a Re $= 10^7$

Como ejemplo final se emplea la DFC para calcular el flujo sobre un cilindro circular a Re $= 10^7$, mucho más allá de "la crisis de arrastre". El cilindro para este caso mide 1.0 m de diámetro, y el fluido es agua. La velocidad de flujo libre es 10.05 m/s. A este valor de número de Reynolds el valor del coeficiente de arrastre medido experimentalmente es de alrededor de 0.7 (Tritton, 1977). La capa límite es turbulenta en el punto de separación, que ocurre alrededor de 120°. Por lo tanto, no se tiene un problema de combinación de las capas lími-



te laminar y turbulenta que surgió en el ejemplo de número de Reynolds menor; la capa límite es turbulenta en todas partes, excepto cerca de la punta del cilindro, y deben esperarse mejores resultados de la predicción por la DFC. Se emplea en la mitad superior del dominio del problema una malla bidimensional similar a la del caso de resolución fina de los ejemplos previos, pero la malla cerca de la pared del cilindro se adapta de manera apropiada para este número de Reynolds. Igual que antes, se emplea el modelo de turbulencia k-ε con funciones de pared. El nivel de turbulencia a la entrada se establece en 10 por ciento con una longitud característica de remolinos de 0.5 m. Por desgracia, el coeficiente de arrastre se calcula como 0.262, menor que la mitad del valor experimental a este número de Reynolds. Las líneas de corriente se muestran en la figura 15-84. La capa límite se separa un poco más lejos corriente abajo, a $\alpha = 129°$. Existen varias razones posibles para esta discrepancia. Se fuerza a que el flujo simulado sea estacionario y simétrico, mientras que el flujo real no lo es, debido a la diseminación de vórtices (los vórtices se diseminan inclusive a números de Reynodls altos). Además, el modelo de turbulencia y como se simula el flujo en la cercanía de la superficie (funciones de pared) quizá no estén captando las propiedades físicas del campo de flujo. De nuevo llegarse a la conclusión que los resultados precisos para el flujo sobre un cilindro circular pueden obtenerse sólo mediante el empleo de una malla completa en vez de su mitad, y con soluciones exactas considerando variaciones del flujo con el tiempo (NSRP para el flujo no estacionario), al aplicar SRG o SND que son mucho más demandantes en cuanto a necesidades de recursos computacionales.

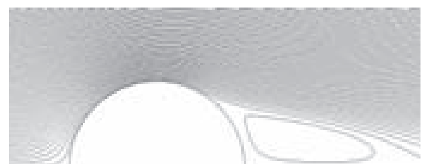


FIGURA 15-48
Líneas de corriente generadas por cálculos de la DFC de flujo turbulento estacionario sobre un cilindro circular a Re = 10^7. Por desgracia, el coeficiente de arrastre predicho todavía no es de buena precisión para este caso.

Diseño del estator con álabes guía para un ventilador de flujo axial

El siguiente ejemplo de la DFC de flujo turbulento tiene relación con el diseño del estator con álabes guía para un ventilador de flujo axial que se emplea para accionar un túnel de viento. El diámetro total del ventilador es $D = 1.0$ m, y el punto nominal (punto de diseño o punto de mejor eficiencia) del ventilador corresponde a una velocidad de flujo axial de $V = 50$ m/s. Los álabes del estator van del radio $r = r_{\text{núcleo}} = 0.25$ m en la superficie exterior del núcleo a $r = r_{\text{punta}} = 0.50$ m en la punta del álabe. Los álabes del estator están corriente arriba de los álabes del rotor en este diseño (Fig. 15-49). Se elige una forma del álabe de estator preliminar que tiene un ángulo de borde posterior de $\beta_{st} = 63°$ y una longitud de cuerda de 20 cm. A cualquier valor del radio r, la cantidad real del giro de flujo depende del número de álabes del estator; se espera que cuanto menos sean los álabes, menor sea el ángulo *promedio* al que los álabes del estator desvían el flujo como resultado de un mayor espacio entre ellos. El objetivo es determinar el número mínimo de álabes del estator necesario para que el flujo que incide en los bordes delanteros de los álabes del rotor (localizados a la distancia de una longitud de cuerda corriente abajo de los bordes posteriores de los álabes del estator) sea desviado a un ángulo promedio de por lo menos 45°. Se necesita también que no haya separación de flujo considerable desde la superficie de los álabes del estator.

Como una primera aproximación se modelan los álabes del estator a cualquier valor deseado de r como una *cascada* (o *fila*) de álabes bidimensional (Cap. 4). Cada álabe está separado del otro por el **espaciamiento** s correspondiente al radio r, como se define en la figura 15-50. Se usa la DFC para predecir el valor máximo permisible de s, a partir del cual se estima el número mínimo de álabes del estator que satisfacen las características específicas del diseño.

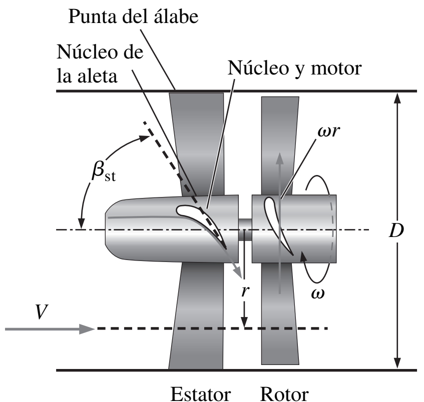
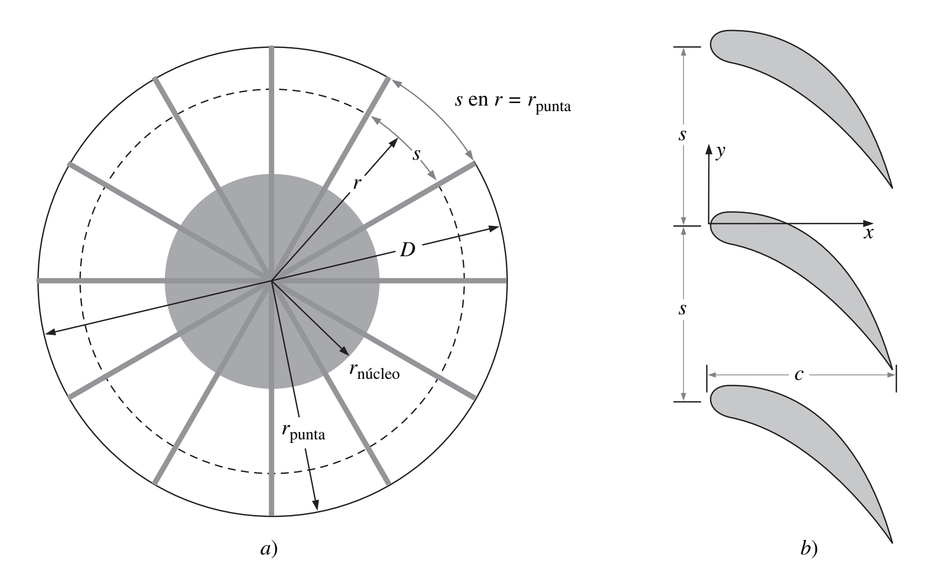


FIGURA 15-49
Esquema del ventilador de flujo axial con álabes guía que está en diseño. El estator precede al rotor, y el flujo sobre los álabes guía del estator se modelará con la DFC.

FIGURA 15-50
Definición del *espaciamiento de álabes s*: *a*) vista frontal del estator y *b*) estator modelado como cascada bidimensional en una vista lateral. En la vista frontal se ilustran 12 álabes radiales del estator, pero tiene que determinarse el número real de ellas. Se ilustran tres álabes del estator en la cascada, pero, en realidad, la cascada consta de un número infinito de álabes, cada uno desplazado a la distancia del espaciamiento de los álabes s, el cual se incrementa con el radio r. La cascada bidimensional es una aproximación del flujo tridimensional a ciertos valores del radio r y el espaciamiento de álabes s. La longitud de la cuerda c se define como la longitud horizontal del pasaje del estator.



Debido a que el flujo por la cascada bidimensional de álabes del estator es infinitamente periódica en la dirección y, se necesita modelar sólo *un* pasaje de flujo por los álabes, así que se especifican dos pares de condiciones de frontera periódicas en los lados superior e inferior del dominio computacional (Fig. 15-51). Se realizan seis casos, cada uno con un valor diferente de espaciamiento entre los álabes. Se elige s = 10, 20, 30, 40, 50 y 60 cm, y se genera una malla estructurada para cada uno de estos casos de espaciamiento de álabes. La malla para el caso de s = 10 cm se muestra en la figura 15-52; las otras mallas son similares, pero se especifican más intervalos en la dirección y conforme se incrementa s. Observe cómo se ha vuelto fina la resolución de malla cerca de las superficies de presión y succión de modo que la capa límite en estas superficies pueda resolverse mejor. Se especifica V = 50 m/s en la entrada, presión manométrica cero en la salida y condición de frontera de pared lisa sin deslizamiento en las superficies de presión y de succión. Puesto que se está modelando el flujo con un modelo de turbulencia (k-ε con funciones de pared), deben especificarse las propiedades de turbulencia en la entrada donde ya se especificó la velocidad. Para estas simulaciones se especifica una intensidad de turbulencia de 10 por ciento y una longitud característica de remolinos de 0.01 m (1.0 cm).

Se realizan los cálculos de la DFC durante el tiempo suficiente para que la solución converja lo más posible para los seis casos, y se grafican las líneas de corriente en la figura 15-53 para seis espaciamientos de álabes: s = 10, 20, 30, 40, 50 y 60 cm. Aunque se resuelve para el flujo por un solo pasaje, se dibujan varios pasajes *duplicados*, uno sobre otro, con la finalidad de ver el campo de flujo como una cascada periódica. Las líneas de corriente para los primeros tres casos se ven muy similares a simple vista, pero la inspección más detallada revela que el ángulo de flujo promedio corriente abajo del borde posterior del álabe del estator *disminuye* con s (se define el ángulo de flujo β respecto a la horizontal como se ilustra en la figura 15-53*a*.) También, la distancia (espacio en blanco) entre la superficie del álabe del lado de succión y la línea de corriente más próxima a la superficie aumenta cuando se incrementa s, lo cual indica que la velocidad de flujo disminuye en esa región. De hecho, resulta que la capa límite en la superficie de succión del álabe del estator debe resistir un gradiente de presión adverso siempre creciente (velocidad de flujo decreciente y gradiente de presión positivo) conforme se incrementa el espaciamiento de los álabes. A un valor de s suficientemente grande, la capa límite en la superficie de succión no

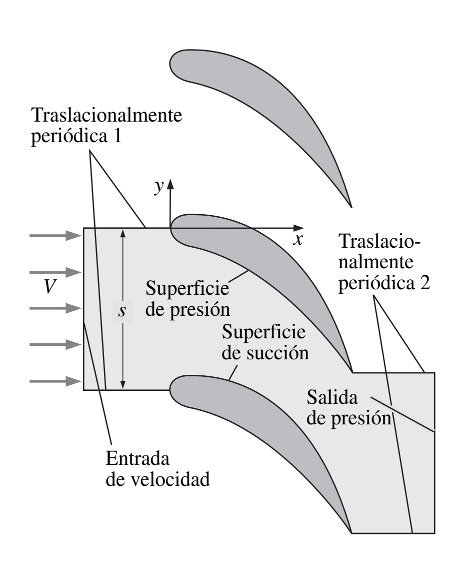


FIGURA 15-51
Dominio computacional (región gris) definido por un pasaje de flujo entre dos álabes del estator. La frontera superior del pasaje es la superficie de álabe de presión, y la frontera inferior es la superficie de aspiración. Dos pares de condiciones traslacionalmente periódicas están definidas: un par de condiciones periódicas 1 corriente arriba y otro par 2 corriente abajo.

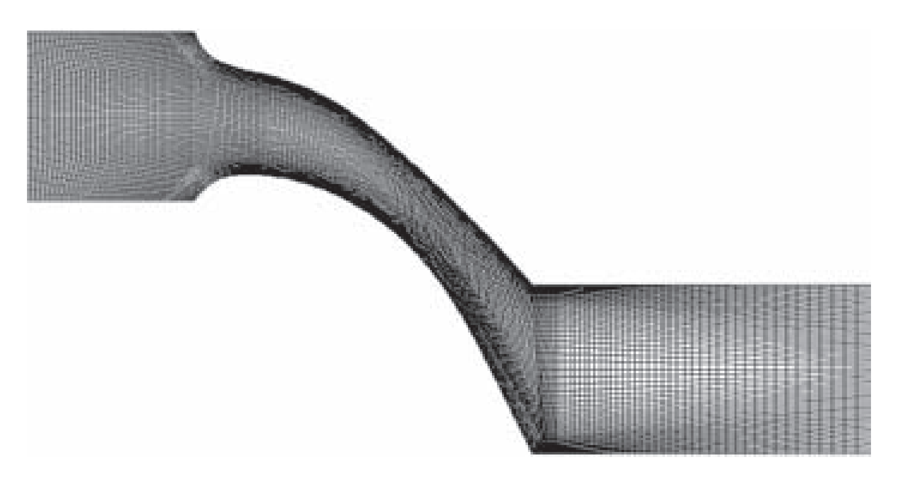


FIGURA 15-52
Malla estructurada para la cascada bidimensional de los álabes del estator a un espaciamiento de álabes $s = 10$ cm. La región de estela de salida de flujo del pasaje entre los álabes es intencionalmente más larga que la región de la entrada para evitar el flujo de regreso en la salida de presión en caso de que haya separación del flujo en la superficie de aspiración del álabe del estator. La salida está a la distancia de la cuerda corriente abajo de los bordes posteriores de los álabes del estator; también la salida coincide con la ubicación de los bordes delanteros de los álabes del rotor (no se muestran).

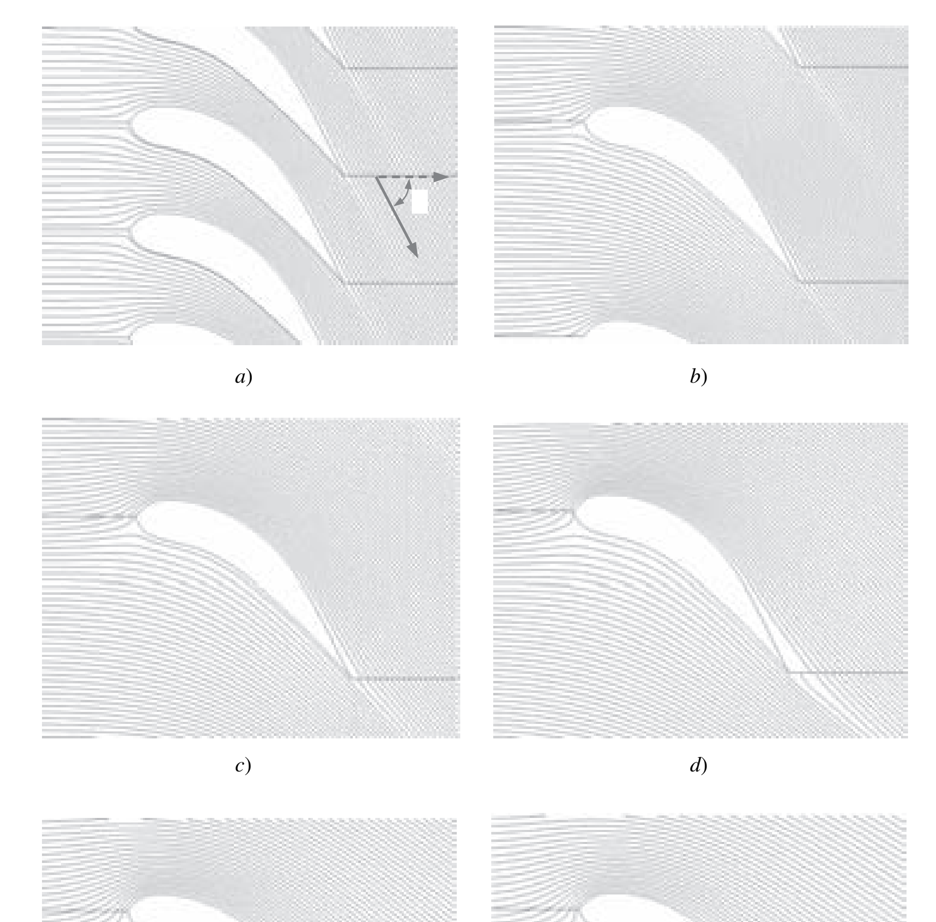


FIGURA 15-53
Líneas de corriente generadas por cálculos de la DFC de flujo turbulento estacionario a través del pasaje entre los álabes del estator: *a*) espaciamiento de álabes $s = 10$, *b*) 20, *c*) 30, *d*) 40, *e*) 50 y *f*) 60 cm. Para efectuar los cálculos de la DFC se usó el modelo de turbulencia k-ε con funciones de pared. El ángulo de flujo β se define en la imagen *a*) como el ángulo promedio de flujo, respecto a la horizontal, justo corriente abajo del borde posterior del álabe del estator.

TABLA 15-3

Variación del ángulo promedio de flujo de salida β_{prom}, velocidad promedio de flujo de salida V_{prom} y fuerza de arrastre predicha por unidad de longitud F_D/b en función del espaciamiento de los álabes s*

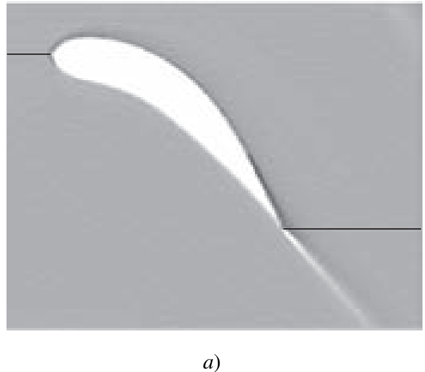
s, cm	β_{prom}, grados	V_{prom}, m/s	F_D/b, N/m
10	60.8	103	554
20	56.1	89.6	722
30	49.7	77.4	694
40	43.2	68.6	612
50	37.2	62.7	538
60	32.3	59.1	489

* Todos los valores calculados se reportan con tres cifras significativas. Los cálculos de la DFC se efectuaron usando el modelo de turbulencia k-ε con funciones de pared.

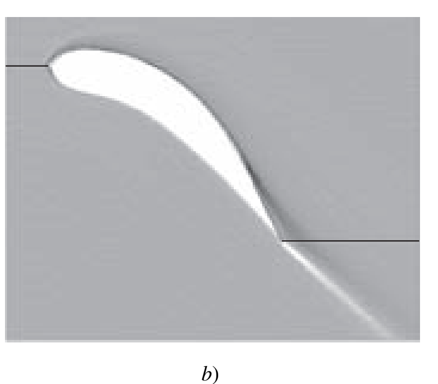
puede soportar el gradiente de presión muy adverso y se separa de la superficie. Para s = 40, 50 y 60 cm (Fig. 15-53*d* a *f*), la separación de flujo en la superficie de succión se ve con claridad en estas gráficas de líneas de corriente. Además, la intensidad de la separación de flujo se incrementa con s. Esto no es algo inesperado si se imagina el límite cuando $s \rightarrow \infty$. En ese caso, el álabe del estator se aísla de sus vecinos, y con seguridad se espera separación considerable de flujo, ya que al álabe tiene alto grado de curvatura.

En la Tabla 15-3 se enlista al ángulo de flujo a la salida promedio β_{prom}, la velocidad de flujo en la salida promedio V_{prom} y la fuerza de arrastre del álabe del estator predicha por la longitud unitaria del álabe F_D/b como funciones del espaciamiento s (la longitud b es normal a la página de la figura 15-53 y se supone que es 1 m en cálculos bidimensionales como éstos). Mientras que β_{prom} y V_{prom} disminuyen de manera continua con s, F_D/b primero aumenta hasta un valor máximo para el caso de s = 20 cm y luego disminuye de allí en adelante.

Quizá recuerda los criterios de diseño expresados anteriormente que exigen que el ángulo de flujo a la salida promedio sea mayor que 45° y no deba haber separación de flujo importante. De los resultados de la DFC, al parecer ambos criterios fallan en alguna parte entre s = 30 y 40 cm. Se obtiene mejor ilustración de la separación de flujo cuando se grafican los contornos de vorticidad (Fig. 15-54). En estas gráficas de contorno en escala de grises, el negro representa vorticidad negativa grande (rotación en el sentido contrario de las manecillas del reloj) y el gris intermedio es vorticidad cero. Si la capa límite permanece apegada a la superficie, se espera que la vorticidad se concentre dentro de las capas límite delgadas formadas a lo largo de las superficies de los álabes del es-



a)



b)

FIGURA 15-54
Gráficas del contorno de la vorticidad obtenidas mediante cálculos de la DFC para el flujo turbulento estacionario a través del pasaje entre los álabes del estator: espaciamiento de los álabes *a*) s = 30 cm y *b*) s = 40 cm. El campo de flujo es en gran medida irrotacional (vorticidad cero), excepto en la capa límite delgada a lo largo de las superficies de álabes y en la región de la estela. No obstante, cuando la capa límite se separa, como en el caso *b*), la vorticidad se extiende en toda la región de la separación del flujo.

tator, como es el caso en la figura 15-54*a* para $s = 30$ cm. Sin embargo, si la capa límite se separa, la vorticidad se extiende lejos de la superficie de succión, como se ve en la figura 15-54*b* para $s = 40$ cm. Con estos resultados se comprueba que la separación de flujo significativa ocurre en alguna parte entre $s =$ 30 y 40 cm. Como nota al margen, observe cómo la vorticidad se concentra no sólo en la capa límite, sino también en la *estela* para los dos casos que se muestran en la figura 15-54.

Por último, se comparan las gráficas de los vectores de velocidad en la figura 15-55 para tres casos: $s = 20$, 40 y 60 cm. Se generan varias líneas paralelas igualmente espaciadas en el dominio computacional; cada línea está inclinada a 45° respecto a la horizontal. Los vectores de velocidad se grafican a lo largo de cada una de estas líneas paralelas. Cuando $s = 20$ cm (Fig. 15.55*a*), la capa límite permanece apegada al álabe del estator a lo largo de ambas superficies de succión y de presión hasta su borde posterior. Cuando $s = 40$ cm (Fig. 15-55*b*), aparece la separación de flujo y el flujo invertido a lo largo de la superficie de succión. Cuando $s = 60$ cm (Fig. 15-55*c*), la burbuja de separación y la región de flujo invertido han crecido; ésta es una región de flujo "muerto", donde las velocidades del aire son muy pequeñas. En todos los casos, el flujo en la superficie de presión del álabe del estator no se separa de la superficie.

¿Cuántas aletas (N) representa un espaciamiento $s = 30$ cm? Puede calcularse con facilidad N si se observa que en la punta del álabe ($r = r_{\text{punta}} = D/2 = 50$ cm), donde la distancia entre los álabes es más grande, la circunferencia disponible total (C) es:

Circunferencia disponible:
$$C = 2\pi r_{\text{punta}} = \pi D \qquad \textbf{(15-7)}$$

El número de aletas que se puede colocar dentro de esta circunferencia con espaciamiento de aspa $s = 30$ cm es:

Número máximo de aletas:
$$N = \frac{C}{s} = \frac{\pi D}{s} = \frac{\pi(100\text{ cm})}{30\text{ cm}} = 10.5 \qquad \textbf{(15-8)}$$

Es evidente que puede tenerse sólo un valor entero de N, así que del análisis preliminar se infiere que deben tenerse por lo menos 10 u 11 aletas de estator.

¿Qué tan adecuada es la aproximación del estator como una cascada de álabes bidimensional? Para contestar esta pregunta, se efectúa un análisis de la DFC tridimensional completo del estator. De nuevo se aprovecha la periodicidad al modelar sólo un pasaje de flujo tridimensional entre dos álabes radiales de estator (Fig. 15-56). Se elige $N = 10$ álabes de estator con un ángulo de periodicidad de $360/10 = 36°$. De la ecuación 15-8 esto representa la distancia de $s =$ 31.4 entre las puntas de los álabes y $s = 15.7$ en la superficie exterior del núcleo, de donde resulta un valor promedio de $s_{\text{prom}} = 23.6$. Se genera una malla estructurada hexagonal en un dominio computacional acotado por una entrada donde se especifica velocidad, una salida de flujo libre, una superficie cilíndrica en el núcleo y otra en las puntas de los álabes, la superficie de presión del álabe, la superficie de succión y dos pares de condiciones de frontera periódicas. En este caso tridimensional, la periodicidad de la frontera es rotacional y no traslacional. Note que se emplea una condición de frontera de flujo libre en vez de una condición de frontera que especifica la presión, porque se espera que el movimiento giratorio produzca una distribución de presión en la dirección radial en la salida. La malla es más fina cerca de las superficies que en cualquier otra parte (como es usual), para resolver mejor la capa límite. La velocidad entrante, el nivel de turbulencia, el modelo de turbulencia, etc., son los mismos que se utilizaron para la aproximación bidimensional. El número total de celdas es casi 800 000.

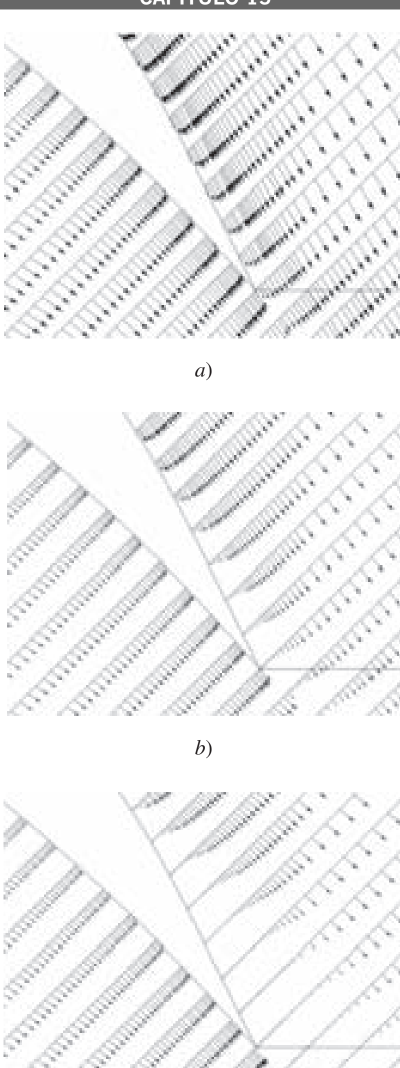


FIGURA 15-55
Vectores de velocidad producidos mediante cálculos de la DFC para flujo turbulento estacionario que fluye a través de un pasaje entre los álabes del estator: espaciamiento de álabes *a*) $s = 20$ cm, *b*) 40 cm y *c*) 60 cm.

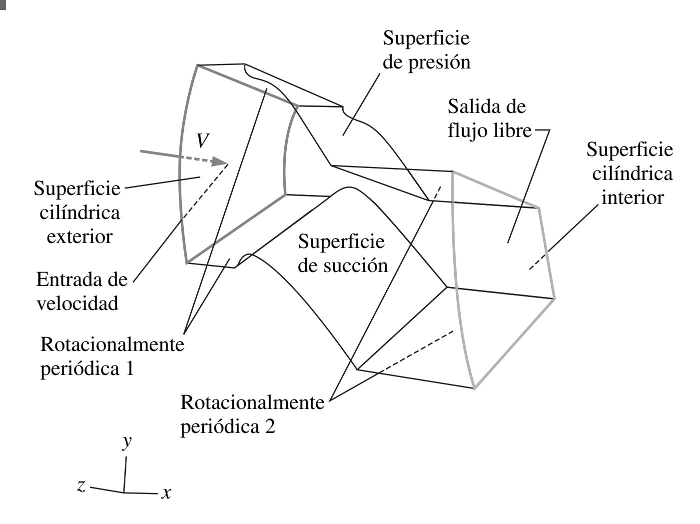


FIGURA 15-56
Dominio computacional tridimensional definido por un pasaje de flujo a través de dos álabes de estator para $N = 10$ (ángulo entre álabes $= 36°$). El volumen del dominio computacional se define como el volumen entre las superficies de presión y de aspiración de los álabes del estator, las superficies cilíndricas interior y exterior y las superficies de la entrada y la salida. Se ilustran dos pares de condiciones de frontera rotacionalmente periódicas definidas como se muestra.

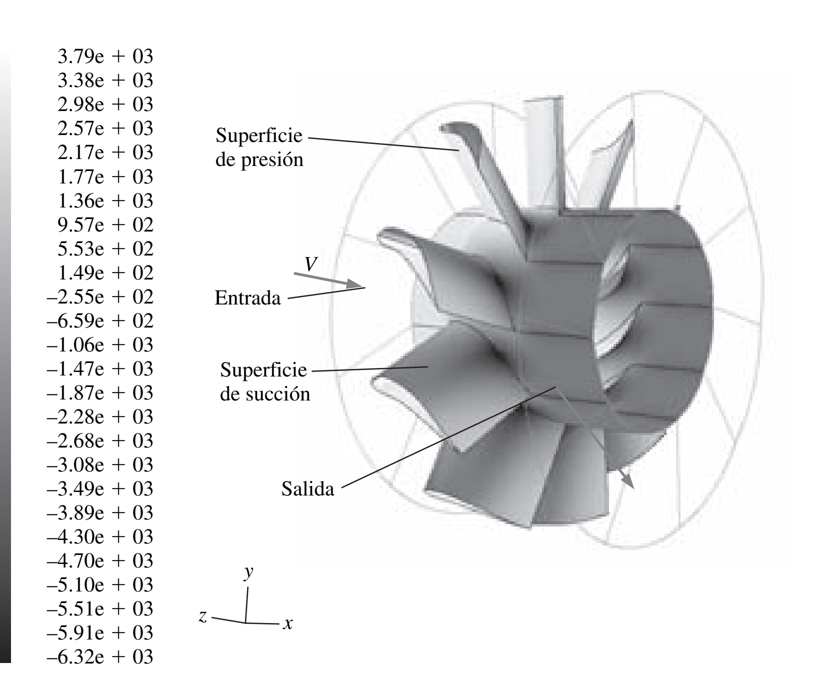


FIGURA 15-57
Gráfica de contornos de presión generadas por los cálculos de las DFC para flujo turbulento estacionario a través de un pasaje entre los álabes del estator. La presión se marca en N/m^2 en las superficies del álabe y la superficie interior del cilindro (el núcleo). Para mayor claridad se muestran los contornos de la entrada y la salida. Aunque sólo se modela un pasaje de flujo en los cálculos de la DFC, se reproduce la imagen nueve veces circunferencialmente respecto al eje x para ver el campo de flujo completo del estator. En esta imagen en escala de grises, las presiones altas (sobre las superficies de presión de los álabes) son gris claro, en tanto que las presiones bajas (las superficies de aspiración de los álabes, sobre todo cerca del núcleo) son gris oscuro.

Los contornos de presión en las superficies de los álabes del estator y en la superficie cilíndrica interna se grafican en la figura 15-57. Esta vista es desde el mismo ángulo que el de la figura 15-56, pero el dominio computacional se ha ampliado y multiplicado nueve veces circunferencialmente respecto al eje de rotación (el eje x), para un total de 10 pasajes de flujo con la finalidad de visualizar con facilidad el campo de flujo. Puede verse que la presión es mayor (sombreado gris tenue) en la superficie de presión que en la superficie de succión. También se ve una caída de presión global de corriente arriba a corriente abajo a lo largo de la superficie del núcleo del estator. El cambio en la presión promedio de la entrada a la salida se calcula como 3.29 kPa.

Para comparar los resultados tridimensionales directamente con la aproximación bidimensional, se realiza un caso bidimensional más para el caso del espaciamiento promedio, $s = s_{\text{prom}} = 23.6$. En la Tabla 15.4 se muestra una comparación entre los casos de dos y tres dimensiones. Del cálculo tridimensional, la

fuerza axial neta en un álabe del estator es F_D = 183 N. Ésta se compara con el valor de la simulación bidimensional al convertirla a la fuerza por longitud unitaria del álabe. Debido a que la longitud del álabe del estator es de 0.25 m, F_D/b = (183 N)/(0.25 m) = 732 N/m. El valor bidimensional correspondiente de la tabla 15-4 es F_D/b = 724 N/m, de modo que la concordancia es muy buena (≅ 1 por ciento de diferencia). La velocidad promedio en la salida del dominio tridimensional es V_{prom} = 84.7 m/s, casi idéntica al valor bidimensional de 84.8 m/s de la tabla 15-4. La aproximación bidimensional difiere en menos de 1 por ciento. Por último, el ángulo de flujo a la salida promedio β_{prom} obtenido del cálculo tridimensional completo es 53.3°, que satisface sin dificultad el criterio de diseño de 45°. Esto se compara con la aproximación bidimensional de 53.9° de la tabla 15-4; la concordancia es de nuevo de alrededor de 1 por ciento.

Los contornos de la componente de velocidad tangencial a la salida del dominio computacional se grafican en la figura 15-58. Se ve que la distribución de velocidad tangencial no es uniforme; disminuye según se avanza radialmente hacia fuera desde el núcleo hasta la punta como era de esperar, debido a que el espaciamiento *s* se incrementa del núcleo a la punta. También se encuentra (no se muestra aquí) que la presión de descarga se incrementa radialmente del núcleo a la punta. Esto también concuerda con la intuición, ya que se sabe que se necesita un gradiente de presión radial para sostener un flujo tangencial, el aumento de presión con el radio creciente suministra la aceleración centrípeta necesaria para desviar el flujo respecto al eje *x*.

Puede hacerse otra comparación entre los cálculos tridimensional y bidimensional al graficar los contornos de vorticidad en un corte del dominio computacional que atraviesa el pasaje de flujo entre los álabes. Se crean dos cortes, uno cerca del núcleo y otro cerca de la punta, y se grafican los contornos de vorticidad en la figura 15-59. En ambos cortes, la vorticidad se concentra en la capa límite delgada y la estela. No hay separación de flujo cerca del núcleo, pero se

TABLA 15-4

Resultados de la DFC para flujo a través de un pasaje de un álabe de estator: aproximación de la cascada bidimensional correspondiente al espaciamiento de álabes promedio ($s = s_{\text{prom}}$ = 23.6 cm) se compara con el cálculo tridimensional*

	2-D, s = 23.6 cm	Completo 3-D
β_{prom}	53.9°	53.3°
V_{prom}, m/s	84.8	84.7
F_D/b, N/m	724	732

* Los valores se muestran con tres cifras significativas.

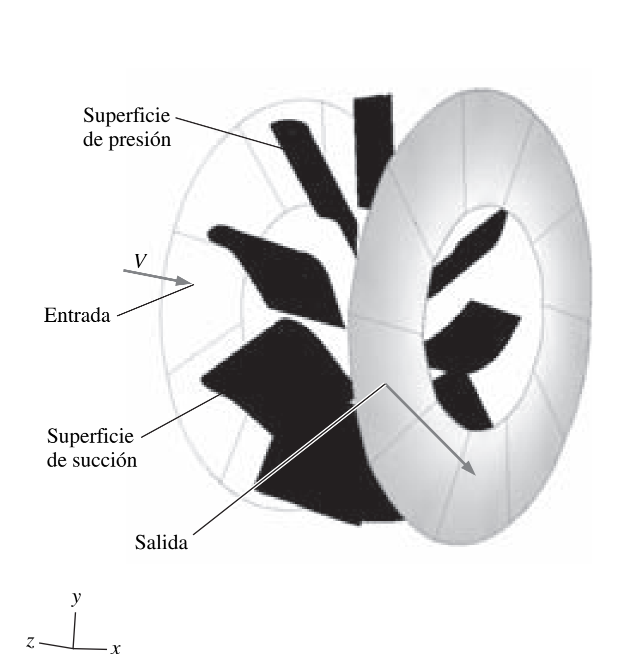
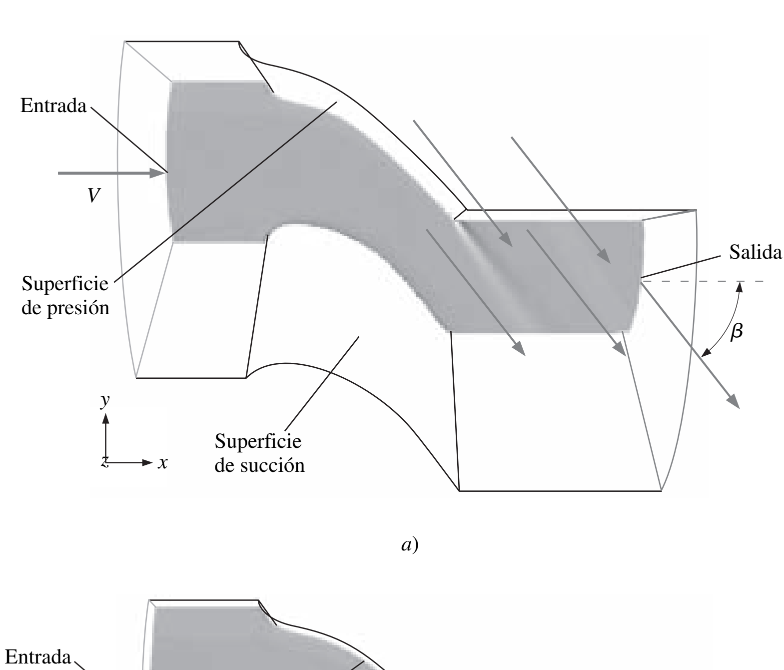


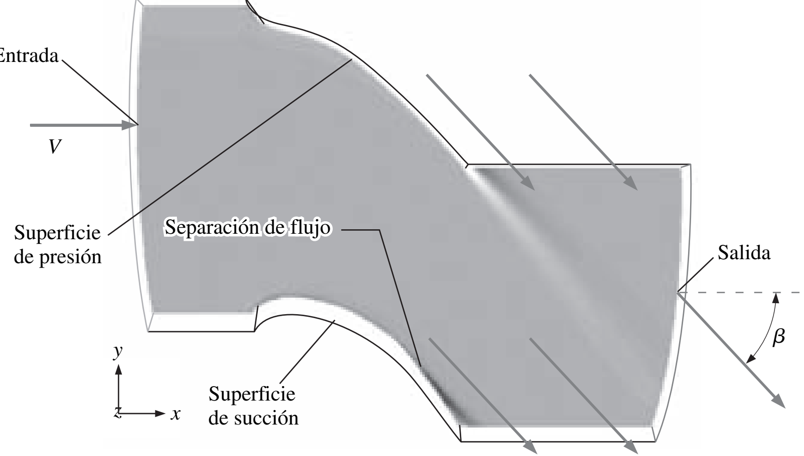
FIGURA 15-58
Gráfica de contornos de la velocidad tangencial en escala de grises generada mediante cálculos con la DFC tridimensional para el flujo turbulento estacionario por un pasaje de flujo entre los álabes de un estator. La componente de velocidad tangencial se muestra en m/s a la salida del dominio computacional (y también en las superficies de los álabes, donde la velocidad es cero). También se proporciona un esbozo de la entrada del dominio computacional con la finalidad de lograr mayor claridad. Aunque sólo se modela un pasaje de flujo, la imagen se reproduce nueve veces circunferencialmente respecto al eje *x* para ver todo el campo de flujo del estator. En la escala de grises los valores de la velocidad tangencial varían desde 0 (negro) a 90 m/s (blanco).

ve que cerca de la punta, el flujo ha empezado a separarse en la superficie de succión cerca del borde posterior del álabe del estator. Observe que el aire sale del borde posterior del álabe del estator a un ángulo mayor en el núcleo que en la punta. Esto concuerda también con la aproximación bidimensional (y la intuición), porque el espaciamiento de los álabes *s* en el núcleo (15.7 cm) es menor que *s* en la punta (31.4 cm).

En conclusión, la aproximación de este estator tridimensional como una cascada bidimensional de álabes del estator resulta ser bastante buena en general, en particular para el análisis preliminar. La discrepancia entre los cálculos bidimensional y tridimensional para características de flujo generales, como la fuerza de arrastre que actúa sobre el álabe, el ángulo de flujo a la salida, etc., es de alrededor de 1 por ciento o menos para las cantidades descritas. Por lo tanto, no es de extrañarse que el método de cascada bidimensional sea una aproximación popular en el diseño de turbomaquinaria. El análisis tridimensional más detallado da la confianza de que un estator con 10 álabes es suficiente para satisfacer los criterios de diseño impuestos para este ventilador de flujo axial. Sin embargo, los cálculos tridimensionales han revelado una región de separación pequeña cerca de la punta del álabe del estator. Quizá sea acertado aplicar cierta **torsión** a las aletas del esta-



a)



b)

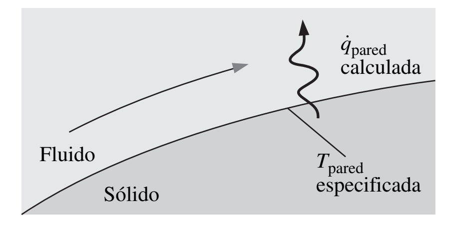
FIGURA 15-59
Gráficas de contorno de vorticidad generadas mediante cálculos con la DFC tridimensional para el flujo turbulento estacionario tridimensional a través de un pasaje de flujo entre los álabes de estator: *a*) una porción cercana al núcleo o base de los álabes y *b*) una porción próxima a las puntas de los álabes. Se grafican contornos de la componente *z* de vorticidad porque las caras son aproximadamente perpendiculares al eje *z*. En estas imágenes en escala de grises, las regiones muy oscuras (como en la mitad superior de la estela y en la zona de separación del flujo) representan vorticidad *z* negativa (en sentido de las manecillas del reloj), y las regiones muy claras (como en la mitad inferior de la estela) representan vorticidad *z* positiva (en sentido contrario al de las manecillas del reloj). No hay señas de separación de flujo cerca del núcleo, pero cerca de la punta hay algunos indicios de separación de flujo en la cercanía del borde posterior del lado de la aspiración del álabe. También se muestran algunas flechas que indican cómo es la condición de frontera periódica. El flujo que abandona la *parte inferior* de la frontera periódica entra con la misma velocidad y dirección a la *parte superior* de la frontera periódica. El ángulo de salida del flujo *b* es más grande cerca del núcleo que cerca de la punta de los álabes del estator porque el espaciamiento *s* de los álabes es menor en el núcleo que en la punta, y también debido a la separación moderada del flujo cerca de la punta.

tor (reducir el ángulo de inclinación o el ángulo del borde delantero en la cercanía de la punta) para evitar esta separación (la torsión de superficie del álabe se analiza con más detalle en el capítulo 14). Por otro lado, puede incrementarse el número de álabes del estator a 11 o 12 con la esperanza de eliminar la separación de flujo en las puntas de los álabes.

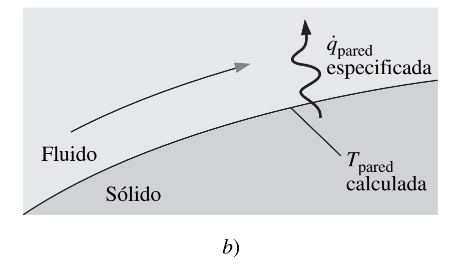
Como un comentario final acerca de este campo de flujo, todos los cálculos se efectuaron en un sistema de coordenadas fijo. Los paquetes modernos de la DFC contienen opciones para zonas de modelado en el campo de flujo con *sistemas de coordenadas rotatorios* de modo que puedan realizarse análisis similares en *álabes* de rotor así como en álabes de estator.

15-4 ▪ DFC CON TRANSFERENCIA DE CALOR

Cuando se acopla la forma diferencial de la ecuación de la energía con las ecuaciones de movimiento del fluido, puede usarse un paquete de dinámica de fluidos computacional para calcular las propiedades relacionadas con la **transferencia de calor** (por ejemplo, distribuciones de temperatura o razón de transferencia de calor de una superficie sólida a un fluido). Debido a que la ecuación de la energía es una ecuación escalar, sólo se necesita *una* ecuación de transporte extra (por lo general para la temperatura o la entalpía), y el gasto de recursos computacionales (tiempo del CPU y necesidades de RAM) no se incrementa de manera considerable. La opción de modelado de transferencia de calor está integrada en la mayoría de los paquetes de la DFC disponibles, puesto que muchos problemas prácticos de ingeniería tienen que ver con flujo de fluidos y con transferencia de calor. Como se mencionó antes, es necesario especificar condiciones de frontera adicionales relacionadas con la transferencia de calor. En las partes de frontera del dominio computacional que coinciden con superficies sólidas, se podría especificar ya sea la temperatura $T_{\text{superficie}}$ (K) o el *flujo de calor* $\dot{q}_{\text{superficie}}$ (W/m^2), definido como la razón de transferencia de calor por unidad de área de la superficie al fluido (pero no *ambos, temperatura y flujo de calor,* al mismo tiempo, como se ilustra en la figura 15-60). Cuando se modela una zona de un dominio computacional como un cuerpo sólido que conlleva la generación de energía térmica vía calentamiento eléctrico (como en componentes electrónicos) o reacciones químicas o nucleares (como en varillas de combustible nuclear), puede especificarse la razón de generación de calor por unidad de volumen $\dot{g}$ (W/m^3) dentro del sólido ya que la razón de generación de calor total por unidad de área superficial expuesta debe ser igual al flujo de calor promedio de la superficie al fluido. En ese caso, no se especifican ni $T_{\text{superficie}}$ ni $\dot{q}_{\text{superficie}}$; ambos convergen a valores que corresponden a la razón de generación de calor específica. Además, puede calcularse la distribución de temperatura dentro del objeto sólido. Otras condiciones de frontera (como las relacionadas con la transferencia de calor por radiación) pueden aplicarse también en los paquetes de la DFC.



a)



b)

FIGURA 15-60
En la superficie de una pared sólida podría especificarse *a*) la temperatura de la superficie o *b*) el flujo térmico, pero no ambos, ya que desde el punto de vista matemático estableceríamos una cantidad de condiciones mayor de lo necesario.

En esta sección no se dan detalles acerca de las ecuaciones de movimiento o las técnicas numéricas empleadas para resolverlas. En cambio, se dan algunos ejemplos básicos que ilustran la capacidad de la DFC para calcular flujos prácticos de interés en ingeniería relacionados con transferencia de calor.

Aumento de temperatura en un intercambiador de calor de flujo cruzado

Considere el flujo de aire frío alrededor de un conjunto de tubos calientes como se ilustra en la figura 15-61. En términos de intercambiadores de calor, a esta configuración geométrica se le llama **intercambiador de calor de flujo cruzado**. Si el flujo de aire fuera a entrar de manera horizontal ($\alpha = 0$) todo el tiem-

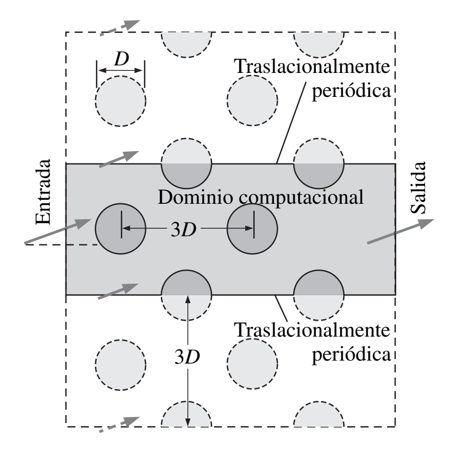


FIGURA 15-61
El dominio computacional (región gris) usado para modelar el flujo turbulento en un intercambiador de calor de flujo transversal. El flujo entra por la izquierda en un ángulo α respecto a la horizontal.

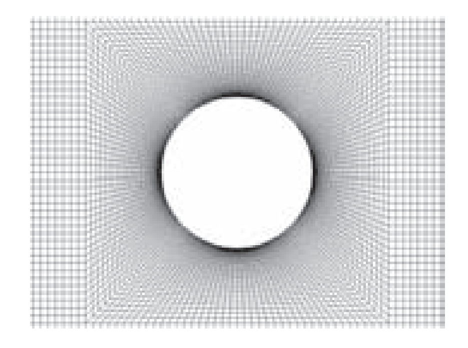


FIGURA 15-62
Acercamiento de la malla estructurada en cercanía de un tubo del intercambiador de calor de flujo transversal. La malla es fina cerca de la superficie del tubo de modo que la capa límite de la pared pueda resolverse mejor.

po, podría cortarse a la mitad el dominio computacional y se aplicarían condiciones de frontera de simetría en los lados superior e inferior del dominio (Fig. 15-23). Sin embargo, en el caso que se comenta, se permite que el flujo de aire entre al dominio computacional a cierto ángulo ($\alpha \neq 0$). Así, se imponen condiciones de frontera *traslacionalmente periódicas* en los lados superior e inferior del dominio (Fig. 15-61). La temperatura del aire a la entrada se fija en 300 K y la temperatura de superficie de cada tubo, en 500 K. El diámetro de los tubos y la velocidad del aire se eligen de manera que el número de Reynolds sea casi 1×10^5 con base en el diámetro del tubo. Se supone que las superficies del tubo son lisas desde el punto de vista hidrodinámico (rugosidad cero) en este primer conjunto de cálculos. Los tubos calientes se alternan como se bosqueja en la figura 15-61, y están espaciados a tres diámetros tanto en dirección vertical como horizontal. Se supone flujo turbulento estacionario bidimensional sin efectos de gravedad y se establece la intensidad de turbulencia del aire a la entrada en 10 por ciento. Se realizan dos casos para comparación: $\alpha = 0$ y 10°. El objetivo es ver si la transferencia de calor al aire se incrementa o inhibe por un valor de α distinto de cero. ¿Cuál caso considera que suministraría mayor transferencia de calor?

Se genera una malla estructurada, de bloques múltiples, bidimensional, con resolución muy fina cerca de las paredes del tubo como se muestra en la figura 15-62, y se corre el paquete de la DFC para lograr la convergencia en ambos casos. Los contornos de temperatura se muestran para el caso $\alpha = 0°$ en la figura 15-63 y para el caso $\alpha = 10°$ en la figura 15-64. El aumento promedio de la temperatura del aire que sale del volumen de control, para el caso con $\alpha = 0°$ es 5.51 K; mientras que para $\alpha = 10°$ es 5.65 K. Así, se llega a la conclusión que el flujo de entrada descentrado da como resultado un calentamiento más eficaz del aire, aunque la mejoría es sólo cerca de 2.5 por ciento. Se calcula un tercer caso (no se muestra) en el cual $\alpha = 0°$, pero la intensidad de turbulencia del aire entrante se incrementa a 25 por ciento. Esto origina un mejor mezclado, así que el aumento promedio de la temperatura del aire de la entrada a la salida es casi 6.5 por ciento; es decir, el aumento de la temperatura ahora es 5.87 K.

Por último, se estudia el efecto de la rugosidad de los tubos. Se modelan las paredes de los tubos como superficies rugosas con una altura de rugosidad característica de 0.01 m (1 por ciento del diámetro del tubo). Nótese que la malla es un poco menos fina cerca de cada tubo, de modo que la distancia del centro de la celda computacional más próxima a la superficie del tubo sea mayor que la altura de rugosidad; de otro modo el modelo de rugosidad del paquete de la

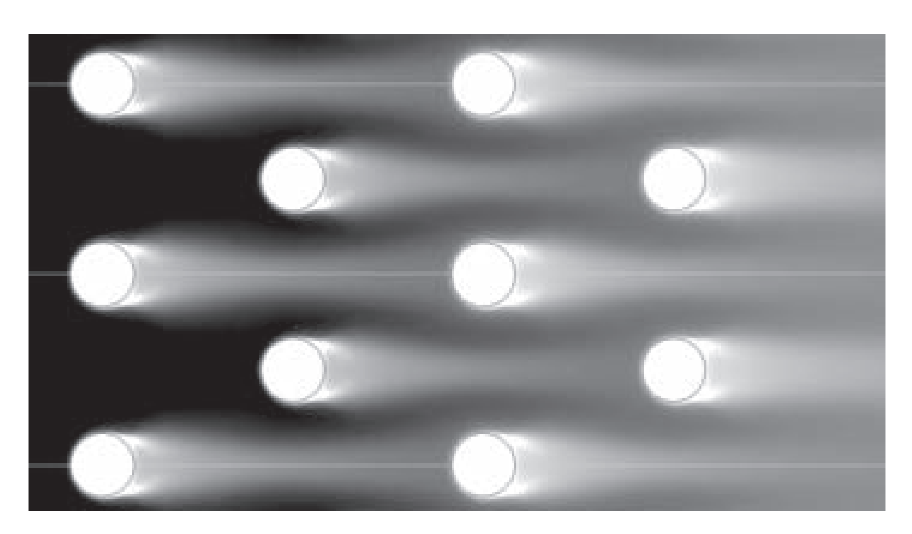


FIGURA 15-63
Gráficas de contorno de la temperatura generadas por medio de los cálculos de la DFC para flujo turbulento estacionario en un intercambiador de calor de flujo transversal a $\alpha = 0°$ con tubos lisos. Los contornos en escala de grises varían desde 300 K (lo más oscuro) a 315 K o más (lo más claro). La temperatura promedio del aire en la salida aumenta 5.51 K en comparación con la temperatura del aire de la entrada. Observe que aunque los cálculos se realizan en el dominio computacional de la figura 15-61, la imagen se reproduce aquí tres veces para lograr mejor ilustración.

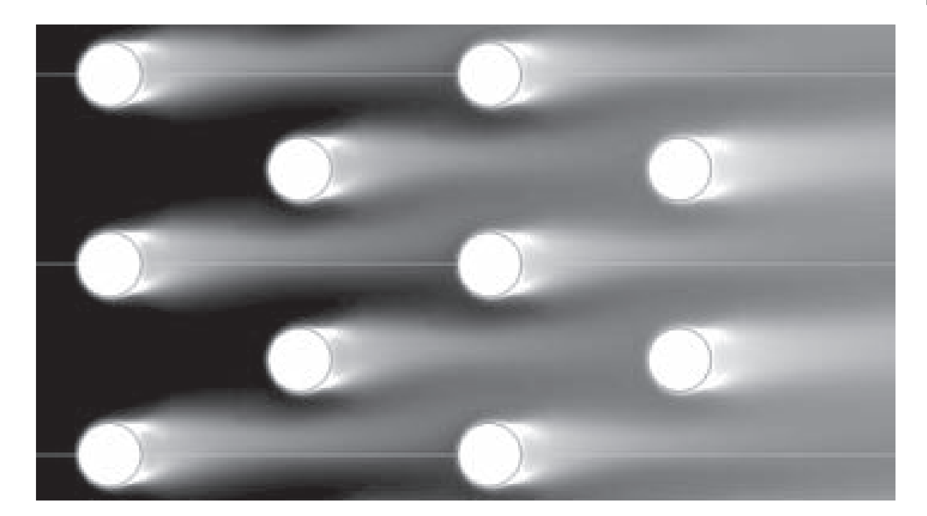


FIGURA 15-64
Gráficas de contorno de la temperatura generadas mediante cálculos de la DFC para flujo turbulento estacionario en un intercambiador de calor de flujo transversal a $\alpha = 10°$ con tubos lisos. Los contornos en escala de grises varían desde 300 K (lo más oscuro) a 315 K o más (lo más claro). La temperatura promedio del aire en la salida aumenta 5.65 K en comparación con la temperatura del aire a la entrada. Por lo tanto, el flujo de entrada no alineado con el eje ($\alpha = 10°$) produce un ΔT que es 2.5 por ciento superior al del flujo de entrada alineado con el eje ($\alpha = 0°$).

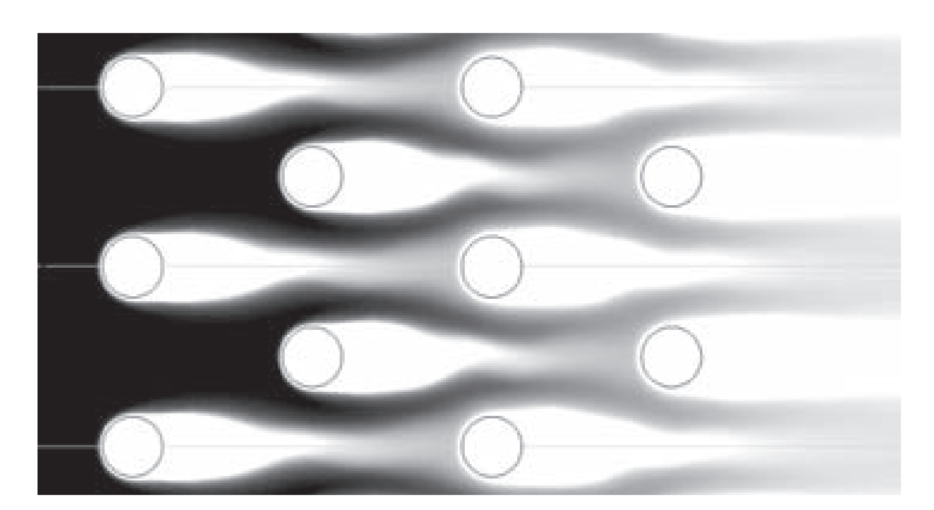


FIGURA 15-65
Gráficas de contorno de la temperatura generadas por medio de cálculos de la DFC para flujo turbulento estacionario en un intercambiador de calor de flujo transversal a $\alpha = 0°$ con tubos rugosos (la rugosidad promedio de la superficie de tubos es igual a 1 por ciento de su diámetro; funciones de pared se utilizaron en los cálculos de la DFC). Los contornos en escala de grises varían desde 300 K (lo más oscuro) a 315 K o más (lo más claro). La temperatura promedio del aire en la salida aumenta 14.48 K en comparación con la temperatura del aire en la entrada. Por lo tanto, inclusive esta pequeña cantidad de rugosidad superficial produce un ΔT que es 163 por ciento superior al que se presenta cuando se utilizan tubos lisos.

DFC carecería de sentido físico. El ángulo de entrada de flujo se fija en $\alpha = 0°$ para este caso, y las condiciones de flujo son idénticas a las de la figura 15-63. Los contornos de temperatura se grafican en la figura 15-65. Las regiones blancas en la gráfica de contorno representan lugares donde la temperatura del aire es mayor que 315 K. El aumento de temperatura promedio del aire de la entrada a la salida es 14.48 K, un incremento de 163 por ciento con respecto al caso de la superficie lisa a $\alpha = 0°$. Este ejemplo da una idea de por qué los tubos en los intercambiadores de calor suelen ser rugosos a propósito.

Enfriamiento de un conjunto de circuitos integrados

En equipo electrónico, instrumentación y computadoras, los componentes electrónicos, como los **circuitos integrados** (**CI, *chips* o IC** por sus siglas en inglés), resistores, transistores, diodos y capacitores, están soldados sobre las **tarjetas de circuitos impresos** (TCI, PCB por sus siglas en inglés). Suele colocarse las TCI en filas como se bosqueja en la figura 15-66. Debido a que muchos de estos componentes electrónicos deben disipar calor, es común ha-

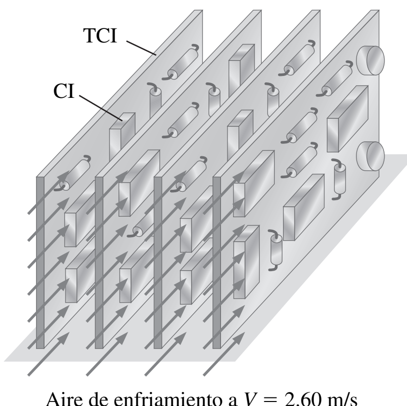


FIGURA 15-66
Cuatro tarjetas de circuitos impresos (TCI) acomodadas en hileras; el aire pasa entre cada una de las mismas para enfriarlas.

cer pasar aire por el espacio entre cada par de las TCI, para enfriarlas y evitar que los componentes se calienten demasiado. Considere el diseño de una TCI para una aplicación en el espacio exterior. Se acomodarán varias TCI idénticas como en la figura 15-66. Cada TCI tiene 10 cm de alto y 30 cm de largo, y el espaciamiento entre tarjetas es de 2.0 cm. El aire de enfriamiento entra al espacio entre las TCI a una velocidad de 2.60 m/s y una temperatura de 30°C. Los ingenieros eléctricos deben acomodar ocho CI idénticos en una porción de 10 cm × 15 cm de cada tarjeta. Cada CI disipa 6.24 W de calor: 5.40 W desde su superficie superior y 0.84 W desde sus lados (se supone que no hay transferencia de calor desde el fondo del CI a la TCI). El resto de los componentes en la placa tienen transferencia de calor despreciable en comparación con la de los ocho CI. Para asegurar un desempeño adecuado, la temperatura promedio en la superficie de CI no debe ser mayor que 150°C, y la temperatura máxima en cualquier parte sobre la superficie del CI no debe pasar de 180°C. Cada CI mide 2.5 cm de ancho y 4.5 cm de largo y 0.50 cm de espesor. Los ingenieros eléctricos proponen dos posibles configuraciones de los ocho CI en la TCI como se bosqueja en la figura 15-67: en la configuración larga, los CI están alineados con su lado *largo* paralelo al flujo, y en la configuración corta los CI están alineados con su lado *corto* paralelo al flujo. En ambos casos los CI se alternan para incrementar el enfriamiento. Se determinará qué configuración da como resultado una temperatura máxima de la superficie de los CI menor, y si los ingenieros eléctricos satisfarán la restricción de temperatura superficial.

Para cada configuración se define un dominio computacional de tres dimensiones que consta de un solo paso de flujo por el espacio de aire entre dos TCI

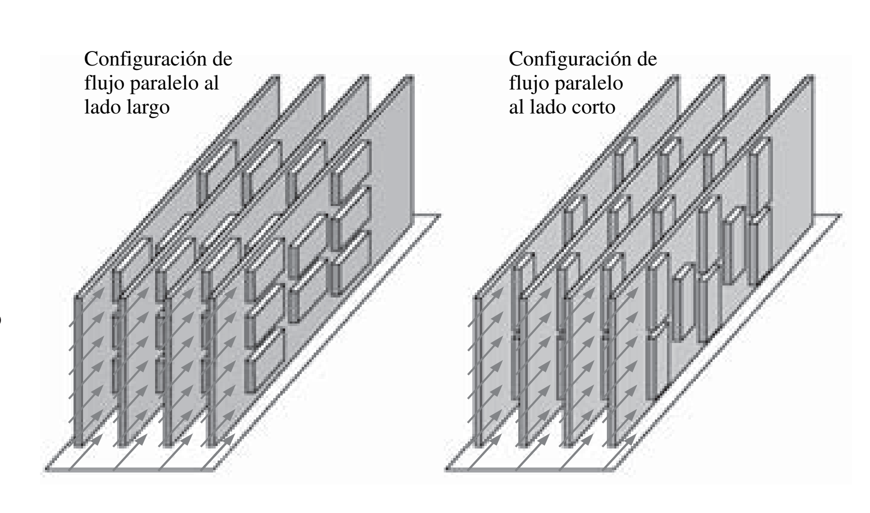


FIGURA 15-67
Dos configuraciones posibles de la ubicación de los ocho circuitos integrados sobre las tarjetas de circuitos impresos: configuración de flujo paralelo al lado largo del circuito integrado y configuración de flujo paralelo al lado corto. Sin ver más allá, ¿cuál de las configuraciones ofrecerá el mejor enfriamiento de los circuitos integrados?

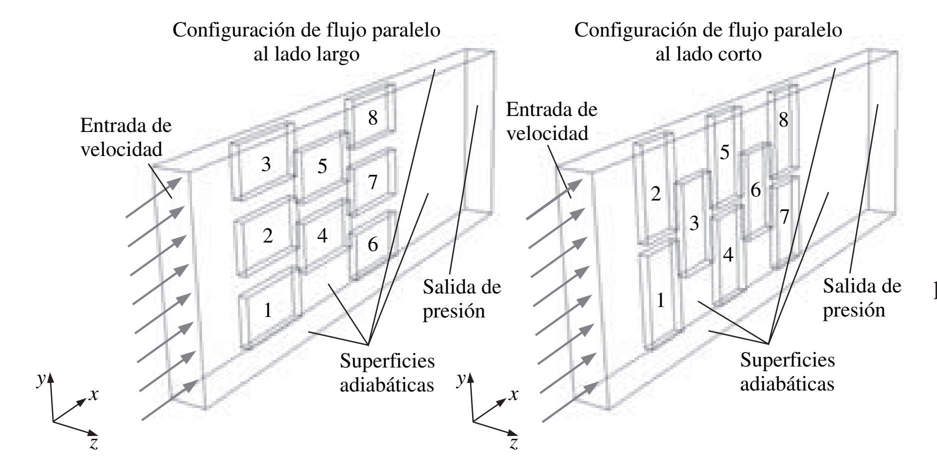


FIGURA 15-68
Dominios computacionales para el ejemplo de los circuitos integrados. Se modela el paso del aire por el espacio entre dos TCI. Se generan dos mallas separadas, una para la configuración de flujo paralelo al lado largo y la otra para el flujo paralelo al lado corto. Los circuitos se etiquetan de 1 a 8 para tener una referencia. Las superficies de estos circuitos transfieren calor al aire; todas las otras superficies son adiabáticas.

(Fig. 15-68). Se genera una malla hexagonal estructurada con 267 520 celdas para cada configuración. El número de Reynolds con base en el espacio de 2.0 cm entre las tarjetas es casi 3 600. Si éste fuera un flujo de canal bidimensional simple, el número de Reynolds sería apenas lo suficientemente alto para que se establezca flujo turbulento. Sin embargo, debido a que las superficies que llevan hasta la entrada donde se especifica la velocidad son muy rugosas, es más probable que el flujo sea turbulento. Se nota que los flujos turbulentos con número de Reynolds bajo ponen en duda a la mayoría de los modelos de turbulencia, ya que los modelos se calibran a números de Reynolds altos. Sin embargo, se supone flujo turbulento estacionario y se emplea el modelo de turbulencia k-ε con funciones de pared. Aunque la exactitud absoluta de estos cálculos podría ser sospechosa debido al número de Reynolds bajo, las comparaciones entre las configuraciones larga y corta deben ser razonables. Se ignoran los efectos de flotabilidad en los cálculos ya que ésta es una aplicación espacial. En la entrada se especifica velocidad de aire de V = 2.60 m/s y T_∞ = 30°C; se establece la intensidad de turbulencia en la entrada en 20 por ciento y la longitud característica de remolinos en 1.0 mm. En la salida se especifica la presión manométrica cero. La TCI se modela como una pared adiabática lisa (transferencia de calor cero de la pared al aire). La parte superior y los lados del dominio computacional se aproximan también como paredes adiabáticas lisas.

Con base en las dimensiones del CI, el área de superficie de la parte superior de un CI es 4.5 cm × 2.5 cm = 11.25 cm^2. El área de superficie total de los cuatro lados del CI es 7.0 cm^2. De las razones de transferencia de calor dadas, se calcula la razón de transferencia de calor por área unitaria de la superficie superior de cada CI:

$$\dot{q}_{\text{arriba}} = \frac{5.4\text{ W}}{11.25\text{ cm}^2} = 0.48\text{ W/cm}^2$$

Así, se modela la superficie superior de cada CI como una pared lisa con un flujo de calor superficial de 4 800 W/m^2 de la pared al aire. De manera similar, la razón de transferencia de calor por unidad de área desde los lados de cada CI es:

$$\dot{q}_{\text{lados}} = \frac{0.84\text{ W}}{7.0\text{ cm}^2} = 0.12\text{ W/cm}^2$$

Debido a que los lados de cada CI tienen puntas eléctricas, se modela cada superficie lateral de cada CI como una pared rugosa con una altura de rugosidad equivalente de 0.50 mm y un flujo de calor superficial de 1 200 W/m^2 de la pared al aire.

TABLA 15-5

Comparación de los resultados de la DFC para el ejemplo del enfriamiento de circuitos integrados, configuraciones del flujo paralelo a los lados largo y corto

	Largo	Corto
$T_{máx}$, superficies superiores de los circuitos	187.5°C	182.1°C
T_{prom}, superficies superiores de los circuitos	144.5°C	144.7°C
$T_{máx}$, superficies laterales de los circuitos	154.0°C	170.6°C
T_{prom}, superficies laterales de los circuitos	84.2°C	91.4°C
ΔT promedio, de entrada a salida	7.83°C	7.83°C
ΔP promedio, de entrada a salida	−5.14 Pa	−5.58 Pa

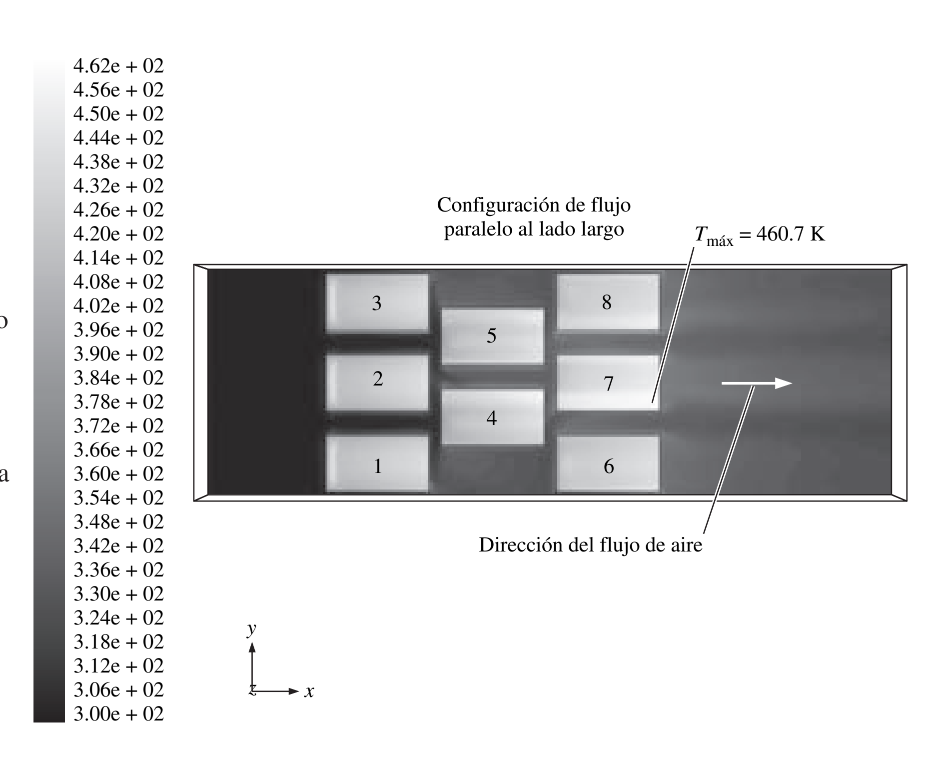


FIGURA 15-69
Resultados según la DFC para el ejemplo del enfriamiento de circuitos integrados, en el caso de la configuración del flujo paralelo al lado largo: los contornos de la temperatura en escala de grises como si se vieran directamente por arriba de las superficies de los circuitos, con valores T en K en la leyenda. Se señala la ubicación de la temperatura superficial máxima, que se presenta cerca del borde posterior del circuito 7. Las regiones de gris claro cerca de los bordes delanteros de los circuitos 1, 2 y 3 se ven también, lo que es un indicio de temperaturas superficiales altas en estos lugares.

El paquete de la DFC FLUENT se corre para lograr la convergencia en cada caso. Los resultados se resumen en la tabla 15.5, y los contornos de temperatura se grafican en las figuras 15-69 y 15-70. La temperatura promedio en las superficies superiores de los CI es casi la misma para cualquier configuración (144.4°C para el caso largo y 144.7°C para el caso corto) y está abajo del límite recomendado de 150°C. Las diferencias en la temperatura promedio en las superficies *laterales* de los CI son 84.2°C para el caso largo y 91.4°C para el caso corto, y estos valores están muy abajo del límite permitido. De mayor interés son las temperaturas máximas. Para la configuración larga, $T_{máx}$ = 187.5°C y ocurre en la superficie superior del CI 7 (el CI de en medio del último renglón). Para la configuración corta, $T_{máx}$ = 182.1°C y ocurre cerca de la tarjeta de en medio en las superficies superiores de los CI 7 y 8 (los dos CI del último renglón). Para ambas configuraciones estos valores exceden el límite recomendado de 150°C. La configuración correspondiente al lado corto paralelo al flujo es mejor para enfriar las superficies superiores de los CI, pero a expensas de una caída de presión poco más grande y enfriamiento deficiente a lo largo de las superficies laterales de los CI.

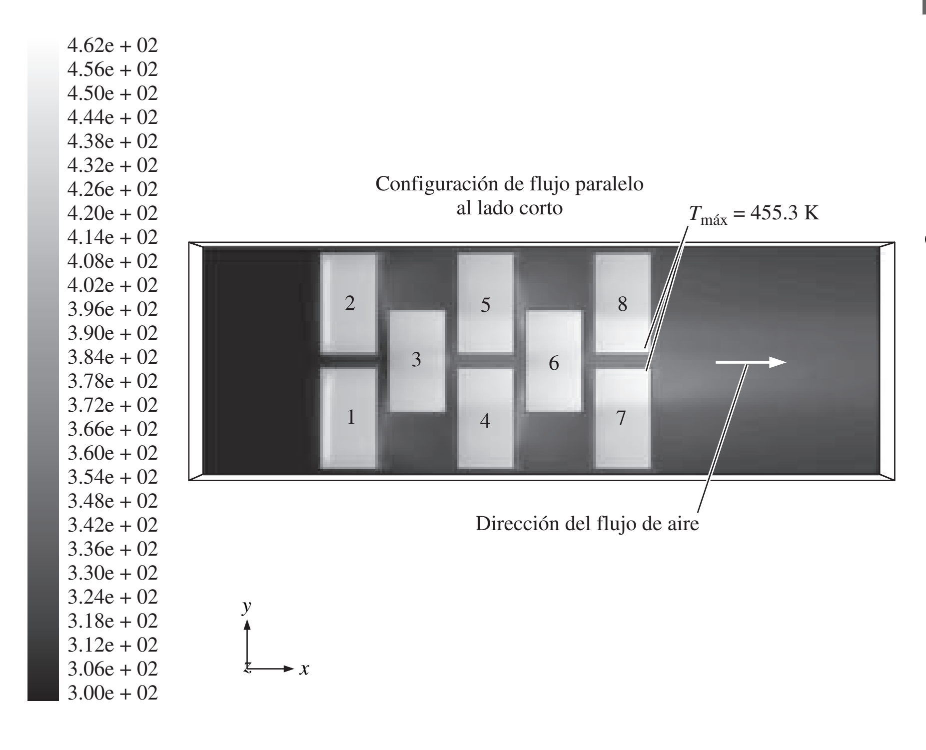
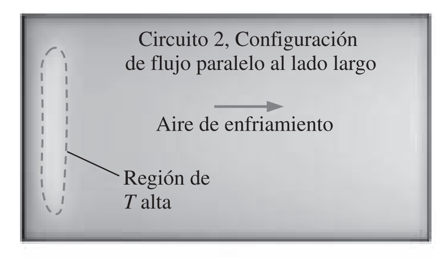


FIGURA 15-70
Resultados según la DFC para el ejemplo del enfriamiento de circuitos integrados, en el caso de la configuración del flujo paralelo al lado corto: los contornos de la temperatura en escala de grises como si se vieran directamente por arriba de los circuitos, con valores *T* en K en la leyenda. Se utiliza la misma escala de temperatura que en la figura 15-69. Se indica la ubicación de la temperatura superficial máxima, que se presenta cerca del borde posterior de los circuitos 7 y 8, cerca del centro de la TCI. Las regiones de gris claro cerca de los bordes delanteros de los circuitos 1 y 2 se ven también, lo que es un indicio de temperaturas superficiales altas en esos lugares.

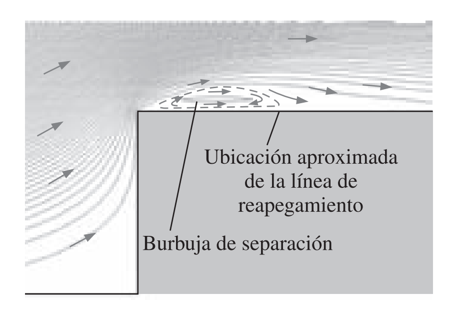
Observe en la tabla 15-5 que el cambio promedio en la temperatura del aire de la entrada a la salida es idéntico para ambas configuraciones (7.83°C). Esto no debe sorprender, porque la razón total de transferencia de calor de los CI al aire es la misma sin importar la configuración de los CI. De hecho, en un análisis de la DFC es aconsejable comprobar valores como éste. Si la ΔT promedio *no* fuera la misma entre las dos configuraciones, se sospecharía de algún tipo de error en los cálculos.

Hay muchas otras características interesantes de estos campos de flujo que pueden señalarse. Para cualquier configuración, la temperatura superficial promedio en los CI corriente abajo es mayor que en los CI corriente arriba. Esto tiene sentido desde el punto de vista físico, debido a que los primeros circuitos reciben el aire más frío, mientras que los que están corriente abajo se enfrían por aire que ya ha sido calentado un poco. Se observa que los CI de enfrente (1, 2 y 3 en la configuración larga y 1 y 2 en la configuración corta) tienen regiones de temperatura alta justo corriente abajo de sus bordes delanteros. Una vista de cerca de la distribución de temperatura en estos CI se muestra en la figura 15-71*a*. ¿Por qué la temperatura es tan alta allí? Resulta que el flujo se separa de la esquina ahusada en el frente del CI y forma un remolino recirculante llamado **burbuja de separación** en la parte superior del CI (Fig. 15-71*b*). La velocidad del aire es lenta en esa región, en especial a lo largo de la **línea de reapegamiento**, donde el flujo vuelve a adherirse a la superficie. La velocidad lenta del aire origina un "punto caliente" local en esa región de la superficie del CI debido a que el enfriamiento por convección es mínimo allí. Por último, se observa en la figura 15-71*a* que corriente abajo de la burbuja de separación, *T* de la superficie del CI se incrementa. Existen dos razones para esto: 1) el aire caliente sube y desciende por el CI, y 2) la capa límite en la superficie del CI crece corriente abajo. Cuanto más grande es el espesor de la capa límite, menor es la velocidad del aire cerca de la superficie y, por lo tanto, menor es la cantidad de enfriamiento por convección en la superficie.

En resumen, con los cálculos de la DFC se predijo que la configuración corta da como resultado un valor menor de temperatura máxima en las superficies de



a)



b)

FIGURA 15-71
a) Acercamiento de la vista superior de los contornos de temperatura en escala de grises sobre la superficie del circuito 2 de la configuración de flujo paralelo al lado largo. Se delinea la región de la alta temperatura. Los niveles de los contornos de temperatura son los mismos que los de la figura 15-69. *b*) Una vista aún más cercana (una vista del borde) de las líneas de corriente que delinean la burbuja de separación en esta región. También se muestra la ubicación aproximada de la línea de reapegamiento del flujo sobre la superficie del circuito.

los CI y aparece en primera instancia como la configuración preferida para la transferencia de calor. Sin embargo, la configuración corta demanda mayor caída de presión al mismo caudal (tabla 15-5). Para determinado ventilador de enfriamiento, esta caída de presión adicional cambiaría el punto de operación del ventilador a un caudal menor (Cap. 14), de modo que disminuiría el efecto de enfriamiento. No se sabe si este cambio sería suficiente para favorecer la configuración larga; se necesitaría más información acerca del ventilador y un análisis más detallado. La conclusión en cualquier caso es que *no hay enfriamiento suficiente para mantener la temperatura de la superficie del CI abajo de 150°C en cualquier parte sobre cada CI.* Para rectificar la situación, se recomienda que los diseñadores distribuyan los 8 CI calientes en toda la TCI en lugar del área limitada de 10 cm × 15 cm. El mayor espacio entre CI debe dar como resultado el enfriamiento suficiente por el flujo dado. Otra opción es instalar un ventilador de mayor potencia que incrementaría la velocidad del aire a la entrada.

15-5 ▪ CÁLCULOS DE LA DFC DE FLUJO COMPRESIBLE

Todos los ejemplos de este capítulo analizados hasta el momento han sido para flujo incompresible (ρ = constante). Cuando el flujo es *compresible*, la densidad ya no es constante, y se convierte en una variable más en el conjunto de ecuaciones. Aquí, el análisis se limita a *gases ideales*. Cuando se aplica la ley del gas ideal, se introduce *otra* incógnita, a saber, la temperatura *T*. Por lo tanto, la ecuación se debe resolver junto con las formas adecuadas para el flujo compresible de las ecuaciones de conservación de la masa y conservación de la cantidad de movimiento (Fig. 15-72). Además, las propiedades del fluido, como la viscosidad y la conductividad térmica, ya no se tratan necesariamente como constantes, debido a que son funciones de la temperatura; por lo tanto, aparecen dentro de los operadores de derivación en las ecuaciones diferenciales de la figura 15-72. Aunque el conjunto de ecuaciones parece amenazador, muchos paquetes de la DFC disponibles comercialmente son capaces de resolver problemas de flujo compresible, inclusive ondas de choque.

Cuando se resuelven problemas de flujo compresible con la DFC, las condiciones de frontera son un poco diferentes a las del flujo incompresible. Por ejemplo, en una entrada que especifica la presión se necesita especificar tanto la presión de estancamiento *como* la presión estática, junto con la temperatura de estancamiento. Una condición de frontera especial (llamada *campo lejano de presión* en FLUENT) también está disponible para flujos compresibles. Con esta condición de frontera se especifica el número de Mach, la presión estática y la temperatura; puede aplicarse a entradas *y* salidas y es adecuada también para flujos externos supersónicos.

Las ecuaciones de la figura 15-72 son para flujo laminar, aunque muchos problemas de flujo compresible ocurren a altas velocidades de flujo en las que el flujo es *turbulento*. Por lo tanto, las ecuaciones de la figura 15-72 deben modificarse de manera acorde (en el conjunto de ecuaciones de NSRP) para incluir un modelo de turbulencia, y se debe agregar más ecuaciones de transporte, como se explicó antes. Las ecuaciones se vuelven entonces bastante largas y complicadas y no se incluyen aquí. Por fortuna, en muchas situaciones puede aproximarse el flujo como *invíscido* o *no viscoso*, y de este modo se eliminan de las ecuaciones de la figura 15-72 los términos relacionados con la viscosidad (la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la ecuación de Euler). Como se verá, la aproximación de flujo no viscoso es bastante buena para muchos flujos prácticos de alta velocidad, debido a que las capas límite a lo largo de las paredes son muy delgadas a números de Reynolds altos. De hecho, los cálculos de la DFC de flujo compresible pueden predecir las características de flujo que por lo general son bas-

Continuidad: $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$ **ley del gas ideal:** $P = \rho RT$

Cantidad de movimiento en *x*:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right) + \frac{}{y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

Cantidad de movimiento en *y*:

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{}{x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{y}\left(2\ \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

Cantidad de movimiento en *z*:

$$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{z\partial} + \frac{\partial}{x\partial}\left[\left(\frac{w}{x\partial} + \frac{u}{z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{z}\left(2\ \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)$$

Energía:

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \beta T\left(u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + w\frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \Phi$$

FIGURA 15-72

Ecuaciones del movimiento para el caso de flujo estacionario, compresible, laminar de un fluido newtoniano en coordenadas cartesianas. Hay seis ecuaciones y seis incógnitas: ρ, u, v, w, T y P. Cinco de las ecuaciones son ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales, y la ecuación de gas ideal es una ecuación algebraica. R es la constante de gas ideal, λ es el segundo coeficiente de la viscosidad que casi siempre se iguala a $-2\mu/3$; c_p es el calor específico a presión constante; k es la conductividad térmica; β es el coeficiente de expansión térmica y Φ es la función de disipación dada por White (1991) como

$$\Phi = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

tante difíciles de obtener de manera experimental. Por ejemplo, muchas técnicas de medición experimental implican acceso óptico, que es limitado en flujos tridimensionales, e inclusive en algunos flujos asimétricos. La DFC no está limitada de esta manera.

Flujo compresible por una tobera convergente-divergente

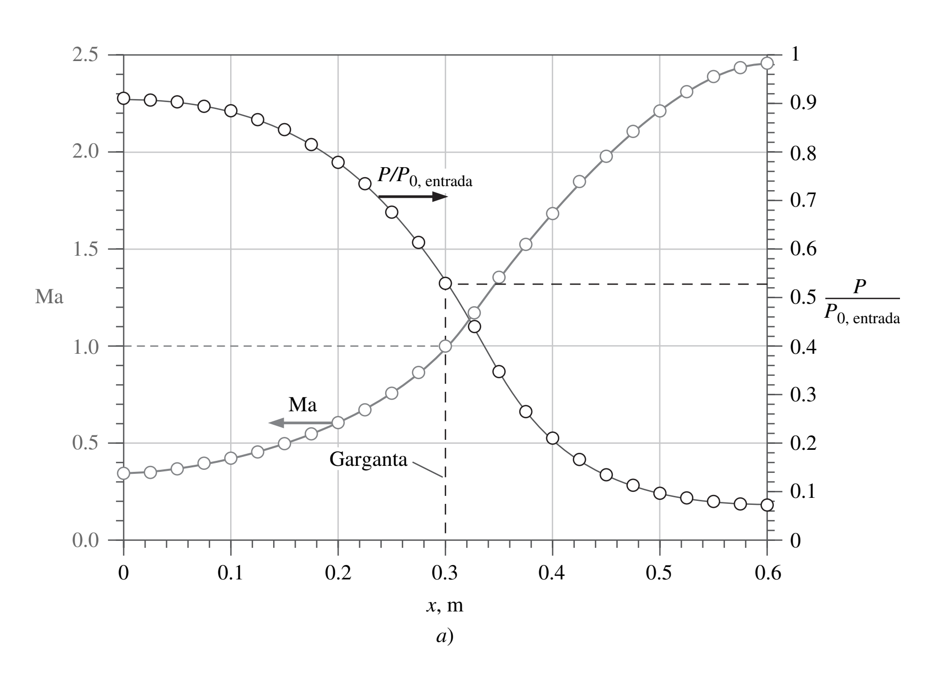
Como primer ejemplo, se considera flujo compresible de aire por una tobera axisimétrica convergente-divergente. El dominio computacional se muestra en la figura 15-73. El radio de entrada es 0.10 m, el radio de la garganta es 0.075 m y el radio de salida es 0.12 m. La distancia axial desde la entrada hasta la garganta es 0.30 m, la misma que la distancia axial de la garganta a la salida. En los cálculos se emplea una malla estructurada con casi 12 000 celdas cuadriláteras. En la entrada se especifican la presión de estancamiento $P_{0,\text{entrada}}$ que se fija en 220 kPa (absoluta), la presión estática P_{entrada} que se establece en 210 kPa y la temperatura de estancamiento $T_{0,\text{entrada}}$ se fija en 300 K. Para el primer caso, se

FIGURA 15-73

Dominio computacional para flujo compresible a través de una tobera convergente-divergente. Puesto que el flujo es axisimétrico, sólo una porción bidimensional es necesaria para la solución de la DFC.

fija la presión estática P_b a la salida en 50.0 kPa ($P_b/P_{0,\text{entrada}}$ = 0.227), lo suficientemente baja para que el flujo sea supersónico en toda la sección divergente de la tobera, sin ninguna onda de choque normal en la tobera. Esta relación de contrapresión corresponde a un valor entre los casos E y F en la figura 12-27, en la que ocurre un patrón de onda de choque oblicua corriente abajo de la salida de la tobera; estas ondas de choque no afectan el flujo en la tobera, ya que el flujo que sale de la tobera es supersónico. No se intenta modelar el flujo corriente abajo de la salida de la tobera.

El paquete de la DFC se corre para lograr la convergencia de la solución de flujo compresible no viscoso estacionario. Los valores promedio del número de Mach Ma y la razón de presión $P/P_{0,\text{entrada}}$ se calculan en 25 lugares axiales a lo largo de la tobera convergente-divergente (cada 0.025 m) y se grafican en la figura 15-74*a*. Los resultados concuerdan casi de manera perfecta con las predicciones de flujo isentrópico unidimensional (Cap. 12). En la garganta (x = 0.30 m), el número de Mach promedio es 0.997 y el valor promedio de $P/P_{0,\text{entrada}}$ es 0.530. La teoría de flujo isentrópico unidimensional predice que Ma = 1 y $P/P_{0,\text{entrada}}$ = 0.528 en la garganta. Las discrepancias pequeñas entre la DFC y la teoría se deben a que el flujo calculado *no* es unidimensional, porque hay una componente de velocidad radial y, por lo tanto, una variación radial del número de Mach y la presión estática. El examen cuidadoso de las líneas de contorno del número de Mach de la figura 15-74*b* revela que son curvas, no rectas como se predeciría mediante la teoría de flujo isentrópico unidimensional. La línea sónica (Ma = 1) se identi-



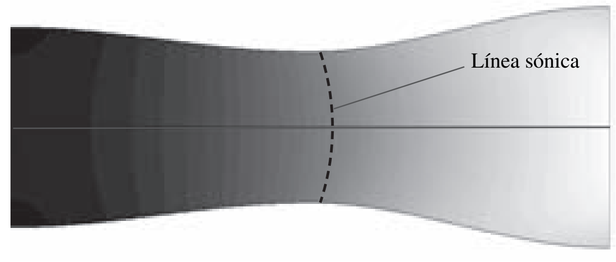


FIGURA 15-74
Resultados de la DFC para un flujo estacionario, adiabático, no viscoso y compresible a través de una tobera convergente-divergente: *a*) número Mach promedio y relación de presión calculados en 25 ubicaciones axiales (círculos), comparados con las predicciones de la teoría de flujo isentrópico, unidimensional y compresible (líneas continuas); *b*) contornos del número Mach en escala de grises, que varían desde Ma = 0.3 (lo más oscuro) hasta 2.7 (lo más claro). Aunque sólo la mitad superior está calculada, se muestra una imagen especular respecto al eje x para tener más claridad. La línea sónica (Ma = 1) también se destaca. Es parabólica en vez de recta en este flujo axisimétrico debido a la componente radial de la velocidad, como se comenta en Schreier (1982).

fica con claridad en la figura. Aunque Ma = 1 justo en la superficie interior de la garganta, las condiciones sónicas a lo largo del eje de la tobera no se alcanzan hasta un poco corriente abajo de la garganta.

A continuación, se corren casos donde se modifica la contrapresión P_b, al mismo tiempo que se mantienen fijas las otras condiciones de frontera. Los resultados para los tres casos se muestran en la figura 15-75: P_b = *a*) 100, *b*) 150 y *c*) 200 kPa, es decir, $P_b/P_{0,\text{entrada}}$ = *a*) 0.455, *b*) 0.682 y *c*) 0.909, respectivamente. Para los tres casos ocurre una onda de choque normal en la porción divergente de la tobera. Además, a medida que se incrementa la contrapresión, el choque se desplaza corriente arriba de la garganta, y disminuye su intensidad. Debido a que el flujo experimenta un cambio brusco en la garganta, el flujo másico es idéntico en los tres casos (y también en el caso previo que se muestra en la figura 15-74). Se observa que el choque normal no es recto, sino curvo debido a la componente radial de la velocidad, como se mencionó antes.

Para el caso *b*), en el cual $P_b/P_{0,\text{entrada}}$ = 0.682, los valores promedio del número de Mach y la razón de presión $P/P_{0,\text{entrada}}$ se calculan en 25 lugares axiales a lo largo de la tobera convergente-divergente (cada 0.025 m) y se grafican en la figura 15-76. Para comparación con la teoría, se emplean las relaciones de flujo isentrópico unidimensional corriente arriba y corriente abajo de la onda de choque, y se usan las relaciones de onda de choque normales para calcular el salto de presión *en* la onda de choque (Cap. 12). Para hacer corresponder la contra-

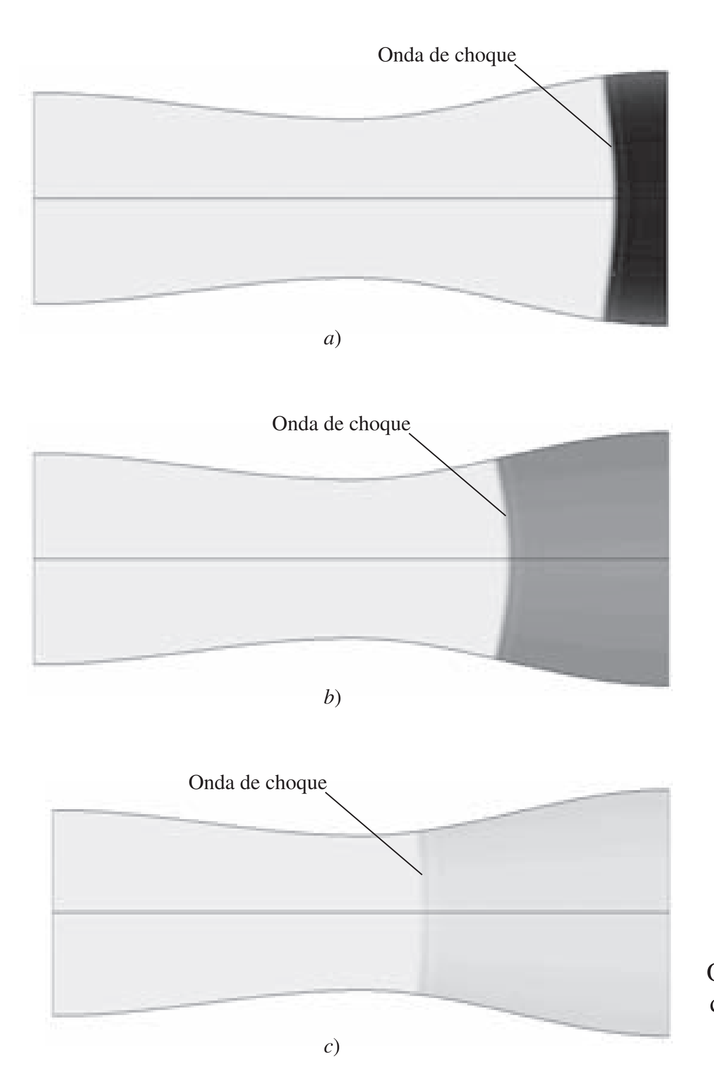


FIGURA 15-75
Resultados de la DFC para un flujo estacionario, adiabático, no viscoso y compresible a través de una tobera convergente-divergente: los contornos en escala de grises de la relación de presión de estancamiento $P_0/P_{0,\text{entrada}}$ también se muestran para $P_b/P_{0,\text{entrada}}$ = *a*) 0.455; *b*) 0.682, y *c*) 0.909. Puesto que la presión de estancamiento es constante corriente arriba de la onda de choque y disminuye repentinamente en la onda de choque, funciona como un indicador conveniente de la ubicación y fuerza de la onda de choque normal en la tobera. En estas gráficas de contornos, $P_0/P_{0,\text{entrada}}$ varía de 0.5 (lo más oscuro) a 1.05 (lo más claro). Es evidente, a partir de los niveles de la escala de grises corriente abajo de la onda de choque, que entre más lejos corriente abajo se ubica la onda de choque, es más fuerte (es mayor la magnitud de caída de presión de estancamiento en la onda de choque). Observe también la forma de las ondas de choque, curvas y no rectas debido a la componente radial de la velocidad.

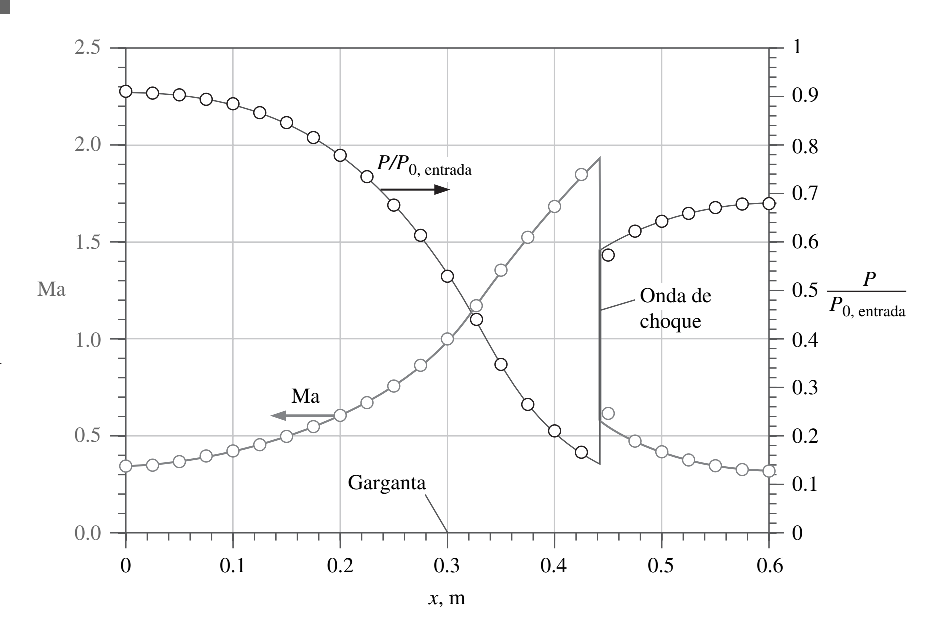


FIGURA 15-76
Número de Mach y relación de presión en función de la distancia axial a lo largo de una tobera convergente-divergente para el caso en el cual $P_b/P_{0,\text{entrada}} = 0.682$. Los resultados promedio de la DFC en 25 lugares axiales (círculos) para flujo estacionario, no viscoso, adiabático y compresible se comparan con las predicciones que da la teoría de flujo unidimensional compresible (líneas continuas).

presión especificada, el análisis unidimensional demanda que la onda de choque normal se localice en $x = 0.4436$ m, lo cual da cuenta del cambio en P_0 y A^* en la onda de choque. La concordancia entre los cálculos de la DFC y la teoría unidimensional es excelente. La discrepancia pequeña en la presión y el número de Mach justo corriente abajo de la onda de choque se atribuye a la forma curva de la onda de choque (Fig. 15-75*b*), como ya se explicó. Además, la onda de choque en los cálculos de la DFC no es infinitesimalmente delgada, como se predice mediante la teoría unidimensional, sino que se extiende sobre algunas celdas computacionales. La última inexactitud se puede reducir un poco si la malla se hace más fina en la región de la onda de choque (no se muestra).

Los cálculos previos de la DFC son para flujo adiabático no viscoso estacionario. Cuando no hay ondas de choque (Fig. 15-74), el flujo es *isentrópico*, porque es tanto adiabático como reversible (pérdidas no irreversibles). Sin embargo, cuando existe una onda de choque en el campo de flujo (Fig. 15-75), el flujo ya no es isentrópico debido a que existen pérdidas irreversibles en la onda de choque, aunque aún es adiabático.

Se corre un caso final de la DFC en el que se incluyen irreversibilidades adicionales, es decir, *fricción* y *turbulencia*. Se modifica el caso *b*) de la figura 15-75 cuando se corre un caso turbulento, adiabático, estacionario con el modelo de turbulencia k-ε con funciones de pared. La intensidad de turbulencia en la entrada se establece en 10 por ciento con una longitud característica de remolinos de 0.050 m. Una gráfica de contorno de $P/P_{0,\text{entrada}}$ se muestra en la figura 15-77, con la misma variedad de escala de grises como en la figura 15-75. La comparación de las figuras 15-75*b* y 15-77 revela que la onda de choque para el caso turbulento ocurre más corriente arriba y, por lo tanto, es un poco más débil. Además, la presión de estancamiento es pequeña en una región muy delgada a lo largo de la superficie de la tobera. Esto se debe a las pérdidas por fricción en la capa límite delgada. Esta disminución en la presión de estancamiento se debe a las irreversibilidades turbulentas y viscosas en la región de capa límite. Además, la capa límite se separa justo corriente arriba de la onda de choque, lo que causa más irreversibilidades. Un acercamiento de los vectores de velocidad en la cercanía del punto de separación a lo largo de la superficie se muestra en la figura 15-78. Se nota que este caso no converge bien y es inherentemente no estacionario; la interacción entre las ondas de choque y las capas límite es una tarea muy difícil para la DFC. Debido a que se usan funciones de pared, los detalles

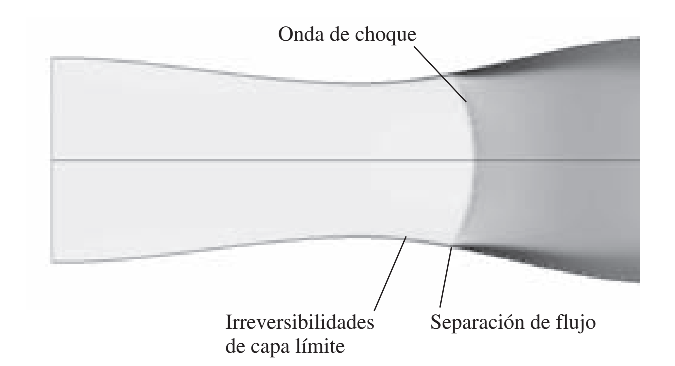


FIGURA 15-77
Resultados de la DFC para flujo estacionario, adiabático, turbulento y compresible a través de una tobera convergente-divergente. Se muestran los contornos en escala de grises de la relación de presión de estancamiento $P_0/P_{0,\text{entrada}}$ para el caso de $P_b/P_{0,\text{entrada}} = 0.682$, la misma contrapresión que en la figura 15-75*b*. La separación de flujo e irreversibilidades en la capa límite están identificadas.

de flujo dentro de la capa límite turbulenta no se resuelven en este cálculo de la DFC. Sin embargo, los experimentos revelan que la onda de choque interactúa de manera mucho más significativa con la capa límite, y produce "λ pies", como se explicó en el Proyector de aplicaciones del capítulo 12.

Para finalizar, se compara el flujo másico para este caso de flujo turbulento y viscoso con el flujo másico del caso de flujo no viscoso, y se encuentra que $\dot{m}$ ha disminuido en casi 0.7 por ciento. ¿Por qué? Como se explicó en el capítulo 10, una capa límite a lo largo de una superficie afecta al flujo externo de modo que la pared aparece más gruesa por una cantidad igual al espesor de desplazamiento δ^*. *El área de garganta efectiva se reduce un poco por la presencia de la capa límite*, lo que origina una reducción en el flujo másico por la tobera convergente-divergente. El efecto es pequeño en este ejemplo ya que las capas límite son tan delgadas respecto a las dimensiones de la tobera, y resulta que la aproximación no viscosa es bastante buena (menos de 1 por ciento de error).

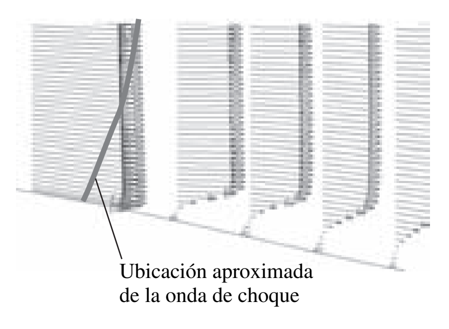


FIGURA 15-78
Acercamiento de los vectores de velocidad en la vecindad de la región de separación de flujo de la figura 15-77. Se ve el decremento repentino en la magnitud de la velocidad en la onda de choque, y asi mismo se ve la región de flujo inverso corriente abajo de la onda de choque.

Ondas de choque oblicuas en una cuña

Como ejemplo final de flujo compresible, se modela el flujo de aire compresible no viscoso, bidimensional, adiabático, estacionario, sobre una cuña de semiángulo θ (Fig. 15-79). Debido a que el flujo tiene simetría, se modela sólo la mitad superior del flujo y se emplea una condición de frontera de simetría a lo largo del borde inferior. Se corren tres casos: θ = 10, 20 y 30°, a un número de Mach de entrada de 2.0. Los resultados de la DFC se muestran en la figura 15-80 para los tres casos. En las gráficas de la DFC, una imagen especular del dominio computacional se proyecta por la línea de simetría para mayor claridad.

Para el caso de 10° (Fig. 15-80*a*) se observa una onda de choque oblicua recta, que se origina en la punta de la cuña, como se predice también mediante la teoría de flujo invíscido. El flujo cambia de dirección en la onda de choque oblicua en 10° de modo que es paralelo a la pared de la cuña. El ángulo de onda de choque β que se predice por la teoría de flujo invíscido es 39.31°, y el número de Mach predicho corriente abajo de la onda de choque es 1.64. Las mediciones con un transportador en la figura 15-80*a* producen $\beta \cong 40°$, y el cálculo de la DFC del número de Mach corriente abajo de la onda de choque es 1.64; por lo tanto, la concordancia con la teoría es excelente.

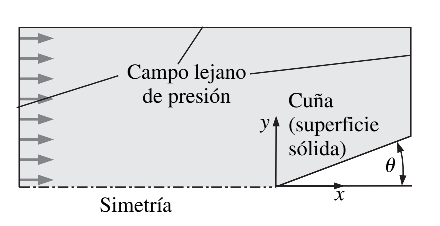
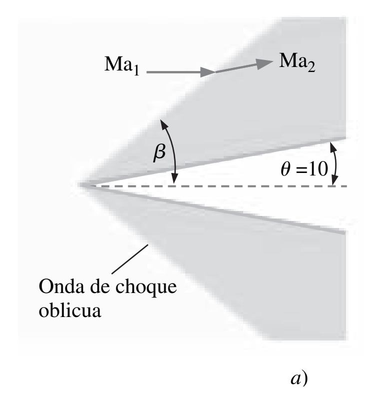
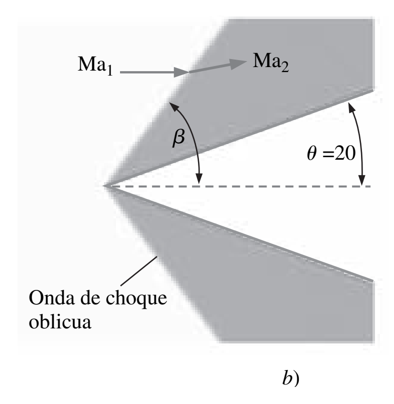


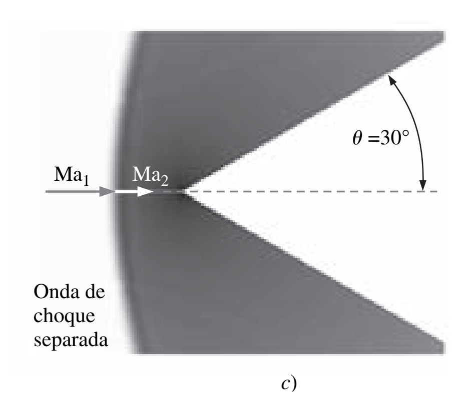
FIGURA 15-79
Dominio computacional y condiciones de frontera para flujo compresible sobre una cuña de semiángulo θ. Puesto que el flujo es simétrico respecto al eje x, sólo la mitad superior se modela en el análisis de la DFC.



a)



b)



c)

FIGURA 15-80
Resultados de la DFC (contornos del número de Mach en escala de grises) para flujo estacionario, adiabático, no viscoso y compresible a $Ma_1 = 2.0$ sobre una cuña de semiángulo θ = *a*) 10°, *b*) 20° y *c*) 30°. Los contornos del número de Mach varían desde Ma = 0.2 (lo más oscuro) a 2.0 (lo más claro) en todos los casos. En el caso de los dos semiángulos más pequeños, una onda de choque oblicua débil que toca la superficie de cuña se forma en el borde delantero de la cuña, pero para el caso de 30°, se forma una onda de choque separada (onda frontal) delante de la cuña. La fuerza de la onda de choque aumenta con θ, como se indica por el tono más oscuro de grises corriente abajo de la onda de choque cuando se incrementa θ.

Para el caso de 20° (Fig. 15-80*b*), los cálculos de la DFC producen un número de Mach de 1.21 corriente abajo de la onda de choque. El ángulo de la onda de choque medido a partir de los cálculos de la DFC es casi 54°. La teoría de flujo invíscido predice un número de Mach de 1.21 y un ángulo de onda de choque de 53.4°, así que de nuevo la concordancia entre la teoría y la DFC es excelente. Puesto que la onda de choque para el caso de 20° es a un ángulo más inclinado (más próximo a una onda de choque normal), es más fuerte que la onda de choque para el caso de 10°, como se indica mediante de la coloración más oscura en los contornos de Mach corriente abajo de la onda de choque para el caso de 20°.

A número de Mach 2.0 en aire, la teoría de flujo invíscido predice que una onda de choque oblicua recta puede formar hasta un semiángulo de cuña máximo de casi 23° (Cap. 12). A semiángulos de cuña mayores que éste, la onda de choque se desplaza corriente arriba de la cuña (se separa) y forma una **onda de choque separada**, que toma forma de una **onda frontal** (Cap. 12). Los resultados de la DFC en $\theta = 30°$ (Fig. 15-80*c*) muestran que, de hecho, éste es el caso. La porción de la onda de choque separada justo corriente arriba del borde delantero de la cuña es una onda de choque normal y, por lo tanto, el flujo corriente abajo de la porción de la onda de choque normal es subsónico. A medida que la onda de choque se curva hacia atrás, se vuelve cada vez más débil, y el número de Mach corriente abajo de la onda de choque se incrementa, según se indica con la sombra gris más tenue.

15-6 ▪ CÁLCULOS DE LA DFC PARA FLUJO EN CANAL ABIERTO

Hasta aquí, los ejemplos han sido para un fluido de una sola fase (aire o agua). Sin embargo, muchos paquetes disponibles comercialmente pueden manejar flujo de una mezcla de gases (por ejemplo, monóxido de carbono y aire), flujo con dos fases del mismo fluido (por ejemplo, vapor y agua líquida) e inclusive flujo de dos fluidos de diferentes fases (por ejemplo, agua líquida y aire gaseoso). El último caso es de interés en esta sección, a saber, el flujo de agua con superficie libre, arriba de la cual es aire gaseoso, es decir, flujo en canal abierto. Aquí se

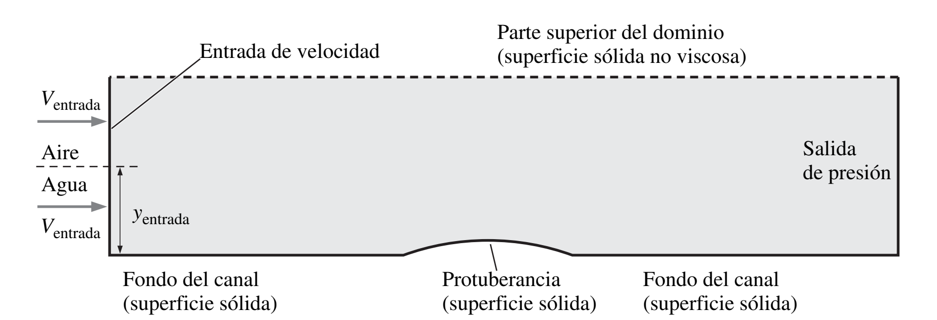


FIGURA 15-81
Dominio computacional para un flujo estacionario, incompresible, bidimensional de agua sobre una protuberancia a lo largo del fondo de un canal, con condiciones de frontera especificadas. Se modelan dos fluidos en el campo de flujo, agua líquida y aire por encima de la superficie del agua. Se especifican en la entrada la profundidad del líquido $y_{entrada}$ y velocidad $V_{entrada}$.

presentan algunos ejemplos simples de soluciones de la DFC de flujos en canal abierto.

Flujo sobre una protuberancia en el fondo de un canal

Considere un canal bidimensional con un fondo horizontal plano. En cierto lugar a lo largo del fondo del canal, hay una protuberancia lisa de 1.0 m de largo y 0.10 m de alto en su centro (Fig. 15.81). La velocidad de entrada del aire y el agua se especifican como $V_{entrada}$. La profundidad del agua en la entrada del dominio computacional se especifica como $y_{entrada}$, pero se calcula la ubicación de la superficie del agua en el resto del dominio. El flujo se modela como invíscido.

Se consideran los casos con entradas subcrítica y supercrítica (Cap. 13). Los resultados de los cálculos de la DFC se muestran en la figura 15-82 para tres casos con el fin de comparar. Para el primer caso (Fig. 15-82*a*), $y_{entrada}$ se especifica como 0.30 m y $V_{entrada}$ como 0.50 m/s. El número de Froude correspondiente se calcula como:

Número de Froude:
$$\text{Fr} = \frac{V_{entrada}}{\sqrt{g y_{entrada}}} = \frac{0.50 \text{ m/s}}{\sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(0.30 \text{ m})}} = 0.291$$

Puesto que $\text{Fr} < 1$, el flujo en la entrada es *subcrítico*, y la superficie del líquido disminuye un poco arriba de la protuberancia (Fig. 15-82*a*). El flujo aún es subcrítico corriente abajo del bache, y la altura de la superficie del líquido sube de nuevo de manera lenta hasta su nivel previo cuando pasa por la protuberancia. Así que el flujo es subcrítico en todas partes.

Para el segundo caso (Fig. 15-82*b*), $y_{entrada}$ se especifica como 0.50 m y $V_{entrada}$ se especifica como 4.0 m/s. El número de Froude correspondiente se calcula como 1.81. Ya que $\text{Fr} > 1$, el flujo en la entrada es *supercrítico*, y la superficie del líquido *sube* por la protuberancia (Fig. 15-82*b*). Lejos corriente abajo, la profundidad del líquido vuelve a 0.50 m, y la velocidad promedio vuelve a 4.0 m/s, de modo que $\text{Fr} = 1.81$, el mismo valor que en la entrada. Por lo tanto, este flujo es supercrítico en todas partes.

Por último, se muestran los resultados para un tercer caso (Fig. 15-82*c*) en el cual el flujo que entra al canal es subcrítico ($y_{entrada} = 0.50$ m, $V_{entrada} = 1.0$ m/s y $\text{Fr} = 0.452$). En este caso, la superficie del agua desciende sobre la protuberancia, como se esperaba para flujo subcrítico. Sin embargo, en el lado corriente abajo de la protuberancia, $y_{salida} = 0.25$ m, $V_{salida} = 2.0$ m/s y $\text{Fr} = 1.28$. Así, este flujo comienza subcrítico, pero cambia a supercrítico corriente abajo de la protuberancia. Si el dominio se hubiera extendido más corriente abajo, quizá se vería un *salto hidráulico* que regresaría al número de Froude abajo de la unidad (subcrítico).

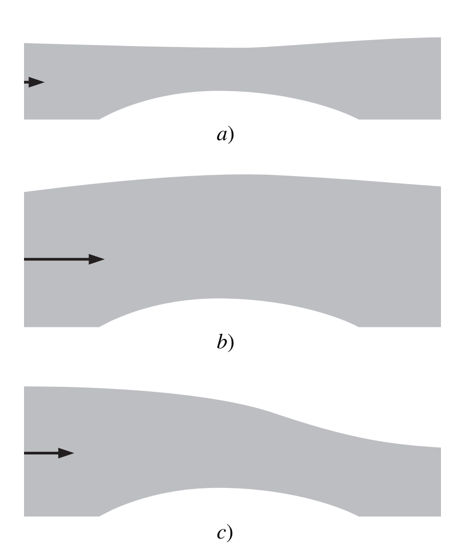


FIGURA 15-82
Resultados de la DFC para un flujo de agua incompresible, bidimensional sobre una protuberancia a lo largo del fondo del canal. Los contornos de fase se grafican, y con azul se señala el agua líquida y el blanco representa el aire gaseoso: *a*) flujo subcrítico antes de la protuberancia y asimismo subcrítico después, *b*) flujo supercrítico antes de la protuberancia y asimismo supercrítico después y *c*) flujo subcrítico antes de la protuberancia y supercrítico después.

Flujo a través de una compuerta de descarga (salto hidráulico)

Como ejemplo final, considere un canal bidimensional con fondo horizontal, plano, pero esta vez con una compuerta de descarga (Fig. 15-83). La profundidad del agua en la entrada del dominio computacional se especifica como y_{entrada} y la velocidad del flujo de entrada se especifica como V_{entrada}. El fondo de la compuerta de descarga está a una distancia a del fondo del canal. El flujo se modela como no viscoso.

Se corre el paquete de la DFC con $y_{\text{entrada}} = 12.0$ m y $V_{\text{entrada}} = 0.833$ m/s, de modo que el número de Froude de entrada es $\text{Fr}_{\text{entrada}} = 0.0768$ (subcrítico). El fondo de la compuerta está a $a = 0.125$ m desde el fondo del canal. Los resultados de los cálculos de DFC se muestran en la figura 15-84. Después que el agua pasa debajo de la compuerta de descarga, su velocidad promedio se incrementa a 12.8 m/s, su profundidad disminuye a $y = 0.78$ m. Por lo tanto, Fr = 4.63 (supercrítico) corriente abajo de la compuerta y corriente arriba del salto hidráulico. A cierta distancia corriente abajo se ve un salto hidráulico en el que la profundidad promedio del agua se incrementa a $y = 3.54$ m, y la velocidad promedio del agua disminuye a 2.82 m/s. El número de Froude corriente abajo del salto hidráulico es por consiguiente Fr = 0.478 (subcrítico). Se observa que la profundidad del agua corriente abajo es significativamente menor que corriente arriba de la compuerta, lo cual indica disipación relativamente grande por el salto hidráulico y una disminución correspondiente en la energía específica del flujo (capítulo 13). Se refuerza la analogía entre la pérdida de energía específica por un salto hidráulico en flujo de canal abierto y la pérdida de presión de estancamiento por una onda de choque en flujo compresible.

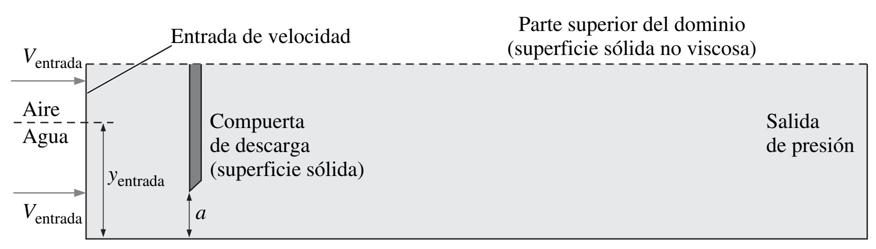


FIGURA 15-83
Dominio computacional para un flujo de agua estacionario, incompresible y bidimensional por una compuerta de descarga con condiciones de frontera especificadas. Se modelan dos fluidos en el campo de flujo, agua líquida y aire por encima de la superficie del agua. Se especifican en la entrada la profundidad del líquido y_{entrada} y velocidad V_{entrada}.

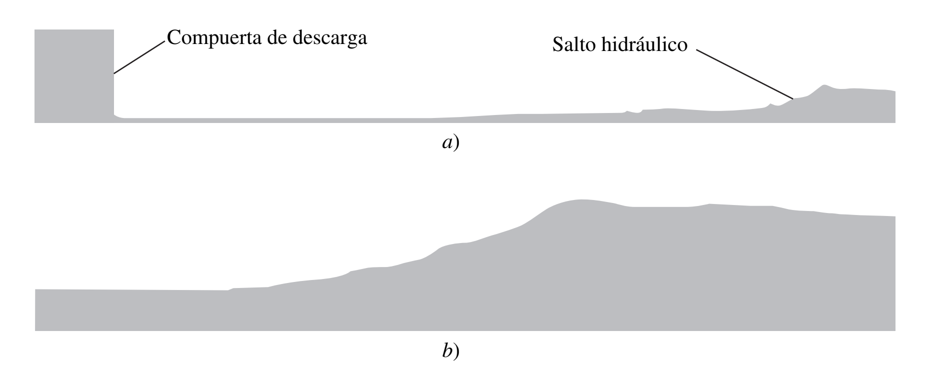
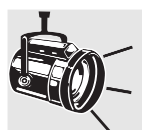


FIGURA 15-84
Resultados de la DFC para un flujo de agua incompresible y bidimensional por una compuerta de descarga en un canal abierto. Los contornos de fase se grafican, y con gris se señala el agua líquida y el blanco representa el aire gaseoso: *a*) vista global de la compuerta de descarga y salto hidráulico y *b*) acercamiento del salto hidráulico. El flujo es sumamente no estacionario y estas imágenes son instantáneas correspondientes a un instante de tiempo arbitrario.



PROYECTOR DE APLICACIONES ■ Un estómago virtual

Autores invitados: James G. Brasseur y Anupam Pal,
The Pennsylvania State University

La función mecánica del estómago (llamada "motilidad" gástrica) es primordial para la nutrición adecuada, la liberación confiable de fármacos y muchas disfunciones gástricas como la gastroparesia. En la figura 15-85 se muestra una imagen de resonancia magnética (IRM) del estómago. El estómago es una mezcladora, una trituradora, una cámara de almacenamiento y una bomba compleja que controla la liberación de contenido gástrico sólido y líquido hacia el intestino delgado donde ocurre la captación de nutrientes. La liberación de nutrientes se controla mediante la apertura y cierre de una válvula al final del estómago (el píloro) y las variaciones en la diferencia de presión respecto al tiempo entre el estómago y el duodeno. La presión gástrica se controla por la tensión muscular sobre la pared del estómago y las ondas de contracción peristáltica que pasan por el antro (Fig. 15-85). Estas ondas de contracción peristáltica también descomponen partículas de alimento y mezclan materia dentro del estómago, tanto comida como medicamentos. Sin embargo, en la actualidad es imposible medir los movimientos del líquido de mezclado en el estómago humano. La IRM, por ejemplo, da sólo una *descripción* del líquido magnetizado especial dentro del estómago. Con la finalidad de estudiar estos movimientos invisibles del líquido y sus efectos, se ha desarrollado un modelo de computadora del estómago por medio de la dinámica de fluidos computacional.

Las matemáticas en que se basa el modelo computacional se derivan de las leyes de la mecánica de fluidos. El modelo es una manera de extender las mediciones de la IRM de la configuración geométrica del estómago cambiante con el tiempo a los movimientos del líquido adentro. Se considera que los modelos de computadora no describen la complejidad total de la fisiología gástrica, aunque tienen la gran ventaja de permitir la variación sistemática controlada de parámetros, de modo que las sensibilidades que no es posible medir de manera experimental, pueden estudiarse de manera computarizada. Con el estómago virtual se aplica un método numérico llamado algoritmo de "Boltzmann de retícula" que es muy adecuado para flujo de fluido en configuraciones geométricas complejas, y las condiciones de frontera se obtienen de datos de la IRM. En la figura 15-86 se predicen los movimientos, rotura y mezclado de tabletas de 1 cm de fármaco de liberación prolongada en el estómago. En este experimento numérico la tableta de fármaco es más densa que la comida sumamente viscosa del entorno. Se predice que las ondas peristálticas antrales generan remolinos recirculantes y chorros retropulsores dentro del estómago, que a su vez generan altos esfuerzos de corte que desgastan la superficie de la tableta y liberan el fármaco. Luego, el fármaco se mezcla por los mismos movimientos del líquido que liberan el fármaco. Se encuentra que los movimientos de líquido gástrico y el mezclado dependen de los detalles de las variaciones con el tiempo en la configuración geométrica del estómago y el píloro.

Referencias

Indireshkumar, K., Brasseur, J. G., Faas, H., Hebbard, G. S., Kunz, P., Dent, J., Boesinger, P., Feinle, C., Fried, M., Li, M. y Schwizer, W., "Relative Contribution of 'Pressure Pump' and 'Peristaltic Pump' to Slowed Gastric Emptying", *Amer J Physiol*, 278, pp. G604-616, 2000.

Pal, A., Indireshkumar, K., Schwizer, W., Abrahamsson, B., Fried, M., Brasseur, J. G., "2004 Gastric Flow and Mixing Studied Using Computer Simulation", In Press, *Proc. Royal Soc. London, Biological Sciences*, octubre.



FIGURA 15-85
Imagen de resonancia magnética del estómago humano *in vivo* en un instante, en la que pueden verse las ondas de contracción peristáltica (es decir, en propagación) en la zona final del estómago (el antro). El píloro es un esfínter, o una válvula, que permite el paso de nutrientes al duodeno (intestino delgado).

Elaborado por Anupam Pal y James Brasseur. Reproducido con autorización.

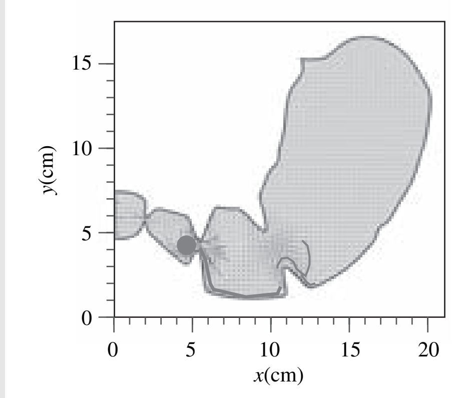


FIGURA 15-86
Simulación mediante computadora de los movimientos de los líquidos dentro del estómago (vectores de velocidad) debido a las ondas de contracción peristáltica del antro (Fig. 15-85) y la diseminación de un fármaco (líneas grises) contenido en una gragea de liberación prolongada (círculo).

Elaborado por Anupam Pal y James. Reproducido con autorización.

RESUMEN

Aunque no tan ubicuos como las hojas de cálculo ni tan fáciles de usar como los programas de solución numérica, los paquetes de dinámica de fluidos computacional se mejoran de manera continua y son cada vez más comunes. Después que los científicos especializados escribieron sus propios paquetes y emplearon supercomputadoras, surgieron los paquetes de la DFC comerciales, con numerosas características e interfaces amigables con el usuario, los cuales pueden obtenerse ahora para computadoras personales a un costo razonable y están disponibles para ingenieros de todas las disciplinas. Como se mostró en este capítulo, sin embargo, una malla deficiente, la elección inadecuada de flujo laminar contra turbulento, condiciones de frontera inapropiadas o cualquier cantidad de otras equivocaciones pueden conducir a soluciones de la DFC físicamente incorrectas, aun cuando el resultado gráfico a color siempre parezca bonito. Por lo tanto, es imperativo que los usuarios de la DFC tengan conocimientos de mecánica de fluidos para evitar respuestas erróneas a partir de una simulación de la DFC. Además, deben hacerse comparaciones apropiadas con los datos experimentales siempre que sea posible para validar las predicciones de la DFC. Con estas precauciones en la mente, la DFC tiene un potencial enorme para diversas aplicaciones relacionadas con los flujos de fluidos.

Se muestran ejemplos de soluciones de la DFC para flujo laminar y turbulento. Para flujo laminar incompresible, la dinámica de fluidos computacional realiza un trabajo excelente, inclusive para flujos no estacionarios con separación de la superficie. De hecho, las soluciones de la DFC son “exactas” en la medida en que estén limitadas por la resolución de malla y las condiciones de frontera. Por desgracia, muchos flujos de interés práctico en ingeniería son *turbulentos*, no laminares. La *simulación numérica directa* (SND, DNS por sus siglas en inglés) tiene grandes posibilidades para la simulación de campos de flujo turbulento complejo, y los algoritmos para resolver las ecuaciones de movimiento (las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad tridimensionales) están establecidas de manera adecuada. Sin embargo, la resolución de todas las escalas finas de un flujo turbulento, complejo, con número de Reynolds alto, implican usar computadoras que son mucho más rápidas que las máquinas más rápidas actuales. Pasarán décadas antes que las computadoras avancen hasta el punto donde la SND sea útil para problemas de ingeniería prácticos. Mientras tanto, lo mejor que puede hacerse es emplear *modelos de turbulencia*, que son ecuaciones de transporte semiempíricas que modelan (en lugar de resolver) el mezclado y difusión que se incrementan a causa de remolinos turbulentos. Cuando se corren paquetes de la DFC que utilizan modelos de turbulencia, debe tenerse cuidado de que se tenga una malla suficientemente fina y que las condiciones de frontera se apliquen de manera apropiada. Sin embargo, a fin de cuentas, sin importar qué tan fina sea la malla, o qué tan válidas sean las condiciones de frontera, *los resultados de la DFC son sólo tan buenos como el modelo de turbulencia empleado*. No obstante, aunque ningún modelo de turbulencia es *universal* (aplicable a *todos* los flujos turbulentos), se obtiene un desempeño razonable para numerosas simulaciones de flujo prácticas.

También se demuestra en este capítulo que la DFC puede producir resultados útiles para flujos con transferencia de calor, flujos compresibles y flujos en canal abierto. En todos los casos, sin embargo, los usuarios de la DFC deben tener cuidado de elegir un dominio computacional apropiado, aplicar condiciones de frontera adecuadas, generar una correcta malla y usar los modelos y aproximaciones apropiados. A medida que las computadoras continúen volviéndose más rápidas y más poderosas, la DFC tendrá un papel siempre creciente en el diseño y análisis de sistemas de ingeniería complejos.

Sólo se ha arañado la superficie de la dinámica de fluidos computacional en este breve capítulo. Con el fin de ser hábil y competente en la DFC, deben tomarse cursos avanzados de estudio en métodos numéricos, mecánica de fluidos y transferencia de calor. Se espera que, aunque no sea para otra cosa, este capítulo haya animado al lector a profundizar en el estudio de este tema interesante.

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. C-J. Chen y S-Y. Jaw, *Fundamentals of Turbulence Modeling*, Washington, DC: Taylor & Francis, 1998.

2. J. M. Cimbala, H. Nagib y A. Roshko, “Large Structure in the Far Wakes of Two-Dimensional Bluff Bodies”, *Fluid Mech.*, 190, pp. 265-298, 1988.

3. S. Schreier. *Compressible Flow*, Nueva York: Wiley Interscience, cap. 6 (Transonic Flow), pp. 285-293, 1982.

4. J. C. Tannehill, D. A. Anderson y R. H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2a. ed., Washington, DC: Taylor & Francis, 1997.

5. H. Tennekes y J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, Cambridge, MA: The MIT Press, 1972.

6. D. J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics*, Nueva York: Van Nostrand Reinhold Co., 1977.

7. M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.

8. F. M. White, *Viscous Fluid Flow*, 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1991.

9. D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, 2a, ed., La Cañada, CA: DCW Industries, Inc., 1998.

10. C. H. K. Williamson, “Oblique and Parallel Modes of Vortex Shedding in the Wake of a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers”, *J. Fluid Mech.*, 206, pp. 579-627, 1989.

PROBLEMAS*

Fundamentos, generación de malla y condiciones de frontera

15-1C Un paquete de la DFC se usa para resolver un flujo laminar, incompresible, bidimensional (*x* y *y*), sin superficies libres. El fluido es newtoniano. Se emplean condiciones de frontera apropiadas. Haga una lista de las variables (incógnitas) del problema y enumere las ecuaciones correspondientes que se resolverán con computadora.

15-2C Escriba una definición breve (unas cuantas oraciones) y la descripción de cada uno de los siguientes conceptos y proporcione un ejemplo o ejemplos si resulta útil: *a*) dominio computacional, *b*) malla, *c*) ecuación de transporte, *d*) ecuaciones acopladas.

15-3C ¿Cuál es la diferencia entre un *nodo* y un *intervalo* y cómo se relacionan con las *celdas*? En la figura P15-3C, ¿cuántos nodos y cuántos intervalos están en cada lado?

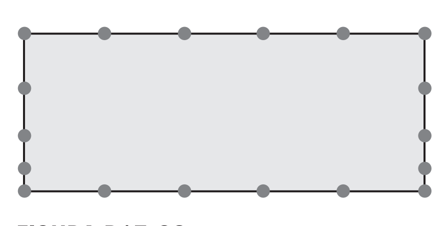


FIGURA P15-3C

15-4C Para el dominio computacional de dos dimensiones de la figura P15-3C, con la distribución de nodos dada, bosqueje una malla estructurada simple con celdas de cuatro lados y dibuje una no estructurada simple con celdas de tres lados. ¿Cuántas celdas hay en cada una? Explíquelo.

15-5C Resuma los ocho pasos necesarios en un análisis de la DFC común de un campo de flujo laminar, estacionario.

15-6C Suponga que emplea la DFC para simular el flujo por un ducto en el que hay un cilindro circular, como en la figura P15-6C. El ducto es largo, pero para ahorrar recursos de computadora se elige un dominio computacional en la cercanía del cilindro solamente. Explique por qué el lado corriente abajo del dominio computacional debe estar más allá del cilindro que el lado corriente arriba.

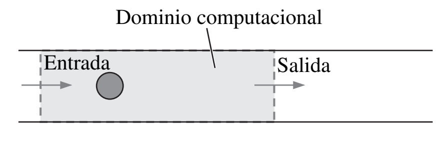


FIGURA P15-6C

15-7C Escriba una explicación breve (unos cuantos enunciados) acerca del significado de cada uno de los siguientes conceptos respecto a una solución de la DFC iterativa: *a*) condiciones iniciales, *b*) residuo, *c*) iteración, *d*) posprocesamiento.

15-8C Explique de manera breve cómo los paquetes de la DFC emplean cada uno de los siguientes conceptos para acelerar el proceso de iteración: *a*) multimalla y *b*) tiempo artificial.

15-9C De las condiciones de frontera analizadas en este capítulo, enliste las condiciones de frontera que pueden aplicarse al lado derecho del dominio computacional bidimensional que se bosqueja en la figura P15-9C. ¿Por qué no pueden aplicarse las *otras* condiciones de frontera a este lado?

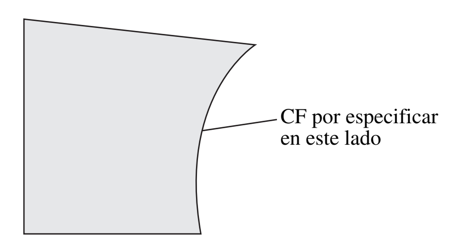


FIGURA P15-9C

15-10C ¿Cuál es el método estándar para probar la resolución de malla adecuada cuando se usa la DFC?

15-11C ¿Cuál es la diferencia entre una condición de frontera en la entrada donde se especifica la presión y una condición de frontera en la entrada donde se especifica la velocidad? Explique por qué no se puede especificar tanto la presión como la velocidad como una condición de frontera.

15-12C Se emplea un paquete de la DFC del flujo incompresible para simular el flujo de aire por un canal rectangular bidimensional (Fig. P15-12C). El dominio computacional consta de cuatro bloques, como se indica. El flujo entra al bloque 4 desde la derecha superior y sale del bloque 1 a la izquierda como se muestra. Designe las condiciones de frontera que deben aplicarse a cada lado de cada bloque de este dominio computacional.

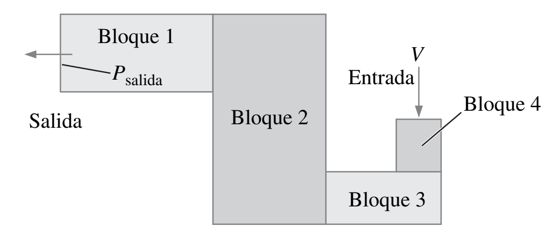


FIGURA P15-12C

*Los problemas designados por una "C" son preguntas de concepto y se alienta a los estudiantes a dar respuesta a todas. Los problemas designados por una "I" están en unidades inglesas y los usuarios del SI pueden ignorarlos.

15-13C Considere el problema 15-12C de nuevo, excepto que permita que la condición de frontera en el lado común entre los bloques 1 y 2 sea la de un *ventilador* con un aumento de presión especificado de derecha a izquierda. Suponga que se corre un paquete de la DFC de flujo incompresible para ambos casos (con y sin el ventilador). Con todo lo demás igual, ¿aumentará o disminuirá la presión en la entrada? Explíquelo.

15-14C Enliste las seis condiciones de frontera que se emplean con la DFC para resolver problemas de flujo de fluidos incompresibles. Para cada una, provea una descripción breve y dé un ejemplo de cómo se emplea esa condición de frontera.

15-15 Se usa un paquete de la DFC para simular el flujo sobre un perfil aerodinámico a un ángulo de ataque. En la figura P15-15 se ilustra una porción del dominio computacional cerca del perfil aerodinámico (el dominio computacional se extiende más allá de la región que se describe por la línea discontinua). Bosqueje una malla estructurada de celdas amplias de cuatro lados y dibuje una malla no estructurada de celdas amplias de tres lados en la región sombreada. Cerciórese de agrupar las celdas donde sea apropiado. Explique las ventajas y desventajas de cada tipo de malla.

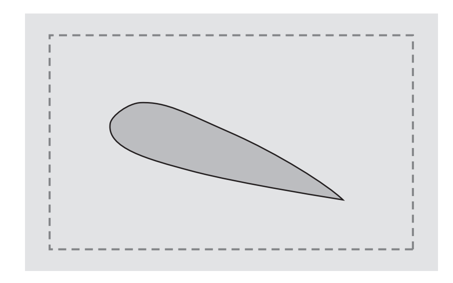


FIGURA P15-15

15-16 Para el perfil aerodinámico del problema 15-15, bosqueje una malla híbrida de celdas amplias y explique las ventajas de esa clase de malla.

15-17 Se utiliza un paquete de la DFC de flujo incompresible para simular el flujo de agua por un canal rectangular bidimensional en el que hay un cilindro circular (Fig. P15-17). Se genera una solución de flujo turbulento promediada en el tiempo mediante un modelo de turbulencia. Se supone simetría superior e inferior respecto al cilindro. El flujo entra desde la izquierda y sale a la derecha como se muestra. Se conoce la velocidad de entrada V, y también se conoce la presión de salida P_{salida}. Genere los bloques para una malla estructurada con bloques de cuatro lados y bosqueje una malla de celdas amplias de cuatro lados; además, cerciórese de agrupar las celdas cerca de las paredes. Asimismo, tenga cuidado con el fin de evitar celdas muy sesgadas. Indique las condiciones de frontera que deben aplicarse a cada lado de cada bloque del dominio computacional. (Sugerencia: de seis a siete bloques son suficientes.)



FIGURA P15-17

15-18 Se emplea un paquete de la DFC de flujo incompresible para simular el flujo de gasolina por un canal rectangular bidimensional en el que hay una cámara circular grande de asentamiento (Fig. P15-18). El flujo entra por la izquierda y sale a la derecha como se muestra. Se genera una solución de flujo turbulento promediada en el tiempo mediante un modelo de turbulencia. Se supone simetría arriba y abajo. Se conoce la velocidad de entrada V, y también se conoce la presión de salida P_{salida}. Genere los bloques para una malla estructurada con bloques de cuatro lados, y bosqueje una de celdas amplias de cuatro lados; además, cerciórese de agrupar las celdas cerca de las paredes. Asimismo, tenga cuidado de evitar las celdas muy sesgadas. Especifique las condiciones de frontera que deben aplicarse a cada lado de cada bloque del dominio computacional.

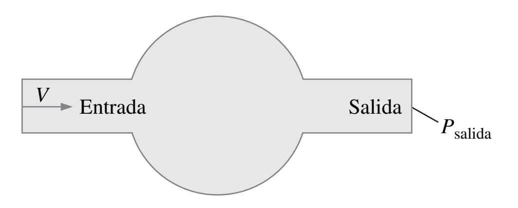


FIGURA P15-18

15-19 Vuelva a trazar la malla de bloques múltiples estructurada de la figura 15-12*b* para el caso en que el paquete de la DFC puede manejar sólo *bloques elementales*. Renumere todos los bloques e indique cuántos intervalos i y j están contenidos en cada bloque. ¿Cuántos bloques elementales se tiene al final? Sume todas las celdas y compruebe que el número total de celdas no cambió.

15-20 Suponga que su paquete de la DFC puede manejar bloques *no elementales*. Combine tantos bloques de la figura 15-12*b* como pueda. La única restricción es que en cualquier bloque, el número de intervalos i y el número de intervalos j deben ser constantes. Muestre que puede crearse una malla estructurada con sólo *tres* bloques no elementales. Renumere todos los bloques e indique cuántos intervalos i y j están contenidos en cada bloque. Sume todas las celdas y compruebe que el número total de ellas no cambió.

15-21 Se diseña un nuevo intercambiador de calor de varias etapas con la finalidad de mezclar el fluido corriente abajo lo más completo posible en cada etapa. Anita presenta un diseño cuya sección transversal de una etapa se bosqueja en la figura P15-21. La configuración geométrica se extiende de manera periódica arriba y abajo más allá de la región que se muestra aquí. Ella utiliza varias docenas de tubos rectangulares inclinados a un ángulo grande para cerciorarse que el flujo se separe y se mezcle en las estelas. El desempeño de esta configuración se probará mediante simulaciones de la DFC bidimensionales, pro-

mediadas en el tiempo, con un modelo de turbulencia, y los resultados se compararán con los de otras configuraciones propuestas. Bosqueje el dominio computacional más simple que pueda usarse para simular este flujo. Etiquete e indique las condiciones de frontera en su diagrama. Explíquelo.

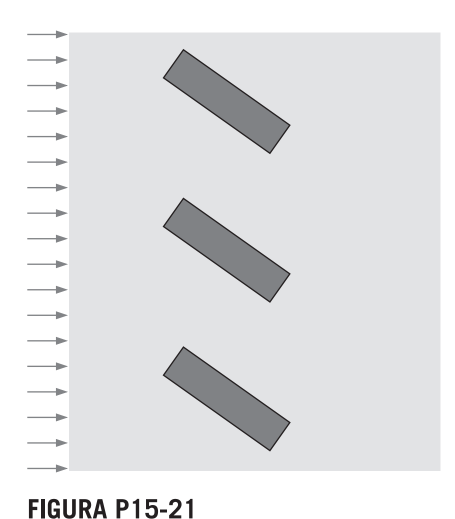


FIGURA P15-21

15-22 Bosqueje una malla de bloques múltiples estructurada de celdas amplias de cuatro lados con cuatro bloques elementales de cuatro lados para el dominio computacional del problema 15-21.

15-23 Anita corre un paquete de la DFC con el dominio computacional y la malla desarrollados en los problemas 15-21 y 15-22. Por desgracia, el paquete de la DFC tiene problemas para converger y Anita detecta que hay un *flujo invertido* en la salida (lado derecho lejano del dominio computacional). Explique por qué hay flujo invertido, y explique lo que Anita debe hacer para corregir el problema.

15-24 Como un seguimiento para el diseño del intercambiador de calor del problema 15-21, suponga que el diseño de Anita es elegido con base en los resultados de un análisis preliminar de la DFC de una sola etapa. Ahora se le pide simular *dos* etapas del intercambiador de calor. La segunda fila de tubos rectangulares se distribuye e inclina de manera opuesta a la del primer renglón para promover el mezclado (Fig. P15-24). La configuración geométrica se extiende de manera periódica arriba y abajo más allá de la región que se muestra aquí. Bosqueje un dominio computacional que pueda usase para simular este flujo. Marque e indique las condiciones de frontera en su diagrama. Explíquelo.

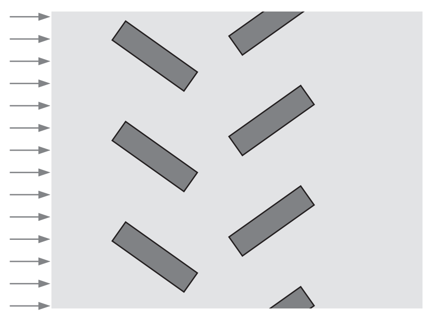


FIGURA P15-24

15-25 Bosqueje una malla de bloques múltiples estructurada con bloques elementales de cuatro lados para el dominio computacional del problema 15-24. Cada bloque tendrá celdas estructuradas de cuatro lados, pero no se tiene que bosquejar la malla, sólo la configuración geométrica de los bloques. Intente hacer todos los bloques lo más rectangulares posible para evitar celdas muy sesgadas en las esquinas. Suponga que el paquete de la DFC exige que la distribución de nodos en pares periódicos de lados sea idéntica (los dos lados de un par periódico están "enlazados" en el proceso de generación de la malla). Suponga también que el paquete de la DFC no permite que los lados de un bloque se dividan para la aplicación de condiciones de frontera.

Problems de FlowLab*

15-26 En este ejercicio se examina qué tan lejos necesita estar la frontera del dominio computacional para simular flujo libre alrededor de un cuerpo. Por sencillez, se elige un caso bidimensional, flujo a velocidad V sobre un bloque rectangular cuya longitud L es 1.5 veces su altura D (Fig. P15-26*a*). Se supone que el flujo es simétrico respecto a la línea central (eje x), de modo que se necesita modelar sólo la mitad superior del flujo. Se prepara un dominio computacional semicircular para la solución de la DFC, como se bosqueja en la figura P15-26*b*. Las condiciones de frontera se muestran en los lados. Se ejecutan varios valores del radio del lado externo R ($5 < R/D < 500$) para determinar cuándo la frontera de campo lejano está lo suficientemente alejada. Utilice la aplicación *Block _domain* de FlowLab.

a) Calcule el número de Reynolds con base en la altura de bloque D. ¿Cuál es el valor medido experimentalmente del coeficiente de arrastre para este bloque bidimensional a este número de Reynolds (Cap. 11)?

b) Genere las soluciones de la DFC para varios valores de R/D. Para cada caso calcule y registre el coeficiente de arrastre C_D. Grafique C_D como función de R/D. ¿A qué valor de R/D se vuelve C_D independiente de la extensión computacional a tres dígitos significativos de precisión? Exprese un valor final de C_D y explique sus resultados.

* Estos problemas requieren del software de la DFC con el programa de FlowLab, que se provee con este libro de texto por FLUENT, Inc. Las plantillas para los problemas que la requieren están disponibles en el sitio de Internet del libro. En cada caso, se da un breve informe del problema mientras que se suman detalles acerca de geometría, condiciones de frontera y parámetros computarizados con la plantilla.

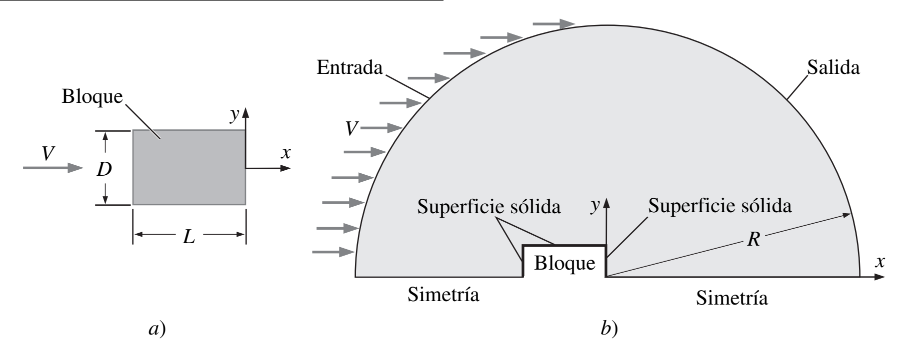


FIGURA P15-26

c) Explique algunas razones para la discrepancia entre el valor experimental de C_D y el valor obtenido aquí mediante la DFC.

d) Trace las líneas de corriente para dos casos: $R/D = 5$ y 500. Compare y explíquelo.

15-27 Con la configuración geométrica del problema 15-26, y el caso con $R/D = 500$, el objetivo de este ejercicio es comprobar la independencia de la malla. Utilice la aplicación *Block_mesh* de FlowLab. Introduzca varios valores de resolución de malla, y tabule el coeficiente de arrastre C_D como una función del número de celdas. ¿Se ha logrado la independencia de malla? Exprese un valor final de C_D hasta tres cifras significativas de precisión. El valor final del coeficiente de arrastre ¿concuerda mejor con el de este experimento? Explíquelo.

15-28 En los problemas 15-26 a 15-27 se usó aire como el fluido en los cálculos. En este ejercicio se repite el cálculo del coeficiente de arrastre, excepto que se emplean *fluidos diferentes*. Se ajusta la velocidad de entrada de manera apropiada de modo que los cálculos sean siempre al mismo número de Reynolds. Utilice la aplicación *Block_fluid* de FlowLab. Compare con el valor de C_D para los tres casos (aire, agua y queroseno) y explíquelo.

15-29 Experimentos en bloques rectangulares bidimensionales en un flujo libre de fluido incompresible revelan que el coeficiente de arrastre es independiente del número de Reynolds para Re mayor que cerca de 10^4. En este ejercicio se examina si los cálculos de la DFC pueden predecir la misma independencia de C_D en Re. Utilice la aplicación *Block_Reynolds* de FlowLab. Calcule y registre C_D para varios valores de Re. Explíquelo.

15-30 En los problemas 15-26 y 15-29, se usa el modelo de turbulencia k-ε. El objetivo de este ejercicio es ver qué tan sensible es el coeficiente de arrastre para elegir el modelo de turbulencia y ver si un modelo de turbulencia distinto produce mejor concordancia con el experimento. Utilice la aplicación *Block_turbulence_model* de FlowLab y comience la plantilla. Realice la simulación con los modelos de turbulencia disponibles. Para cada caso, registre C_D. ¿Cuál da la mejor concordancia con el experimento? Explíquelo.

15-31 Los datos experimentales del coeficiente de arrastre están disponibles para bloques bidimensionales de varios tipos de flujo externo. En este ejercicio, se usa la DFC para comparar el coeficiente de arrastre de bloques rectangulares con L/D que varía de 0.1 a 3.0 (Fig. P15-31). El dominio computacional es un semicírculo similar al que se bosqueja en la figura P15-26*b*; se supone flujo turbulento incompresible, estacionario, con simetría respecto al eje x. Utilice la aplicación *Block_lenght* de FlowLab.

a) Realice la simulación de la DFC para varios valores de L/D entre 0.1 y 3.0. Registre el coeficiente de arrastre para cada caso y grafique C_D como una función de L/D. Compare con los datos experimentales en la misma gráfica. Explíquelo.

b) Para cada caso, grafique las líneas de corriente cerca del bloque y en su región de estela. Use estas líneas de corriente para explicar la tendencia en la gráfica de C_D en función de L/D.

c) Explique posibles razones para la discrepancia entre los cálculos de la DFC y los datos experimentales y sugiera un remedio.

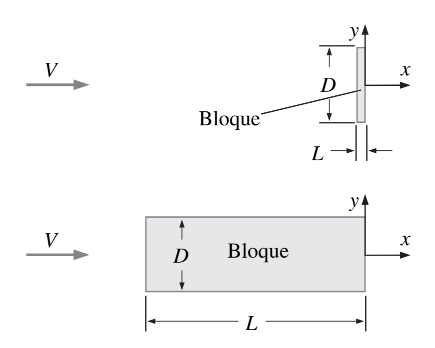


FIGURA P15-31

15-32 Repita el problema 15-26 para el caso de flujo *axisimétrico* sobre un cilindro truncado (Fig. P15-32), con la plan-

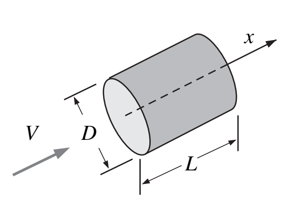
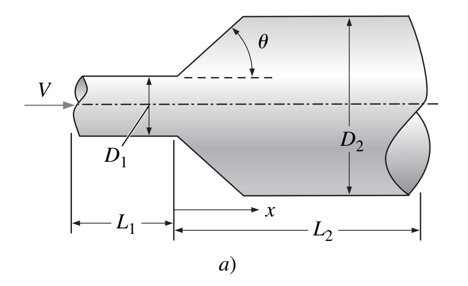


FIGURA P15-32



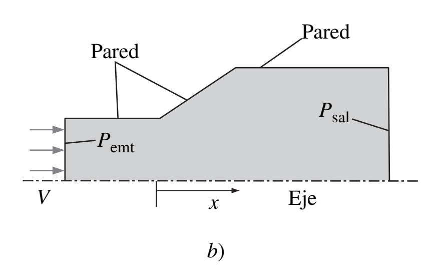


FIGURA P15-33

tilla *Block_axisymetric*. Las mallas y los parámetros son los mismos que los del problema 15-26, excepto que la condición de frontera de simetría se cambia al "eje", y el programa de solución numérica para el flujo es axisimétrico respecto al eje x. Además de las preguntas listadas en el problema 15-26, compare los casos bidimensional y axisimétrico. ¿Cuál demanda una extensión mayor de la frontera de campo lejano? ¿Cuál tiene mejor concordancia con el experimento? Explíquelo. (Nota: el área de referencia para C_D en el caso axisimétrico es el área frontal $A = \pi D^2/4$.)

15-33 El aire fluye por un difusor cónico en un túnel de viento axisimétrico (Fig. P15-33*a*, el dibujo no está a escala). θ es el semiángulo del difusor (el ángulo total del difusor es igual a 2θ). Los diámetros de entrada y salida son $D_1 = 0.50$ m y $D_2 =$ 1.0 m, respectivamente, y $\theta = 20°$. La velocidad de entrada es casi uniforme a $V = 10.0$ m/s. La distancia axial corriente arriba del difusor es $L_1 = 1.50$ m, y la distancia axial desde el comienzo del difusor hasta la salida es $L_2 = 8.00$ m. Se prepara un dominio computacional para una solución de DFC, como se bosqueja en la figura P15-33*b*. Puesto que el flujo es axisimétrico y estacionario en promedio, se modela sólo una porción bidimensional como se muestra, con el lado inferior del dominio especificado como un eje. El objetivo de este ejercicio es probar la independencia de la malla. Utilice la aplicación *Diffuser_mesh* de FlowLab.

a) Genere las soluciones de la DFC para varias resoluciones de malla. Grafique líneas de corriente en la sección del difusor para cada caso. ¿A qué resolución de malla el patrón de líneas de corriente al parecer es independiente de la malla? Describa el campo de flujo para cada caso y explíquelo.

b) Para cada caso, calcule y registre la diferencia de presión $\Delta P = P_{ent} - P_{sal}$. ¿A qué resolución de la malla es independiente ΔP de la malla (a tres dígitos significativos de precisión)? Grafique ΔP como una función del número de celdas. Explique sus resultados.

15-34 Repita el problema 15-33 para el caso de resolución más fina, pero la condición de frontera de "salida de presión" cambia a una condición de frontera de "flujo libre de salida", con la plantilla de FlowLab *Diffuser_outflow*. Registre ΔP y compare con el resultado del problema 15-33 para la misma resolución de malla. Asimismo, compare la distribución de presión en la salida para el caso de la condición de frontera de "salida de presión" y el caso de la condición de frontera de "flujo libre de salida". Explíquelo.

15-35 Bárbara diseña un difusor cónico para el túnel de viento axisimétrico del problema 15-33. Ella necesita alcanzar por lo menos 40 Pa de recuperación de presión por el difusor, al mismo tiempo que se mantiene la longitud del difusor tan pequeña como sea posible. Bárbara decide usar la DFC para comparar el desempeño de difusores de varios semiángulos ($5° \leq \theta \leq 90°$) (ver la figura P15-33 para la definición de θ y otros parámetros del problema). En todos los casos, el diámetro se duplica para el difusor, los diámetros de entrada y salida son $D_1 = 0.50$ m y $D_2 = 1.0$ m, respectivamente. La velocidad de entrada es casi uniforme a $V = 10.0$ m/s. La distancia axial corriente arriba del difusor es $L_1 = 1.50$ m, y la distancia axial desde el comienzo del difusor hasta la salida es $L_2 = 8.00$ m (la longitud total del dominio computacional es 9.50 m en todos los casos).

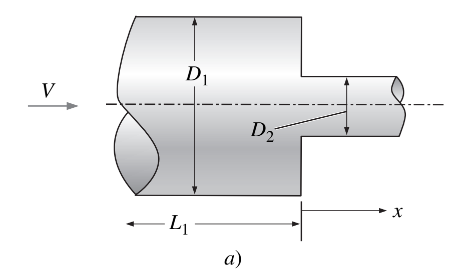
Utilice la aplicación *Diffuser_angle* de FlowLab. Además de las condiciones de frontera en el eje y las paredes que se indican en la figura P15-33, la entrada se especifica como una entrada de velocidad y la salida como una salida de presión con presión manométrica $P_{salida} = 0$ para todos los casos. El fluido es aire en condiciones predeterminadas y se supone flujo turbulento.

a) Genere las soluciones de la DFC para el semiángulo $\theta = 5$, 7.5, 10, 12.5, 15, 17.5, 20, 25, 30, 45, 60 y 90°. Trace las líneas de corriente para cada caso. Describa cómo cambia el campo de flujo con el semiángulo del difusor, con atención especial a la separación de flujo en la pared del difusor. ¿Qué tan pequeño debe ser el valor de θ para evitar separación de flujo?

(*b*) Para cada caso, calcule y registre $\Delta P = P_{entrada} - P_{salida}$. Grafique ΔP como una función de θ y explique sus resultados. ¿Cuál es el valor máximo de θ con el que se alcanzan los objetivos de diseño de Bárbara?

15-36 Considere el difusor del problema 15-35 con $\theta = 90°$ (expansión repentina). En este ejercicio se prueba si la malla es lo suficientemente fina al realizar una comprobación de independencia de malla. Utilice la aplicación *Expansion_mesh* de FlowLab. Haga correr el paquete de la DFC para varios niveles de exactitud de la malla. Calcule y registre ΔP para cada caso. Explíquelo.

15-37 Fluye agua por una contracción repentina en un pequeño tubo redondo (Fig. P15-37*a*). Los diámetros del tubo son $D_1 = 8.0$ mm y $D_2 = 2.0$ mm. La velocidad de entrada es casi uniforme a $V = 0.050$ m/s y el flujo es laminar. Shane quiere predecir la diferencia de presión desde la entrada ($x =$



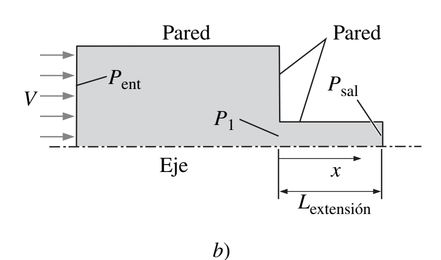


FIGURA P15-37

$-L_1$) hasta la ubicación axial de la contracción repentina ($x = 0$). Él prepara el dominio computacional que se bosqueja en la figura P15-37*b*. Puesto que el flujo es axisimétrico y estacionario, Shane modela sólo un corte, como se muestra, con el lado inferior del dominio especificado como un eje. Además de las condiciones de frontera indicadas en la figura P15-37*b*, la entrada se especifica como una salida de presión con $P_{salida} = 0$ manométrica. Lo que Shane *no* sabe es qué tan lejos necesita ampliar el dominio corriente abajo de la contracción para que el campo de flujo sea simulado de manera exacta corriente abajo de la contracción (él no tiene interés en el flujo corriente abajo de la contracción). En otras palabras, no sabe qué tan larga hacer $L_{extensión}$. Utilice la aplicación *Contraction _domain* de FlowLab.

a) Genere soluciones para $L_{extensión}/D_2 = 0.25$, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 2.0, 2.5 y 3.0. ¿Qué tan grande debe ser $L_{extensión}/D_2$ para evitar el flujo invertido en la salida de presión? Explíquelo. Grafique las líneas de corriente cerca de la contracción repentina para ayudar a explicar sus resultados.

b) Para cada caso, registre las presiones manométricas $P_{entrada}$ y P_1, y calcule $\Delta P = P_{entrada} - P_1$. ¿Qué tan grade debe ser $L_{extensión}/D_2$ para que ΔP se vuelva independiente de $L_{extensión}$? (hasta tres dígitos significativos de precisión).

c) Grafique la presión manométrica de entrada $P_{entrada}$ como una función de $L_{extensión}/D_2$. Analice y explique la tendencia. Con base en sus resultados tomados en conjunto, ¿cuál valor de $L_{extensión}/D_2$ recomendaría a Shane?

15-38 Considere la contracción repentina del problema 15-37 (Fig. P15-37). Suponga que Shane hiciera caso omiso de la extensión ($L_{ampliada}/D_2 = 0$). Utilice la aplicación *Contraction_zerolength* de FlowLab. Continúe con las iteraciones hasta lograr la convergencia. ¿Hay flujo invertido? Explíquelo. Grafique las líneas de corriente cerca de la salida y compárelas con las del problema 15-37. Explíquelo. Calcule $\Delta P = P_{entrada} - P_{salida}$ y calcule el porcentaje de error en ΔP en estas condiciones, en comparación con el valor de convergencia del problema 15-37. Explíquelo.

15-39 En este ejercicio se aplican diferentes contrapresiones a la contracción repentina del problema 15-37 (Fig. P15-37), para el caso con $L_{extensión}/D_2 = 2.0$. Utilice la aplicación *Contraction_pressure* de FlowLab. Establezca la condición de frontera en la salida a $P_{salida} = -50\ 000$ Pa manométrica (cerca de 1/2 atm abajo de la presión atmosférica). Registre $P_{entrada}$ y P_1, y calcule $\Delta P = P_{entrada} - P_1$. Repita para $P_{salida} = 0$ manométrica y $P_{salida} = 50\ 000$ Pa manométrica. Explique sus resultados.

15-40 Considere la contracción repentina del problema 15-37, pero esta vez con flujo *turbulento* en vez de laminar. Las dimensiones que se muestran en la figura P15-37 se modifican proporcionalmente por un factor de 100 en todas partes, de modo que $D_1 = 0.80$ m y $D_2 = 0.20$ m. La velocidad de entrada se incrementa también a $V = 1.0$ m/s. En la entrada se especifica una intensidad de turbulencia de 10 por ciento. La presión de salida se fija en cero de presión manométrica para todos los casos. Utilice la aplicación *Contraction_turbulent* de FlowLab.

a) Calcule los números de Reynolds del flujo por el tubo largo y el tubo pequeño para el problema 15-37 y también para este problema. Las suposiciones de flujo laminar o turbulento ¿son razonables para estos problemas?

b) Genere soluciones de la DFC para $L_{extensión}/D_2 = 0.25$, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5 y 2.0. ¿Qué tan grande debe ser $L_{extensión}/D_2$ para evitar flujo invertido a la presión de salida? Grafique líneas de corriente para el caso en el que $L_{extensión}/D_2 = 0.75$ y compare con las líneas de corriente correspondientes del problema 15-37 (flujo laminar). Explíquelo.

c) Para cada caso registre las presiones manométricas $P_{entrada}$ y P_1, y calcule $\Delta P = P_{entrada} - P_1$. ¿Qué tan grande debe ser $L_{extensión}/D_2$ con el fin de que ΔP se vuelva independiente de $L_{extensión}$? (hasta tres dígitos significativos de precisión).

15-41 Utilice la aplicación *Contracción_outflow* de FlowLab. Las condiciones son idénticas a las del problema 15.40 para el caso con $L_{extensión}/D_2 = 0.75$, pero con la condición de frontera de "salida de presión" cambiada a una condición de frontera de "flujo libre de salida". Registre $P_{entrada}$ y P_1, calcule $\Delta P = P_{entrada} - P_1$ y compare con el resultado del problema 15.40 para la misma configuración geométrica. Explíquelo.

15-42 Utilice la aplicación *Contraction_2d* de FlowLab. Esto es idéntico a la contracción repentina del problema 15-40, pero el flujo es *bidimensional* en lugar de axisimétrico (note que la condición de frontera de "eje" se reemplaza por "simetría"). Como antes, la presión de salida se establece en presión manométrica cero.

a) Genere las soluciones de la DFC para $L_{extensión}/D_2 = 0.25$, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 2.0, 3.0 y 4.0. ¿Qué tan grande debe

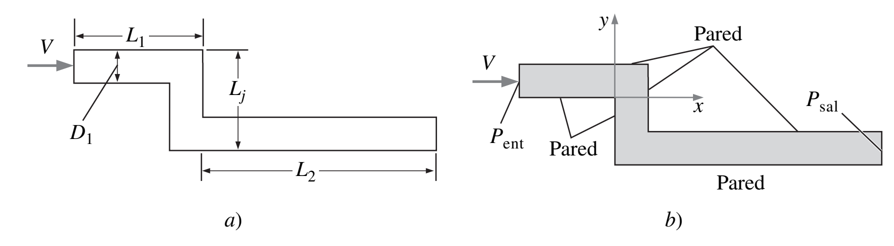


FIGURA P15-43

ser $L_{extensión}/D_2$ para evitar flujo invertido a la presión de salida? Grafique las líneas de corriente para el caso en el cual $L_{extensión}/D_2 = 0.75$ y compare con las líneas de corriente correspondientes del problema 15-40 (flujo axisimétrico). Explíquelo.

b) *b*) Para cada caso, registre las presiones manométricas $P_{entrada}$ y P_1, y calcule $\Delta P = P_{entrada} - P_1$. ¿Qué tan grande debe ser $L_{extensión}/D_2$ para evitar que ΔP se vuelva independiente de $L_{extensión}$? (a tres dígitos significativos de precisión).

15-43 Fluye por una "inflexión de forma de zig-zag" en un canal rectangular (Fig. P15-43*a*, no es a escala). La dimensión del canal es $D_1 = 1.0$ m en cualquier parte, y es suficientemente amplio (hacia la página de la figura P15-43) de modo que el flujo puede considerarse bidimensional. La velocidad de entrada es casi uniforme a $V = 1.0$ m/s. La distancia corriente arriba de la inflexión es $L_1 = 5.0$ m, la longitud total de la inflexión es $L_j = 3.0$ m y la distancia del extremo de la inflexión a la salida es $L_2 = 10.0$ m. Se prepara un dominio computacional para una solución de la DFC, como se bosqueja en la figura P15-43*b*. Además de las condiciones de frontera de pared sólida marcadas en la figura P15-43*b*, la entrada se especifica como una entrada de velocidad y la salida se especifica como una salida de presión con $P_{salida} = 0$ de presión manométrica. El fluido es aire en condiciones predeterminadas y se supone flujo turbulento. El objetivo de este ejercicio es probar la independencia de la malla en este campo de flujo. Utilice la aplicación *Jog_turbulent_mesh*.

a) Genere soluciones de la DFC para varios niveles de resolución de malla. Grafique las líneas de corriente en la región de la inflexión para cada caso. ¿A qué resolución de malla el patrón de líneas de corriente parece ser independiente de la malla? Explíquelo.

b) Para cada caso, calcule y registre $\Delta P = P_{entrada} - P_{salida}$. ¿A qué resolución de malla es ΔP independiente de la malla? (hasta tres cifras significativas de precisión). Grafique ΔP como una función del número de celdas. Explique sus resultados.

15-44 Repita el problema 15-43, pero para flujo laminar, al utilizar la aplicación *Jog_laminar_mesh* de FlowLab. La inflexión es idéntica en forma, pero a escala reducida por un factor de 1 000 en comparación con la del problema 15-43 (lo ancho del canal es $D_1 = 1.0$ mm en cualquier parte). La velocidad de entrada es casi uniforme a $V = 0.10$ m/s, y el fluido ahora es el agua a temperatura ambiente. Explique sus resultados.

15-45 Repita el problema 15-44, pero para flujo laminar a un número de Reynolds mayor. Utilice la aplicación FlowLab *Jog_high_Re*. Todo es idéntico al problema 15-44, excepto que la velocidad de entrada se incrementa de $V = 0.10$ a 1.0 m/s. Compare los resultados y los números de Reynolds para los dos casos y explíquelo.

15-46 Considere el flujo compresible de aire por una tobera axisimétrica convergente-divergente (Fig. P15-46), en la que se aplica la aproximación de flujo no viscoso (invíscido). Las condiciones de entrada están fijas ($P_{0,entrada} = 220$ kPa, $P_{entrada} = 210$ kPa, y $T_{0,entrada} = 300$ K), pero la contrapresión P_b puede modificarse. Utilice la aplicación *Nozzle_axisymmetric* de FlowLab. Realice varios casos, con contrapresión que va de 100 a 219 kPa. Para cada caso, calcule el flujo másico (kg/s) por la tobera y grafique $\dot{m}$ como una función de $P_b/P_{0,entrada}$. Explique sus resultados.

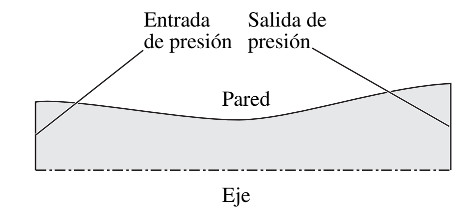


FIGURA P15-46

15-47 Utilice la aplicación *Nozzl_axisymmetric* de Flow Lab (problema 15-46). Para el caso en el que $P_b = 100$ kPa ($P_b/P_{0,entrada} = 0.455$), grafique la presión y el número de Mach para comprobar que una onda de choque normal está presente cerca de la salida del dominio computacional. Genere una gráfica del número de Mach promedio Ma y la relación de presiones promedio $P_b/P_{0,entrada}$ para varias secciones transversales del dominio, como en la figura 15-76. Señale la ubicación de la onda de choque normal y compare los resultados de la DFC con la teoría de flujo compresible unidimensional. Repita para $P_b = 215$ kPa ($P_b/P_{0,entrada} = 0.977$). Explíquelo.

15-48 Utilice la aplicación *Nozzle_2d* de FlowLab para resolver el problema 15-46, excepto que el flujo es bidimensional en vez de axisimétrico. Note que la condición de frontera de "eje" se cambia también a "simetría". Compare sus resultados y explique las similitudes y diferencias.

15-49 Considere el flujo sobre un modelo bidimensional simplificado de un automóvil (Fig. P15-49). Las condiciones

de entrada se fijan en $V = 60.0$ mi/h (26.8 m/s), con intensidad de turbulencia de 10 por ciento. Se emplea el modelo de turbulencia estándar k-ε. Utilice la aplicación *Automobile_drag* de FlowLab. Modifique la forma del extremo posterior del automóvil y registre el coeficiente de arrastre para cada forma. Grafique también los vectores de velocidad en la cercanía de la parte posterior para cada caso. Compare y explique. ¿Cuál caso da el menor coeficiente de arrastre? ¿Por qué?

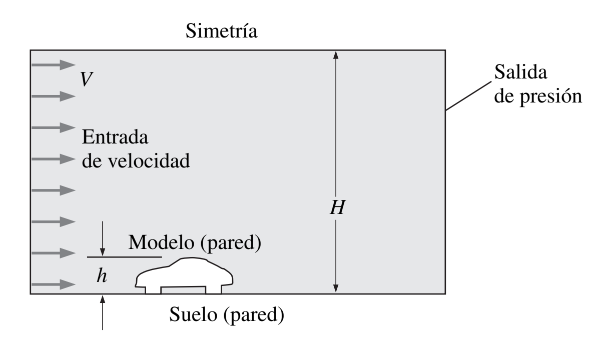


FIGURA P15-49

15-50 En este ejercicio se examina el efecto de la ubicación de la condición de frontera superior de simetría del problema 15-49. Utilice la aplicación *Automobile_domain* de FlowLab para varios valores de H/h (Fig. P15-49). Grafique el valor calculado de C_D como una función de H/h. ¿A qué valor de H/h se estabiliza el valor de C_D? En otras palabras, ¿qué tan lejos debe estar la frontera de simetría superior para tener influencia despreciable en el valor calculado del coeficiente de arrastre? Explíquelo.

15-51 Utilice la aplicación *Automobile_turbulence_model* de FlowLab. En este ejercicio se examina el efecto del modelo de turbulencia en el cálculo del arrastre sobre un modelo bidimensional simplificado de un automóvil (Fig. P15-49). Ejecute todos los modelos de turbulencia disponibles. Para cada caso, registre C_D. ¿Hay mucha variación en los valores calculados de C_D? ¿Cuál es correcto? Explíquelo.

15-52 Utilice la aplicación *Automobile_3d* de FlowLab. En este ejercicio se compara el coeficiente de arrastre para un automóvil totalmente tridimensional, cuyo valor se predice por la aproximación bidimensional del problema 15-49. Note que la solución toma largo tiempo para convergir y demanda una cantidad importante de recursos de computadora. Por lo tanto, la solución obtenida por convergencia ya está disponible en esta aplicación. Observe las trayectorias tridimensionales alrededor del automóvil cuando se cambia la perspectiva. Calcule el coeficiente de arrastre. ¿Es más grande o más pequeño que la predicción tridimensional? Explíquelo.

15-53 Utilice la aplicación *Pipe_laminar_developing* de FlowLab. En este ejercicio se estudia el flujo laminar en la región de entrada de una tubería redonda (Fig. P15-53, no es a escala). Como resultado de la simetría, el dominio computacional consta de una sección (región en gris en la figura P15-53). Calcule el flujo a varios valores del número de Reynolds Re, donde Re se basa en un diámetro de tubería y velocidad promedio por la tubería. Para cada caso, estudie los perfiles de velocidad en varios lugares axiales en la tubería y estime la longitud de entrada en cada caso. También grafique la distribución de presión a lo largo del eje de la tubería para cada caso. Estime la posición del extremo de la región de la entrada como el lugar donde la presión comienza a disminuir linealmente con x. Compare sus resultados con los obtenidos de los perfiles de velocidad, y también con la teoría, $L_e/D \cong 0.06\text{Re}$. Explíquelo.

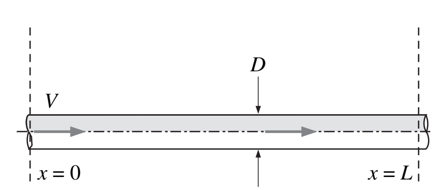


FIGURA P15-53

15-54 Utilice la aplicación *Pipe_turbulent_developing* de FlowLab. En este ejercicio se estudia flujo turbulento en la región de entrada de una tubería redonda (Fig. P15-53). Calcule el flujo a varios valores de número de Reynolds. Para cada caso, estudie los perfiles de velocidad en varios lugares a lo largo de la tubería y estime la longitud de entrada en cada caso. También grafique la distribución de presión a lo largo del eje de la tubería para cada caso. Estime la posición del extremo de la región de entrada como el lugar donde la presión comienza a disminuir linealmente con x. Compare sus resultados con los obtenidos de perfiles de velocidad, y también con la aproximación empírica, $L_e/D \cong 4.4\text{Re}^{1/6}$. Compare sus resultados con los del flujo laminar del problema 15-53. Explique el resultado de comparación. ¿Qué régimen de flujo, laminar o turbulento, tiene la longitud de entrada más larga? ¿Por qué?

15-55 Considere flujo laminar totalmente desarrollado por una tubería (Fig. P15-55). En este ejercicio no se tiene interés en los efectos de entrada. En cambio, se quiere analizar el flujo totalmente desarrollado corriente abajo de la región de entrada. Debido a la axisimetría, el dominio computacional consiste en una sección (región gris claro). Se establece que el perfil de velocidad en la frontera de entrada es el mismo que el de la frontera de salida, pero se impone una caída de presión de $x = 0$ a L para simular flujo totalmente desarrollado. Utilice la aplicación *Pipe_laminar_developed* de FlowLab. La aplicación está diseñada de tal modo que el perfil de velocidad de salida introduce el de la entrada. En otras palabras, la entrada y la salida son condiciones de frontera periódicas, pero con caída de presión impuesta. Corra varios casos correspondientes a varios valores

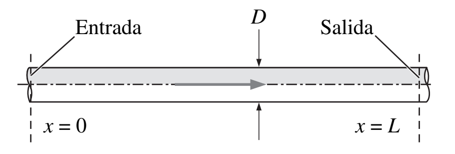


FIGURA P15-55

del número de Reynolds. Para cada caso examine los perfiles de velocidad para confirmar que el flujo está totalmente desarrollado. Calcule y grafique el factor de fricción de Darcy f como función de Re, y compare con el valor teórico para flujo laminar, $f = 64/\text{Re}$. Analice la concordancia entre la DFC y la teoría.

15-56 Repita el problema 15-55, excepto que esta vez para *flujo turbulento* totalmente desarrollado en una tubería lisa. Utilice la aplicación *Pipe_turbulent_developed* de FlowLab. Calcule y grafique el factor de fricción de Darcy f como una función de Re. Compare f con el valor predicho en el capítulo 8 para flujo turbulento totalmente desarrollado en una tubería lisa. Explíquelo.

15-57 En el problema 15-56 se considera flujo turbulento totalmente desarrollado en una tubería *lisa*. En este ejercicio se examina flujo turbulento totalmente desarrollado en una tubería *rugosa*. Utilice la aplicación *Pipe_turbulent_rough* de FlowLab. Ejecute varios casos, cada uno con un valor diferente de rugosidad de tubería normalizada, ε/D, pero al mismo número de Reynodls. Calcule y tabule el factor de fricción de Darcy f como función del parámetro de rugosidad normalizado ε/D. Compare f con el valor que se predice mediante la ecuación de Colebrook para flujo turbulento totalmente desarrollado en tuberías rugosas. Explíquelo.

15-58 Considere la capa límite laminar que se forma sobre una placa plana (Fig. P15-58). Utilice la aplicación *Plate_laminar* de FlowLab. La velocidad y longitud de entrada se eligen de modo que el número de Reynolds en el extremo de la placa, $\text{Re}_L = \rho VL/\mu$, sea aproximadamente 1×10^5, un valor cercano al valor crítico de transición hacia turbulencia. De sus resultados de la DFC, calcule lo siguiente, y compare con la teoría: *a*) la forma del perfil de velocidad de capa límite en $x = L$ (compare con el perfil de Blasius), *b*) el espesor de capa límite δ como una función de x y *c*) el coeficiente de arrastre de la placa.

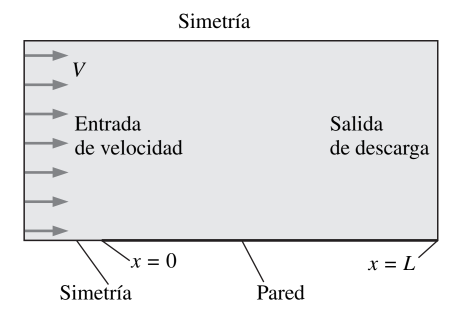


FIGURA P15-58

15-59 Repita el problema 15-58, pero para flujo *turbulento* sobre una placa plana lisa. Utilice la aplicación *Plate_turbulent* de FlowLab. El número de Reynolds en el extremo de la placa es casi 1×10^7 para este caso, más allá de la región de transición.

15-60 Utilice la aplicación *Plate_turbulence_models* de FlowLab. En este ejercicio, se examina el efecto del modelo de turbulencia en el cálculo del coeficiente de arrastre de una placa plana (Fig. P15-58). Corra cada uno de los modelos de turbulencia disponibles. Para cada caso, registre C_D. ¿Hay mucha variación en los valores calculados de C_D? ¿Cuál modelo de turbulencia produce el valor más correcto del coeficiente de arrastre? Explíquelo.

15-61 Considere el flujo laminar sobre una placa plana, lisa, caliente (Fig. P15-61). Utilice la aplicación *Plate_laminar_temperature* de FlowLab. La velocidad de entrada se ajusta de tal modo que el número de Reynolds para los casos del aire y el agua sean casi iguales. En el extremo de la placa, compare el espesor de la capa límite térmica que corresponde al valor de 99 por ciento de la temperatura del flujo libre con el espesor de capa límite hidrodinámica que corresponde al valor de 99 por ciento de la velocidad de flujo libre. Explique sus resultados. (Sugerencia: ¿cuál es el número de Prandtl del aire y del agua?)

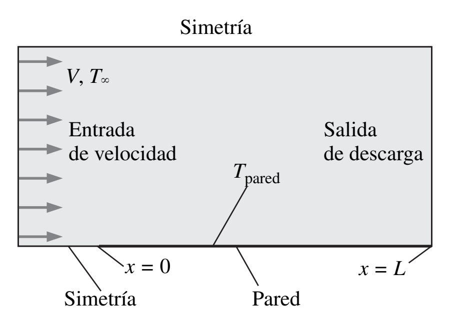


FIGURA P15-61

15-62 Repita el problema 15-61, excepto que esta vez para flujo turbulento sobre una placa plana, lisa, caliente. Utilice la aplicación *Plate_turbulent_temperatura.* Explique las diferencias entre_los cálculos laminar y turbulento. En particular, ¿qué régimen (laminar o turbulento) produce la variación más grande entre el espesor de capa límite térmica de 99 por ciento del valor de la temperatura del flujo libre y el espesor de capa límite hidrodinámica de 99 por ciento del valor de la velocidad del flujo libre? Explíquelo.

15-63 Considere flujo turbulento de agua por un codo embridado liso de 90° en una tubería redonda (Fig. P15-63). Debido a la simetría, sólo se modela la mitad de la tubería; el plano

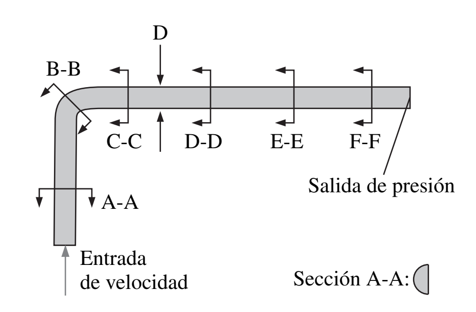


FIGURA P15-63

central se especifica como una condición de frontera de "simetría". Las paredes de la tubería son lisas. La velocidad de entrada y el diámetro de la tubería se eligen de modo que produzcan un número de Reynolds de 20 000. Para el caso (predeterminado), se emplea el modelo de turbulencia *k*-ε estándar. Utilice la aplicación *Elbow* de FlowLab. Éste es un cálculo tridimensional, así que se esperan tiempos de cálculo considerablemente más largos. La presión promedio se calcula en varias secciones transversales de la tubería: corriente arriba del codo, en el codo y corriente abajo del codo (secciones A-A, B-B, etc., en la figura P15-63). Grafique la presión promedio como una función de la distancia axial a lo largo de la tubería. Dónde ocurre la mayor parte de la caída de presión, ¿en la sección de la tubería corriente arriba del codo, en el codo, inmediatamente corriente abajo del codo o en la sección de la tubería corriente abajo del codo? Explíquelo.

15-64 Utilice la aplicación *Elbow* de FlowLab de nuevo con el modelo de turbulencia *k*-ε. En este ejercicio se estudian vectores de velocidad en los planos de varias secciones transversales a lo largo de la tubería. Compare los vectores de velocidad en una sección corriente arriba del codo, en una sección en el codo y en varias secciones corriente abajo del codo. ¿En qué lugares observa remolinos contrarrotatorios? ¿Cómo cambia su fuerza con la distancia corriente abajo? Explíquelo. Explique por qué muchos fabricantes de medidores de flujo para tuberías recomiendan que su medidor se instale por lo menos a 10 o 20 diámetros de tubería corriente abajo de un codo.

15-65 Utilice la aplicación *Elbow* de FlowLab de nuevo con el modelo de turbulencia estándar *k*-ε. En este ejercicio se calcula el coeficiente de pérdidas menores K_L para el codo del problema 15-63. Para esta finalidad, se compara la caída de presión calculada en la tubería con el codo con la caída en una tubería *recta* de la *misma longitud total*, y en condiciones idénticas de entrada y salida. Calcule la caída de presión desde la entrada hasta la salida para ambas configuraciones geométricas. Para calcular K_L para el codo, reste ΔP de la tubería recta de ΔP para la tubería con el codo. La diferencia representa la caída de presión debida al *codo solamente.* De esta caída de presión y la velocidad promedio por la tubería, calcule el coeficiente de pérdidas menores K_L y compare con el valor dado en el capítulo 8 para un codo liso de 90° embridado.

15-66 En este ejercicio se examina el efecto del modelo de turbulencia en el cálculo del coeficiente de pérdidas menores en un codo de tubería (Fig. P15-63). Con la ayuda de aplicación *Elbow* de FlowLab repita el problema 15-65, pero con varios modelos de turbulencia. Para cada caso, calcule K_L. ¿Hay mucha variación en los valores calculados de K_L? ¿Cuál modelo de turbulencia produce el valor más correcto, comparado con el resultado empírico del capítulo 8? El modelo de Spallart-Allmaras es el más simple, mientras que el modelo de esfuerzo de Reynolds es el más complicado de los cuatro. Los resultados calculados ¿mejoran la complejidad del modelo de turbulencia? Explíquelo.

15-67 Considere el flujo sobre un perfil aerodinámico bidimensional de longitud de cuerda L_c a un ángulo de ataque α con la velocidad de flujo libre V, densidad ρ y viscosidad μ. El ángulo α se mide respecto a la dirección de flujo libre (Fig. P15-67). En este caso, se calculan los coeficientes de sustentación y arrastre C_L y C_D que corresponden a las fuerzas de sustentación y de arrastre F_L y F_D, respectivamente. La velocidad de flujo libre y la longitud de cuerda se eligen de manera que el número de Reynolds en V y L_c sea 1×10^7 (la capa límite es turbulenta sobre casi toda la superficie del perfil aerodinámico). Utilice la aplicación *Air_foil _angle* de FlowLab a varios valores de α, que van de -2 a 20°. Para cada caso, calcule C_L y C_D. Grafique C_L y C_D como funciones de α. ¿A qué ángulo de ataque, estimado aproximadamente, pierde sustentación este perfil aerodinámico?

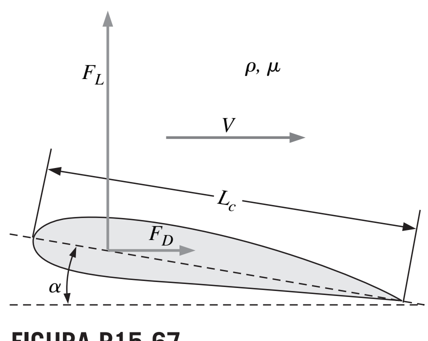


FIGURA P15-67

15-68 En este problema se estudia el efecto del número de Reynolds sobre los coeficientes de sustentación y de arrastre de un perfil aerodinámico a varios ángulos de ataque. Note que la superficie utilizada aquí es una forma diferente a la que se empleó en el problema 15-67. Utilice la aplicación *Airfoil_Reynolds* de FlowLab. Para el caso con número de Reynolds igual a 3×10^6, calcule y grafique C_L y C_D como funciones de α, con α que varía de -1 a 24°. ¿Cuál es el ángulo de pérdida de sustentación para este caso? Repita para $\text{Re} = 6 \times 10^6$. Compare los dos resultados y analice el efecto del número de Reynolds sobre la sustentación y arrastre de este perfil aerodinámico.

15-69 En este ejercicio se examina el efecto de la resolución de malla sobre el cálculo de la pérdida de sustentación del perfil aerodinámico (separación de flujo) en caso del perfil aerodinámico del problema 15-67 a $\alpha = 15°$ y $\text{Re} = 1 \times 10^7$. Utilice la aplicación *Airfoil_mesh* de FlowLab. Obtenga la solución para varios niveles de resolución de malla. Para cada caso calcule C_L y C_D. ¿Cómo afecta la resolución de malla al ángulo de pérdida de sustentación? ¿Se ha logrado la independencia de malla?

15-70 Considere el flujo de Stokes producido por el cuerpo de un microorganismo que nada en agua y que se representa aquí

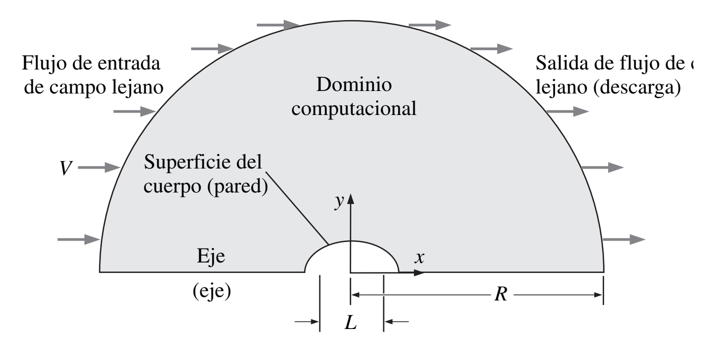


FIGURA P15-70

como un elipsoide simple de 2 × 1 (Fig. P15-70, no está dibujada a escala). Las condiciones de frontera aplicadas se muestran para cada lado entre paréntesis. El flujo es laminar y los valores por omisión de V y L se eligen de modo que el número de Reynolds Re = $\rho VL/\mu$ sea igual a 0.20. Utilice la aplicación *Creep_domain* de FlowLab. Varíe el radio del dominio computacional de R/L = 3 a 2 000. Para cada caso, calcule el coeficiente de arrastre C_D del cuerpo. ¿Qué largo del dominio computacional se necesita para estabilizar el coeficiente de arrastre (para que las condiciones de campo lejano ya no tengan influencia importante en la solución)? Explíquelo. Para el caso del dominio computacional más grande (R/L = 2 000), grafique los vectores de velocidad junto con una línea vertical coincidente con el eje y. Compare el perfil de velocidad que se esperaría a números de Reynolds altos. Explíquelo.

15-71 Utilice la aplicación *Creep_Reynolds* de FlowLab. En este ejercicio el número de Reynolds se hace variar de 0.1 a 100 para flujo sobre un elipsoide (Fig. P15-70). Grafique C_D como una función de Re y compare los perfiles de velocidad a lo largo del eje y a medida que se incrementa Re en el régimen de flujo de Stokes. Explíquelo.

Problemas generales de la DFC*

15-72 Considere la "Y" de la figura P15-72. Las dimensiones están en metros y el dibujo no está a escala. El flujo incompresible entra desde la izquierda y se divide en dos partes. Genere tres mallas de celdas amplias, con distribuciones de nodo idénticas en todos los lados del dominio computacional: *a*) malla de bloques múltiples estructurada, *b*) malla triangular no estructurada y *c*) malla de celdas cuadriláteras no estructurada. Compare el número de celdas en cada caso y comente la calidad de la malla en cada caso también.

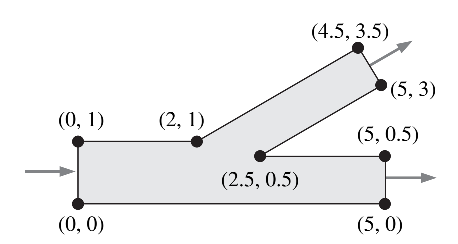


FIGURA P15-72

15-73 Elija una de las mallas generadas en el problema 15-72 y obtenga una solución de la DFC para flujo laminar de aire con una entrada de velocidad uniforme de 0.02 m/s. Establezca la presión de salida en ambas salidas al mismo valor y calcule la caída de presión en la "Y". También calcule el porcentaje de flujo de entrada que va a cada rama. Genere una gráfica de líneas de corriente.

* Estos problemas requieren software de DFC, aunque no de alguna marca en particular. A diferencia de los problemas de FlowLab de la sección anterior, estos problemas no tienen plantillas preelaboradas. Sin embargo, se anima para hacer que estos problemas se comiencen desde cero.

15-74 Repita el problema 15-73, excepto que esta vez para flujo *turbulento* de aire con una velocidad de entrada uniforme de 10.0 m/s. Además, establezca la intensidad de turbulencia en la entrada a 10 por ciento con una longitud característica turbulenta de 0.5 m. Use el modelo de turbulencia k-ε con funciones de pared. Establezca la presión de salida en ambas salidas al mismo valor y calcule la caída de presión en la "Y". Asimismo, calcule el porcentaje del flujo de entrada que sale de cada rama. Genere la gráfica de líneas de corriente. Compare los resultados con los de flujo laminar (problema 15-73).

15-75 Genere un dominio computacional para estudiar la capa límite laminar en una placa plana a Re = 10 000. Genere una malla de celdas muy amplias y luego, de manera continua, haga la malla más fina hasta que la solución se vuelva independiente de la malla. Explíquelo.

15-76 Repita el problema 15-75, excepto para una capa límite *turbulenta* a Re = 10^6. Explíquelo.

15-77 Genere un dominio computacional para estudiar la ventilación en una habitación (Fig. P15-77). En particular, genere una habitación rectangular con una entrada de velocidad en el techo para modelar el aire de suministro y una salida de presión en el techo para modelar el aire de retorno. Para simplificar puede hacerse una aproximación bidimensional (la habitación es infinitamente larga en la dirección normal a la página en la figura P15-77). Use una malla rectangular estructurada. Grafique líneas de corriente y vectores velocidad. Explíquelo.

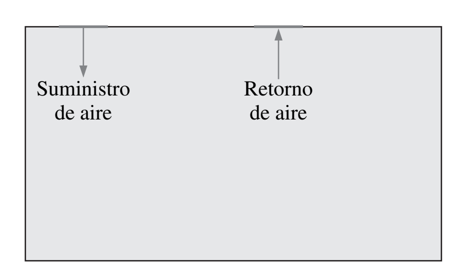


FIGURA P15-77

15-78 Repita el problema 15-77, excepto que ahora utilice una malla triangular no estructurada. Conserve todo lo demás igual. ¿Obtiene los mismos resultados que en el problema 15-77? Compare y explique.

15-79 Repita el problema 15-77, excepto que ahora mueva las aberturas de suministro y retorno a varios lugares del techo. Compare y explique.

15-80 Elija una de las configuraciones geométricas de habitación de los problemas 15-77 y 15-79, y añada la ecuación de la energía a los cálculos. En especial, modele una habitación con *acondicionamiento de aire*. Especifique el aire de suministro como frío (T = 18°C), mientras que las paredes, piso y techo están calientes (T = 26°C). Ajuste la velocidad del aire de suministro hasta que la temperatura promedio en la habitación sea lo más cercana posible a 22°C. ¿Cuánta ventilación (en términos de la cantidad de cambios de volumen de aire por hora) se necesita para enfriar esta habitación hasta una temperatura promedio de 22°C? Explíquelo.

15-81 Repita el problema 15-80, excepto que ahora cree una habitación *tridimensional*, con suministro de aire y retorno de aire en el techo. Compare los resultados bidimensionales del problema 15-80 con los resultados tridimensionales más reales de este problema. Explíquelo.

15-82 Genere un dominio computacional para estudiar el flujo compresible de aire por una *tobera* convergente con presión atmosférica en la salida de la tobera (Fig. P15-82). Las paredes de la tobera pueden aproximarse como no viscosas (esfuerzo de corte cero). Corra varios casos con distintos valores de presión de entrada. ¿Qué presión de entrada se necesita para generar una onda de choque en el flujo? ¿Qué sucede si la presión de entrada es mayor que este valor? Explíquelo.

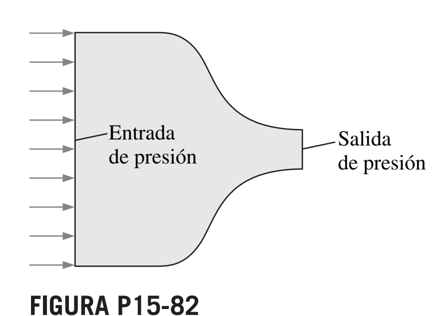


FIGURA P15-82

15-83 Repita el problema 15-82, excepto que ahora elimine la aproximación de flujo no viscoso. En cambio, permita que el flujo sea turbulento, con paredes lisas sin deslizamiento. Compare sus resultados con los del problema 15-82. ¿Cuál es el efecto principal de la fricción en este problema?

15-84 Genere un dominio computacional para estudiar el flujo laminar incompresible sobre un cuerpo currentilíneo bidimensional (Fig. P15-84). Genere varias formas de cuerpo y calcule el coeficiente de arrastre para cada forma. ¿Cuál es el valor más pequeño de C_D que puede lograrse? (Nota: para diversión, este problema puede convertirse en una competencia entre los lectores. ¿Quién puede generar la forma de cuerpo con menor arrastre?)

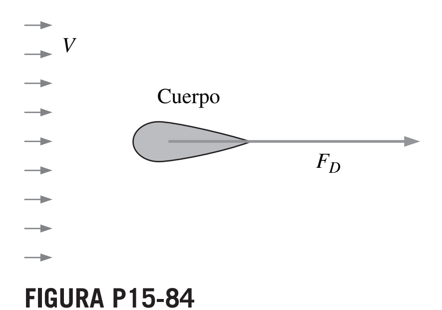


FIGURA P15-84

15-85 Repita el problema 15-84, pero ahora para un cuerpo *axisimétrico*. Compare con el caso bidimensional. ¿Cuál tiene el menor coeficiente de arrastre? Explíquelo.

15-86 Repita el problema 15-85, pero para flujo *turbulento*. Compare con el caso laminar. ¿Cuál tiene el menor coeficiente de arrastre? Explíquelo.

15-87 Genere un dominio computacional para estudiar ondas de Mach en un canal supersónico bidimensional (Fig. P15-87). Específicamente, el dominio debe consistir en un canal rectangular simple con entrada supersónica (Ma = 2.0), y con un tope muy pequeño en la pared inferior. Considere el aire como el flujo no viscoso y genere una onda de Mach, como se bosqueja. Mida el ángulo de Mach y compare con la teoría (Cap. 12). También explique qué sucede cuando la onda de Mach choca con la pared opuesta. ¿Desaparece o se refleja?, y si es así, ¿cuál es el ángulo de reflexión? Explíquelo.

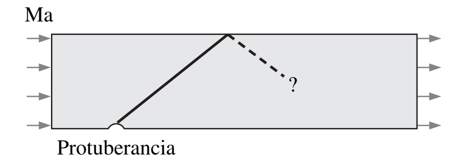


FIGURA P15-87

15-88 Repita el problema 15-87, pero ahora para varios valores del número de Mach, que van de 1.10 a 3.0. Grafique el ángulo de Mach calculado como una función del número de Mach y compare con el ángulo de Mach teórico (Cap. 12). Explíquelo.

Problemas de repaso

15-89C Para cada enunciado, elija si es verdadero o falso y explique su respuesta de manera breve.

a) La validez física de una solución de la DFC mejora siempre a medida que se hace más fina la malla.

b) La componente *x* de la ecuación de Navier-Stokes es un ejemplo de una ecuación de transporte.

c) Para el mismo número de nodos en una malla bidimensional, una malla estructurada tiene por lo general menos celdas que una malla triangular no estructurada.

d) Una solución de la DFC para flujo turbulento promediado en el tiempo es sólo tan buena como el modelo de turbulencia empleado en los cálculos.

15-90C En el problema 15-18 se aprovecha la simetría superior e inferior cuando se construye el dominio computacional y la malla. ¿Por qué no puede aprovecharse la simetría derecha-izquierda en este ejercicio? Repita la explicación para el caso de flujo potencial.

15-91C Gerry crea el dominio computacional que se bosqueja en la figura P15-91C para simular flujo por una contracción repentina en un ducto bidimensional. Está interesado en la caída de presión promediada en el tiempo (coeficiente de pérdidas menores) a causa de la contracción repentina. Gerry genera una malla y calcula el flujo con un paquete de la DFC. Se supone flujo incompresible, turbulento, estacionario (con un modelo de turbulencia).

a) Describa una manera en la que Gerry podría mejorar su dominio computacional y la malla de modo que tendría los *mismos* resultados en casi la mitad del tiempo ocupado para los cálculos por la computadora.

b) Podría haber una falla fundamental en cómo Gerry ha establecido su dominio computacional. ¿Cuál es ésta? Explique qué debe ser diferente acerca del planteamiento de Gerry.

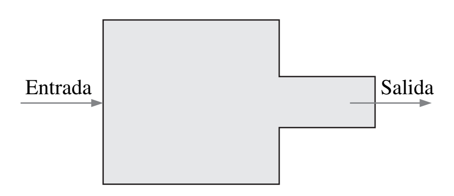


FIGURA P15-91C

15-92C Considere los modernos sistemas de computadoras con gran memoria y alta velocidad. ¿Qué característica de esta clase de computadoras es muy favorable para solucionar problemas de la DFC con una malla de bloques múltiples con casi la misma cantidad de celdas en cada uno de los bloques? Explíquelo.

15-93C ¿Cuál es la diferencia entre formación de *mallas múltiples* y formación de *bloques múltiples*? Describa cómo cada uno puede usarse para acelerar un cálculo de la DFC. ¿Es posible aplicar juntos ambos?

15-94C Suponga que tiene una configuración geométrica bastante compleja y un paquete de la DFC que puede manejar mallas no estructuradas con celdas triangulares. Su paquete de generación de malla puede crear una malla estructurada muy rápido. Dé algunas razones de por qué podría ser más aconsejable tomar el tiempo para crear en cambio una malla estructurada de bloques múltiples. En otras palabras, ¿vale la pena el esfuerzo? Explíquelo.

15-95 Suponga que tiene una configuración geométrica bastante compleja y un paquete de la DFC que puede manejar mallas no estructuradas con celdas triangulares. Su paquete de generación de malla puede crear una malla estructurada muy rápido. Dé algunas razones de por qué podría ser más aconsejable tomar el tiempo para crear en cambio una malla estructurada de bloques múltiples. En otras palabras, ¿vale la pena el esfuerzo? Explíquelo.

15-96 Repita los cálculos del problema 15-95 para varios ángulos de ataque de los elementos de calentamiento, desde 0 (horizontal) hasta 90° (vertical). Use condiciones de entrada y condiciones de pared sólida idénticas para cada caso. ¿Cuál ángulo de ataque provee la mayor transferencia de calor al aire? En particular, ¿qué ángulo de ataque produce la temperatura de salida promedio más alta?

15-97 Genere un dominio computacional y una malla, y calcule el flujo en el intercambiador de calor de dos etapas del problema 15-24, con los elementos de calentamiento de la primera etapa fijos a un ángulo de ataque de 45° respecto a la horizontal, y los de la segunda fijos a un ángulo de ataque de −45°. Establezca la temperatura del aire de entrada en 20°C y la temperatura de superficie de los elementos de calentamiento en 120°C. Calcule la temperatura promedio del aire en la salida.

15-98 Repita los cálculos del problema 15-97 para varios ángulos de ataque de los elementos de calentamiento, de 0 (horizontal) hasta 90° (vertical). Use condiciones de entrada y condiciones de pared sólida idénticas para cada caso. Note que la segunda etapa de los elementos de calentamiento debe establecerse siempre a un ángulo de ataque que es el negativo del de la primera etapa. ¿Qué ángulo de ataque proporciona mayor transferencia de calor al aire? Específicamente, ¿cuál ángulo de ataque produce la temperatura de salida promedio más alta? ¿Es éste el mismo ángulo que se calculó para el intercambiador de calor de una sola etapa del problema 15-96? Explíquelo.

15-99 Genere un dominio computacional y una malla, y calcule el flujo turbulento estacionario sobre un cilindro circular giratorio (Fig. P15-99). ¿En qué dirección actúa la fuerza lateral sobre el cuerpo, arriba o abajo? Explíquelo. Grafique las líneas de corriente en el flujo. ¿Dónde está el punto de estancamiento corriente arriba?

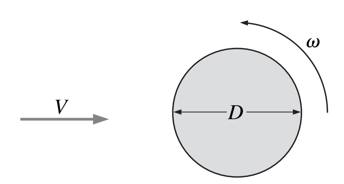


FIGURA P15-99

15-100 Para el cilindro giratorio de la figura P15-99, genere un parámetro adimensional para la velocidad rotacional en relación con la velocidad de flujo libre (combine las variables ω, D y V en un grupo Pi adimensional). Repita los cálculos del problema 15-99 para varios valores de velocidad angular ω. Use condiciones de entrada idénticas para cada caso. Grafique los coeficientes de sustentación y arrastre como funciones del parámetro adimensional introducido. Explíquelo.

15-101 Considere el flujo de aire en una ranura bidimensional a lo largo del piso de una habitación grande, donde el piso coincide con el eje x (Fig. P15-101). Genere un dominio computacional apropiado y una malla. Con la aproximación de flujo no viscoso, calcule la componente vertical de la velocidad y como una función de la distancia de la ranura a lo largo del eje y. Compare con los resultados de flujo potencial del capítulo 10 para flujo de un sumidero lineal. Explíquelo.

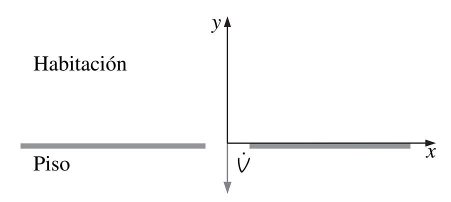


FIGURA P15-101

15-102 Para el flujo de ranura del problema 15-101, cambie a flujo laminar en vez de flujo no viscoso, y vuelva a calcular el

campo de flujo. Compare sus resultados con los del caso de flujo no viscoso y con el caso de flujo potencial del capítulo 10. Grafique los contornos de vorticidad. ¿Dónde es apropiada la aproximación de flujo irrotacional? Explíquelo.

15-103 Genere un domino computacional y una malla, y calcule el flujo de aire hacia una entrada bidimensional de una aspiradora (Fig. P15-103), con la aproximación de flujo no viscoso. Compare sus resultados con los predichos en el capítulo 10 para flujo potencial. Explíquelo.

15-104 Para la aspiradora del problema 15-103, cambie a flujo laminar en lugar de flujo no viscoso y calcule de nuevo el campo de flujo. Compare sus resultados con los del caso de flujo no viscoso y con los del caso de flujo potencial del capítulo 10. Explíquelo.

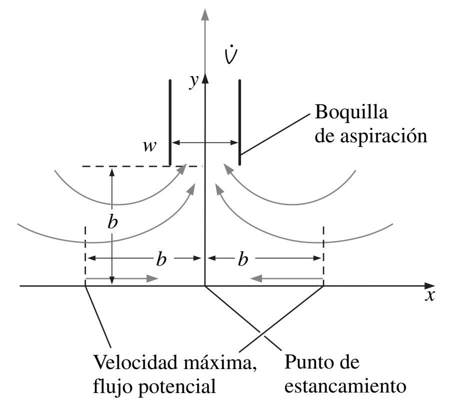


FIGURA P15-103

APÉNDICE

1

TABLAS Y GRÁFICAS DE PROPIEDADES (UNIDADES SI)*

* La mayoría de las propiedades en las tablas se obtuvieron a partir de la base de datos de propiedades del EES, y las fuentes originales se mencionan debajo de las tablas. Con frecuencia, las propiedades se citan a más cifras significativas que la precisión proclamada con el propósito de minimizar el error de redondeo acumulado en los cálculos a mano y para asegurar una correspondencia cercana con los resultados obtenidos con el EES.

TABLA A-1

Masa molar, constante de gas y calores específicos de gas ideal de algunas sustancias

Sustancia	Masa molar M, kg/kmol	Constante de gas R, kJ/kg · K*	Datos de calores específicos a 25°C		
			c_p, kJ/kg · K	c_v, kJ/kg · K	$k = c_p/c_v$
Aire	28.97	0.2870	1.005	0.7180	1.400
Amoniaco, NH_3	17.03	0.4882	2.093	1.605	1.304
Argón, Ar	39.95	0.2081	0.5203	0.3122	1.667
Bromo, Br_2	159.81	0.05202	0.2253	0.1732	1.300
n-Butano, C_4H_{10}	58.12	0.1430	1.694	1.551	1.092
Cloro, Cl_2	70.905	0.1173	0.4781	0.3608	1.325
Clorodifluorometano (R-22), $CHClF_2$	86.47	0.09615	0.6496	0.5535	1.174
Dióxido de azufre, SO_2	64.06	0.1298	0.6228	0.4930	1.263
Dióxido de carbono, CO_2	44.01	0.1889	0.8439	0.6550	1.288
Dióxido de nitrógeno, NO_2	46.006	0.1889	0.8060	0.6171	1.306
Etano, C_2H_6	30.070	0.2765	1.744	1.468	1.188
Etileno, C_2H_4	28.054	0.2964	1.527	1.231	1.241
Flúor, F_2	38.00	0.2187	0.8237	0.6050	1.362
Helio, He	4.003	2.077	5.193	3.116	1.667
n-Heptano, C_7H_{16}	100.20	0.08297	1.649	1.566	1.053
n-Hexano, C_6H_{14}	86.18	0.09647	1.654	1.558	1.062
Hidrógeno, H_2	2.016	4.124	14.30	10.18	1.405
Isobutano, C_4H_{10}	58.12	0.1430	1.663	1.520	1.094
Kriptón, Kr	83.80	0.09921	0.2480	0.1488	1.667
Metano, CH_4	16.04	0.5182	2.226	1.708	1.303
Monóxido de carbono, CO	28.01	0.2968	1.039	0.7417	1.400
Neón, Ne	20.183	0.4119	1.030	0.6180	1.667
Nitrógeno, N_2	28.01	0.2968	1.040	0.7429	1.400
Óxido nítrico, NO	30.006	0.2771	0.9992	0.7221	1.384
Oxígeno, O_2	32.00	0.2598	0.9180	0.6582	1.395
n-Pentano, C_5H_{12}	72.15	0.1152	1.664	1.549	1.074
Propano, C_3H_8	44.097	0.1885	1.669	1.480	1.127
Propileno, C_3H_6	42.08	0.1976	1.531	1.333	1.148
Tetraclorometano, CCl_4	153.82	0.05405	0.5415	0.4875	1.111
Tetrafluoroetano (R-134a), $C_2H_2F_4$	102.03	0.08149	0.8334	0.7519	1.108
Trifluoroetano (R-143a), $C_2H_3F_3$	84.04	0.09893	0.9291	0.8302	1.119
Vapor de agua, H_2O	18.015	0.4615	1.865	1.403	1.329
Xenón, Xe	131.30	0.06332	0.1583	0.09499	1.667

* La unidad kJ/kg · K es equivalente a kPa · m^3/kg · K. La constante de gas se calcula a partir de $R = R_u/M$, donde R_u = 8.31447 kJ/kmol · K es la constante universal de gas y M es la masa molar.

Fuente: Los valores de calores específicos se obtienen principalmente a partir de los procedimientos para propiedades preparados por The National Institute of Standards and Technology (NIST), Gaithersburg, MD.

TABLA A-2

Propiedades de puntos de ebullición y de congelación

	Datos de ebullición a 1 atm		Datos de congelación		Propiedades de líquido		
Sustancia	Punto de ebullición normal, °C	Calor latente de vaporización h_{fg}, kJ/kg	Punto de congelación, °C	Calor latente de fusión h_{if}, kJ/kg	Temperatura, °C	Densidad ρ, kg/m^3	Calor específico c_p, kJ/kg · K
Aceite (ligero)					25	910	1.80
Agua	100	2257	0.0	333.7	0	1000	4.22
					25	997	4.18
					50	988	4.18
					75	975	4.19
					100	958	4.22
Alcohol etílico	78.6	855	−156	108	20	789	2.84
Amoniaco	−33.3	1357	−77.7	322.4	−33.3	682	4.43
					−20	665	4.52
					0	639	4.60
					25	602	4.80
Argón	−185.9	161.6	−189.3	28	−185.6	1394	1.14
Benceno	80.2	394	5.5	126	20	879	1.72
n-Butano	−0.5	385.2	−138.5	80.3	−0.5	601	2.31
Dióxido de carbono	−78.4*	230.5 (a 0°C)	−56.6		0	298	0.59
Etanol	78.2	838.3	−114.2	109	25	783	2.46
Etilenglicol	198.1	800.1	−10.8	181.1	20	1109	2.84
Glicerina	179.9	974	18.9	200.6	20	1261	2.32
Helio	−268.9	22.8	—	—	−268.9	146.2	22.8
Hidrógeno	−252.8	445.7	−259.2	59.5	−252.8	70.7	10.0
Isobutano	−11.7	367.1	−160	105.7	−11.7	593.8	2.28
Mercurio	356.7	294.7	−38.9	11.4	25	13,560	0.139
Metano	−161.5	510.4	−182.2	58.4	−161.5	423	3.49
					−100	301	5.79
Metanol	64.5	1100	−97.7	99.2	25	787	2.55
Nitrógeno	−195.8	198.6	−210	25.3	−195.8	809	2.06
					−160	596	2.97
Octano	124.8	306.3	−57.5	180.7	20	703	2.10
Oxígeno	−183	212.7	−218.8	13.7	−183	1141	1.71
Petróleo	—	230–384			20	640	2.0
Propano	−42.1	427.8	−187.7	80.0	−42.1	581	2.25
					0	529	2.53
					50	449	3.13
Queroseno	204–293	251	−24.9	—	20	820	2.00
Refrigerante-134a	−26.1	216.8	−96.6	—	−50	1443	1.23
					−26.1	1374	1.27
					0	1295	1.34
					25	1207	1.43
Salmuera (20 por ciento cloruro de sodio, porcentaje másico)	103.9	—	−17.4	—	20	1150	3.11

* Temperatura de sublimación (a presiones por abajo de la presión del punto triple de 518 kPa, el dióxido de carbono existe en fase sólida o como gas. Además, la temperatura del punto de congelación del dióxido de carbono es la temperatura del punto triple de −56.5°C).

TABLA A-3

Propiedades del agua saturada

Temp. T, °C	Presión de saturación P_{sat}, kPa	Densidad ρ, kg/m³ Líquido	Densidad ρ, kg/m³ Vapor	Entalpía de vaporización h_{fg}, kJ/kg	Calor específico c_p, J/kg · K Líquido	Calor específico c_p, J/kg · K Vapor	Conductividad térmica k, W/m · K Líquido	Conductividad térmica k, W/m · K Vapor	Viscosidad dinámica μ, kg/m · s Líquido	Viscosidad dinámica μ, kg/m · s Vapor	Número de Prandtl Pr Líquido	Número de Prandtl Pr Vapor	Coeficiente de expansión volumétrica β, 1/K Líquido
0.01	0.6113	999.8	0.0048	2501	4217	1854	0.561	0.0171	1.792 × 10^{-3}	0.922 × 10^{-5}	13.5	1.00	−0.068 × 10^{-3}
5	0.8721	999.9	0.0068	2490	4205	1857	0.571	0.0173	1.519 × 10^{-3}	0.934 × 10^{-5}	11.2	1.00	0.015 × 10^{-3}
10	1.2276	999.7	0.0094	2478	4194	1862	0.580	0.0176	1.307 × 10^{-3}	0.946 × 10^{-5}	9.45	1.00	0.733 × 10^{-3}
15	1.7051	999.1	0.0128	2466	4186	1863	0.589	0.0179	1.138 × 10^{-3}	0.959 × 10^{-5}	8.09	1.00	0.138 × 10^{-3}
20	2.339	998.0	0.0173	2454	4182	1867	0.598	0.0182	1.002 × 10^{-3}	0.973 × 10^{-5}	7.01	1.00	0.195 × 10^{-3}
25	3.169	997.0	0.0231	2442	4180	1870	0.607	0.0186	0.891 × 10^{-3}	0.987 × 10^{-5}	6.14	1.00	0.247 × 10^{-3}
30	4.246	996.0	0.0304	2431	4178	1875	0.615	0.0189	0.798 × 10^{-3}	1.001 × 10^{-5}	5.42	1.00	0.294 × 10^{-3}
35	5.628	994.0	0.0397	2419	4178	1880	0.623	0.0192	0.720 × 10^{-3}	1.016 × 10^{-5}	4.83	1.00	0.337 × 10^{-3}
40	7.384	992.1	0.0512	2407	4179	1885	0.631	0.0196	0.653 × 10^{-3}	1.031 × 10^{-5}	4.32	1.00	0.377 × 10^{-3}
45	9.593	990.1	0.0655	2395	4180	1892	0.637	0.0200	0.596 × 10^{-3}	1.046 × 10^{-5}	3.91	1.00	0.415 × 10^{-3}
50	12.35	988.1	0.0831	2383	4181	1900	0.644	0.0204	0.547 × 10^{-3}	1.062 × 10^{-5}	3.55	1.00	0.451 × 10^{-3}
55	15.76	985.2	0.1045	2371	4183	1908	0.649	0.0208	0.504 × 10^{-3}	1.077 × 10^{-5}	3.25	1.00	0.484 × 10^{-3}
60	19.94	983.3	0.1304	2359	4185	1916	0.654	0.0212	0.467 × 10^{-3}	1.093 × 10^{-5}	2.99	1.00	0.517 × 10^{-3}
65	25.03	980.4	0.1614	2346	4187	1926	0.659	0.0216	0.433 × 10^{-3}	1.110 × 10^{-5}	2.75	1.00	0.548 × 10^{-3}
70	31.19	977.5	0.1983	2334	4190	1936	0.663	0.0221	0.404 × 10^{-3}	1.126 × 10^{-5}	2.55	1.00	0.578 × 10^{-3}
75	38.58	974.7	0.2421	2321	4193	1948	0.667	0.0225	0.378 × 10^{-3}	1.142 × 10^{-5}	2.38	1.00	0.607 × 10^{-3}
80	47.39	971.8	0.2935	2309	4197	1962	0.670	0.0230	0.355 × 10^{-3}	1.159 × 10^{-5}	2.22	1.00	0.653 × 10^{-3}
85	57.83	968.1	0.3536	2296	4201	1977	0.673	0.0235	0.333 × 10^{-3}	1.176 × 10^{-5}	2.08	1.00	0.670 × 10^{-3}
90	70.14	965.3	0.4235	2283	4206	1993	0.675	0.0240	0.315 × 10^{-3}	1.193 × 10^{-5}	1.96	1.00	0.702 × 10^{-3}
95	84.55	961.5	0.5045	2270	4212	2010	0.677	0.0246	0.297 × 10^{-3}	1.210 × 10^{-5}	1.85	1.00	0.716 × 10^{-3}
100	101.33	957.9	0.5978	2257	4217	2029	0.679	0.0251	0.282 × 10^{-3}	1.227 × 10^{-5}	1.75	1.00	0.750 × 10^{-3}
110	143.27	950.6	0.8263	2230	4229	2071	0.682	0.0262	0.255 × 10^{-3}	1.261 × 10^{-5}	1.58	1.00	0.798 × 10^{-3}
120	198.53	943.4	1.121	2203	4244	2120	0.683	0.0275	0.232 × 10^{-3}	1.296 × 10^{-5}	1.44	1.00	0.858 × 10^{-3}
130	270.1	934.6	1.496	2174	4263	2177	0.684	0.0288	0.213 × 10^{-3}	1.330 × 10^{-5}	1.33	1.01	0.913 × 10^{-3}
140	361.3	921.7	1.965	2145	4286	2244	0.683	0.0301	0.197 × 10^{-3}	1.365 × 10^{-5}	1.24	1.02	0.970 × 10^{-3}
150	475.8	916.6	2.546	2114	4311	2314	0.682	0.0316	0.183 × 10^{-3}	1.399 × 10^{-5}	1.16	1.02	1.025 × 10^{-3}
160	617.8	907.4	3.256	2083	4340	2420	0.680	0.0331	0.170 × 10^{-3}	1.434 × 10^{-5}	1.09	1.05	1.145 × 10^{-3}
170	791.7	897.7	4.119	2050	4370	2490	0.677	0.0347	0.160 × 10^{-3}	1.468 × 10^{-5}	1.03	1.05	1.178 × 10^{-3}
180	1,002.1	887.3	5.153	2015	4410	2590	0.673	0.0364	0.150 × 10^{-3}	1.502 × 10^{-5}	0.983	1.07	1.210 × 10^{-3}
190	1,254.4	876.4	6.388	1979	4460	2710	0.669	0.0382	0.142 × 10^{-3}	1.537 × 10^{-5}	0.947	1.09	1.280 × 10^{-3}
200	1,553.8	864.3	7.852	1941	4500	2840	0.663	0.0401	0.134 × 10^{-3}	1.571 × 10^{-5}	0.910	1.11	1.350 × 10^{-3}
220	2,318	840.3	11.60	1859	4610	3110	0.650	0.0442	0.122 × 10^{-3}	1.641 × 10^{-5}	0.865	1.15	1.520 × 10^{-3}
240	3,344	813.7	16.73	1767	4760	3520	0.632	0.0487	0.111 × 10^{-3}	1.712 × 10^{-5}	0.836	1.24	1.720 × 10^{-3}
260	4,688	783.7	23.69	1663	4970	4070	0.609	0.0540	0.102 × 10^{-3}	1.788 × 10^{-5}	0.832	1.35	2.000 × 10^{-3}
280	6,412	750.8	33.15	1544	5280	4835	0.581	0.0605	0.094 × 10^{-3}	1.870 × 10^{-5}	0.854	1.49	2.380 × 10^{-3}
300	8,581	713.8	46.15	1405	5750	5980	0.548	0.0695	0.086 × 10^{-3}	1.965 × 10^{-5}	0.902	1.69	2.950 × 10^{-3}
320	11,274	667.1	64.57	1239	6540	7900	0.509	0.0836	0.078 × 10^{-3}	2.084 × 10^{-5}	1.00	1.97	
340	14,586	610.5	92.62	1028	8240	11,870	0.469	0.110	0.070 × 10^{-3}	2.255 × 10^{-5}	1.23	2.43	
360	18,651	528.3	144.0	720	14,690	25,800	0.427	0.178	0.060 × 10^{-3}	2.571 × 10^{-5}	2.06	3.73	
374.14	22,090	317.0	317.0	0	—	—	—	—	0.043 × 10^{-3}	4.313 × 10^{-5}			

Nota 1: La viscosidad cinemática ν y la difusividad térmica α se pueden calcular a partir de sus definiciones:, $\nu = \mu/\rho$ y $\alpha = k/\rho c_p = \nu/\text{Pr}$. Las temperaturas 0.01°C, 100°C y 374.14°C son las temperaturas del punto triple, de ebullición y crítico del agua, respectivamente. Las propiedades citadas anteriormente (excepto la densidad del vapor) se pueden usar a cualquier presión con error despreciable, excepto a temperaturas cerca del valor de punto crítico.

Nota 2: La unidad kJ/kg · °C para calor específico es equivalente kJ/kg · K, y la unidad W/m · °C para conductividad térmica es equivalente a W/m · K.

Fuente: Los datos de viscosidad y conductividad térmica están tomados de J. V. Sengers y J. T. R. Watson, *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 15 (1986), pp. 1291-1322. Otros datos se obtuvieron de diversas fuentes o se calcularon.

TABLA A-4

Propiedades de refrigerante 134a saturado

Temp.	Presión de saturación	Densidad ρ, kg/m^3		Entalpía de vaporización	Calor específico c_p, J/kg · K		Conductividad térmica k, W/m · K		Viscosidad dinámica μ, kg/m · s		Número de Prandtl Pr		Coeficiente de expansión volumétrica β, 1/K	Tensión superficial,
T, °C	P, kPa	Líquido	Vapor	h_{fg}, kJ/kg	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	N/m
−40	51.2	1418	2.773	225.9	1254	748.6	0.1101	0.00811	4.878×10^{-4}	2.550×10^{-6}	5.558	0.235	0.00205	0.01760
−35	66.2	1403	3.524	222.7	1264	764.1	0.1084	0.00862	4.509×10^{-4}	3.003×10^{-6}	5.257	0.266	0.00209	0.01682
−30	84.4	1389	4.429	219.5	1273	780.2	0.1066	0.00913	4.178×10^{-4}	3.504×10^{-6}	4.992	0.299	0.00215	0.01604
−25	106.5	1374	5.509	216.3	1283	797.2	0.1047	0.00963	3.882×10^{-4}	4.054×10^{-6}	4.757	0.335	0.00220	0.01527
−20	132.8	1359	6.787	213.0	1294	814.9	0.1028	0.01013	3.614×10^{-4}	4.651×10^{-6}	4.548	0.374	0.00227	0.01451
−15	164.0	1343	8.288	209.5	1306	833.5	0.1009	0.01063	3.371×10^{-4}	5.295×10^{-6}	4.363	0.415	0.00233	0.01376
−10	200.7	1327	10.04	206.0	1318	853.1	0.0989	0.01112	3.150×10^{-4}	5.982×10^{-6}	4.198	0.459	0.00241	0.01302
−5	243.5	1311	12.07	202.4	1330	873.8	0.0968	0.01161	2.947×10^{-4}	6.709×10^{-6}	4.051	0.505	0.00249	0.01229
0	293.0	1295	14.42	198.7	1344	895.6	0.0947	0.01210	2.761×10^{-4}	7.471×10^{-6}	3.919	0.553	0.00258	0.01156
5	349.9	1278	17.12	194.8	1358	918.7	0.0925	0.01259	2.589×10^{-4}	8.264×10^{-6}	3.802	0.603	0.00269	0.01084
10	414.9	1261	20.22	190.8	1374	943.2	0.0903	0.01308	2.430×10^{-4}	9.081×10^{-6}	3.697	0.655	0.00280	0.01014
15	488.7	1244	23.75	186.6	1390	969.4	0.0880	0.01357	2.281×10^{-4}	9.915×10^{-6}	3.604	0.708	0.00293	0.00944
20	572.1	1226	27.77	182.3	1408	997.6	0.0856	0.01406	2.142×10^{-4}	1.075×10^{-5}	3.521	0.763	0.00307	0.00876
25	665.8	1207	32.34	177.8	1427	1028	0.0833	0.01456	2.012×10^{-4}	1.160×10^{-5}	3.448	0.819	0.00324	0.00808
30	770.6	1188	37.53	173.1	1448	1061	0.0808	0.01507	1.888×10^{-4}	1.244×10^{-5}	3.383	0.877	0.00342	0.00742
35	887.5	1168	43.41	168.2	1471	1098	0.0783	0.01558	1.772×10^{-4}	1.327×10^{-5}	3.328	0.935	0.00364	0.00677
40	1017.1	1147	50.08	163.0	1498	1138	0.0757	0.01610	1.660×10^{-4}	1.408×10^{-5}	3.285	0.995	0.00390	0.00613
45	1160.5	1125	57.66	157.6	1529	1184	0.0731	0.01664	1.554×10^{-4}	1.486×10^{-5}	3.253	1.058	0.00420	0.00550
50	1318.6	1102	66.27	151.8	1566	1237	0.0704	0.01720	1.453×10^{-4}	1.562×10^{-5}	3.231	1.123	0.00456	0.00489
55	1492.3	1078	76.11	145.7	1608	1298	0.0676	0.01777	1.355×10^{-4}	1.634×10^{-5}	3.223	1.193	0.00500	0.00429
60	1682.8	1053	87.38	139.1	1659	1372	0.0647	0.01838	1.260×10^{-4}	1.704×10^{-5}	3.229	1.272	0.00554	0.00372
65	1891.0	1026	100.4	132.1	1722	1462	0.0618	0.01902	1.167×10^{-4}	1.771×10^{-5}	3.255	1.362	0.00624	0.00315
70	2118.2	996.2	115.6	124.4	1801	1577	0.0587	0.01972	1.077×10^{-4}	1.839×10^{-5}	3.307	1.471	0.00716	0.00261
75	2365.8	964	133.6	115.9	1907	1731	0.0555	0.02048	9.891×10^{-5}	1.908×10^{-5}	3.400	1.612	0.00843	0.00209
80	2635.2	928.2	155.3	106.4	2056	1948	0.0521	0.02133	9.011×10^{-5}	1.982×10^{-5}	3.558	1.810	0.01031	0.00160
85	2928.2	887.1	182.3	95.4	2287	2281	0.0484	0.02233	8.124×10^{-5}	2.071×10^{-5}	3.837	2.116	0.01336	0.00114
90	3246.9	837.7	217.8	82.2	2701	2865	0.0444	0.02357	7.203×10^{-5}	2.187×10^{-5}	4.385	2.658	0.01911	0.00071
95	3594.1	772.5	269.3	64.9	3675	4144	0.0396	0.02544	6.190×10^{-5}	2.370×10^{-5}	5.746	3.862	0.03343	0.00033
100	3975.1	651.7	376.3	33.9	7959	8785	0.0322	0.02989	4.765×10^{-5}	2.833×10^{-5}	11.77	8.326	0.10047	0.00004

Nota 1: La viscosidad cinemática ν y la difusividad térmica a se pueden calcular a partir de sus definiciones:, $\nu = \mu/\rho$ y $\alpha = k/\rho c_p = \nu$/Pr. Las propiedades citadas aquí (excepto la densidad de vapor) se pueden usar a cualquier presión con error despreciable, excepto a temperaturas cercanas al valor de punto crítico.

Nota 2: La unidad kJ/kg · °C para calor específico es equivalente a kJ/kg · K, y la unidad W/m · °C para conductividad térmica es equivalente a W/m · K.

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Fuentes originales: R. Tillner-Roth and H. D. Baehr, "An International Standard Formulation for the Thermodynamic Properties of 1,1,1,2-Tetrafluoroethane (HFC-134a) for Temperatures from 170 K to 455 K and Pressures up to 70 MPa", *J. Phys. Chem, Ref. Data*, Vol. 23, No. 5, 1994; M. J. Assael, N. K. Dalaouti, A. A. Griva, y J. H. Dymond, "Viscosity and Thermal Conductivity of Halogenated Methane and Ethane Refrigerants", *IJR*, Vol. 22, pp. 525-535, 1999; NIST REFPROP 6 program (M. O. McLinden, S. A. Klein, E. W. Lemmon, and A. P. Peskin, Physical and Chemical Properties Division, National Institute of Standards and Technology, Boulder, CO 80303, 1995).

TABLA A-5

Propiedades del amoniaco saturado

Temp. T, °C	Presión de saturación P, kPa	Densidad ρ, kg/m^3		Entalpía de vaporización h_{fg}, kJ/kg	Calor específico c_p, J/kg · K		Conductividad térmica k, W/m · K		Viscosidad dinámica μ, kg/m · s		Número de Prandtl Pr		Coeficiente de expansión volumétrica β, 1/K	Tensión superficial, N/m
		Líquido	Vapor		Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	
−40	71.66	690.2	0.6435	1389	4414	2242	—	0.01792	2.926×10^{-4}	7.957×10^{-6}	—	0.9955	0.00176	0.03565
−30	119.4	677.8	1.037	1360	4465	2322	—	0.01898	2.630×10^{-4}	8.311×10^{-6}	—	1.017	0.00185	0.03341
−25	151.5	671.5	1.296	1345	4489	2369	0.5968	0.01957	2.492×10^{-4}	8.490×10^{-6}	1.875	1.028	0.00190	0.03229
−20	190.1	665.1	1.603	1329	4514	2420	0.5853	0.02015	2.361×10^{-4}	8.669×10^{-6}	1.821	1.041	0.00194	0.03118
−15	236.2	658.6	1.966	1313	4538	2476	0.5737	0.02075	2.236×10^{-4}	8.851×10^{-6}	1.769	1.056	0.00199	0.03007
−10	290.8	652.1	2.391	1297	4564	2536	0.5621	0.02138	2.117×10^{-4}	9.034×10^{-6}	1.718	1.072	0.00205	0.02896
−5	354.9	645.4	2.886	1280	4589	2601	0.5505	0.02203	2.003×10^{-4}	9.218×10^{-6}	1.670	1.089	0.00210	0.02786
0	429.6	638.6	3.458	1262	4617	2672	0.5390	0.02270	1.896×10^{-4}	9.405×10^{-6}	1.624	1.107	0.00216	0.02676
5	516	631.7	4.116	1244	4645	2749	0.5274	0.02341	1.794×10^{-4}	9.593×10^{-6}	1.580	1.126	0.00223	0.02566
10	615.3	624.6	4.870	1226	4676	2831	0.5158	0.02415	1.697×10^{-4}	9.784×10^{-6}	1.539	1.147	0.00230	0.02457
15	728.8	617.5	5.729	1206	4709	2920	0.5042	0.02492	1.606×10^{-4}	9.978×10^{-6}	1.500	1.169	0.00237	0.02348
20	857.8	610.2	6.705	1186	4745	3016	0.4927	0.02573	1.519×10^{-4}	1.017×10^{-5}	1.463	1.193	0.00245	0.02240
25	1003	602.8	7.809	1166	4784	3120	0.4811	0.02658	1.438×10^{-4}	1.037×10^{-5}	1.430	1.218	0.00254	0.02132
30	1167	595.2	9.055	1144	4828	3232	0.4695	0.02748	1.361×10^{-4}	1.057×10^{-5}	1.399	1.244	0.00264	0.02024
35	1351	587.4	10.46	1122	4877	3354	0.4579	0.02843	1.288×10^{-4}	1.078×10^{-5}	1.372	1.272	0.00275	0.01917
40	1555	579.4	12.03	1099	4932	3486	0.4464	0.02943	1.219×10^{-4}	1.099×10^{-5}	1.347	1.303	0.00287	0.01810
45	1782	571.3	13.8	1075	4993	3631	0.4348	0.03049	1.155×10^{-4}	1.121×10^{-5}	1.327	1.335	0.00301	0.01704
50	2033	562.9	15.78	1051	5063	3790	0.4232	0.03162	1.094×10^{-4}	1.143×10^{-5}	1.310	1.371	0.00316	0.01598
55	2310	554.2	18.00	1025	5143	3967	0.4116	0.03283	1.037×10^{-4}	1.166×10^{-5}	1.297	1.409	0.00334	0.01493
60	2614	545.2	20.48	997.4	5234	4163	0.4001	0.03412	9.846×10^{-5}	1.189×10^{-5}	1.288	1.452	0.00354	0.01389
65	2948	536.0	23.26	968.9	5340	4384	0.3885	0.03550	9.347×10^{-5}	1.213×10^{-5}	1.285	1.499	0.00377	0.01285
70	3312	526.3	26.39	939.0	5463	4634	0.3769	0.03700	8.879×10^{-5}	1.238×10^{-5}	1.287	1.551	0.00404	0.01181
75	3709	516.2	29.90	907.5	5608	4923	0.3653	0.03862	8.440×10^{-5}	1.264×10^{-5}	1.296	1.612	0.00436	0.01079
80	4141	505.7	33.87	874.1	5780	5260	0.3538	0.04038	8.030×10^{-5}	1.292×10^{-5}	1.312	1.683	0.00474	0.00977
85	4609	494.5	38.36	838.6	5988	5659	0.3422	0.04232	7.645×10^{-5}	1.322×10^{-5}	1.338	1.768	0.00521	0.00876
90	5116	482.8	43.48	800.6	6242	6142	0.3306	0.04447	7.284×10^{-5}	1.354×10^{-5}	1.375	1.871	0.00579	0.00776
95	5665	470.2	49.35	759.8	6561	6740	0.3190	0.04687	6.946×10^{-5}	1.389×10^{-5}	1.429	1.999	0.00652	0.00677
100	6257	456.6	56.15	715.5	6972	7503	0.3075	0.04958	6.628×10^{-5}	1.429×10^{-5}	1.503	2.163	0.00749	0.00579

Nota 1: La viscosidad cinemática ν y la difusividad térmica α se pueden calcular a partir de sus definiciones: $\nu = \mu/\rho$ y $\alpha = k/\rho c_p = \nu/\text{Pr}$. Las propiedades citadas aquí (excepto la densidad de vapor) se pueden usar a cualquier presión con error despreciable, excepto a temperaturas cerca del valor de punto crítico.

Nota 2: La unidad kJ/kg · °C para calor específico es equivalente a kJ/kg · K, y la unidad W/m · °C para conductividad térmica es equivalente a W/m · K.

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Fuentes originales: Tillner-Roth, Harms-Watzenberg, y Baehr, "Eine neue Fundamentalgleichung fur Ammoniak", DKV-Tagungsbericht 20:167–181, 1993; Liley y Desai, "Thermophysical Properties of Refrigerants", *ASHRAE*, 1993, ISBN 1-1883413-10-9.

TABLA A-6

Propiedades del propano saturado

Temp. T, °C	Presión de saturación P, kPa	Densidad ρ, kg/m^3		Entalpía de vaporización h_{fg}, kJ/kg	Calor específico c_p, J/kg · K		Conductividad térmica k, W/m · K		Viscosidad dinámica μ, kg/m · s		Número de Prandtl Pr		Coeficiente de expansión volumétrica β, 1/K	Tensión superficial, N/m
		Líquido	Vapor		Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	
−120	0.4053	664.7	0.01408	498.3	2003	1115	0.1802	0.00589	6.136×10^{-4}	4.372×10^{-6}	6.820	0.827	0.00153	0.02630
−110	1.157	654.5	0.03776	489.3	2021	1148	0.1738	0.00645	5.054×10^{-4}	4.625×10^{-6}	5.878	0.822	0.00157	0.02486
−100	2.881	644.2	0.08872	480.4	2044	1183	0.1672	0.00705	4.252×10^{-4}	4.881×10^{-6}	5.195	0.819	0.00161	0.02344
−90	6.406	633.8	0.1870	471.5	2070	1221	0.1606	0.00769	3.635×10^{-4}	5.143×10^{-6}	4.686	0.817	0.00166	0.02202
−80	12.97	623.2	0.3602	462.4	2100	1263	0.1539	0.00836	3.149×10^{-4}	5.409×10^{-6}	4.297	0.817	0.00171	0.02062
−70	24.26	612.5	0.6439	453.1	2134	1308	0.1472	0.00908	2.755×10^{-4}	5.680×10^{-6}	3.994	0.818	0.00177	0.01923
−60	42.46	601.5	1.081	443.5	2173	1358	0.1407	0.00985	2.430×10^{-4}	5.956×10^{-6}	3.755	0.821	0.00184	0.01785
−50	70.24	590.3	1.724	433.6	2217	1412	0.1343	0.01067	2.158×10^{-4}	6.239×10^{-6}	3.563	0.825	0.00192	0.01649
−40	110.7	578.8	2.629	423.1	2258	1471	0.1281	0.01155	1.926×10^{-4}	6.529×10^{-6}	3.395	0.831	0.00201	0.01515
−30	167.3	567.0	3.864	412.1	2310	1535	0.1221	0.01250	1.726×10^{-4}	6.827×10^{-6}	3.266	0.839	0.00213	0.01382
−20	243.8	554.7	5.503	400.3	2368	1605	0.1163	0.01351	1.551×10^{-4}	7.136×10^{-6}	3.158	0.848	0.00226	0.01251
−10	344.4	542.0	7.635	387.8	2433	1682	0.1107	0.01459	1.397×10^{-4}	7.457×10^{-6}	3.069	0.860	0.00242	0.01122
0	473.3	528.7	10.36	374.2	2507	1768	0.1054	0.01576	1.259×10^{-4}	7.794×10^{-6}	2.996	0.875	0.00262	0.00996
5	549.8	521.8	11.99	367.0	2547	1814	0.1028	0.01637	1.195×10^{-4}	7.970×10^{-6}	2.964	0.883	0.00273	0.00934
10	635.1	514.7	13.81	359.5	2590	1864	0.1002	0.01701	1.135×10^{-4}	8.151×10^{-6}	2.935	0.893	0.00286	0.00872
15	729.8	507.5	15.85	351.7	2637	1917	0.0977	0.01767	1.077×10^{-4}	8.339×10^{-6}	2.909	0.905	0.00301	0.00811
20	834.4	500.0	18.13	343.4	2688	1974	0.0952	0.01836	1.022×10^{-4}	8.534×10^{-6}	2.886	0.918	0.00318	0.00751
25	949.7	492.2	20.68	334.8	2742	2036	0.0928	0.01908	9.702×10^{-5}	8.738×10^{-6}	2.866	0.933	0.00337	0.00691
30	1076	484.2	23.53	325.8	2802	2104	0.0904	0.01982	9.197×10^{-5}	8.952×10^{-6}	2.850	0.950	0.00358	0.00633
35	1215	475.8	26.72	316.2	2869	2179	0.0881	0.02061	8.710×10^{-5}	9.178×10^{-6}	2.837	0.971	0.00384	0.00575
40	1366	467.1	30.29	306.1	2943	2264	0.0857	0.02142	8.240×10^{-5}	9.417×10^{-6}	2.828	0.995	0.00413	0.00518
45	1530	458.0	34.29	295.3	3026	2361	0.0834	0.02228	7.785×10^{-5}	9.674×10^{-6}	2.824	1.025	0.00448	0.00463
50	1708	448.5	38.79	283.9	3122	2473	0.0811	0.02319	7.343×10^{-5}	9.950×10^{-6}	2.826	1.061	0.00491	0.00408
60	2110	427.5	49.66	258.4	3283	2769	0.0765	0.02517	6.487×10^{-5}	1.058×10^{-5}	2.784	1.164	0.00609	0.00303
70	2580	403.2	64.02	228.0	3595	3241	0.0717	0.02746	5.649×10^{-5}	1.138×10^{-5}	2.834	1.343	0.00811	0.00204
80	3127	373.0	84.28	189.7	4501	4173	0.0663	0.03029	4.790×10^{-5}	1.249×10^{-5}	3.251	1.722	0.01248	0.00114
90	3769	329.1	118.6	133.2	6977	7239	0.0595	0.03441	3.807×10^{-5}	1.448×10^{-5}	4.465	3.047	0.02847	0.00037

Nota 1: La viscosidad cinemática ν y la difusividad térmica α se pueden calcular a partir de sus definiciones: $\nu = \mu/\rho$ y $\alpha = k/\rho c_p = \nu/\text{Pr}$. Las propiedades citadas aquí (excepto la densidad de vapor) se pueden usar a cualquier presión con error despreciable, excepto a temperaturas cerca del valor de punto crítico.

Nota 2: La unidad kJ/kg · °C para calor específico es equivalente a kJ/kg · K, y la unidad W/m · °C para conductividad térmica es equivalente a W/m · K.

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Fuentes originales: Reiner Tillner-Roth, "Fundamental Equations of State", Shaker, Verlag, Aachan, 1998; B. A. Younglove y J. F. Ely, "Thermophysical Properties of Fluids. II Methane, Ethane, Propane, Isobutane, and Normal Butane," *J. Phys. Chem. Ref. Data*, Vol. 16, No. 4, 1987; G.R. Somayajulu, "A Generalized Equation for Surface Tension from the Triple-Point to the Critical-Point", *International Journal of Thermophysics*, Vol. 9, No. 4, 1988.

TABLA A-7

Propiedades de líquidos

Temp. T, °C	Densidad ρ, kg/m^3	Calor específico c_p, J/kg · K	Conductividad térmica k, W/m · K	Difusividad térmica α, m^2/s	Viscosidad dinámica μ, kg/m · s	Viscosidad cinemática ν, m^2/s	Número de Prandtl Pr	Coef. de expansión volumétrica. β, 1/K
				Metano (CH_4)				
−160	420.2	3492	0.1863	1.270×10^{-7}	1.133×10^{-4}	2.699×10^{-7}	2.126	0.00352
−150	405.0	3580	0.1703	1.174×10^{-7}	9.169×10^{-5}	2.264×10^{-7}	1.927	0.00391
−140	388.8	3700	0.1550	1.077×10^{-7}	7.551×10^{-5}	1.942×10^{-7}	1.803	0.00444
−130	371.1	3875	0.1402	9.749×10^{-8}	6.288×10^{-5}	1.694×10^{-7}	1.738	0.00520
−120	351.4	4146	0.1258	8.634×10^{-8}	5.257×10^{-5}	1.496×10^{-7}	1.732	0.00637
−110	328.8	4611	0.1115	7.356×10^{-8}	4.377×10^{-5}	1.331×10^{-7}	1.810	0.00841
−100	301.0	5578	0.0967	5.761×10^{-8}	3.577×10^{-5}	1.188×10^{-7}	2.063	0.01282
−90	261.7	8902	0.0797	3.423×10^{-8}	2.761×10^{-5}	1.055×10^{-7}	3.082	0.02922
				Metanol [$CH_3(OH)$]				
20	788.4	2515	0.1987	1.002×10^{-7}	5.857×10^{-4}	7.429×10^{-7}	7.414	0.00118
30	779.1	2577	0.1980	9.862×10^{-8}	5.088×10^{-4}	6.531×10^{-7}	6.622	0.00120
40	769.6	2644	0.1972	9.690×10^{-8}	4.460×10^{-4}	5.795×10^{-7}	5.980	0.00123
50	760.1	2718	0.1965	9.509×10^{-8}	3.942×10^{-4}	5.185×10^{-7}	5.453	0.00127
60	750.4	2798	0.1957	9.320×10^{-8}	3.510×10^{-4}	4.677×10^{-7}	5.018	0.00132
70	740.4	2885	0.1950	9.128×10^{-8}	3.146×10^{-4}	4.250×10^{-7}	4.655	0.00137
				Isobutano (R600a)				
−100	683.8	1881	0.1383	1.075×10^{-7}	9.305×10^{-4}	1.360×10^{-6}	12.65	0.00142
−75	659.3	1970	0.1357	1.044×10^{-7}	5.624×10^{-4}	8.531×10^{-7}	8.167	0.00150
−50	634.3	2069	0.1283	9.773×10^{-8}	3.769×10^{-4}	5.942×10^{-7}	6.079	0.00161
−25	608.2	2180	0.1181	8.906×10^{-8}	2.688×10^{-4}	4.420×10^{-7}	4.963	0.00177
0	580.6	2306	0.1068	7.974×10^{-8}	1.993×10^{-4}	3.432×10^{-7}	4.304	0.00199
25	550.7	2455	0.0956	7.069×10^{-8}	1.510×10^{-4}	2.743×10^{-7}	3.880	0.00232
50	517.3	2640	0.0851	6.233×10^{-8}	1.155×10^{-4}	2.233×10^{-7}	3.582	0.00286
75	478.5	2896	0.0757	5.460×10^{-8}	8.785×10^{-5}	1.836×10^{-7}	3.363	0.00385
100	429.6	3361	0.0669	4.634×10^{-8}	6.483×10^{-5}	1.509×10^{-7}	3.256	0.00628
				Glicerina				
0	1276	2262	0.2820	9.773×10^{-8}	10.49	8.219×10^{-3}	84,101	
5	1273	2288	0.2835	9.732×10^{-8}	6.730	5.287×10^{-3}	54,327	
10	1270	2320	0.2846	9.662×10^{-8}	4.241	3.339×10^{-3}	34,561	
15	1267	2354	0.2856	9.576×10^{-8}	2.496	1.970×10^{-3}	20,570	
20	1264	2386	0.2860	9.484×10^{-8}	1.519	1.201×10^{-3}	12,671	
25	1261	2416	0.2860	9.388×10^{-8}	0.9934	7.878×10^{-4}	8,392	
30	1258	2447	0.2860	9.291×10^{-8}	0.6582	5.232×10^{-4}	5,631	
35	1255	2478	0.2860	9.195×10^{-8}	0.4347	3.464×10^{-4}	3,767	
40	1252	2513	0.2863	9.101×10^{-8}	0.3073	2.455×10^{-4}	2,697	
				Aceite de motor (no usado)				
0	899.0	1797	0.1469	9.097×10^{-8}	3.814	4.242×10^{-3}	46,636	0.00070
20	888.1	1881	0.1450	8.680×10^{-8}	0.8374	9.429×10^{-4}	10,863	0.00070
40	876.0	1964	0.1444	8.391×10^{-8}	0.2177	2.485×10^{-4}	2,962	0.00070
60	863.9	2048	0.1404	7.934×10^{-8}	0.07399	8.565×10^{-5}	1,080	0.00070
80	852.0	2132	0.1380	7.599×10^{-8}	0.03232	3.794×10^{-5}	499.3	0.00070
100	840.0	2220	0.1367	7.330×10^{-8}	0.01718	2.046×10^{-5}	279.1	0.00070
120	828.9	2308	0.1347	7.042×10^{-8}	0.01029	1.241×10^{-5}	176.3	0.00070
140	816.8	2395	0.1330	6.798×10^{-8}	0.006558	8.029×10^{-6}	118.1	0.00070
150	810.3	2441	0.1327	6.708×10^{-8}	0.005344	6.595×10^{-6}	98.31	0.00070

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Originalmente con base en diversas fuentes.

TABLA A-8

Propiedades de metales líquidos

Temp. T, °C	Densidad ρ, kg/m^3	Calor específ. c_p, J/kg · K	Conductividad térmica k, W/m · K	Difusividad térmica α, m^2/s	Viscosidad dinámica μ, kg/m · s	Viscosidad cinemática ν, m^2/s	Número de Prandtl Pr	Coef. de expansión volumétrica β, 1/K
				Punto de fusión del mercurio (Hg): −39°C				
0	13595	140.4	8.18200	4.287×10^{-6}	1.687×10^{-3}	1.241×10^{-7}	0.0289	1.810×10^{-4}
25	13534	139.4	8.51533	4.514×10^{-6}	1.534×10^{-3}	1.133×10^{-7}	0.0251	1.810×10^{-4}
50	13473	138.6	8.83632	4.734×10^{-6}	1.423×10^{-3}	1.056×10^{-7}	0.0223	1.810×10^{-4}
75	13412	137.8	9.15632	4.956×10^{-6}	1.316×10^{-3}	9.819×10^{-8}	0.0198	1.810×10^{-4}
100	13351	137.1	9.46706	5.170×10^{-6}	1.245×10^{-3}	9.326×10^{-8}	0.0180	1.810×10^{-4}
150	13231	136.1	10.07780	5.595×10^{-6}	1.126×10^{-3}	8.514×10^{-8}	0.0152	1.810×10^{-4}
200	13112	135.5	10.65465	5.996×10^{-6}	1.043×10^{-3}	7.959×10^{-8}	0.0133	1.815×10^{-4}
250	12993	135.3	11.18150	6.363×10^{-6}	9.820×10^{-4}	7.558×10^{-8}	0.0119	1.829×10^{-4}
300	12873	135.3	11.68150	6.705×10^{-6}	9.336×10^{-4}	7.252×10^{-8}	0.0108	1.854×10^{-4}
				Punto de fusión del bismuto (Bi): 271°C				
350	9969	146.0	16.28	1.118×10^{-5}	1.540×10^{-3}	1.545×10^{-7}	0.01381	
400	9908	148.2	16.10	1.096×10^{-5}	1.422×10^{-3}	1.436×10^{-7}	0.01310	
500	9785	152.8	15.74	1.052×10^{-5}	1.188×10^{-3}	1.215×10^{-7}	0.01154	
600	9663	157.3	15.60	1.026×10^{-5}	1.013×10^{-3}	1.048×10^{-7}	0.01022	
700	9540	161.8	15.60	1.010×10^{-5}	8.736×10^{-4}	9.157×10^{-8}	0.00906	
				Punto de fusión del plomo (Pb): 327°C				
400	10506	158	15.97	9.623×10^{-6}	2.277×10^{-3}	2.167×10^{-7}	0.02252	
450	10449	156	15.74	9.649×10^{-6}	2.065×10^{-3}	1.976×10^{-7}	0.02048	
500	10390	155	15.54	9.651×10^{-6}	1.884×10^{-3}	1.814×10^{-7}	0.01879	
550	10329	155	15.39	9.610×10^{-6}	1.758×10^{-3}	1.702×10^{-7}	0.01771	
600	10267	155	15.23	9.568×10^{-6}	1.632×10^{-3}	1.589×10^{-7}	0.01661	
650	10206	155	15.07	9.526×10^{-6}	1.505×10^{-3}	1.475×10^{-7}	0.01549	
700	10145	155	14.91	9.483×10^{-6}	1.379×10^{-3}	1.360×10^{-7}	0.01434	
				Punto de fusión del sodio (Na): 98°C				
100	927.3	1378	85.84	6.718×10^{-5}	6.892×10^{-4}	7.432×10^{-7}	0.01106	
200	902.5	1349	80.84	6.639×10^{-5}	5.385×10^{-4}	5.967×10^{-7}	0.008987	
300	877.8	1320	75.84	6.544×10^{-5}	3.878×10^{-4}	4.418×10^{-7}	0.006751	
400	853.0	1296	71.20	6.437×10^{-5}	2.720×10^{-4}	3.188×10^{-7}	0.004953	
500	828.5	1284	67.41	6.335×10^{-5}	2.411×10^{-4}	2.909×10^{-7}	0.004593	
600	804.0	1272	63.63	6.220×10^{-5}	2.101×10^{-4}	2.614×10^{-7}	0.004202	
				Punto de fusión del potasio (K): 64°C				
200	795.2	790.8	43.99	6.995×10^{-5}	3.350×10^{-4}	4.213×10^{-7}	0.006023	
300	771.6	772.8	42.01	7.045×10^{-5}	2.667×10^{-4}	3.456×10^{-7}	0.004906	
400	748.0	754.8	40.03	7.090×10^{-5}	1.984×10^{-4}	2.652×10^{-7}	0.00374	
500	723.9	750.0	37.81	6.964×10^{-5}	1.668×10^{-4}	2.304×10^{-7}	0.003309	
600	699.6	750.0	35.50	6.765×10^{-5}	1.487×10^{-4}	2.126×10^{-7}	0.003143	
				Punto de fusión: sodio-potasio (22 por ciento Na-78 por ciento K): −11°C				
100	847.3	944.4	25.64	3.205×10^{-5}	5.707×10^{-4}	6.736×10^{-7}	0.02102	
200	823.2	922.5	26.27	3.459×10^{-5}	4.587×10^{-4}	5.572×10^{-7}	0.01611	
300	799.1	900.6	26.89	3.736×10^{-5}	3.467×10^{-4}	4.339×10^{-7}	0.01161	
400	775.0	879.0	27.50	4.037×10^{-5}	2.357×10^{-4}	3.041×10^{-7}	0.00753	
500	751.5	880.1	27.89	4.217×10^{-5}	2.108×10^{-4}	2.805×10^{-7}	0.00665	
600	728.0	881.2	28.28	4.408×10^{-5}	1.859×10^{-4}	2.553×10^{-7}	0.00579	

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Originalmente con base en diversas fuentes.

TABLA A-9

Propiedades del aire a 1 atm de presión

Temp. T, °C	Densidad ρ, kg/m^3	Calor específico c_p J/kg · K	Conductividad térmica k, W/m · K	Difusividad térmica α, m^2/s	Viscosidad dinámica μ, kg/m · s	Viscosidad cinemática ν, m^2/s	Número de Prandtl Pr
−150	2.866	983	0.01171	4.158×10^{-6}	8.636×10^{-6}	3.013×10^{-6}	0.7246
−100	2.038	966	0.01582	8.036×10^{-6}	1.189×10^{-6}	5.837×10^{-6}	0.7263
−50	1.582	999	0.01979	1.252×10^{-5}	1.474×10^{-5}	9.319×10^{-6}	0.7440
−40	1.514	1002	0.02057	1.356×10^{-5}	1.527×10^{-5}	1.008×10^{-5}	0.7436
−30	1.451	1004	0.02134	1.465×10^{-5}	1.579×10^{-5}	1.087×10^{-5}	0.7425
−20	1.394	1005	0.02211	1.578×10^{-5}	1.630×10^{-5}	1.169×10^{-5}	0.7408
−10	1.341	1006	0.02288	1.696×10^{-5}	1.680×10^{-5}	1.252×10^{-5}	0.7387
0	1.292	1006	0.02364	1.818×10^{-5}	1.729×10^{-5}	1.338×10^{-5}	0.7362
5	1.269	1006	0.02401	1.880×10^{-5}	1.754×10^{-5}	1.382×10^{-5}	0.7350
10	1.246	1006	0.02439	1.944×10^{-5}	1.778×10^{-5}	1.426×10^{-5}	0.7336
15	1.225	1007	0.02476	2.009×10^{-5}	1.802×10^{-5}	1.470×10^{-5}	0.7323
20	1.204	1007	0.02514	2.074×10^{-5}	1.825×10^{-5}	1.516×10^{-5}	0.7309
25	1.184	1007	0.02551	2.141×10^{-5}	1.849×10^{-5}	1.562×10^{-5}	0.7296
30	1.164	1007	0.02588	2.208×10^{-5}	1.872×10^{-5}	1.608×10^{-5}	0.7282
35	1.145	1007	0.02625	2.277×10^{-5}	1.895×10^{-5}	1.655×10^{-5}	0.7268
40	1.127	1007	0.02662	2.346×10^{-5}	1.918×10^{-5}	1.702×10^{-5}	0.7255
45	1.109	1007	0.02699	2.416×10^{-5}	1.941×10^{-5}	1.750×10^{-5}	0.7241
50	1.092	1007	0.02735	2.487×10^{-5}	1.963×10^{-5}	1.798×10^{-5}	0.7228
60	1.059	1007	0.02808	2.632×10^{-5}	2.008×10^{-5}	1.896×10^{-5}	0.7202
70	1.028	1007	0.02881	2.780×10^{-5}	2.052×10^{-5}	1.995×10^{-5}	0.7177
80	0.9994	1008	0.02953	2.931×10^{-5}	2.096×10^{-5}	2.097×10^{-5}	0.7154
90	0.9718	1008	0.03024	3.086×10^{-5}	2.139×10^{-5}	2.201×10^{-5}	0.7132
100	0.9458	1009	0.03095	3.243×10^{-5}	2.181×10^{-5}	2.306×10^{-5}	0.7111
120	0.8977	1011	0.03235	3.565×10^{-5}	2.264×10^{-5}	2.522×10^{-5}	0.7073
140	0.8542	1013	0.03374	3.898×10^{-5}	2.345×10^{-5}	2.745×10^{-5}	0.7041
160	0.8148	1016	0.03511	4.241×10^{-5}	2.420×10^{-5}	2.975×10^{-5}	0.7014
180	0.7788	1019	0.03646	4.593×10^{-5}	2.504×10^{-5}	3.212×10^{-5}	0.6992
200	0.7459	1023	0.03779	4.954×10^{-5}	2.577×10^{-5}	3.455×10^{-5}	0.6974
250	0.6746	1033	0.04104	5.890×10^{-5}	2.760×10^{-5}	4.091×10^{-5}	0.6946
300	0.6158	1044	0.04418	6.871×10^{-5}	2.934×10^{-5}	4.765×10^{-5}	0.6935
350	0.5664	1056	0.04721	7.892×10^{-5}	3.101×10^{-5}	5.475×10^{-5}	0.6937
400	0.5243	1069	0.05015	8.951×10^{-5}	3.261×10^{-5}	6.219×10^{-5}	0.6948
450	0.4880	1081	0.05298	1.004×10^{-4}	3.415×10^{-5}	6.997×10^{-5}	0.6965
500	0.4565	1093	0.05572	1.117×10^{-4}	3.563×10^{-5}	7.806×10^{-5}	0.6986
600	0.4042	1115	0.06093	1.352×10^{-4}	3.846×10^{-5}	9.515×10^{-5}	0.7037
700	0.3627	1135	0.06581	1.598×10^{-4}	4.111×10^{-5}	1.133×10^{-4}	0.7092
800	0.3289	1153	0.07037	1.855×10^{-4}	4.362×10^{-5}	1.326×10^{-4}	0.7149
900	0.3008	1169	0.07465	2.122×10^{-4}	4.600×10^{-5}	1.529×10^{-4}	0.7206
1000	0.2772	1184	0.07868	2.398×10^{-4}	4.826×10^{-5}	1.741×10^{-4}	0.7260
1500	0.1990	1234	0.09599	3.908×10^{-4}	5.817×10^{-5}	2.922×10^{-4}	0.7478
2000	0.1553	1264	0.11113	5.664×10^{-4}	6.630×10^{-5}	4.270×10^{-4}	0.7539

Nota: Para gases ideales, c_p, k, μ y Pr son independientes de la presión. Las propiedades ρ, ν y α a una presión P distinta a 1 atm se determinan cuando se multiplican los valores de ρ a la temperatura dada por P (en atm) y cuando se dividen ν y α entre P (en atm).

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Fuentes originales:: Keenan, Chaos, Keyes, Gas Tables, Wiley, 198; and Thermophysical Properties of Matter, Vol. 3: Thermal Conductivity, Y. S. Touloukian, P. E. Liley, S. C. Saxena, Vol. 11: Viscosity, Y. S. Touloukian, S. C. Saxena, y P. Hestermans, IFI/Plenun, NY, 1970, ISBN 0-306067020-8.

TABLA A-10

Propiedades de gases a 1 atm de presión

Temp. T, °C	Densidad ρ, kg/m^3	Calor específico c_p J/kg · K	Conductividad térmica k, W/m · K	Difusividad térmica α, m^2/s	Viscosidad dinámica μ, kg/m · s	Viscosidad cinemática ν, m^2/s	Número de Prandtl Pr
			Dióxido de carbono , CO_2				
−50	2.4035	746	0.01051	5.860×10^{-6}	1.129×10^{-5}	4.699×10^{-6}	0.8019
0	1.9635	811	0.01456	9.141×10^{-6}	1.375×10^{-5}	7.003×10^{-6}	0.7661
50	1.6597	866.6	0.01858	1.291×10^{-5}	1.612×10^{-5}	9.714×10^{-6}	0.7520
100	1.4373	914.8	0.02257	1.716×10^{-5}	1.841×10^{-5}	1.281×10^{-5}	0.7464
150	1.2675	957.4	0.02652	2.186×10^{-5}	2.063×10^{-5}	1.627×10^{-5}	0.7445
200	1.1336	995.2	0.03044	2.698×10^{-5}	2.276×10^{-5}	2.008×10^{-5}	0.7442
300	0.9358	1060	0.03814	3.847×10^{-5}	2.682×10^{-5}	2.866×10^{-5}	0.7450
400	0.7968	1112	0.04565	5.151×10^{-5}	3.061×10^{-5}	3.842×10^{-5}	0.7458
500	0.6937	1156	0.05293	6.600×10^{-5}	3.416×10^{-5}	4.924×10^{-5}	0.7460
1000	0.4213	1292	0.08491	1.560×10^{-4}	4.898×10^{-5}	1.162×10^{-4}	0.7455
1500	0.3025	1356	0.10688	2.606×10^{-4}	6.106×10^{-5}	2.019×10^{-4}	0.7745
2000	0.2359	1387	0.11522	3.521×10^{-4}	7.322×10^{-5}	3.103×10^{-4}	0.8815
			Monóxido de carbono, CO				
−50	1.5297	1081	0.01901	1.149×10^{-5}	1.378×10^{-5}	9.012×10^{-6}	0.7840
0	1.2497	1048	0.02278	1.739×10^{-5}	1.629×10^{-5}	1.303×10^{-5}	0.7499
50	1.0563	1039	0.02641	2.407×10^{-5}	1.863×10^{-5}	1.764×10^{-5}	0.7328
100	0.9148	1041	0.02992	3.142×10^{-5}	2.080×10^{-5}	2.274×10^{-5}	0.7239
150	0.8067	1049	0.03330	3.936×10^{-5}	2.283×10^{-5}	2.830×10^{-5}	0.7191
200	0.7214	1060	0.03656	4.782×10^{-5}	2.472×10^{-5}	3.426×10^{-5}	0.7164
300	0.5956	1085	0.04277	6.619×10^{-5}	2.812×10^{-5}	4.722×10^{-5}	0.7134
400	0.5071	1111	0.04860	8.628×10^{-5}	3.111×10^{-5}	6.136×10^{-5}	0.7111
500	0.4415	1135	0.05412	1.079×10^{-4}	3.379×10^{-5}	7.653×10^{-5}	0.7087
1000	0.2681	1226	0.07894	2.401×10^{-4}	4.557×10^{-5}	1.700×10^{-4}	0.7080
1500	0.1925	1279	0.10458	4.246×10^{-4}	6.321×10^{-5}	3.284×10^{-4}	0.7733
2000	0.1502	1309	0.13833	7.034×10^{-4}	9.826×10^{-5}	6.543×10^{-4}	0.9302
			Metano, CH_4				
−50	0.8761	2243	0.02367	1.204×10^{-5}	8.564×10^{-6}	9.774×10^{-6}	0.8116
0	0.7158	2217	0.03042	1.917×10^{-5}	1.028×10^{-5}	1.436×10^{-5}	0.7494
50	0.6050	2302	0.03766	2.704×10^{-5}	1.191×10^{-5}	1.969×10^{-5}	0.7282
100	0.5240	2443	0.04534	3.543×10^{-5}	1.345×10^{-5}	2.567×10^{-5}	0.7247
150	0.4620	2611	0.05344	4.431×10^{-5}	1.491×10^{-5}	3.227×10^{-5}	0.7284
200	0.4132	2791	0.06194	5.370×10^{-5}	1.630×10^{-5}	3.944×10^{-5}	0.7344
300	0.3411	3158	0.07996	7.422×10^{-5}	1.886×10^{-5}	5.529×10^{-5}	0.7450
400	0.2904	3510	0.09918	9.727×10^{-5}	2.119×10^{-5}	7.297×10^{-5}	0.7501
500	0.2529	3836	0.11933	1.230×10^{-4}	2.334×10^{-5}	9.228×10^{-5}	0.7502
1000	0.1536	5042	0.22562	2.914×10^{-4}	3.281×10^{-5}	2.136×10^{-4}	0.7331
1500	0.1103	5701	0.31857	5.068×10^{-4}	4.434×10^{-5}	4.022×10^{-4}	0.7936
2000	0.0860	6001	0.36750	7.120×10^{-4}	6.360×10^{-5}	7.395×10^{-4}	1.0386
			Hidrógeno, H_2				
−50	0.11010	12635	0.1404	1.009×10^{-4}	7.293×10^{-6}	6.624×10^{-5}	0.6562
0	0.08995	13920	0.1652	1.319×10^{-4}	8.391×10^{-6}	9.329×10^{-5}	0.7071
50	0.07603	14349	0.1881	1.724×10^{-4}	9.427×10^{-6}	1.240×10^{-4}	0.7191
100	0.06584	14473	0.2095	2.199×10^{-4}	1.041×10^{-5}	1.582×10^{-4}	0.7196
150	0.05806	14492	0.2296	2.729×10^{-4}	1.136×10^{-5}	1.957×10^{-4}	0.7174
200	0.05193	14482	0.2486	3.306×10^{-4}	1.228×10^{-5}	2.365×10^{-4}	0.7155
300	0.04287	14481	0.2843	4.580×10^{-4}	1.403×10^{-5}	3.274×10^{-4}	0.7149
400	0.03650	14540	0.3180	5.992×10^{-4}	1.570×10^{-5}	4.302×10^{-4}	0.7179
500	0.03178	14653	0.3509	7.535×10^{-4}	1.730×10^{-5}	5.443×10^{-4}	0.7224
1000	0.01930	15577	0.5206	1.732×10^{-3}	2.455×10^{-5}	1.272×10^{-3}	0.7345
1500	0.01386	16553	0.6581	2.869×10^{-3}	3.099×10^{-5}	2.237×10^{-3}	0.7795
2000	0.01081	17400	0.5480	2.914×10^{-3}	3.690×10^{-5}	3.414×10^{-3}	1.1717

(*Continúa*)

TABLA A-10

Propiedades de gases a 1 atm de presión (*continuación*)

Temp. T, °C	Densidad ρ, kg/m^3	Calor específico c_p J/kg · K	Conductividad térmica k, W/m · K	Difusividad térmica α, m^2/s	Viscosidad dinámica μ, kg/m · s	Viscosidad cinemática ν, m^2/s	Número de Prandtl Pr
				Nitrógeno, N_2			
−50	1.5299	957.3	0.02001	1.366×10^{-5}	1.390×10^{-5}	9.091×10^{-6}	0.6655
0	1.2498	1035	0.02384	1.843×10^{-5}	1.640×10^{-5}	1.312×10^{-5}	0.7121
50	1.0564	1042	0.02746	2.494×10^{-5}	1.874×10^{-5}	1.774×10^{-5}	0.7114
100	0.9149	1041	0.03090	3.244×10^{-5}	2.094×10^{-5}	2.289×10^{-5}	0.7056
150	0.8068	1043	0.03416	4.058×10^{-5}	2.300×10^{-5}	2.851×10^{-5}	0.7025
200	0.7215	1050	0.03727	4.921×10^{-5}	2.494×10^{-5}	3.457×10^{-5}	0.7025
300	0.5956	1070	0.04309	6.758×10^{-5}	2.849×10^{-5}	4.783×10^{-5}	0.7078
400	0.5072	1095	0.04848	8.727×10^{-5}	3.166×10^{-5}	6.242×10^{-5}	0.7153
500	0.4416	1120	0.05358	1.083×10^{-4}	3.451×10^{-5}	7.816×10^{-5}	0.7215
1000	0.2681	1213	0.07938	2.440×10^{-4}	4.594×10^{-5}	1.713×10^{-4}	0.7022
1500	0.1925	1266	0.11793	4.839×10^{-4}	5.562×10^{-5}	2.889×10^{-4}	0.5969
2000	0.1502	1297	0.18590	9.543×10^{-4}	6.426×10^{-5}	4.278×10^{-4}	0.4483
				Oxígeno, O_2			
−50	1.7475	984.4	0.02067	1.201×10^{-5}	1.616×10^{-5}	9.246×10^{-6}	0.7694
0	1.4277	928.7	0.02472	1.865×10^{-5}	1.916×10^{-5}	1.342×10^{-5}	0.7198
50	1.2068	921.7	0.02867	2.577×10^{-5}	2.194×10^{-5}	1.818×10^{-5}	0.7053
100	1.0451	931.8	0.03254	3.342×10^{-5}	2.451×10^{-5}	2.346×10^{-5}	0.7019
150	0.9216	947.6	0.03637	4.164×10^{-5}	2.694×10^{-5}	2.923×10^{-5}	0.7019
200	0.8242	964.7	0.04014	5.048×10^{-5}	2.923×10^{-5}	3.546×10^{-5}	0.7025
300	0.6804	997.1	0.04751	7.003×10^{-5}	3.350×10^{-5}	4.923×10^{-5}	0.7030
400	0.5793	1025	0.05463	9.204×10^{-5}	3.744×10^{-5}	6.463×10^{-5}	0.7023
500	0.5044	1048	0.06148	1.163×10^{-4}	4.114×10^{-5}	8.156×10^{-5}	0.7010
1000	0.3063	1121	0.09198	2.678×10^{-4}	5.732×10^{-5}	1.871×10^{-4}	0.6986
1500	0.2199	1165	0.11901	4.643×10^{-4}	7.133×10^{-5}	3.243×10^{-4}	0.6985
2000	0.1716	1201	0.14705	7.139×10^{-4}	8.417×10^{-5}	4.907×10^{-4}	0.6873
				Vapor de agua, H_2O			
−50	0.9839	1892	0.01353	7.271×10^{-6}	7.187×10^{-6}	7.305×10^{-6}	1.0047
0	0.8038	1874	0.01673	1.110×10^{-5}	8.956×10^{-6}	1.114×10^{-5}	1.0033
50	0.6794	1874	0.02032	1.596×10^{-5}	1.078×10^{-5}	1.587×10^{-5}	0.9944
100	0.5884	1887	0.02429	2.187×10^{-5}	1.265×10^{-5}	2.150×10^{-5}	0.9830
150	0.5189	1908	0.02861	2.890×10^{-5}	1.456×10^{-5}	2.806×10^{-5}	0.9712
200	0.4640	1935	0.03326	3.705×10^{-5}	1.650×10^{-5}	3.556×10^{-5}	0.9599
300	0.3831	1997	0.04345	5.680×10^{-5}	2.045×10^{-5}	5.340×10^{-5}	0.9401
400	0.3262	2066	0.05467	8.114×10^{-5}	2.446×10^{-5}	7.498×10^{-5}	0.9240
500	0.2840	2137	0.06677	1.100×10^{-4}	2.847×10^{-5}	1.002×10^{-4}	0.9108
1000	0.1725	2471	0.13623	3.196×10^{-4}	4.762×10^{-5}	2.761×10^{-4}	0.8639
1500	0.1238	2736	0.21301	6.288×10^{-4}	6.411×10^{-5}	5.177×10^{-4}	0.8233
2000	0.0966	2928	0.29183	1.032×10^{-3}	7.808×10^{-5}	8.084×10^{-4}	0.7833

Nota: Para gases ideales, las propiedades c_p, k, μ y Pr son independientes de la presión. Las propiedades ρ, ν, y α a una presión P distinta a 1 atm se determinan cuando se multiplican los valores de ρ a la temperatura dada por P (en atm) y cuando se dividen ν y α entre P (en atm).

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Originalmente con base en diversas fuentes.

TABLA A-11

Propiedades de la atmósfera a gran altitud

Altitud, m	Temperatura, °C	Presión, kPa	Gravedad g, m/s^2	Velocidad del sonido, m/s	Densidad, kg/m^3	Viscosidad μ, kg/m · s	Conductividad térmica, W/m · K
0	15.00	101.33	9.807	340.3	1.225	1.789×10^{-5}	0.0253
200	13.70	98.95	9.806	339.5	1.202	1.783×10^{-5}	0.0252
400	12.40	96.61	9.805	338.8	1.179	1.777×10^{-5}	0.0252
600	11.10	94.32	9.805	338.0	1.156	1.771×10^{-5}	0.0251
800	9.80	92.08	9.804	337.2	1.134	1.764×10^{-5}	0.0250
1000	8.50	89.88	9.804	336.4	1.112	1.758×10^{-5}	0.0249
1200	7.20	87.72	9.803	335.7	1.090	1.752×10^{-5}	0.0248
1400	5.90	85.60	9.802	334.9	1.069	1.745×10^{-5}	0.0247
1600	4.60	83.53	9.802	334.1	1.048	1.739×10^{-5}	0.0245
1800	3.30	81.49	9.801	333.3	1.027	1.732×10^{-5}	0.0244
2000	2.00	79.50	9.800	332.5	1.007	1.726×10^{-5}	0.0243
2200	0.70	77.55	9.800	331.7	0.987	1.720×10^{-5}	0.0242
2400	−0.59	75.63	9.799	331.0	0.967	1.713×10^{-5}	0.0241
2600	−1.89	73.76	9.799	330.2	0.947	1.707×10^{-5}	0.0240
2800	−3.19	71.92	9.798	329.4	0.928	1.700×10^{-5}	0.0239
3000	−4.49	70.12	9.797	328.6	0.909	1.694×10^{-5}	0.0238
3200	−5.79	68.36	9.797	327.8	0.891	1.687×10^{-5}	0.0237
3400	−7.09	66.63	9.796	327.0	0.872	1.681×10^{-5}	0.0236
3600	−8.39	64.94	9.796	326.2	0.854	1.674×10^{-5}	0.0235
3800	−9.69	63.28	9.795	325.4	0.837	1.668×10^{-5}	0.0234
4000	−10.98	61.66	9.794	324.6	0.819	1.661×10^{-5}	0.0233
4200	−12.3	60.07	9.794	323.8	0.802	1.655×10^{-5}	0.0232
4400	−13.6	58.52	9.793	323.0	0.785	1.648×10^{-5}	0.0231
4600	−14.9	57.00	9.793	322.2	0.769	1.642×10^{-5}	0.0230
4800	−16.2	55.51	9.792	321.4	0.752	1.635×10^{-5}	0.0229
5000	−17.5	54.05	9.791	320.5	0.736	1.628×10^{-5}	0.0228
5200	−18.8	52.62	9.791	319.7	0.721	1.622×10^{-5}	0.0227
5400	−20.1	51.23	9.790	318.9	0.705	1.615×10^{-5}	0.0226
5600	−21.4	49.86	9.789	318.1	0.690	1.608×10^{-5}	0.0224
5800	−22.7	48.52	9.785	317.3	0.675	1.602×10^{-5}	0.0223
6000	−24.0	47.22	9.788	316.5	0.660	1.595×10^{-5}	0.0222
6200	−25.3	45.94	9.788	315.6	0.646	1.588×10^{-5}	0.0221
6400	−26.6	44.69	9.787	314.8	0.631	1.582×10^{-5}	0.0220
6600	−27.9	43.47	9.786	314.0	0.617	1.575×10^{-5}	0.0219
6800	−29.2	42.27	9.785	313.1	0.604	1.568×10^{-5}	0.0218
7000	−30.5	41.11	9.785	312.3	0.590	1.561×10^{-5}	0.0217
8000	−36.9	35.65	9.782	308.1	0.526	1.527×10^{-5}	0.0212
9000	−43.4	30.80	9.779	303.8	0.467	1.493×10^{-5}	0.0206
10,000	−49.9	26.50	9.776	299.5	0.414	1.458×10^{-5}	0.0201
12,000	−56.5	19.40	9.770	295.1	0.312	1.422×10^{-5}	0.0195
14,000	−56.5	14.17	9.764	295.1	0.228	1.422×10^{-5}	0.0195
16,000	−56.5	10.53	9.758	295.1	0.166	1.422×10^{-5}	0.0195
18,000	−56.5	7.57	9.751	295.1	0.122	1.422×10^{-5}	0.0195

Fuente: U.S. Standard Atmosphere Supplements, U.S. Government Printing Office, 1966. Con base en condiciones medias todo el año a 45° de latitud y que varían con la época del año y los patrones del clima. Se considera que las condiciones a nivel del mar (z = 0) son P = 101.325 kPa, T = 15°C, ρ = 1.2250 kg/m^3, g = 9.80665 m^2/s.

Material	Rugosidad, ft	mm
Vidrio, plástico	0	0
Concreto	0.003–0.03	0.9–9
Duela de madera	0.0016	0.5
Hule, alisado	0.000033	0.01
Tubería de cobre o latón	0.000005	0.0015
Hierro fundido	0.00085	0.26
Hierro galvanizado	0.0005	0.15
Hierro pudelado	0.00015	0.046
Acero inoxidable	0.000007	0.002
Acero comercial	0.00015	0.045

FIGURA A-12

El diagrama de Moody para el factor fricción para flujo totalmente desarrollado en tuberías circulares para usar en la relación de pérdida de carga $h_L = f\dfrac{L}{D}\dfrac{V^2}{2g}$. Los factores de fricción en el flujo turbulento se evalúan a partir de la ecuación de Colebrook $\dfrac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\dfrac{\varepsilon/D}{3.7} + \dfrac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$.

TABLA A-13

Funciones de flujo copresible isentrrópico unidimensional para un gas ideal con $k = 1.4$

Ma	Ma*	A/A^*	P/P_0	ρ/ρ_0	T/T_0
0	0	∞	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.1094	5.8218	0.9930	0.9950	0.9980
0.2	0.2182	2.9635	0.9725	0.9803	0.9921
0.3	0.3257	2.0351	0.9395	0.9564	0.9823
0.4	0.4313	1.5901	0.8956	0.9243	0.9690
0.5	0.5345	1.3398	0.8430	0.8852	0.9524
0.6	0.6348	1.1882	0.7840	0.8405	0.9328
0.7	0.7318	1.0944	0.7209	0.7916	0.9107
0.8	0.8251	1.0382	0.6560	0.7400	0.8865
0.9	0.9146	1.0089	0.5913	0.6870	0.8606
1.0	1.0000	1.0000	0.5283	0.6339	0.8333
1.2	1.1583	1.0304	0.4124	0.5311	0.7764
1.4	1.2999	1.1149	0.3142	0.4374	0.7184
1.6	1.4254	1.2502	0.2353	0.3557	0.6614
1.8	1.5360	1.4390	0.1740	0.2868	0.6068
2.0	1.6330	1.6875	0.1278	0.2300	0.5556
2.2	1.7179	2.0050	0.0935	0.1841	0.5081
2.4	1.7922	2.4031	0.0684	0.1472	0.4647
2.6	1.8571	2.8960	0.0501	0.1179	0.4252
2.8	1.9140	3.5001	0.0368	0.0946	0.3894
3.0	1.9640	4.2346	0.0272	0.0760	0.3571
5.0	2.2361	25.000	0.0019	0.0113	0.1667
∝	2.2495	∝	0	0	0

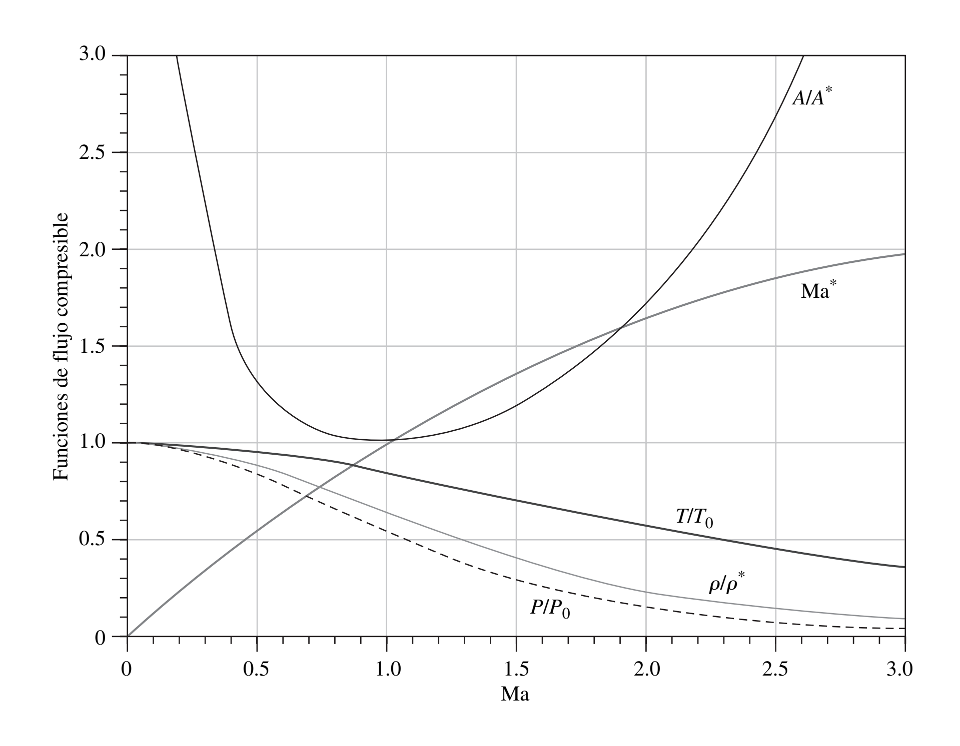
$$\text{Ma}^* = \text{Ma}\sqrt{\frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2}}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\text{Ma}}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right)\right]^{0.5(k+1)/(k-1)}$$

$$\frac{P}{P_0} = \left(1+\frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right)^{-k/(k-1)}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1+\frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right)^{-1/(k-1)}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1+\frac{k-1}{2}\text{Ma}^2\right)^{-1}$$



$$T_{01} = T_{02}$$

$$\mathrm{Ma}_2 = \sqrt{\frac{(k-1)\mathrm{Ma}_1^2 + 2}{2k\mathrm{Ma}_1^2 - k + 1}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k\mathrm{Ma}_1^2}{1 + k\mathrm{Ma}_2^2} = \frac{2k\mathrm{Ma}_1^2 - k + 1}{k + 1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2/P_1}{T_2/T_1} = \frac{(k+1)\mathrm{Ma}_1^2}{2 + (k-1)\mathrm{Ma}_1^2} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + \mathrm{Ma}_1^2(k-1)}{2 + \mathrm{Ma}_2^2(k-1)}$$

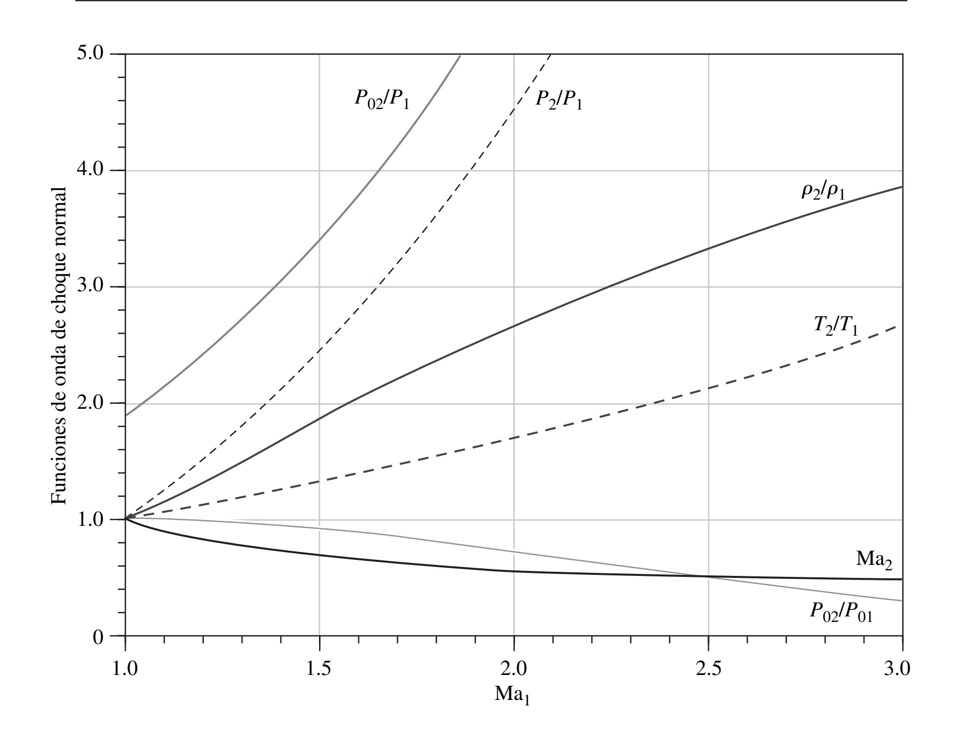
$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\mathrm{Ma}_1}{\mathrm{Ma}_2}\left[\frac{1 + \mathrm{Ma}_2^2(k-1)/2}{1 + \mathrm{Ma}_1^2(k-1)/2}\right]^{(k+1)/[2(k-1)]}$$

$$\frac{P_{02}}{P_1} = \frac{(1 + k\mathrm{Ma}_1^2)[1 + \mathrm{Ma}_2^2(k-1)/2]^{k/(k-1)}}{1 + k\mathrm{Ma}_2^2}$$

TABLA A-14

Funciones de onda de choque normal unidimensional para un gas ideal con $k = 1.4$

Ma_1	Ma_2	P_2/P_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	P_{02}/P_{01}	P_{02}/P_1
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.8929
1.1	0.9118	1.2450	1.1691	1.0649	0.9989	2.1328
1.2	0.8422	1.5133	1.3416	1.1280	0.9928	2.4075
1.3	0.7860	1.8050	1.5157	1.1909	0.9794	2.7136
1.4	0.7397	2.1200	1.6897	1.2547	0.9582	3.0492
1.5	0.7011	2.4583	1.8621	1.3202	0.9298	3.4133
1.6	0.6684	2.8200	2.0317	1.3880	0.8952	3.8050
1.7	0.6405	3.2050	2.1977	1.4583	0.8557	4.2238
1.8	0.6165	3.6133	2.3592	1.5316	0.8127	4.6695
1.9	0.5956	4.0450	2.5157	1.6079	0.7674	5.1418
2.0	0.5774	4.5000	2.6667	1.6875	0.7209	5.6404
2.1	0.5613	4.9783	2.8119	1.7705	0.6742	6.1654
2.2	0.5471	5.4800	2.9512	1.8569	0.6281	6.7165
2.3	0.5344	6.0050	3.0845	1.9468	0.5833	7.2937
2.4	0.5231	6.5533	3.2119	2.0403	0.5401	7.8969
2.5	0.5130	7.1250	3.3333	2.1375	0.4990	8.5261
2.6	0.5039	7.7200	3.4490	2.2383	0.4601	9.1813
2.7	0.4956	8.3383	3.5590	2.3429	0.4236	9.8624
2.8	0.4882	8.9800	3.6636	2.4512	0.3895	10.5694
2.9	0.4814	9.6450	3.7629	2.5632	0.3577	11.3022
3.0	0.4752	10.3333	3.8571	2.6790	0.3283	12.0610
4.0	0.4350	18.5000	4.5714	4.0469	0.1388	21.0681
5.0	0.4152	29.000	5.0000	5.8000	0.0617	32.6335
∞	0.3780	∞	6.0000	∞	0	∞



$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(k+1)\text{Ma}^2[2+(k-1)\text{Ma}^2]}{(1+k\text{Ma}^2)^2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{k+1}{1+k\text{Ma}^2}\left(\frac{2+(k-1)\text{Ma}^2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

$$\frac{T}{T^*} = \left(\frac{\text{Ma}(1+k)}{1+k\text{Ma}^2}\right)^2$$

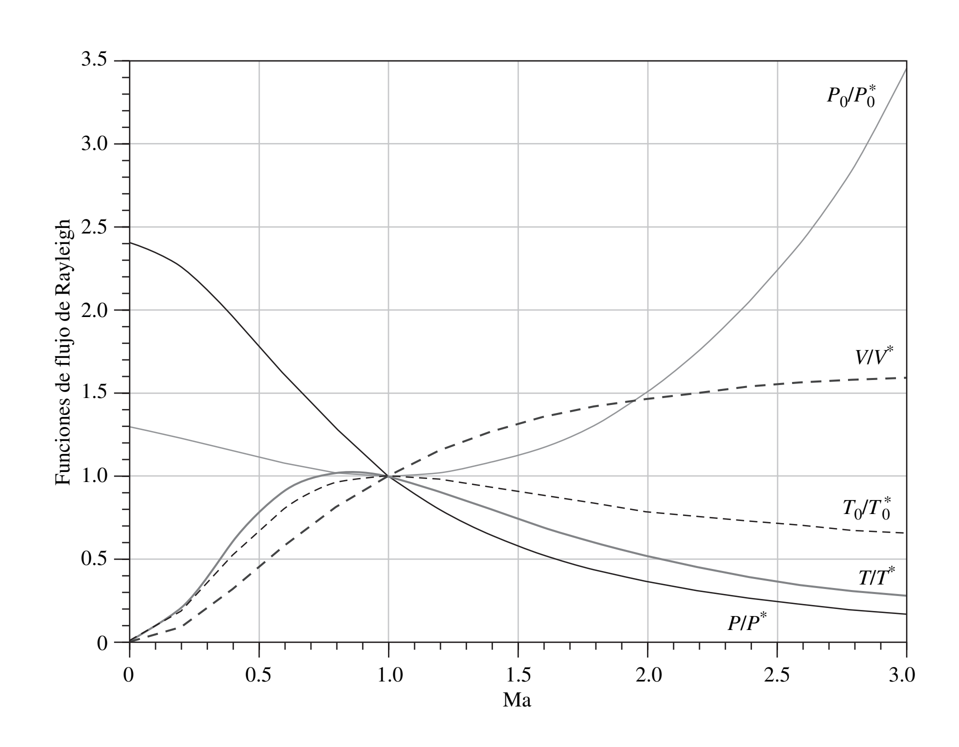
$$\frac{P}{P^*} = \frac{1+k}{1+k\text{Ma}^2}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(1+k)\text{Ma}^2}{1+k\text{Ma}^2}$$

TABLA A-15

Funciones de flujo de Rayleigh para un gas ideal con $k = 1.4$

Ma	T_0/T_0^*	P_0/P_0^*	T/T^*	P/P^*	V/V^*
0.0	0.0000	1.2679	0.0000	2.4000	0.0000
0.1	0.0468	1.2591	0.0560	2.3669	0.0237
0.2	0.1736	1.2346	0.2066	2.2727	0.0909
0.3	0.3469	1.1985	0.4089	2.1314	0.1918
0.4	0.5290	1.1566	0.6151	1.9608	0.3137
0.5	0.6914	1.1141	0.7901	1.7778	0.4444
0.6	0.8189	1.0753	0.9167	1.5957	0.5745
0.7	0.9085	1.0431	0.9929	1.4235	0.6975
0.8	0.9639	1.0193	1.0255	1.2658	0.8101
0.9	0.9921	1.0049	1.0245	1.1246	0.9110
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.2	0.9787	1.0194	0.9118	0.7958	1.1459
1.4	0.9343	1.0777	0.8054	0.6410	1.2564
1.6	0.8842	1.1756	0.7017	0.5236	1.3403
1.8	0.8363	1.3159	0.6089	0.4335	1.4046
2.0	0.7934	1.5031	0.5289	0.3636	1.4545
2.2	0.7561	1.7434	0.4611	0.3086	1.4938
2.4	0.7242	2.0451	0.4038	0.2648	1.5252
2.6	0.6970	2.4177	0.3556	0.2294	1.5505
2.8	0.6738	2.8731	0.3149	0.2004	1.5711
3.0	0.6540	3.4245	0.2803	0.1765	1.5882



$$T_0 = T_0^*$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}}\left(\frac{2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2}{k+1}\right)^{(k+1)/2(k-1)}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2}$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}}\left(\frac{k+1}{2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2}\right)^{1/2}$$

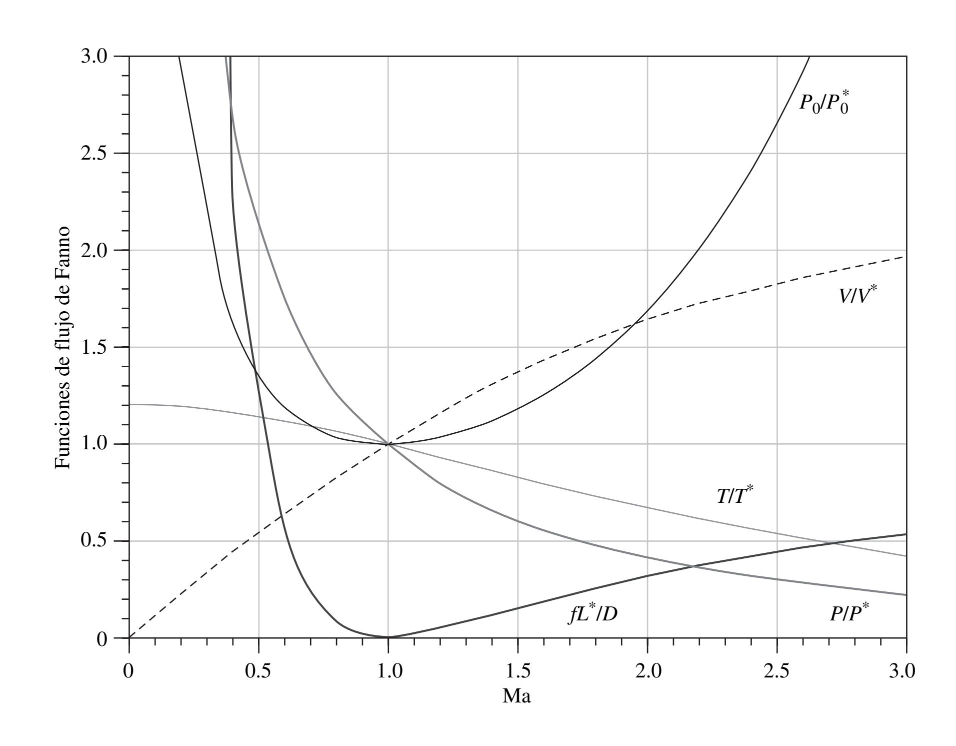
$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \mathrm{Ma}\left(\frac{k+1}{2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2}\right)^{1/2}$$

$$\frac{fL^*}{D} = \frac{1 - \mathrm{Ma}^2}{k\mathrm{Ma}^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\frac{(k+1)\mathrm{Ma}^2}{2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2}$$

TABLA A-16

Funciones de flujo de Fanno para un gas ideal con $k = 1.4$

Ma	P_0/P_0^*	T/T^*	P/P^*	V/V^*	fL^*/D
0.0	∞	1.2000	∞	0.0000	∞
0.1	5.8218	1.1976	10.9435	0.1094	66.9216
0.2	2.9635	1.1905	5.4554	0.2182	14.5333
0.3	2.0351	1.1788	3.6191	0.3257	5.2993
0.4	1.5901	1.1628	2.6958	0.4313	2.3085
0.5	1.3398	1.1429	2.1381	0.5345	1.0691
0.6	1.1882	1.1194	1.7634	0.6348	0.4908
0.7	1.0944	1.0929	1.4935	0.7318	0.2081
0.8	1.0382	1.0638	1.2893	0.8251	0.0723
0.9	1.0089	1.0327	1.1291	0.9146	0.0145
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
1.2	1.0304	0.9317	0.8044	1.1583	0.0336
1.4	1.1149	0.8621	0.6632	1.2999	0.0997
1.6	1.2502	0.7937	0.5568	1.4254	0.1724
1.8	1.4390	0.7282	0.4741	1.5360	0.2419
2.0	1.6875	0.6667	0.4082	1.6330	0.3050
2.2	2.0050	0.6098	0.3549	1.7179	0.3609
2.4	2.4031	0.5576	0.3111	1.7922	0.4099
2.6	2.8960	0.5102	0.2747	1.8571	0.4526
2.8	3.5001	0.4673	0.2441	1.9140	0.4898
3.0	4.2346	0.4286	0.2182	1.9640	0.5222



APÉNDICE

2

TABLAS Y GRÁFICAS DE PROPIEDADES (UNIDADES INGLESAS)*

*La mayoría de las propiedades en las tablas se obtuvieron a partir de la base de datos de propiedades del EES, y las fuentes originales se mencionan debajo de las tablas. Con frecuencia, las propiedades se citan a más cifras significativas que la precisión proclamada con el propósito de minimizar el error de redondeo acumulado en los cálculos a mano y para asegurar una correspondencia cercana con los resultados obtenidos con el EES.

TABLA A-1I

Masa molar, constante de gas y calores específicos de gas ideal de algunas sustancias

Sustancia	Masa molar, M, lbm/lbmol	Constante de gas R*: Btu/lbm · R	Constante de gas R*: psia · ft^3/lbm · R	Datos de calores específicos a 77°F: c_p, Btu/lbm · R	Datos de calores específicos a 77°F: c_v, Btu/lbm · R	Datos de calores específicos a 77°F: $k = c_p/c_v$
Aire	28.97	0.06855	0.3704	0.2400	0.1715	1.400
Amoniaco, NH_3	17.03	0.1166	0.6301	0.4999	0.3834	1.304
Argón, Ar	39.95	0.04970	0.2686	0.1243	0.07457	1.667
Bromo, Br_2	159.81	0.01242	0.06714	0.0538	0.04137	1.300
n-Butano, C_4H_{10}	58.12	0.03415	0.1846	0.4046	0.3705	1.092
Cloro, Cl_2	70.905	0.02802	0.1514	0.1142	0.08618	1.325
Clorodifluorometano (R-22), $CHClF_2$	86.47	0.02297	0.1241	0.1552	0.1322	1.174
Dióxido de azufre, SO_2	64.06	0.03100	0.1675	0.1488	0.1178	1.263
Dióxido de carbono, CO_2	44.01	0.04512	0.2438	0.2016	0.1564	1.288
Dióxido de nitrógeno, NO_2	46.006	0.04512	0.2438	0.1925	0.1474	1.306
Etano, C_2H_6	30.070	0.06604	0.3569	0.4166	0.3506	1.188
Etileno, C_2H_4	28.054	0.07079	0.3826	0.3647	0.2940	1.241
Flúor, F_2	38.00	0.05224	0.2823	0.1967	0.1445	1.362
Helio, He	4.003	0.4961	2.681	1.2403	0.7442	1.667
n-Heptano, C_7H_{16}	100.20	0.01982	0.1071	0.3939	0.3740	1.053
n-Hexano, C_6H_{14}	86.18	0.02304	0.1245	0.3951	0.3721	1.062
Hidrógeno, H_2	2.016	0.9850	5.323	3.416	2.431	1.405
Isobutano, C_4H_{10}	58.12	0.03415	0.1846	0.3972	0.3631	1.094
Kriptón, Kr	83.80	0.02370	0.1281	0.05923	0.03554	1.667
Metano, CH_4	16.04	0.1238	0.6688	0.5317	0.4080	1.303
Monóxido de carbono, CO	28.01	0.07089	0.3831	0.2482	0.1772	1.400
Neón, Ne	20.183	0.09838	0.5316	0.2460	0.1476	1.667
Nitrógeno, N_2	28.01	0.07089	0.3831	0.2484	0.1774	1.400
Óxido nítrico, NO	30.006	0.06618	0.3577	0.2387	0.1725	1.384
Oxígeno, O_2	32.00	0.06205	0.3353	0.2193	0.1572	1.395
n-Pentano, C_5H_{12}	72.15	0.02752	0.1487	0.3974	0.3700	1.074
Propano, C_3H_8	44.097	0.04502	0.2433	0.3986	0.3535	1.127
Propileno, C_3H_6	42.08	0.04720	0.2550	0.3657	0.3184	1.148
Tetraclorometano, CCl_4	153.82	0.01291	0.06976	0.1293	0.1164	1.111
Tetrafluoroetano (R-134a), $C_2H_2F_4$	102.03	0.01946	0.1052	0.1991	0.1796	1.108
Trifluoroetano (R-143a), $C_2H_3F_3$	84.04	0.02363	0.1277	0.2219	0.1983	1.119
Vapor de agua, H_2O	18.015	0.1102	0.5957	0.4455	0.3351	1.329
Xenón, Xe	131.30	0.01512	0.08173	0.03781	0.02269	1.667

*La constante de gas se calcula a partir de $R = R_u/M$, donde R_u = 1.9859 Btu/lbmol · R = 10.732 psia · ft^3/lbmol · R es la constante universal de gas y M es la masa molar.

Fuente: Los valores de calores específicos se obtienen principalmente a partir de los procedimientos para propiedades preparados por The National Institute of Standards and Technology (NIST), Gaithersburg, MD.

TABLA A-2I

Propiedades de puntos de ebullición y de congelación

Sustancia	Datos de ebullición a 1 atm: Punto de ebullición normal, °F	Datos de ebullición a 1 atm: Calor latente de vaporización h_{fg}, Btu/lbm	Datos de congelación: Punto de congelación °F	Datos de congelación: Calor latente de fusión h_{if}, Btu/lbm	Propiedades de líquido: Temperatura, °F	Propiedades de líquido: Densidad ρ, lbm/ft^3	Propiedades de líquido: Calor específico c_p, Btu/lbm · R
Aceite (ligero)	—	—			77	56.8	0.430
Agua	212	970.5	32	143.5	32	62.4	1.01
					90	62.1	1.00
					150	61.2	1.00
					212	59.8	1.01
Alcohol etílico	173.5	368	−248.8	46.4	68	49.3	0.678
Amoniaco	−27.9	24.54	−107.9	138.6	−27.9	42.6	1.06
					0	41.3	1.083
					40	39.5	1.103
					80	37.5	1.135
Argón	−302.6	69.5	−308.7	12.0	−302.6	87.0	0.272
Benceno	176.4	169.4	41.9	54.2	68	54.9	0.411
n-Butano	31.1	165.6	−217.3	34.5	31.1	37.5	0.552
Dióxido de carbono	−109.2*	99.6 (at 32°F)	−69.8	—	32	57.8	0.583
Etanol	172.8	360.5	−173.6	46.9	77	48.9	0.588
Etilenglicol	388.6	344.0	12.6	77.9	68	69.2	0.678
Glicerina	355.8	419	66.0	86.3	68	78.7	0.554
Helio	−452.1	9.80	—	—	−452.1	9.13	5.45
Hidrógeno	−423.0	191.7	−434.5	25.6	−423.0	4.41	2.39
Isobutano	10.9	157.8	−255.5	45.5	10.9	37.1	0.545
Mercurio	674.1	126.7	−38.0	4.90	77	847	0.033
Metano	−258.7	219.6	296.0	25.1	−258.7	26.4	0.834
					−160	20.0	1.074
Metanol	148.1	473	−143.9	42.7	77	49.1	0.609
Nitrógeno	−320.4	85.4	−346.0	10.9	−320.4	50.5	0.492
					−260	38.2	0.643
Octano	256.6	131.7	−71.5	77.9	68	43.9	0.502
Oxígeno	−297.3	91.5	−361.8	5.9	−297.3	71.2	0.408
Petróleo	—	99–165			68	40.0	0.478
Propano	−43.7	184.0	−305.8	34.4	−43.7	36.3	0.538
					32	33.0	0.604
					100	29.4	0.673
Queroseno	399–559	108	−12.8	—	68	51.2	0.478
Refrigerante-134a	−15.0	93.2	−141.9	—	−40	88.5	0.283
					−15	86.0	0.294
					32	80.9	0.318
					90	73.6	0.348
Salmuera (20 por ciento cloruro de sodio, porcentaje másico)	219.0	—	0.7	—	68	71.8	0.743

*Temperatura de sublimación (a presiones por abajo de la presión del punto triple de 75.1 psia, el dióxido de carbono existe en fase sólida o como gas. Además, la temperatura del punto de congelación del dióxido de carbono es la temperatura del punto triple de –69.8°F).

TABLA A-3I

Propiedades del agua saturada

Temp. T, °F	Presión de saturación P_{sat}, psia	Densidad ρ, lbm/ft^3 Líquido	Vapor	Entalpía de vaporización h_{fg}, Btu/lbm	Calor específico c_p, Btu/lbm · R Líquido	Vapor	Conductividad térmica k, Btu/h · ft ·R Líquido	Vapor	Viscosidad dinámica μ, lbm/ft · s Líquido	Vapor	Número de Prandtl Pr Líquido	Vapor	Coeficiente de expansión volumétrica β, 1/R Líquido
32.02	0.0887	62.41	0.00030	1075	1.010	0.446	0.324	0.0099	1.204×10^{-3}	6.194×10^{-6}	13.5	1.00	-0.038×10^{-3}
40	0.1217	62.42	0.00034	1071	1.004	0.447	0.329	0.0100	1.038×10^{-3}	6.278×10^{-6}	11.4	1.01	0.003×10^{-3}
50	0.1780	62.41	0.00059	1065	1.000	0.448	0.335	0.0102	8.781×10^{-4}	6.361×10^{-6}	9.44	1.01	0.047×10^{-3}
60	0.2563	62.36	0.00083	1060	0.999	0.449	0.341	0.0104	7.536×10^{-4}	6.444×10^{-6}	7.95	1.00	0.080×10^{-3}
70	0.3632	62.30	0.00115	1054	0.999	0.450	0.347	0.0106	6.556×10^{-4}	6.556×10^{-6}	6.79	1.00	0.115×10^{-3}
80	0.5073	62.22	0.00158	1048	0.999	0.451	0.352	0.0108	5.764×10^{-4}	6.667×10^{-6}	5.89	1.00	0.145×10^{-3}
90	0.6988	62.12	0.00214	1043	0.999	0.453	0.358	0.0110	5.117×10^{-4}	6.778×10^{-6}	5.14	1.00	0.174×10^{-3}
100	0.9503	62.00	0.00286	1037	0.999	0.454	0.363	0.0112	4.578×10^{-4}	6.889×10^{-6}	4.54	1.01	0.200×10^{-3}
110	1.2763	61.86	0.00377	1031	0.999	0.456	0.367	0.0115	4.128×10^{-4}	7.000×10^{-6}	4.05	1.00	0.224×10^{-3}
120	1.6945	61.71	0.00493	1026	0.999	0.458	0.371	0.0117	3.744×10^{-4}	7.111×10^{-6}	3.63	1.00	0.246×10^{-3}
130	2.225	61.55	0.00636	1020	0.999	0.460	0.375	0.0120	3.417×10^{-4}	7.222×10^{-6}	3.28	1.00	0.267×10^{-3}
140	2.892	61.38	0.00814	1014	0.999	0.463	0.378	0.0122	3.136×10^{-4}	7.333×10^{-6}	2.98	1.00	0.287×10^{-3}
150	3.722	61.19	0.0103	1008	1.000	0.465	0.381	0.0125	2.889×10^{-4}	7.472×10^{-6}	2.73	1.00	0.306×10^{-3}
160	4.745	60.99	0.0129	1002	1.000	0.468	0.384	0.0128	2.675×10^{-4}	7.583×10^{-6}	2.51	1.00	0.325×10^{-3}
170	5.996	60.79	0.0161	996	1.001	0.472	0.386	0.0131	2.483×10^{-4}	7.722×10^{-6}	2.90	1.00	0.346×10^{-3}
180	7.515	60.57	0.0199	990	1.002	0.475	0.388	0.0134	2.317×10^{-4}	7.833×10^{-6}	2.15	1.00	0.367×10^{-3}
190	9.343	60.35	0.0244	984	1.004	0.479	0.390	0.0137	2.169×10^{-4}	7.972×10^{-6}	2.01	1.00	0.382×10^{-3}
200	11.53	60.12	0.0297	978	1.005	0.483	0.391	0.0141	2.036×10^{-4}	8.083×10^{-6}	1.88	1.00	0.395×10^{-3}
210	14.125	59.87	0.0359	972	1.007	0.487	0.392	0.0144	1.917×10^{-4}	8.222×10^{-6}	1.77	1.00	0.412×10^{-3}
212	14.698	59.82	0.0373	970	1.007	0.488	0.392	0.0145	1.894×10^{-4}	8.250×10^{-6}	1.75	1.00	0.417×10^{-3}
220	17.19	59.62	0.0432	965	1.009	0.492	0.393	0.0148	1.808×10^{-4}	8.333×10^{-6}	1.67	1.00	0.429×10^{-3}
230	20.78	59.36	0.0516	959	1.011	0.497	0.394	0.0152	1.711×10^{-4}	8.472×10^{-6}	1.58	1.00	0.443×10^{-3}
240	24.97	59.09	0.0612	952	1.013	0.503	0.394	0.0156	1.625×10^{-4}	8.611×10^{-6}	1.50	1.00	0.462×10^{-3}
250	29.82	58.82	0.0723	946	1.015	0.509	0.395	0.0160	1.544×10^{-4}	8.611×10^{-6}	1.43	1.00	0.480×10^{-3}
260	35.42	58.53	0.0850	939	1.018	0.516	0.395	0.0164	1.472×10^{-4}	8.861×10^{-6}	1.37	1.00	0.497×10^{-3}
270	41.85	58.24	0.0993	932	1.020	0.523	0.395	0.0168	1.406×10^{-4}	9.000×10^{-6}	1.31	1.01	0.514×10^{-3}
280	49.18	57.94	0.1156	925	1.023	0.530	0.395	0.0172	1.344×10^{-4}	9.111×10^{-6}	1.25	1.01	0.532×10^{-3}
290	57.53	57.63	0.3390	918	1.026	0.538	0.395	0.0177	1.289×10^{-4}	9.250×10^{-6}	1.21	1.01	0.549×10^{-3}
300	66.98	57.31	0.1545	910	1.029	0.547	0.394	0.0182	1.236×10^{-4}	9.389×10^{-6}	1.16	1.02	0.566×10^{-3}
320	89.60	56.65	0.2033	895	1.036	0.567	0.393	0.0191	1.144×10^{-4}	9.639×10^{-6}	1.09	1.03	0.636×10^{-3}
340	117.93	55.95	0.2637	880	1.044	0.590	0.391	0.0202	1.063×10^{-4}	9.889×10^{-6}	1.02	1.04	0.656×10^{-3}
360	152.92	55.22	0.3377	863	1.054	0.617	0.389	0.0213	9.972×10^{-5}	1.013×10^{-5}	0.973	1.06	0.681×10^{-3}
380	195.60	54.46	0.4275	845	1.065	0.647	0.385	0.0224	9.361×10^{-5}	1.041×10^{-5}	0.932	1.08	0.720×10^{-3}
400	241.1	53.65	0.5359	827	1.078	0.683	0.382	0.0237	8.833×10^{-5}	1.066×10^{-5}	0.893	1.11	0.771×10^{-3}
450	422.1	51.46	0.9082	775	1.121	0.799	0.370	0.0271	7.722×10^{-5}	1.130×10^{-5}	0.842	1.20	0.912×10^{-3}
500	680.0	48.95	1.479	715	1.188	0.972	0.352	0.0312	6.833×10^{-5}	1.200×10^{-5}	0.830	1.35	1.111×10^{-3}
550	1046.7	45.96	4.268	641	1.298	1.247	0.329	0.0368	6.083×10^{-5}	1.280×10^{-5}	0.864	1.56	1.445×10^{-3}
600	1541	42.32	3.736	550	1.509	1.759	0.299	0.0461	5.389×10^{-5}	1.380×10^{-5}	0.979	1.90	1.885×10^{-3}
650	2210	37.31	6.152	422	2.086	3.103	0.267	0.0677	4.639×10^{-5}	1.542×10^{-5}	1.30	2.54	
700	3090	27.28	13.44	168	13.80	25.90	0.254	0.1964	3.417×10^{-5}	2.044×10^{-5}	6.68	9.71	
705.44	3204	19.79	19.79	0	∞	∞	∞	∞	2.897×10^{-5}	2.897×10^{-5}			

Nota 1: La viscosidad cinemática ν y la difusividad térmica α se pueden calcular a partir de sus definiciones: $\nu = \mu/\rho$ y $\alpha = k/\rho c_p = \nu/\mathrm{Pr}$. Las temperaturas 32.02°F, 212°F y 705.44°F son las temperaturas del punto triple, de ebullición y crítico del agua, respectivamente. Las propiedades citadas anteriormente (excepto la densidad del vapor) se pueden usar a cualquier presión con error despreciable, excepto a temperaturas cerca del valor de punto crítico.

Nota 2: La unidad Btu/lbm · °F para calor específico es equivalente a Btu/lbm · R, y la unidad Btu/h · ft · °F para conductividad térmica es equivalente a Btu/h · ft · R.

Fuente: Los datos de viscosidad y conductividad térmica están tomados de J. V. Sengers y J. T. R. Watson, *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 15 (1986), pp. 1291-1322. Otros datos se obtuvieron de diversas fuentes o se calcularon.

TABLA A-4I

Propiedades del refrigerante-134a saturado

Temp.	Presión de saturación	Densidad ρ, lbm/ft^3		Entalpía de vaporización	Calor específico c_p, Btu/lbm · R		Conductividad térmica k, Btu/h · ft · R		Viscosidad dinámica μ, lbm/ft · s		Número de Prandtl Pr		Coeficiente de expansión volumétrica β, 1/R	Tensión superf.,
T, °F	P, psia	Líquido	Vapor	h_{fg}, Btu/lbm	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	lbf/ft
−40	7.4	88.51	0.1731	97.1	0.2996	0.1788	0.0636	0.00466	3.278×10^{-4}	1.714×10^{-6}	5.558	0.237	0.00114	0.001206
−30	9.9	87.5	0.2258	95.6	0.3021	0.1829	0.0626	0.00497	3.004×10^{-4}	2.053×10^{-6}	5.226	0.272	0.00117	0.001146
−20	12.9	86.48	0.2905	94.1	0.3046	0.1872	0.0613	0.00529	2.762×10^{-4}	2.433×10^{-6}	4.937	0.310	0.00120	0.001087
−10	16.6	85.44	0.3691	92.5	0.3074	0.1918	0.0602	0.00559	2.546×10^{-4}	2.856×10^{-6}	4.684	0.352	0.00124	0.001029
0	21.2	84.38	0.4635	90.9	0.3103	0.1966	0.0589	0.00589	2.354×10^{-4}	3.314×10^{-6}	4.463	0.398	0.00128	0.000972
10	26.6	83.31	0.5761	89.3	0.3134	0.2017	0.0576	0.00619	2.181×10^{-4}	3.811×10^{-6}	4.269	0.447	0.00132	0.000915
20	33.1	82.2	0.7094	87.5	0.3167	0.2070	0.0563	0.00648	2.024×10^{-4}	4.342×10^{-6}	4.098	0.500	0.00137	0.000859
30	40.8	81.08	0.866	85.8	0.3203	0.2127	0.0550	0.00676	1.883×10^{-4}	4.906×10^{-6}	3.947	0.555	0.00142	0.000803
40	49.8	79.92	1.049	83.9	0.3240	0.2188	0.0536	0.00704	1.752×10^{-4}	5.494×10^{-6}	3.814	0.614	0.00149	0.000749
50	60.2	78.73	1.262	82.0	0.3281	0.2253	0.0522	0.00732	1.633×10^{-4}	6.103×10^{-6}	3.697	0.677	0.00156	0.000695
60	72.2	77.51	1.509	80.0	0.3325	0.2323	0.0507	0.00758	1.522×10^{-4}	6.725×10^{-6}	3.594	0.742	0.00163	0.000642
70	85.9	76.25	1.794	78.0	0.3372	0.2398	0.0492	0.00785	1.420×10^{-4}	7.356×10^{-6}	3.504	0.810	0.00173	0.000590
80	101.4	74.94	2.122	75.8	0.3424	0.2481	0.0476	0.00810	1.324×10^{-4}	7.986×10^{-6}	3.425	0.880	0.00183	0.000538
90	119.1	73.59	2.5	73.5	0.3481	0.2572	0.0460	0.00835	1.234×10^{-4}	8.611×10^{-6}	3.357	0.955	0.00195	0.000488
100	138.9	72.17	2.935	71.1	0.3548	0.2674	0.0444	0.00860	1.149×10^{-4}	9.222×10^{-6}	3.303	1.032	0.00210	0.000439
110	161.2	70.69	3.435	68.5	0.3627	0.2790	0.0427	0.00884	1.068×10^{-4}	9.814×10^{-6}	3.262	1.115	0.00227	0.000391
120	186.0	69.13	4.012	65.8	0.3719	0.2925	0.0410	0.00908	9.911×10^{-5}	1.038×10^{-5}	3.235	1.204	0.00248	0.000344
130	213.5	67.48	4.679	62.9	0.3829	0.3083	0.0392	0.00931	9.175×10^{-5}	1.092×10^{-5}	3.223	1.303	0.00275	0.000299
140	244.1	65.72	5.455	59.8	0.3963	0.3276	0.0374	0.00954	8.464×10^{-5}	1.144×10^{-5}	3.229	1.416	0.00308	0.000255
150	277.8	63.83	6.367	56.4	0.4131	0.3520	0.0355	0.00976	7.778×10^{-5}	1.195×10^{-5}	3.259	1.551	0.00351	0.000212
160	314.9	61.76	7.45	52.7	0.4352	0.3839	0.0335	0.00998	7.108×10^{-5}	1.245×10^{-5}	3.324	1.725	0.00411	0.000171
170	355.8	59.47	8.762	48.5	0.4659	0.4286	0.0314	0.01020	6.450×10^{-5}	1.298×10^{-5}	3.443	1.963	0.00498	0.000132
180	400.7	56.85	10.4	43.7	0.5123	0.4960	0.0292	0.01041	5.792×10^{-5}	1.356×10^{-5}	3.661	2.327	0.00637	0.000095
190	449.9	53.75	12.53	38.0	0.5929	0.6112	0.0267	0.01063	5.119×10^{-5}	1.431×10^{-5}	4.090	2.964	0.00891	0.000061
200	504.0	49.75	15.57	30.7	0.7717	0.8544	0.0239	0.01085	4.397×10^{-5}	1.544×10^{-5}	5.119	4.376	0.01490	0.000031
210	563.8	43.19	21.18	18.9	1.4786	1.6683	0.0199	0.01110	3.483×10^{-5}	1.787×10^{-5}	9.311	9.669	0.04021	0.000006

Nota 1: La viscosidad cinemática ν y la difusividad térmica α se pueden calcular a partir de sus definiciones: $\nu = \mu/\rho$ y $\alpha = k/\rho c_p = \nu/\text{Pr}$. Las propiedades citadas aquí (excepto la densidad de vapor) se pueden usar a cualquier presión con error despreciable, excepto a temperaturas cercanas al valor de punto crítico.

Nota 2: La unidad Btu/lbm · °F para calor específico es equivalente a Btu/lbm · R, y la unidad Btu/h · ft · °F para conductividad térmica es equivalente a Btu/h · ft · R.

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Fuentes originales: R. Tillner-Roth and H. D. Baehr, "An International Standard Formulation for the Thermodynamic Properties of 1,1,1,2-Tetrafluoroethane (HFC-134a) for Temperatures from 170 K to 455 K and Pressures up to 70 MPa", *J. Phys. Chem. Ref. Data,* Vol. 23, No. 5, 1994; M. J. Assael, N. K. Dalaouti, A. A. Griva, y J. H. Dymond, "Viscosity and Thermal Conductivity of Halogenated Methane and Ethane Refrigerants", *IJR,* Vol. 22, pp. 525-535, 1999; NIST REFPROP 6 program (M. O. McLinden, S. A. Klein, E. W. Lemmon, y A. P. Peskin, Physicial and Chemical Properties Division, National Institute of Standards and Technology, Boulder, CO 80303, 1995).

TABLA A-5I

Propiedades del amoniaco saturado

Temp. T, °F	Presión de saturación P, psia	Densidad ρ, lbm/ft^3 Líquido	Densidad Vapor	Entalpía de vaporización h_{fg}, Btu/lbm	Calor específico c_p, Btu/lbm · R Líquido	Calor específico Vapor	Conductividad térmica k, Btu/h · ft · R Líquido	Conductividad térmica Vapor	Viscosidad dinámica μ, lbm/ft · s Líquido	Viscosidad dinámica Vapor	Número de Prandtl Pr Líquido	Número de Prandtl Vapor	Coeficiente de expansión volumétrica β, 1/R Líquido	Tensión superficial, lbf/ft
−40	10.4	43.08	0.0402	597.0	1.0542	0.5354	—	0.01026	1.966×10^{-4}	5.342×10^{-6}	—	1.003	0.00098	0.002443
−30	13.9	42.66	0.0527	590.2	1.0610	0.5457	—	0.01057	1.853×10^{-4}	5.472×10^{-6}	—	1.017	0.00101	0.002357
−20	18.3	42.33	0.0681	583.2	1.0677	0.5571	0.3501	0.01089	1.746×10^{-4}	5.600×10^{-6}	1.917	1.031	0.00103	0.002272
−10	23.7	41.79	0.0869	575.9	1.0742	0.5698	0.3426	0.01121	1.645×10^{-4}	5.731×10^{-6}	1.856	1.048	0.00106	0.002187
0	30.4	41.34	0.1097	568.4	1.0807	0.5838	0.3352	0.01154	1.549×10^{-4}	5.861×10^{-6}	1.797	1.068	0.00109	0.002103
10	38.5	40.89	0.1370	560.7	1.0873	0.5992	0.3278	0.01187	1.458×10^{-4}	5.994×10^{-6}	1.740	1.089	0.00112	0.002018
20	48.2	40.43	0.1694	552.6	1.0941	0.6160	0.3203	0.01220	1.371×10^{-4}	6.125×10^{-6}	1.686	1.113	0.00116	0.001934
30	59.8	39.96	0.2075	544.4	1.1012	0.6344	0.3129	0.01254	1290×10^{-4}	6.256×10^{-6}	1.634	1.140	0.00119	0.001850
40	73.4	39.48	0.2521	535.8	1.1087	0.6544	0.3055	0.01288	1.213×10^{-4}	6.389×10^{-6}	1.585	1.168	0.00123	0.001767
50	89.2	38.99	0.3040	526.9	1.1168	0.6762	0.2980	0.01323	1.140×10^{-4}	6.522×10^{-6}	1.539	1.200	0.00128	0.001684
60	107.7	38.50	0.3641	517.7	1.1256	0.6999	0.2906	0.01358	1.072×10^{-4}	6.656×10^{-6}	1.495	1.234	0.00132	0.001601
70	128.9	37.99	0.4332	508.1	1.1353	0.7257	0.2832	0.01394	1.008×10^{-4}	6.786×10^{-6}	1.456	1.272	0.00137	0.001518
80	153.2	37.47	0.5124	498.2	1.1461	0.7539	0.2757	0.01431	9.486×10^{-5}	6.922×10^{-6}	1.419	1.313	0.00143	0.001436
90	180.8	36.94	0.6029	487.8	1.1582	0.7846	0.2683	0.01468	8.922×10^{-5}	7.056×10^{-6}	1.387	1.358	0.00149	0.001354
100	212.0	36.40	0.7060	477.0	1.1719	0.8183	0.2609	0.01505	8.397×10^{-5}	7.189×10^{-6}	1.358	1.407	0.00156	0.001273
110	247.2	35.83	0.8233	465.8	1.1875	0.8554	0.2535	0.01543	7.903×10^{-5}	7.325×10^{-6}	1.333	1.461	0.00164	0.001192
120	286.5	35.26	0.9564	454.1	1.2054	0.8965	0.2460	0.01582	7.444×10^{-5}	7.458×10^{-6}	1.313	1.522	0.00174	0.001111
130	330.4	34.66	1.1074	441.7	1.2261	0.9425	0.2386	0.01621	7.017×10^{-5}	7.594×10^{-6}	1.298	1.589	0.00184	0.001031
140	379.2	34.04	1.2786	428.8	1.2502	0.9943	0.2312	0.01661	6.617×10^{-5}	7.731×10^{-6}	1.288	1.666	0.00196	0.000951
150	433.2	33.39	1.4730	415.2	1.2785	1.0533	0.2237	0.01702	6.244×10^{-5}	7.867×10^{-6}	1.285	1.753	0.00211	0.000872
160	492.7	32.72	1.6940	400.8	1.3120	1.1214	0.2163	0.01744	5.900×10^{-5}	8.006×10^{-6}	1.288	1.853	0.00228	0.000794
170	558.2	32.01	1.9460	385.4	1.3523	1.2012	0.2089	0.01786	5.578×10^{-5}	8.142×10^{-6}	1.300	1.971	0.00249	0.000716
180	630.1	31.26	2.2346	369.1	1.4015	1.2965	0.2014	0.01829	5.278×10^{-5}	8.281×10^{-6}	1.322	2.113	0.00274	0.000638
190	708.6	30.47	2.5670	351.6	1.4624	1.4128	0.1940	0.01874	5.000×10^{-5}	8.419×10^{-6}	1.357	2.286	0.00306	0.000562
200	794.4	29.62	2.9527	332.7	1.5397	1.5586	0.1866	0.01919	4.742×10^{-5}	8.561×10^{-6}	1.409	2.503	0.00348	0.000486
210	887.9	28.70	3.4053	312.0	1.6411	1.7473	0.1791	0.01966	4.500×10^{-5}	8.703×10^{-6}	1.484	2.784	0.00403	0.000411
220	989.5	27.69	3.9440	289.2	1.7798	2.0022	0.1717	0.02015	4.275×10^{-5}	8.844×10^{-6}	1.595	3.164	0.00480	0.000338
230	1099.8	25.57	4.5987	263.5	1.9824	2.3659	0.1643	0.02065	4.064×10^{-5}	8.989×10^{-6}	1.765	3.707	0.00594	0.000265
240	1219.4	25.28	5.4197	234.0	2.3100	2.9264	0.1568	0.02119	3.864×10^{-5}	9.136×10^{-6}	2.049	4.542	0.00784	0.000194

Nota 1: La viscosidad cinemática ν y la difusividad térmica α se pueden calcular a partir de sus definiciones: $\nu = \mu/\rho$ y $\alpha = k/\rho c_p = \nu/\text{Pr}$. Las propiedades citadas aquí (excepto la densidad de vapor) se pueden usar a cualquier presión con error despreciable, excepto a temperaturas cercanas al valor de punto crítico.

Nota 2: La unidad Btu/lbm · °F para calor específico es equivalente a Btu/lbm · R, y la unidad Btu/h · ft · °F para conductividad térmica es equivalente a Btu/h · ft · R.

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Fuentes originales: Tillner-Roth, Harms-Watzenterg y Baehr, “Eine neue Fundamentalgleichung fur Ammoniak”, *DKV-Tagungsbericht* 20: 167-181, 1993; Liley y Desai, “Thermophysical Properties of Refrigerants”, *ASHRAE*, 1993, ISBN 1-1883413-10-9.

TABLA A-6I

Propiedades del propano saturado

Temp. T, °F	Presión de saturación P, psia	Densidad ρ, lbm/ft^3		Entalpía de vaporización h_{fg}, Btu/lbm	Calor específico c_p, Btu/lbm · R		Conductividad térmica k, Btu/h · ft · R		Viscosidad dinámica μ, lbm/ft · s		Número de Prandtl Pr		Coeficiente de expansión volumétrica β, 1/R	Tensión superficial, lbf/ft
		Líquido	Vapor		Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	
−200	0.0201	42.06	0.0003	217.7	0.4750	0.2595	0.1073	0.00313	5.012×10^{-4}	2.789×10^{-6}	7.991	0.833	0.00083	0.001890
−180	0.0752	41.36	0.0011	213.4	0.4793	0.2680	0.1033	0.00347	3.941×10^{-4}	2.975×10^{-6}	6.582	0.826	0.00086	0.001780
−160	0.2307	40.65	0.0032	209.1	0.4845	0.2769	0.0992	0.00384	3.199×10^{-4}	3.164×10^{-6}	5.626	0.821	0.00088	0.001671
−140	0.6037	39.93	0.0078	204.8	0.4907	0.2866	0.0949	0.00423	2.660×10^{-4}	3.358×10^{-6}	4.951	0.818	0.00091	0.001563
−120	1.389	39.20	0.0170	200.5	0.4982	0.2971	0.0906	0.00465	2.252×10^{-4}	3.556×10^{-6}	4.457	0.817	0.00094	0.001455
−100	2.878	38.46	0.0334	196.1	0.5069	0.3087	0.0863	0.00511	1.934×10^{-4}	3.756×10^{-6}	4.087	0.817	0.00097	0.001349
−90	4.006	38.08	0.0453	193.9	0.5117	0.3150	0.0842	0.00534	1.799×10^{-4}	3.858×10^{-6}	3.936	0.819	0.00099	0.001297
−80	5.467	37.70	0.0605	191.6	0.5169	0.3215	0.0821	0.00559	1.678×10^{-4}	3.961×10^{-6}	3.803	0.820	0.00101	0.001244
−70	7.327	37.32	0.0793	189.3	0.5224	0.3284	0.0800	0.00585	1.569×10^{-4}	4.067×10^{-6}	3.686	0.822	0.00104	0.001192
−60	9.657	36.93	0.1024	186.9	0.5283	0.3357	0.0780	0.00611	1.469×10^{-4}	4.172×10^{-6}	3.582	0.825	0.00106	0.001140
−50	12.54	36.54	0.1305	184.4	0.5345	0.3433	0.0760	0.00639	1.378×10^{-4}	4.278×10^{-6}	3.490	0.828	0.00109	0.001089
−40	16.05	36.13	0.1641	181.9	0.5392	0.3513	0.0740	0.00668	1.294×10^{-4}	4.386×10^{-6}	3.395	0.831	0.00112	0.001038
−30	20.29	35.73	0.2041	179.3	0.5460	0.3596	0.0721	0.00697	1.217×10^{-4}	4.497×10^{-6}	3.320	0.835	0.00115	0.000987
−20	25.34	35.31	0.2512	176.6	0.5531	0.3684	0.0702	0.00728	1.146×10^{-4}	4.611×10^{-6}	3.253	0.840	0.00119	0.000937
−10	31.3	34.89	0.3063	173.8	0.5607	0.3776	0.0683	0.00761	1.079×10^{-4}	4.725×10^{-6}	3.192	0.845	0.00123	0.000887
0	38.28	34.46	0.3703	170.9	0.5689	0.3874	0.0665	0.00794	1.018×10^{-4}	4.842×10^{-6}	3.137	0.850	0.00127	0.000838
10	46.38	34.02	0.4441	167.9	0.5775	0.3976	0.0647	0.00829	9.606×10^{-5}	4.961×10^{-6}	3.088	0.857	0.00132	0.000789
20	55.7	33.56	0.5289	164.8	0.5867	0.4084	0.0629	0.00865	9.067×10^{-5}	5.086×10^{-6}	3.043	0.864	0.00138	0.000740
30	66.35	33.10	0.6259	161.6	0.5966	0.4199	0.0612	0.00903	8.561×10^{-5}	5.211×10^{-6}	3.003	0.873	0.00144	0.000692
40	78.45	32.62	0.7365	158.1	0.6072	0.4321	0.0595	0.00942	8.081×10^{-5}	5.342×10^{-6}	2.967	0.882	0.00151	0.000644
50	92.12	32.13	0.8621	154.6	0.6187	0.4452	0.0579	0.00983	7.631×10^{-5}	5.478×10^{-6}	2.935	0.893	0.00159	0.000597
60	107.5	31.63	1.0046	150.8	0.6311	0.4593	0.0563	0.01025	7.200×10^{-5}	5.617×10^{-6}	2.906	0.906	0.00168	0.000551
70	124.6	31.11	1.1659	146.8	0.6447	0.4746	0.0547	0.01070	6.794×10^{-5}	5.764×10^{-6}	2.881	0.921	0.00179	0.000505
80	143.7	30.56	1.3484	142.7	0.6596	0.4915	0.0532	0.01116	6.406×10^{-5}	5.919×10^{-6}	2.860	0.938	0.00191	0.000460
90	164.8	30.00	1.5549	138.2	0.6762	0.5103	0.0517	0.01165	6.033×10^{-5}	6.081×10^{-6}	2.843	0.959	0.00205	0.000416
100	188.1	29.41	1.7887	133.6	0.6947	0.5315	0.0501	0.01217	5.675×10^{-5}	6.256×10^{-6}	2.831	0.984	0.00222	0.000372
120	241.8	28.13	2.3562	123.2	0.7403	0.5844	0.0472	0.01328	5.000×10^{-5}	6.644×10^{-6}	2.825	1.052	0.00267	0.000288
140	306.1	26.69	3.1003	111.1	0.7841	0.6613	0.0442	0.01454	4.358×10^{-5}	7.111×10^{-6}	2.784	1.164	0.00338	0.000208
160	382.4	24.98	4.1145	96.4	0.8696	0.7911	0.0411	0.01603	3.733×10^{-5}	7.719×10^{-6}	2.845	1.371	0.00459	0.000133
180	472.9	22.79	5.6265	77.1	1.1436	1.0813	0.0376	0.01793	3.083×10^{-5}	8.617×10^{-6}	3.380	1.870	0.00791	0.000065

Nota 1: La viscosidad cinemática ν y la difusividad térmica α se pueden calcular a partir de sus definiciones: $\nu = \mu/\rho$ y $\alpha = k/\rho c_p = \nu/\text{Pr}$. Las propiedades citadas aquí (excepto la densidad de vapor) se pueden usar a cualquier presión con error despreciable, excepto a temperaturas cerca del valor de punto crítico.

Nota 2: La unidad Btu/lbm · °F para calor específico es equivalente a Btu/lbm · R y la unidad Btu/h · ft · °F para conductividad térmica es equivalente a Btu/h · ft · R.

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Fuentes originales: Reiner Tillner-Roth, "Fundamental Equations of State," Shaker, Verlag, Aachan, 1998; B. A. Younglove y J. F. Ely, "Thermophysical Properties of Fluids. II Methane, Ethane, Propane, Isobutane, and Normal Butane," *J. Phys. Chem. Ref. Data,* Vol. 16, No. 4, 1987; G. R. Somayajulu, "A Generalized Equation for Surface Tension from the Triple-Point to the Critical-Point", *International Journal of Thermophysics*, Vol. 9, No. 4, 1988.

TABLA A-7I

Propiedades de líquidos

Temp. T, °F	Densidad ρ, lbm/ft^3	Calor específico c_p, Btu/lbm · R	Conductividad térmica k, Btu/h · ft · R	Difusividad térmica α, ft^2/s	Viscosidad dinámica μ, lbm/ft · s	Viscosidad cinemática ν, ft^2/s	Número de Prandtl Pr	Coeficiente de expansión volumétrica β, 1/R
				Metano (CH_4)				
−280	27.41	0.8152	0.1205	1.497×10^{-6}	1.057×10^{-4}	3.857×10^{-6}	2.575	0.00175
−260	26.43	0.8301	0.1097	1.389×10^{-6}	8.014×10^{-5}	3.032×10^{-6}	2.183	0.00192
−240	25.39	0.8523	0.0994	1.276×10^{-6}	6.303×10^{-5}	2.482×10^{-6}	1.945	0.00215
−220	24.27	0.8838	0.0896	1.159×10^{-6}	5.075×10^{-5}	2.091×10^{-6}	1.803	0.00247
−200	23.04	0.9314	0.0801	1.036×10^{-6}	4.142×10^{-5}	1.798×10^{-6}	1.734	0.00295
−180	21.64	1.010	0.0709	9.008×10^{-7}	3.394×10^{-5}	1.568×10^{-6}	1.741	0.00374
−160	19.99	1.158	0.0616	7.397×10^{-7}	2.758×10^{-5}	1.379×10^{-6}	1.865	0.00526
−140	17.84	1.542	0.0518	5.234×10^{-7}	2.168×10^{-5}	1.215×10^{-6}	2.322	0.00943
				Metanol [$CH_3(OH)$]				
70	49.15	0.6024	0.1148	1.076×10^{-6}	3.872×10^{-4}	7.879×10^{-6}	7.317	0.000656
90	48.50	0.6189	0.1143	1.057×10^{-6}	3.317×10^{-4}	6.840×10^{-6}	6.468	0.000671
110	47.85	0.6373	0.1138	1.036×10^{-6}	2.872×10^{-4}	6.005×10^{-6}	5.793	0.000691
130	47.18	0.6576	0.1133	1.014×10^{-6}	2.513×10^{-4}	5.326×10^{-6}	5.250	0.000716
150	46.50	0.6796	0.1128	9.918×10^{-7}	2.218×10^{-4}	4.769×10^{-6}	4.808	0.000749
170	45.80	0.7035	0.1124	9.687×10^{-7}	1.973×10^{-4}	4.308×10^{-6}	4.447	0.000789
				Isobutano (R600a)				
−150	42.75	0.4483	0.0799	1.157×10^{-6}	6.417×10^{-4}	1.500×10^{-5}	12.96	0.000785
−100	41.06	0.4721	0.0782	1.120×10^{-6}	3.669×10^{-4}	8.939×10^{-6}	7.977	0.000836
−50	39.31	0.4986	0.0731	1.036×10^{-6}	2.376×10^{-4}	6.043×10^{-6}	5.830	0.000908
0	37.48	0.5289	0.0664	9.299×10^{-7}	1.651×10^{-4}	4.406×10^{-6}	4.738	0.001012
50	35.52	0.5643	0.0591	8.187×10^{-7}	1.196×10^{-4}	3.368×10^{-6}	4.114	0.001169
100	33.35	0.6075	0.0521	7.139×10^{-7}	8.847×10^{-5}	2.653×10^{-6}	3.716	0.001421
150	30.84	0.6656	0.0457	6.188×10^{-7}	6.558×10^{-5}	2.127×10^{-6}	3.437	0.001883
200	27.73	0.7635	0.0400	5.249×10^{-7}	4.750×10^{-5}	1.713×10^{-6}	3.264	0.002970
				Glicerina				
32	79.65	0.5402	0.163	1.052×10^{-6}	7.047	0.08847	84101	
40	79.49	0.5458	0.1637	1.048×10^{-6}	4.803	0.06042	57655	
50	79.28	0.5541	0.1645	1.040×10^{-6}	2.850	0.03594	34561	
60	79.07	0.5632	0.1651	1.029×10^{-6}	1.547	0.01956	18995	
70	78.86	0.5715	0.1652	1.018×10^{-6}	0.9422	0.01195	11730	
80	78.66	0.5794	0.1652	1.007×10^{-6}	0.5497	0.00699	6941	
90	78.45	0.5878	0.1652	9.955×10^{-7}	0.3756	0.004787	4809	
100	78.24	0.5964	0.1653	9.841×10^{-7}	0.2277	0.00291	2957	
				Aceite de motor (no usado)				
32	56.12	0.4291	0.0849	9.792×10^{-7}	2.563	4.566×10^{-2}	46636	0.000389
50	55.79	0.4395	0.08338	9.448×10^{-7}	1.210	2.169×10^{-2}	22963	0.000389
75	55.3	0.4531	0.08378	9.288×10^{-7}	0.4286	7.751×10^{-3}	8345	0.000389
100	54.77	0.4669	0.08367	9.089×10^{-7}	0.1630	2.977×10^{-3}	3275	0.000389
125	54.24	0.4809	0.08207	8.740×10^{-7}	7.617×10^{-2}	1.404×10^{-3}	1607	0.000389
150	53.73	0.4946	0.08046	8.411×10^{-7}	3.833×10^{-2}	7.135×10^{-4}	848.3	0.000389
200	52.68	0.5231	0.07936	7.999×10^{-7}	1.405×10^{-2}	2.668×10^{-4}	333.6	0.000389
250	51.71	0.5523	0.07776	7.563×10^{-7}	6.744×10^{-3}	1.304×10^{-4}	172.5	0.000389
300	50.63	0.5818	0.07673	7.236×10^{-7}	3.661×10^{-3}	7.232×10^{-5}	99.94	0.000389

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Originalmente con base en diversas fuentes.

TABLA A-8I

Propiedades de metales líquidos

Temp. T, °F	Densidad ρ, lbm/ft^3	Calor específico c_p, Btu/lbm · R	Conductividad térmica k, Btu/h · ft · R	Difusividad térmica α, ft^2/s	Viscosidad dinámica μ, lbm/ft · s	Viscosidad cinemática ν, ft^2/s	Número de Prandtl Pr	Coeficiente de expansión volumétrica β, 1/R
				Punto de fusión del mercurio (Hg): −38°F				
32	848.7	0.03353	4.727	4.614×10^{-5}	1.133×10^{-3}	1.335×10^{-6}	0.02895	1.005×10^{-4}
50	847.2	0.03344	4.805	4.712×10^{-5}	1.092×10^{-3}	1.289×10^{-6}	0.02737	1.005×10^{-4}
100	842.9	0.03319	5.015	4.980×10^{-5}	9.919×10^{-4}	1.176×10^{-6}	0.02363	1.005×10^{-4}
150	838.7	0.03298	5.221	5.244×10^{-5}	9.122×10^{-4}	1.087×10^{-6}	0.02074	1.005×10^{-4}
200	834.5	0.03279	5.422	5.504×10^{-5}	8.492×10^{-4}	1.017×10^{-6}	0.01849	1.005×10^{-4}
300	826.2	0.03252	5.815	6.013×10^{-5}	7.583×10^{-4}	9.180×10^{-7}	0.01527	1.005×10^{-4}
400	817.9	0.03236	6.184	6.491×10^{-5}	6.972×10^{-4}	8.524×10^{-7}	0.01313	1.008×10^{-4}
500	809.6	0.03230	6.518	6.924×10^{-5}	6.525×10^{-4}	8.061×10^{-7}	0.01164	1.018×10^{-4}
600	801.3	0.03235	6.839	7.329×10^{-5}	6.186×10^{-4}	7.719×10^{-7}	0.01053	1.035×10^{-4}
				Punto de fusión del bismuto (Bi): 520°F				
700	620.7	0.03509	9.361	1.193×10^{-4}	1.001×10^{-3}	1.614×10^{-6}	0.01352	
800	616.5	0.03569	9.245	1.167×10^{-4}	9.142×10^{-4}	1.482×10^{-6}	0.01271	
900	612.2	0.0363	9.129	1.141×10^{-4}	8.267×10^{-4}	1.350×10^{-6}	0.01183	
1000	608.0	0.0369	9.014	1.116×10^{-4}	7.392×10^{-4}	1.215×10^{-6}	0.0109	
1100	603.7	0.0375	9.014	1.105×10^{-4}	6.872×10^{-4}	1.138×10^{-6}	0.01029	
				Punto de fusión del plomo (Pb): 621°F				
700	658	0.03797	9.302	1.034×10^{-4}	1.612×10^{-3}	2.450×10^{-6}	0.02369	
800	654	0.03750	9.157	1.037×10^{-4}	1.453×10^{-3}	2.223×10^{-6}	0.02143	
900	650	0.03702	9.013	1.040×10^{-4}	1.296×10^{-3}	1.994×10^{-6}	0.01917	
1000	645.7	0.03702	8.912	1.035×10^{-4}	1.202×10^{-3}	1.862×10^{-6}	0.01798	
1100	641.5	0.03702	8.810	1.030×10^{-4}	1.108×10^{-3}	1.727×10^{-6}	0.01676	
1200	637.2	0.03702	8.709	1.025×10^{-4}	1.013×10^{-3}	1.590×10^{-6}	0.01551	
				Punto de fusión del sodio (Na): 208°F				
300	57.13	0.3258	48.19	7.192×10^{-4}	4.136×10^{-4}	7.239×10^{-6}	0.01007	
400	56.28	0.3219	46.58	7.142×10^{-4}	3.572×10^{-4}	6.350×10^{-6}	0.008891	
500	55.42	0.3181	44.98	7.087×10^{-4}	3.011×10^{-4}	5.433×10^{-6}	0.007667	
600	54.56	0.3143	43.37	7.026×10^{-4}	2.448×10^{-4}	4.488×10^{-6}	0.006387	
800	52.85	0.3089	40.55	6.901×10^{-4}	1.772×10^{-4}	3.354×10^{-6}	0.004860	
1000	51.14	0.3057	38.12	6.773×10^{-4}	1.541×10^{-4}	3.014×10^{-6}	0.004449	
				Punto de fusión del potasio (K): 147°F				
300	50.40	0.1911	26.00	7.500×10^{-4}	2.486×10^{-4}	4.933×10^{-6}	0.006577	
400	49.58	0.1887	25.37	7.532×10^{-4}	2.231×10^{-4}	4.500×10^{-6}	0.005975	
500	48.76	0.1863	24.73	7.562×10^{-4}	1.976×10^{-4}	4.052×10^{-6}	0.005359	
600	47.94	0.1839	24.09	7.591×10^{-4}	1.721×10^{-4}	3.589×10^{-6}	0.004728	
800	46.31	0.1791	22.82	7.643×10^{-4}	1.210×10^{-4}	2.614×10^{-6}	0.003420	
1000	44.62	0.1791	21.34	7.417×10^{-4}	1.075×10^{-4}	2.409×10^{-6}	0.003248	
				Punto de fusión sodio-potasio (22 por ciento Na–78 por ciento K): 12°F				
200	52.99	0.2259	14.79	3.432×10^{-4}	3.886×10^{-4}	7.331×10^{-6}	0.02136	
300	52.16	0.2230	14.99	3.580×10^{-4}	3.467×10^{-4}	6.647×10^{-6}	0.01857	
400	51.32	0.2201	15.19	3.735×10^{-4}	3.050×10^{-4}	5.940×10^{-6}	0.0159	
600	49.65	0.2143	15.59	4.070×10^{-4}	2.213×10^{-4}	4.456×10^{-6}	0.01095	
800	47.99	0.2100	15.95	4.396×10^{-4}	1.539×10^{-4}	3.207×10^{-6}	0.007296	
1000	46.36	0.2103	16.20	4.615×10^{-4}	1.353×10^{-4}	2.919×10^{-6}	0.006324	

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Originalmente con base en diversas fuentes.

TABLA A-9I

Propiedades del aire a 1 atm de presión

Temp. T, °F	Densidad ρ, lbm/ft^3	Calor específico c_p, Btu/lbm · R	Conductividad térmica k, Btu/h · ft · R	Difusividad térmica α, ft^2/s	Viscosidad dinámica μ, lbm/ft · s	Viscosidad cinemática ν, ft^2/s	Número de Prandtl Pr
−300	0.24844	0.5072	0.00508	1.119×10^{-5}	4.039×10^{-6}	1.625×10^{-5}	1.4501
−200	0.15276	0.2247	0.00778	6.294×10^{-5}	6.772×10^{-6}	4.433×10^{-5}	0.7042
−100	0.11029	0.2360	0.01037	1.106×10^{-4}	9.042×10^{-6}	8.197×10^{-5}	0.7404
−50	0.09683	0.2389	0.01164	1.397×10^{-4}	1.006×10^{-5}	1.039×10^{-4}	0.7439
0	0.08630	0.2401	0.01288	1.726×10^{-4}	1.102×10^{-5}	1.278×10^{-4}	0.7403
10	0.08446	0.2402	0.01312	1.797×10^{-4}	1.121×10^{-5}	1.328×10^{-4}	0.7391
20	0.08270	0.2403	0.01336	1.868×10^{-4}	1.140×10^{-5}	1.379×10^{-4}	0.7378
30	0.08101	0.2403	0.01361	1.942×10^{-4}	1.158×10^{-5}	1.430×10^{-4}	0.7365
40	0.07939	0.2404	0.01385	2.016×10^{-4}	1.176×10^{-5}	1.482×10^{-4}	0.7350
50	0.07783	0.2404	0.01409	2.092×10^{-4}	1.194×10^{-5}	1.535×10^{-4}	0.7336
60	0.07633	0.2404	0.01433	2.169×10^{-4}	1.212×10^{-5}	1.588×10^{-4}	0.7321
70	0.07489	0.2404	0.01457	2.248×10^{-4}	1.230×10^{-5}	1.643×10^{-4}	0.7306
80	0.07350	0.2404	0.01481	2.328×10^{-4}	1.247×10^{-5}	1.697×10^{-4}	0.7290
90	0.07217	0.2404	0.01505	2.409×10^{-4}	1.265×10^{-5}	1.753×10^{-4}	0.7275
100	0.07088	0.2405	0.01529	2.491×10^{-4}	1.281×10^{-5}	1.809×10^{-4}	0.7260
110	0.06963	0.2405	0.01552	2.575×10^{-4}	1.299×10^{-5}	1.866×10^{-4}	0.7245
120	0.06843	0.2405	0.01576	2.660×10^{-4}	1.316×10^{-5}	1.923×10^{-4}	0.7230
130	0.06727	0.2405	0.01599	2.746×10^{-4}	1.332×10^{-5}	1.981×10^{-4}	0.7216
140	0.06615	0.2406	0.01623	2.833×10^{-4}	1.349×10^{-5}	2.040×10^{-4}	0.7202
150	0.06507	0.2406	0.01646	2.921×10^{-4}	1.365×10^{-5}	2.099×10^{-4}	0.7188
160	0.06402	0.2406	0.01669	3.010×10^{-4}	1.382×10^{-5}	2.159×10^{-4}	0.7174
170	0.06300	0.2407	0.01692	3.100×10^{-4}	1.398×10^{-5}	2.220×10^{-4}	0.7161
180	0.06201	0.2408	0.01715	3.191×10^{-4}	1.414×10^{-5}	2.281×10^{-4}	0.7148
190	0.06106	0.2408	0.01738	3.284×10^{-4}	1.430×10^{-5}	2.343×10^{-4}	0.7136
200	0.06013	0.2409	0.01761	3.377×10^{-4}	1.446×10^{-5}	2.406×10^{-4}	0.7124
250	0.05590	0.2415	0.01874	3.857×10^{-4}	1.524×10^{-5}	2.727×10^{-4}	0.7071
300	0.05222	0.2423	0.01985	4.358×10^{-4}	1.599×10^{-5}	3.063×10^{-4}	0.7028
350	0.04899	0.2433	0.02094	4.879×10^{-4}	1.672×10^{-5}	3.413×10^{-4}	0.6995
400	0.04614	0.2445	0.02200	5.419×10^{-4}	1.743×10^{-5}	3.777×10^{-4}	0.6971
450	0.04361	0.2458	0.02305	5.974×10^{-4}	1.812×10^{-5}	4.154×10^{-4}	0.6953
500	0.04134	0.2472	0.02408	6.546×10^{-4}	1.878×10^{-5}	4.544×10^{-4}	0.6942
600	0.03743	0.2503	0.02608	7.732×10^{-4}	2.007×10^{-5}	5.361×10^{-4}	0.6934
700	0.03421	0.2535	0.02800	8.970×10^{-4}	2.129×10^{-5}	6.225×10^{-4}	0.6940
800	0.03149	0.2568	0.02986	1.025×10^{-3}	2.247×10^{-5}	7.134×10^{-4}	0.6956
900	0.02917	0.2599	0.03164	1.158×10^{-3}	2.359×10^{-5}	8.087×10^{-4}	0.6978
1000	0.02718	0.2630	0.03336	1.296×10^{-3}	2.467×10^{-5}	9.080×10^{-4}	0.7004
1500	0.02024	0.2761	0.04106	2.041×10^{-3}	2.957×10^{-5}	1.460×10^{-3}	0.7158
2000	0.01613	0.2855	0.04752	2.867×10^{-3}	3.379×10^{-5}	2.095×10^{-3}	0.7308
2500	0.01340	0.2922	0.05309	3.765×10^{-3}	3.750×10^{-5}	2.798×10^{-3}	0.7432
3000	0.01147	0.2972	0.05811	4.737×10^{-3}	4.082×10^{-5}	3.560×10^{-3}	0.7516
3500	0.01002	0.3010	0.06293	5.797×10^{-3}	4.381×10^{-5}	4.373×10^{-3}	0.7543
4000	0.00889	0.3040	0.06789	6.975×10^{-3}	4.651×10^{-5}	5.229×10^{-3}	0.7497

Nota: Para gases ideales, c_p, k, μ y Pr son independientes de la presión. Las propiedades ρ, ν y α a una presión P distinta a 1 atm se determinan cuando se multiplican los valores de ρ a la temperatura dada por P (en atm) y cuando se dividen ν y α entre P (en atm).

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Fuentes originales: Keenan, Chao, Keyes, Gas Tables, Wiley, 198; and *Thermophysical Properties of Matter*, Vol. 3: *Thermal Conductivity*, Y. S. Touloukian, P. E. Liley, S. C. Saxena, Vol. 11: *Viscosity*, Y. S. Touloukian, S. C. Saxena, y P. Hestermans, IFI/Plenun, NY, 1970, ISBN 0-306067020-8.

TABLA A-10I

Propiedades de gases a 1 atm de presión

Temp. T, °F	Densidad ρ, lbm/ft^3	Calor específico c_p, Btu/lbm · R	Conductividad térmica k, Btu/h · ft · R	Difusividad térmica α, ft^2/s	Viscosidad dinámica μ, lbm/ft · s	Viscosidad cinemática ν, ft^2/s	Número de Prandtl Pr
			Dióxido de carbono, CO_2				
−50	0.14712	0.1797	0.00628	6.600×10^{-5}	7.739×10^{-6}	5.261×10^{-5}	0.7970
0	0.13111	0.1885	0.00758	8.522×10^{-5}	8.661×10^{-6}	6.606×10^{-5}	0.7751
50	0.11825	0.1965	0.00888	1.061×10^{-4}	9.564×10^{-6}	8.086×10^{-5}	0.7621
100	0.10769	0.2039	0.01017	1.286×10^{-4}	1.045×10^{-5}	9.703×10^{-5}	0.7543
200	0.09136	0.2171	0.01273	1.784×10^{-4}	1.217×10^{-5}	1.332×10^{-4}	0.7469
300	0.07934	0.2284	0.01528	2.341×10^{-4}	1.382×10^{-5}	1.743×10^{-4}	0.7445
500	0.06280	0.2473	0.02027	3.626×10^{-4}	1.696×10^{-5}	2.700×10^{-4}	0.7446
1000	0.04129	0.2796	0.03213	7.733×10^{-4}	2.381×10^{-5}	5.767×10^{-4}	0.7458
1500	0.03075	0.2995	0.04281	1.290×10^{-3}	2.956×10^{-5}	9.610×10^{-4}	0.7445
2000	0.02450	0.3124	0.05193	1.885×10^{-3}	3.451×10^{-5}	1.408×10^{-3}	0.7474
			Monóxido de carbono, CO				
−50	0.09363	0.2571	0.01118	1.290×10^{-4}	9.419×10^{-6}	1.005×10^{-4}	0.7798
0	0.08345	0.2523	0.01240	1.636×10^{-4}	1.036×10^{-5}	1.242×10^{-4}	0.7593
50	0.07526	0.2496	0.01359	2.009×10^{-4}	1.127×10^{-5}	1.498×10^{-4}	0.7454
100	0.06854	0.2484	0.01476	2.408×10^{-4}	1.214×10^{-5}	1.772×10^{-4}	0.7359
200	0.05815	0.2485	0.01702	3.273×10^{-4}	1.379×10^{-5}	2.372×10^{-4}	0.7247
300	0.05049	0.2505	0.01920	4.217×10^{-4}	1.531×10^{-5}	3.032×10^{-4}	0.7191
500	0.03997	0.2567	0.02331	6.311×10^{-4}	1.802×10^{-5}	4.508×10^{-4}	0.7143
1000	0.02628	0.2732	0.03243	1.254×10^{-3}	2.334×10^{-5}	8.881×10^{-4}	0.7078
1500	0.01957	0.2862	0.04049	2.008×10^{-3}	2.766×10^{-5}	1.413×10^{-3}	0.7038
2000	0.01559	0.2958	0.04822	2.903×10^{-3}	3.231×10^{-5}	2.072×10^{-3}	0.7136
			Metano, CH_4				
−50	0.05363	0.5335	0.01401	1.360×10^{-4}	5.861×10^{-6}	1.092×10^{-4}	0.8033
0	0.04779	0.5277	0.01616	1.780×10^{-4}	6.506×10^{-6}	1.361×10^{-4}	0.7649
50	0.04311	0.5320	0.01839	2.228×10^{-4}	7.133×10^{-6}	1.655×10^{-4}	0.7428
100	0.03925	0.5433	0.02071	2.698×10^{-4}	7.742×10^{-6}	1.972×10^{-4}	0.7311
200	0.03330	0.5784	0.02559	3.690×10^{-4}	8.906×10^{-6}	2.674×10^{-4}	0.7245
300	0.02892	0.6226	0.03077	4.748×10^{-4}	1.000×10^{-5}	3.457×10^{-4}	0.7283
500	0.02289	0.7194	0.04195	7.075×10^{-4}	1.200×10^{-5}	5.244×10^{-4}	0.7412
1000	0.01505	0.9438	0.07346	1.436×10^{-3}	1.620×10^{-5}	1.076×10^{-3}	0.7491
1500	0.01121	1.1162	0.10766	2.390×10^{-3}	1.974×10^{-5}	1.760×10^{-3}	0.7366
2000	0.00893	1.2419	0.14151	3.544×10^{-3}	2.327×10^{-5}	2.605×10^{-3}	0.7353
			Hidrógeno, H_2				
−50	0.00674	3.0603	0.08246	1.110×10^{-3}	4.969×10^{-6}	7.373×10^{-4}	0.6638
0	0.00601	3.2508	0.09049	1.287×10^{-3}	5.381×10^{-6}	8.960×10^{-4}	0.6960
50	0.00542	3.3553	0.09818	1.500×10^{-3}	5.781×10^{-6}	1.067×10^{-3}	0.7112
100	0.00493	3.4118	0.10555	1.742×10^{-3}	6.167×10^{-6}	1.250×10^{-3}	0.7177
200	0.00419	3.4549	0.11946	2.295×10^{-3}	6.911×10^{-6}	1.652×10^{-3}	0.7197
300	0.00363	3.4613	0.13241	2.924×10^{-3}	7.622×10^{-6}	2.098×10^{-3}	0.7174
500	0.00288	3.4572	0.15620	4.363×10^{-3}	8.967×10^{-6}	3.117×10^{-3}	0.7146
1000	0.00189	3.5127	0.20989	8.776×10^{-3}	1.201×10^{-5}	6.354×10^{-3}	0.7241
1500	0.00141	3.6317	0.26381	1.432×10^{-2}	1.477×10^{-5}	1.048×10^{-2}	0.7323
2000	0.00112	3.7656	0.31923	2.098×10^{-2}	1.734×10^{-5}	1.544×10^{-2}	0.7362

(*continúa*)

TABLA A-10I

Propiedades de gases a 1 atm de presión (continuación)

Temp. T, °F	Densidad ρ, lbm/ft^3	Calor específico c_p, Btu/lbm · R	Conductividad térmica k, Btu/h · ft · R	Difusividad térmica α, ft^2/s	Viscosidad dinámica μ, lbm/ft · s	Viscosidad cinemática ν, ft^2/s	Número de Prandtl Pr
			Nitrógeno, N_2				
−50	0.09364	0.2320	0.01176	1.504×10^{-4}	9.500×10^{-6}	1.014×10^{-4}	0.6746
0	0.08346	0.2441	0.01300	1.773×10^{-4}	1.043×10^{-5}	1.251×10^{-4}	0.7056
50	0.07527	0.2480	0.01420	2.113×10^{-4}	1.134×10^{-5}	1.507×10^{-4}	0.7133
100	0.06854	0.2489	0.01537	2.502×10^{-4}	1.221×10^{-5}	1.783×10^{-4}	0.7126
200	0.05815	0.2487	0.01760	3.379×10^{-4}	1.388×10^{-5}	2.387×10^{-4}	0.7062
300	0.05050	0.2492	0.01970	4.349×10^{-4}	1.543×10^{-5}	3.055×10^{-4}	0.7025
500	0.03997	0.2535	0.02359	6.466×10^{-4}	1.823×10^{-5}	4.559×10^{-4}	0.7051
1000	0.02628	0.2697	0.03204	1.255×10^{-3}	2.387×10^{-5}	9.083×10^{-4}	0.7232
1500	0.01958	0.2831	0.04002	2.006×10^{-3}	2.829×10^{-5}	1.445×10^{-3}	0.7202
2000	0.01560	0.2927	0.04918	2.992×10^{-3}	3.212×10^{-5}	2.059×10^{-3}	0.6882
			Oxígeno, O_2				
−50	0.10697	0.2331	0.01216	1.355×10^{-4}	1.104×10^{-5}	1.032×10^{-4}	0.7622
0	0.09533	0.2245	0.01346	1.747×10^{-4}	1.218×10^{-5}	1.277×10^{-4}	0.7312
50	0.08598	0.2209	0.01475	2.157×10^{-4}	1.326×10^{-5}	1.543×10^{-4}	0.7152
100	0.07830	0.2200	0.01601	2.582×10^{-4}	1.429×10^{-5}	1.826×10^{-4}	0.7072
200	0.06643	0.2221	0.01851	3.484×10^{-4}	1.625×10^{-5}	2.446×10^{-4}	0.7020
300	0.05768	0.2262	0.02096	4.463×10^{-4}	1.806×10^{-5}	3.132×10^{-4}	0.7018
500	0.04566	0.2352	0.02577	6.665×10^{-4}	2.139×10^{-5}	4.685×10^{-4}	0.7029
1000	0.03002	0.2520	0.03698	1.357×10^{-3}	2.855×10^{-5}	9.509×10^{-4}	0.7005
1500	0.02236	0.2626	0.04701	2.224×10^{-3}	3.474×10^{-5}	1.553×10^{-3}	0.6985
2000	0.01782	0.2701	0.05614	3.241×10^{-3}	4.035×10^{-5}	2.265×10^{-3}	0.6988
			Vapor de agua, H_2O				
−50	0.06022	0.4512	0.00797	8.153×10^{-5}	4.933×10^{-6}	8.192×10^{-5}	1.0050
0	0.05367	0.4484	0.00898	1.036×10^{-4}	5.592×10^{-6}	1.041×10^{-4}	1.0049
50	0.04841	0.4472	0.01006	1.291×10^{-4}	6.261×10^{-6}	1.293×10^{-4}	1.0018
100	0.04408	0.4473	0.01121	1.579×10^{-4}	6.942×10^{-6}	1.574×10^{-4}	0.9969
200	0.03740	0.4503	0.01372	2.263×10^{-4}	8.333×10^{-6}	2.228×10^{-4}	0.9845
300	0.03248	0.4557	0.01648	3.093×10^{-4}	9.756×10^{-6}	3.004×10^{-4}	0.9713
500	0.02571	0.4707	0.02267	5.204×10^{-4}	1.267×10^{-5}	4.931×10^{-4}	0.9475
1000	0.01690	0.5167	0.04134	1.314×10^{-3}	2.014×10^{-5}	1.191×10^{-3}	0.9063
1500	0.01259	0.5625	0.06315	2.477×10^{-3}	2.742×10^{-5}	2.178×10^{-3}	0.8793
2000	0.01003	0.6034	0.08681	3.984×10^{-3}	3.422×10^{-5}	3.411×10^{-3}	0.8563

Note: Para gases ideales, las propiedades c_p, k, μ y Pr son independientes de la presión. Las propiedades ρ, ν y α a una presión P distinta a 1 atm se determinan cuando se multiplican los valores de ρ a la temperatura dada por P (en atm) y cuando se dividen ν y α entre P (en atm).

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Originalmente con base en diversas fuentes.

TABLA A-11I

Propiedades de la atmósfera a gran altitud

Altitud, ft	Temperatura, °F	Presión, psia	Gravedad, g, ft/s^2	Velocidad del sonido, ft/s	Densidad, lbm/ft^3	Viscosidad μ, lbm/ft · s	Conductividad térmica, Btu/h · ft · R
0	59.00	14.7	32.174	1116	0.07647	1.202×10^{-5}	0.0146
500	57.22	14.4	32.173	1115	0.07536	1.199×10^{-5}	0.0146
1000	55.43	14.2	32.171	1113	0.07426	1.196×10^{-5}	0.0146
1500	53.65	13.9	32.169	1111	0.07317	1.193×10^{-5}	0.0145
2000	51.87	13.7	32.168	1109	0.07210	1.190×10^{-5}	0.0145
2500	50.09	13.4	32.166	1107	0.07104	1.186×10^{-5}	0.0144
3000	48.30	13.2	32.165	1105	0.06998	1.183×10^{-5}	0.0144
3500	46.52	12.9	32.163	1103	0.06985	1.180×10^{-5}	0.0143
4000	44.74	12.7	32.162	1101	0.06792	1.177×10^{-5}	0.0143
4500	42.96	12.5	32.160	1099	0.06690	1.173×10^{-5}	0.0142
5000	41.17	12.2	32.159	1097	0.06590	1.170×10^{-5}	0.0142
5500	39.39	12.0	32.157	1095	0.06491	1.167×10^{-5}	0.0141
6000	37.61	11.8	32.156	1093	0.06393	1.164×10^{-5}	0.0141
6500	35.83	11.6	32.154	1091	0.06296	1.160×10^{-5}	0.0141
7000	34.05	11.3	32.152	1089	0.06200	1.157×10^{-5}	0.0140
7500	32.26	11.1	32.151	1087	0.06105	1.154×10^{-5}	0.0140
8000	30.48	10.9	32.149	1085	0.06012	1.150×10^{-5}	0.0139
8500	28.70	10.7	32.148	1083	0.05919	1.147×10^{-5}	0.0139
9000	26.92	10.5	32.146	1081	0.05828	1.144×10^{-5}	0.0138
9500	25.14	10.3	32.145	1079	0.05738	1.140×10^{-5}	0.0138
10,000	23.36	10.1	32.145	1077	0.05648	1.137×10^{-5}	0.0137
11,000	19.79	9.72	32.140	1073	0.05473	1.130×10^{-5}	0.0136
12,000	16.23	9.34	32.137	1069	0.05302	1.124×10^{-5}	0.0136
13,000	12.67	8.99	32.134	1065	0.05135	1.117×10^{-5}	0.0135
14,000	9.12	8.63	32.131	1061	0.04973	1.110×10^{-5}	0.0134
15,000	5.55	8.29	32.128	1057	0.04814	1.104×10^{-5}	0.0133
16,000	+1.99	7.97	32.125	1053	0.04659	1.097×10^{-5}	0.0132
17,000	−1.58	7.65	32.122	1049	0.04508	1.090×10^{-5}	0.0132
18,000	−5.14	7.34	32.119	1045	0.04361	1.083×10^{-5}	0.0130
19,000	−8.70	7.05	32.115	1041	0.04217	1.076×10^{-5}	0.0129
20,000	−12.2	6.76	32.112	1037	0.04077	1.070×10^{-5}	0.0128
22,000	−19.4	6.21	32.106	1029	0.03808	1.056×10^{-5}	0.0126
24,000	−26.5	5.70	32.100	1020	0.03553	1.042×10^{-5}	0.0124
26,000	−33.6	5.22	32.094	1012	0.03311	1.028×10^{-5}	0.0122
28,000	−40.7	4.78	32.088	1003	0.03082	1.014×10^{-5}	0.0121
30,000	−47.8	4.37	32.082	995	0.02866	1.000×10^{-5}	0.0119
32,000	−54.9	3.99	32.08	987	0.02661	0.986×10^{-5}	0.0117
34,000	−62.0	3.63	32.07	978	0.02468	0.971×10^{-5}	0.0115
36,000	−69.2	3.30	32.06	969	0.02285	0.956×10^{-5}	0.0113
38,000	−69.7	3.05	32.06	968	0.02079	0.955×10^{-5}	0.0113
40,000	−69.7	2.73	32.05	968	0.01890	0.955×10^{-5}	0.0113
45,000	−69.7	2.148	32.04	968	0.01487	0.955×10^{-5}	0.0113
50,000	−69.7	1.691	32.02	968	0.01171	0.955×10^{-5}	0.0113
55,000	−69.7	1.332	32.00	968	0.00922	0.955×10^{-5}	0.0113
60,000	−69.7	1.048	31.99	968	0.00726	0.955×10^{-5}	0.0113

Fuente: U.S. Standard Atmosphere Supplements, U.S. Government Printing Office, 1966. Con base en condiciones medias todo el año a 45° de latitud y que varían con la época del año y los patrones del clima. Se considera que las condiciones a nivel del mar (z = 0) son P = 14.696 psia, T = 59°F, ρ = 0.076474 lbm/ft^3, g = 32.1741 ft^2/s.

GLOSARIO

Autor invitado: James G. Brasseur, The Pennsylvania State University

Nota: Los términos del glosario en **negritas** corresponden a términos en **negrita** en el texto. El número entre [corchetes] denota la página del término en negrita en el texto. Las *cursivas* indican un término definido en alguna otra parte en el glosario.

Los términos en negrita sin número de página son conceptos que no se definen en el texto, sino que se definen o se hace referencia cruzada a ellos en el glosario para que los estudiantes los revisen.

aceleración centrípeta [250]: Aceleración asociada con el cambio en la dirección de la velocidad (vector) de una partícula material.

aceleración convectiva [126]: Con la finalidad de reducir la confusión de la terminología en flujos donde las *fuerzas de flotabilidad* generan movimientos de fluido convectivos, con frecuencia el término "aceleración convectiva" se sustituye con el término "aceleración advectiva".

aceleración convectiva [126]: Sinónimo de *aceleración advectiva*, este término se debe agregar a la derivada parcial de la velocidad con respecto al tiempo para cuantificar de manera adecuada la aceleración de una *partícula de fluido* dentro de un marco de referencia *euleriano*. Por ejemplo, una partícula de fluido que se mueve a través de una contracción en un *flujo estacionario* aumenta su velocidad conforme se mueve, aunque la derivada con respecto al tiempo es cero. Al término adicional de aceleración advectiva que se requiere para cuantificar aceleración de fluido (por ejemplo, en la *segunda Ley de Newton*) se le llama *derivada convectiva*. Vea también *descripción euleriana*, *descripción lagrangiana*, *derivada material* y *flujo estacionario*.

aceleración material [127]: Aceleración de una *partícula de fluido* en el punto (x, y, z) en un flujo en el tiempo t. Está dada por la *derivada material* de la velocidad del fluido: $D\vec{V}(x, y, z, t)/Dt$.

aerodinámica [2]: Aplicación de la *dinámica de fluidos* a vehículos que van por aire, tierra y agua. Con frecuencia, el término se aplica específicamente al flujo que rodea y las fuerzas y momentos que actúan sobre los vehículos que vuelan en el aire, en oposición a los vehículos en agua u otros líquidos (*hidrodinámica*).

análisis diferencial [400]: Análisis en un punto del flujo (opuesto al análisis de un *volumen de control*).

análisis dimensional [277]: Proceso de análisis que se basa meramente en las variables de relevancia para el sistema de flujo bajo estudio, las dimensiones de las variables y la homogeneidad dimensional. Después de determinar las otras variables de las que depende una variable (por ejemplo, la fuerza de arrastre sobre un automóvil depende de la velocidad y el tamaño del auto, la viscosidad del fluido, la densidad del fluido y la rugosidad de la superficie), se aplica el principio de homogeneidad dimensional con el *teorema Pi de Buckingham* para relacionar una variable de interés adimesionalizada adecuadamente (por ejemplo, la fuerza de arrastre) con las otras variables adimensionalizadas adecuadamente (por ejemplo, números de Reynolds, razón de rugosidad y número de Mach).

anemómetro de hilo caliente [377]: Dispositivo que se usa para medir localmente una componente de velocidad en un flujo de gas, con base en la relación entre el flujo alrededor de un delgado alambre caliente (el hilo caliente), la temperatura del alambre y el calentamiento del alambre que resulta de una corriente. Vea también *anemómetro de película caliente*.

anemómetro de película caliente [377]: Similar a un *anemómetro de hilo caliente* excepto que usa una película metálica en vez de un alambre; se usa principalmente para flujos líquidos. La porción de medición de una sonda de película caliente por lo general es más grande y más robusta que la de una sonda de hilo caliente.

ángulo de ataque [570]: Ángulo entre un perfil aerodinámico o ala y el vector de velocidad de flujo libre.

aproximación de capa límite [511]: Vea *capa* límite.

arrastre debido a fricción [570]: Parte del arrastre sobre un objeto que resulta del *esfuerzo de corte* superficial integrado en la dirección de flujo relativa al objeto.

arrastre debido a presión (o **de forma**) [570]: Parte del arrastre sobre un objeto que resulta de la *presión* superficial integrada en la dirección del flujo relativa al objeto. La presión más grande sobre el frente de un *cuerpo romo* en movimiento (como un automóvil) en comparación con la presión sobre la parte trasera resulta de *separación de flujo* masiva y formación de *estela* en la parte trasera.

arrastre inducido [592]: Vea *fuerza de arrastre*.

arrastre inducido: Componente de la fuerza de arrastre sobre un ala de envergadura finita que se "induce" por medio de sustentación y que se asocia con los *vórtices de las puntas* que se forman en las puntas del ala y "descienden" detrás del ala.

barómetro [75]: Dispositivo que mide presión atmosférica.

bidimensional [562]: Vea *dimensionalidad*.

calor (transferencia) [41]: El término "calor" generalmente se usa como sinónimo de *energía térmica*. La transferencia de calor es la transferencia de energía térmica de una posición física a otra.

calor [41]: Vea *energía*.

campo [124]: Representación de una variable de flujo como función de coordenadas eulerianas (x, y, z). Por ejemplo, los *campos de velocidad* y *aceleración* son los vectores de

Nota: Los términos que aparecen en este glosario se encuentran dentro de los capítulos 1 a 11 en negritas.

velocidad y aceleración del fluido ($\vec{V}$, $\vec{a}$) como funciones de la posición (x, y, z) en la *descripción euleriana* en un tiempo específico t.

campo de aceleración [122]: Vea *campo*.

campo de flujo [123]: El campo de las variables de flujo. Por lo general, este término se refiere al campo de velocidad, pero también puede significar todas las variables del campo en un flujo de fluido.

campo de velocidad [122]: Vea *campo*.

cantidad de movimiento: La cantidad de movimiento de una *partícula material* (o *partícula de fluido*) es la masa de la partícula material multiplicada por su velocidad. La cantidad de movimiento de un volumen macroscópico de partículas materiales es la cantidad de movimiento por unidad de volumen integrada sobre el volumen, donde la cantidad de movimiento por unidad de volumen es la densidad de la partícula material multiplicada por su velocidad. Note que la cantidad de movimiento es un vector.

capa de amortiguamiento [338, 580]: Parte de una capa límite turbulenta, cerca de la pared, que se encuentra entre las *subcapas viscosa* e *inercial*. Esta delgada capa es una transición desde la capa dominada por fricción adyacente a la superficie sólida, donde los *esfuerzos viscosos* son grandes, hacia la capa inercial, donde los *esfuerzos turbulentos* son grandes en comparación con los esfuerzos viscosos.

capa de corte [147]: Región de flujo cuasi bidimensional con un gradiente alto en la componente de velocidad de flujo en la dirección transversal del flujo. Las capas de corte son inherentemente *viscosas* y *vorticiales* en su naturaleza.

capa límite [6, 325, 481, 511]: A *números de Reynolds* altos, en el flujo adyacente a las superficies donde el flujo se lleva al reposo (vea *condición de no deslizamiento*), existen "capas límite" relativamente delgadas. Las capas límite se caracterizan por *esfuerzo de corte* alto con las velocidades más altas en regiones de la capa límite más alejadas de la superficie. La *fuerza de fricción*, el *esfuerzo viscoso* y la *vorticidad* son significativas en las capas límite. La forma aproximada de las dos componentes de la ecuación de Navier-Stokes, que se obtienen por medio de una simplificación al ignorar los términos que son pequeños dentro de la capa límite, se llaman *ecuaciones de capa* límite. La aproximación asociada con base en la existencia de capas límite delgadas rodeadas por flujo *irrotacional* o *invíscido* se llama *aproximación de capa* límite.

carga [194]: Una cantidad (presión, energía cinética, etcétera) que se expresa como una altura de columna equivalente de un fluido. La ley de *conservación de energía* para *flujo estacionario* escrita para un *volumen de control* que rodea la *línea de corriente* central con una entrada y una salida, o que se encoge a una línea de corriente, se puede escribir de tal manera que cada término tenga las *dimensiones* de longitud. Cada uno de estos términos se llama término de carga:

carga de elevación [194]: Término en la forma de carga en la ley de *conservación de la energía* (vea *carga*) que involucra distancia en la dirección opuesta al vector gravitacional relativo a una referencia predefinida (z).

carga de presión [194]: Término en la forma de carga en la ley de *conservación de la energía* (vea *carga*) que involucra presión (P/rg).

carga de velocidad [194]: Término (*energía cinética*) en la forma de carga en la ley de *conservación de la energía* (vea *carga*) que involucra velocidad ($V^2/2g$).

cavitación [40]: Formación de burbujas de vapor en un líquido como resultado de la presión que va por abajo de la *presión de vapor*.

centro de presión [79, 81]: Punto efectivo de aplicación de fuerza de presión distribuida sobre una superficie. Éste es el punto donde se debe colocar una fuerza contractuante (igual a la presión integrada) para que el momento neto en torno a este punto sea cero.

chorro: Región dominada por fricción proveniente de un tubo u orificio y que se forma por capas límite superficiales que se barrieron por la velocidad media. Los chorros se caracterizan por *corte* alto con las mayores velocidades en el centro del chorro y las menores velocidades en los lados laterales. La *fuerza de fricción*, los *esfuerzos viscosos* y la *vorticidad* son significativos en los chorros.

cinemática [122]: En contraste con la *dinámica*, los aspectos cinemáticos de un flujo de fluido son aquellos que no involucran directamente.

coeficiente de arrastre [483, 565]: Arrastre adimensional dado por la *fuerza de arrastre* sobre un objeto al que se le quitan las dimensiones al dividir entre la *presión dinámica* del flujo libre multiplicada por el área frontal del objeto:

$$C_D \equiv \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

Note que, a números de Reynolds altos ($\text{Re} \gg 1$), C_D es una variable normalizada, mientras que a $\text{Re} \ll 1$, C_D es adimensional pero no está normalizada (vea *normalización*). Vea también *coeficiente de sustentación*.

coeficiente de compresibilidad [42, 55]: Razón del cambio de presión al cambio relativo en volumen de una *partícula de fluido*. Este coeficiente cuantifica la compresibilidad en respuesta al cambio en presión, un importante efecto en flujos con número de Mach alto.

coeficiente de compresibilidad [42, 55]: Vea *compresibilidad*.

coeficiente de expansión volumétrica [44]: Razón del cambio de densidad relativa al cambio en temperatura de una *partícula de fluido*. Este coeficiente cuantifica la compresibilidad en respuesta al cambio en temperatura.

Coeficiente de fricción sobre la superficie [523, 570]: Esfuerzo de corte superficial τ_w al que se le quitan las dimensiones por medio de una *presión dinámica* adecuada $\frac{1}{2}\rho V^2$. También se llama coeficiente de fricción local, C_f.

coeficiente de sustentación [292, 565]: Sustentación adimensional dada por la fuerza de sustentación sobre un objeto en sustentación (como un perfil aerodinámico o un ala) a la que se le quitan las dimensiones al dividir entre la presión dinámica del flujo libre multiplicada por el área de planta del objeto:

$$C_L \equiv \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

Note que, a números de Reynolds altos ($\text{Re} \gg 1$), C_L es una variable normalizada, mientras que a $\text{Re} \ll 1$, C_L es

adimensional pero no está normalizada (vea *normalización*). Vea también *coeficiente de arrastre*.

compresibilidad: Medida en la que una *partícula de fluido* cambia volumen cuando se sujeta a un cambio de presión o a un cambio de temperatura.

condición de frontera [400, 440]: Cuando se resuelven variables de campo de flujo (velocidad, temperatura) a partir de ecuaciones gobernantes, es necesario especificar de forma matemática una función de la variable en la superficie que limita el campo de flujo. Estos enunciados matemáticos se llaman condiciones de frontera. La condición de no-deslizamiento de que la velocidad del flujo debe ser igual a la velocidad superficial en la superficie es un ejemplo de una condición de frontera que se usa con la ecuación de Navier-Stokes para resolverla para el campo de velocidad.

condición de no-deslizamiento [6, 438]: Requisito de que, en la interfase entre un fluido y una superficie sólida, la velocidad del fluido y la velocidad de la superficie son iguales. Por lo tanto, si la superficie está fija, el fluido debe obedecer la *condición de frontera* de que la velocidad del fluido = 0 en la superficie.

conservación de la cantidad de movimiento: Esta es la *segunda Ley de Newton* del movimiento, una ley fundamental de la física que afirma que la razón de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento de una masa fija (*sistema*) se equilibra por medio de la suma neta de todas las fuerzas aplicadas a la masa.

continuo [36, 122]: Tratamiento de la materia como una distribución continua (sin hoyos) de elementos de *volumen diferencial* de masa finita. Cada elemento de volumen debe contener grandes números de moléculas, de modo que el efecto macroscópico de las moléculas se pueda modelar sin considerar moléculas individuales.

corte: Se refiere a los gradientes (derivadas) de las componentes de velocidad en direcciones normales a la componente de velocidad.

cuerpo romo [563]: Objeto en movimiento con una porción posterior roma. Los cuerpos romos tienen *estelas* que resultan de la *separación de flujo* masivo de la parte posterior del cuerpo.

deformación [141]: Vea *razón de deformación*.

deformación debida al corte [139, 141]: Vea *razón de deformación*.

derivada convectiva: Vea *derivada material* y *aceleración convectiva*.

derivada euleriana [127]: Vea *derivada material*.

derivada lagrangiana [127]: Vea *derivada material*.

derivada material [127)]: Términos sinónimos son *derivada total*, *derivada sustancial* y *derivada de partícula*. Estos términos significan la razón de cambio en el tiempo de las variables del fluido (temperatura, velocidad, etcétera) que se mueven con una *partícula de fluido*. Por ende, la derivada material de la temperatura en un punto (x, y, z) en el tiempo t es la derivada en el tiempo de la temperatura unida a una *partícula de fluido* en movimiento en el punto (x, y, z) en el flujo en el tiempo t. En un marco de referencia *lagrangiano* (es decir: un marco unido a la partícula en movimiento), la temperatura de la partícula $T_{\text{partícula}}$ sólo depende del tiempo, de modo que una derivada en el tiempo es una derivada total $dT_{\text{partícula}}(t)/dt$. En un marco euleriano, el *campo* temperatura $T(x, y, z, t)$ depende tanto de la posición (x, y, z) como del tiempo t, de modo que la *derivada material* debe incluir tanto una derivada parcial en el tiempo como una *derivada convectiva*: $dT_{\text{partícula}}(t)/dt \equiv DT(x, y, z, t)/Dt = \partial T/\partial t + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T$. Vea también *campo*.

derivada parcial [127, 129]: Vea *derivada material*.

derivada sustancial [127]: Vea *derivada material*.

derivada total [125, 127, 129]: Vea *derivada material*.

descripción euleriana [122]: en contraste con una *descripción lagrangiana*, un análisis euleriano de flujo de fluido se desarrolla desde un marco de referencia a través del cual se mueven las *partículas de fluido*. En este marco la aceleración de las partículas de fluido no es simplemente la derivada en el tiempo de la velocidad del fluido, y debe incluir otro término, llamado *aceleración convectiva*, para describir el cambio en velocidad de las partículas de fluido conforme se mueven a través de un *campo de velocidad*. Note que los campos de velocidad siempre se definen en un marco de referencia euleriano.

descripción lagrangiana [122]: En contraste con la *descripción euleriana*, un análisis lagrangiano se desarrolla a partir de un marco de referencia unido a partículas materiales en movimiento. Por ejemplo, la aceleración de partícula sólida en la forma estándar de la segunda Ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, está en un sistema coordenado que se mueve con la partícula, de modo que la aceleración $\vec{a}$ está dada por la derivada en el tiempo de la velocidad de la partícula. Éste es el enfoque analítico típico que se usa para análisis del movimiento de objetos sólidos.

diagrama de Moody [341]: Una gráfica del *factor de fricción* como función del número de Reynolds y el parámetro de rugosidad que se usa de manera común para flujo en tubería totalmente desarrollado. La gráfica es una combinación de la teoría de flujo laminar con una representación gráfica de la fórmula empírica de Colebrook para un gran conjunto de datos experimentales de flujo turbulento en tuberías de diversos valores de rugosidad semejante a la rugosidad “de papel de lija”.

dimensión primaria [15, 270]: Vea *dimensiones*.

dimensionalidad: Número de coordenadas espaciales en cuya dirección las componentes de velocidad y/u otras variables varían para un sistema coordenado específico. Por ejemplo, el flujo *totalmente desarrollado* en un tubo es unidimensional (1-D) en la dirección radial r, pues la única componente de velocidad distinta de cero (la axial, o componente x) es constante en las direcciones x y θ, pero varía en la dirección r. Los *flujos planares* son bidimensionales (2-D). Los flujos sobre *cuerpos romos* como automóviles, aviones y edificios son tridimensionales (3-D). Las derivadas espaciales sólo son distintas de cero en las direcciones de dimensionalidad.

dimensiones [15, 270]: Especificación requerida de una cantidad física más allá de su valor numérico. Vea también *unidades*.

dimensiones básicas: Vea *dimensiones*.

dimensiones derivadas (o **secundarias**) [15]: Combinaciones de dimensiones fundamentales. Ejemplos de

dimensiones derivadas son: Velocidad (L/t), esfuerzo o presión ($F/L^2 = m/(Lt^2)$), energía o trabajo ($mL^2/t^2 = FL$), densidad (m/L^3), peso específico (F/L^3) y gravedad específica (sin unidades).

dimensiones derivadas [15]: Vea *dimensiones*.

dimensiones fundamentales (**primarias**, **básicas**) [15, 270]: Masa (m), longitud (L), tiempo (t), temperatura (T), corriente eléctrica (I), cantidad de luz (C) y cantidad de materia (N) sin referencia a un sistema específico de unidades. Note que la dimensión de fuerza se obtiene por medio de la Ley de Newton como $F = mL/t^2$ (por ende, la dimensión de masa se puede sustituir con una dimensión de fuerza cuando se sustituye m por Ft^2/L).

dimensiones fundamentales [15, 270]: Vea *dimensiones*.

dimensiones secundarias [15]: Vea *dimensiones*.

dinámica [2]: Cuando se contrasta con *estática* el término se refiere a la aplicación de la segunda ley de movimiento de Newton a materia en movimiento. Cuando se contrasta con *cinemática*, el término se refiere a fuerzas o aceleraciones en balance de fuerzas establecido por medio de ley de Newton.

dinámica de fluido computacional (DFC, *CFD* por sus siglas en inglés) [129, 296, 434]: Aplicación de las leyes de conservación con condiciones de frontera e inicial en forma de matemática discreta para estimar cuantitativamente variables de campo sobre una red (o malla) discreta que abarca parte del campo de flujo.

dinámica de gases [2]: El estudio y análisis de los gases y vapores por medio de las leyes de conservación macroscópicas de la física (vea *mecánica/dinámica de fluidos*).

ecuación de Bernoulli [185, 187, 208, 270]: Reducción útil de *la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento* (y de la *ecuación de conservación de la energía*) que describe un equilibrio entre la presión (*trabajo de flujo*), la velocidad (*energía cinética*) y la posición de las *partículas de fluido* relativas al vector gravedad (energía potencial) en regiones de un flujo de fluido donde la fuerza de fricción sobre las partículas de fluido es despreciable en comparación con la fuerza de presión en esta región del flujo (vea *flujo invíscido*). Existen múltiples formas de la ecuación de Bernoulli para fluido incompresible contra fluido compresible, estacionario contra no-estacionario, y sus deducciones por medio de la *Ley de Newton* contra la *primera ley de la termodinámica*. Las formas más comúnmente usadas son para flujo estacionario de fluido incompresible deducido por medio de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

ecuación de continuidad [404]: Forma matemática de la *conservación de masa* aplicada a una *partícula de fluido* en un flujo.

ecuación de Navier-Stokes [429, 474]: La *segunda Ley de Newton* de movimiento de fluido (o *conservación de cantidad de movimiento*) escrita para una partícula de fluido (en la forma *diferencial*) con la sustitución del *tensor de esfuerzo viscoso* por la *relación constitutiva* entre el *esfuerzo* y la *razón de deformación* para fluidos newtonianos. Por lo tanto, la ecuación de Navier-Stokes es simplemente la Ley de Newton escrita para fluidos newtonianos.

ecuaciones constitutivas [426]: Relación empírica entre una variable física que aparece en una *ley de conservación de la física* y otras variables físicas en la ecuación las cuales se debe predecir. Por ejemplo, la ecuación de energía que se escribe para la temperatura incluye el vector de flujo de *calor*. Se conoce, a partir de los experimentos, que el flujo de calor para los materiales más comunes se aproxima con precisión como una magnitud proporcional al gradiente de temperatura (esto se llama Ley de Fourier). En la *Ley de Newton* escrita para una *partícula de fluido*, el *tensor de esfuerzo viscoso* (vea *esfuerzo*) se debe escribir como función de la velocidad para resolver la ecuación. La relación constitutiva más común para esfuerzo viscoso es la de un *fluido newtoniano*. *Vea también reología*.

ecuaciones de capa límite [511, 515]: vea *capa* límite.

eficiencia [184]: Una razón que describe niveles de pérdidas de potencia útil que se obtiene a partir de un dispositivo. La eficiencia de 1 (o 100%) implica que no hay ninguna pérdida en la función particular del dispositivo para el cual se establece una definición particular de eficiencia. Por ejemplo, la eficiencia mecánica de una bomba se define como la razón de la potencia mecánica útil que se transfiere al flujo por medio de la bomba a la energía mecánica, o trabajo de eje, que se requiere para activar la bomba. La eficiencia de acoplamiento de bomba con motor se define como la razón de potencia mecánica útil que se transfiere al flujo a la potencia eléctrica que se requiere para activar la bomba. Por lo tanto, la eficiencia de acoplamiento de bomba con motor incluye pérdidas adicionales y es, en consecuencia, menor que la eficiencia de bomba mecánica.
el equilibrio de fuerzas de la segunda Ley de Newton. La cinemática se refiere a descripciones y derivaciones matemáticas sólo con base en la conservación de la masa (continuidad) y las definiciones relacionadas con el flujo y la deformación.

eliminación de dimensiones [272]: Proceso de convertir en adimensional una variable dimensional, cuando se divide la variable entre un *parámetro de escalamiento* (una sola variable o una combinación de variables) que tiene las mismas dimensiones. Por ejemplo, la presión superficial sobre una bola en movimiento puede volverse adimensional cuando se divide entre ρV^2, donde ρ es la densidad del fluido y V es la velocidad de corriente libre. Vea también *normalización*.

energía [41]: Estado de la materia descrito por la primera ley de la termodinámica que se puede alterar a nivel macroscópico por medio de trabajo, y a nivel microscópico por medio de ajustes en energía térmica.

energía cinética [41]: Forma macroscópica (o mecánica) de energía que surge de la velocidad de la materia relativa a un marco de referencia inercial.

energía cinética [41]: Vea *energía*.

energía de flujo [180]: Sinónimo de *trabajo de flujo*. Trabajo asociado con la *presión* que actúa sobre un *fluido* que fluye.

energía de trabajo [204]: Integral de fuerza sobre la distancia en la que una masa se mueve por medio de la fuerza. El trabajo es la energía asociada con el movimiento de materia por medio de una fuerza.

energía interna [41]: Formas de energía que surgen de los movimientos microscópicos de moléculas y átomos, y de la estructura y movimientos de las partículas subatómicas que comprenden los átomos y moléculas dentro de la materia.

energía interna [41]: Vea *energía*.

energía mecánica [180, 207]: Vea *energía*.

energía mecánica [182]: Componentes no-térmicos de la energía; los ejemplos incluyen energía cinética y potencial.

energía potencial [41]: Forma mecánica de energía que cambia como resultado del desplazamiento macroscópico de materia relativa al vector gravitacional.

energía potencial [41]: Vea *energía*.

energía térmica [41]: Energía interna asociada con movimientos microscópicos de moléculas y átomos. Para sistemas de fase sencilla, es la energía representada por la temperatura.

energía térmica [41]: Vea *energía*.

energía total [41]: Suma de todas las formas de energía. La energía total es la suma de las energías cinética, potencial e interna. De manera equivalente, la energía total es la suma de las energías mecánica y térmica.

energía total [41]: Vea *energía*.

esfuerzo [3]: Componente de una fuerza que se distribuye sobre un área se escribe como la integral de un esfuerzo sobre ésta. Por lo tanto, el esfuerzo es la componente de fuerza dF_i sobre un elemento de área diferencial dividida entre el área del elemento dA_j (en el límite cuando $dA_j \to 0$), donde i y j indican una de coordenadas x, y o z. En consecuencia, el esfuerzo $\sigma_{ij} = dF_i/dA_j$ es una componente de fuerza por unidad de área en la dirección i sobre la superficie j. Para obtener la fuerza superficial a partir del esfuerzo, se integra el esfuerzo sobre la correspondiente área superficial. De manera matemática, existen seis componentes independientes de un *tensor de esfuerzo* simétrico de segundo rango, que por lo general se escribe como una matriz simétrica de 3×3.

esfuerzo de corte [3, 231]: Vea *esfuerzo*, *esfuerzo de corte*.

esfuerzo de corte [3, 233]: Esfuerzo (componente de fuerza por unidad de área) que actúa tangente al área. En consecuencia, σ_{xy}, σ_{yx}, σ_{xz}, σ_{zx}, σ_{yz}, y σ_{zy} son esfuerzos de corte. La fuerza de corte sobre una superficie es la fuerza neta del esfuerzo de corte, que se obtiene cuando se integra el esfuerzo de corte sobre el área superficial. Los esfuerzos de corte son los elementos afuera de la diagonal del *tensor de esfuerzo*.

esfuerzo de presión [3]: En un fluido en reposo todos los esfuerzos son esfuerzos normales y todos los esfuerzos actúan hacia adentro sobre una superficie. En un punto fijo, los tres esfuerzos normales son iguales y la magnitud de estos esfuerzos normales iguales se llama presión. Por ende, en un fluido estático, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P$, , donde P es la presión. En un fluido en movimiento, los esfuerzos adicionales a la presión son *esfuerzos viscosos*. Una fuerza de presión sobre una superficie es el esfuerzo de presión que se integra sobre la superficie. Sin embargo, la fuerza de presión por unidad de volumen sobre una *partícula de fluido* por la segunda Ley de Newton es el negativo del gradiente (derivadas espaciales) de la presión en este punto.

esfuerzo de Reynolds [337]: Las componentes de velocidad (y otras variables) en flujos turbulentos están separadas en componentes medio más fluctuantes. Cuando la ecuación para la componente medio de velocidad en la dirección del flujo se deriva de la *ecuación de Navier-Stokes*, aparecen seis nuevos términos proporcionados por la densidad del fluido multiplicada por el producto promediado de dos componentes de velocidad. Puesto que estos términos tienen las mismas unidades que el *esfuerzo* (fuerza/área), se llaman esfuerzos turbulentos o esfuerzos de Reynolds (en memoria de Osborne Reynolds, quien fue el primero en cuantificar las variables turbulentas en media + fluctuación). Tal como los *esfuerzos viscosos* se pueden escribir como un tensor (o matriz), el tensor de esfuerzos de Reynolds se define con componentes de esfuerzo normal de Reynolds y componentes de esfuerzo de corte de Reynolds. Aunque los esfuerzos de Reynolds no son verdaderos esfuerzos, tienen efectos cualitativamente similares que los esfuerzos viscosos, pero como resultado de los grandes movimientos *vorticiales* caóticos de la turbulencia, en lugar de los movimientos moleculares microscópicos que subyacen a los esfuerzos viscosos.

esfuerzo de Reynolds [339]: Vea *esfuerzo de Reynolds*.

esfuerzo normal [3, 231]: Vea *esfuerzo*.

esfuerzo normal [3, 233]: Esfuerzo (componente de fuerza por unidad de área) que actúa perpendicular al área. Por lo tanto, σ_{xx}, σ_{yy} y σ_{zz} son esfuerzos normales. La fuerza normal sobre una superficie es la fuerza neta obtenida a partir del esfuerzo normal al integrar el esfuerzo normal sobre el área superficial. Los esfuerzos normales son los elementos diagonales del *tensor de esfuerzo*.

esfuerzo turbulento [336, 337]: Vea *esfuerzo de Reynolds*.

esfuerzo turbulento [336, 337]: Vea *esfuerzo de Reynolds*.

esfuerzo viscoso [429]: El flujo crea esfuerzos en el fluido que son adicionales a los esfuerzos de presión hidrostática. Estos esfuerzos adicionales son viscosos, ya que surgen de las deformaciones del fluido inducidas por la fricción dentro del flujo. Por ejemplo, $\sigma_{xx} = -P + \tau_{xx}$, $\sigma_{yy} = -P + \tau_{yy}$, y $\sigma_{zz} = -P + \tau_{zz}$, donde τ_{xx}, τ_{yy}, y τ_{zz} son esfuerzos normales viscosos. Todos los esfuerzos de corte resultan de la fricción en un flujo y por tanto son esfuerzos viscosos. Una fuerza viscosa sobre una superficie es un esfuerzo viscoso integrado sobre la superficie. Sin embargo, la fuerza viscosa por unidad de volumen sobre una *partícula de fluido* por la segunda Ley de Newton es la divergencia (derivadas espaciales) del tensor de esfuerzo viscoso en este punto.

espesor de cantidad de movimiento [527]: Medida de la capa de mayor déficit en razón de flujo de cantidad de movimiento adyacente a la superficie, como resultado de fuerza de arrastre debida a fricción (esfuerzo de corte). Puesto que la segunda Ley de Newton establece que la fuerza es igual a la razón de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento, el espesor de la cantidad de movimiento θ es proporcional al esfuerzo de corte en la superficie sólida. En todas las capas límite, $\theta < \delta^*$.

espesor de capa límite [512]: Espesor total de la capa viscosa que define la capa límite, desde la superficie hasta el borde. Definir el borde con precisión es difícil, de modo que, con frecuencia, el "borde" de la capa límite se define como el punto donde la velocidad de capa límite es una gran fracción de la velocidad de flujo libre (por ejemplo, δ_{99} es la distancia desde la superficie hasta el punto donde la componente de velocidad de corriente es el 99 por ciento de la velocidad de flujo libre).

espesor de desplazamiento [524]: Medida de espesor de capa límite que cuantifica la desviación de las líneas de corriente del fluido en la dirección que se aleja de la superficie como resultado de la reducción inducida por la fricción en el flujo de masa adyacente a la superficie. El espesor de desplazamiento (δ^*) es una medida del espesor de esta capa de déficit de flujo másico. En todas las capas límite, $\delta^* < \delta$.

estabilidad [93]: Término general que se refiere a la tendencia de una partícula u objeto material (fluido o sólido) a moverse alejándose o regresando cuando se desplaza ligeramente de su posición original.

estable [92]: Vea *estabilidad*. Cuando se desplaza ligeramente, la partícula u objeto regresará a su posición original.

estática [2]: Estudio y análisis mecánico de material que está completamente en reposo en un marco de referencia específico.

estela [570]: Región dominada por fricción detrás de un cuerpo formada por capas límite superficiales que se barren hacia la parte posterior por medio de la velocidad de flujo libre. Las estelas se caracterizan por gran *corte* con las más bajas velocidades en el centro de la estela y mayores velocidades en los lados laterales. La *fuerza de fricción*, el *esfuerzo viscoso* y la *vorticidad* son significativos en las estelas.

estela de vórtices de Kármán [133]: Patrón *bidimensional* no-estacionario alternante de *vórtices* que comúnmente se observa detrás de cilindros circulares en un flujo (por ejemplo, la estela de vórtices detrás de los alambres en el viento es responsable de los distintos tonos que a veces se escuchan).

factor de corrección de energía cinética [208]: Análisis de *volumen de control* por medio de la ecuación de *conservación de energía* aplicado a tubos contiene integrales de flujo de energía cinética que se calculan sobre el área. Con frecuencia, las integrales se aproximan como las magnitudes proporcionales a energía cinética calculada al usar velocidad promediada sobre el área, V_{prom}. La imprecisión de esta aproximación puede ser significativa, de modo que un factor de corrección de energía cinética a multiplica el término para mejorar la aproximación. El factor de corrección α depende de la forma del *perfil de velocidad* y es mayor para perfiles *laminares* (*flujo de Poiseuille*) y está más cercano a 1 para flujos en tubería *turbulentos* a *números de Reynolds* muy altos.

factor de corrección de flujo de cantidad de movimiento [236]: Factor de corrección que se introduce para corregir las aproximaciones realizadas en la simplificación de las integrales de área para los términos de flujo de cantidad de movimiento en la ecuación de la *conservación de cantidad de movimiento* aplicada al volumen de control.

factor de fricción [331]: Se puede demostrar, a partir de *análisis dimensional* y de *conservación de cantidad de movimiento* aplicada a un flujo en tubería *estacionario totalmente desarrollado*, que la aportación de fricción a la caída de presión a lo largo de la tubería, a la que se quitan las dimensiones por medio de *presión dinámica* de flujo ($\frac{1}{2}\rho V_{prom}^2$), es proporcional a la razón de longitud a diámetro (L/D) de la tubería. El factor de proporcionalidad f se llama el factor de fricción. El factor de fricción se cuantifica a partir de experimentos (flujo turbulento) y teoría (flujo laminar) en relaciones empíricas, y en el *diagrama de Moody*, como función del número de Reynolds y la rugosidad adimensional. La conservación de la cantidad de movimiento muestra que el factor de fricción es proporcional al esfuerzo de corte a lo largo de la superficie adimensional (es decir: el coeficiente de *fricción local*).

fluido [2]: Un material que, cuando se corta, se deforma continuamente en el tiempo durante el periodo en que se aplican las fuerzas de corte. En contraste, las fuerzas de corte aplicadas a un *sólido* provocan que el material o se deforma hasta una posición estática fija (luego de lo cual se detiene la deformación), o provoca que el material se fracture. En consecuencia, mientras que las deformaciones sólidas por lo general se analizan con el uso de deformación y corte, los flujos de fluido se analizan con razones de deformación y corte (vea *razón de deformación*).

fluido dilatante, o espesante al corte, o de engrosamiento por corte [428]: Vea *fluido no-newtoniano*.

fluido ideal: Vea *fluido perfecto*.

fluido newtoniano [47, 427]: Cuando un fluido está sujeto a un *esfuerzo de corte*, el fluido continuamente cambia de forma (deformación). Si el fluido es newtoniano, la razón de deformación es proporcional al esfuerzo de corte aplicado y la constante de proporcionalidad se llama *viscosidad (dinámica o absoluta)*. En caso general, la razón de deformación de una *partícula de fluido* se describe de forma matemáticamente por medio de un tensor de *razón de deformación* y el *esfuerzo,* por medio de un *tensor de esfuerzo*. En flujos de fluidos newtonianos, el tensor de esfuerzo es proporcional al tensor de razón de deformación, y la constante de proporcionalidad se llama *viscosidad*. La mayoría de los fluidos comunes (agua, aceite, gasolina, aire, la mayoría de los gases y vapores) sin partículas o moléculas grandes en suspensión, son newtonianos.

fluido no-newtoniano [427]: Un fluido no-newtoniano es el que se deforma a una razón que no es linealmente proporcional al esfuerzo que provoca la deformación. Dependiendo de la forma en la que la *viscosidad* varíe con la *razón de deformación*, los fluidos no-newtonianos se pueden etiquetar como los de adelgazamiento por corte (la viscosidad disminuye con la razón de deformación creciente), los de engrosamiento por corte (la viscosidad aumenta con la razón de deformación creciente) y viscoelásticos (cuando las fuerzas de corte se remueven, las partículas del fluido regresan parcialmente a la forma anterior). Las suspensiones y los líquidos con moléculas de cadena larga generalmente son no-newtonianos. Vea también *fluido newtoniano* y *viscosidad*.

fluido perfecto: También llamado *fluido ideal*, el concepto de un fluido ficticio que puede fluir en ausencia de todo efecto de fricción. No hay tal cosa como un fluido perfecto, incluso como aproximación, de modo que el ingeniero no necesita considerar más el concepto.

fluido seudoplástico, o adelgazante al corte, o de adelgazamiento por corte [428]: Vea *fluido no-newtoniano*.

fluido viscoelástico [427]: Vea *fluido no-newtoniano*.

flujo axisimétrico [419, 490, 492, 565]: Flujo que, cuando se especifica de manera adecuada con el uso de coordenadas cilíndricas (r, q, x), no varía en la dirección azimutal (θ). Por lo tanto, todas las derivadas parciales en θ son cero. Por lo tanto, el

flujo es o unidimensional o bidimensional (vea también *dimensionalidad* y *flujo planar*).

flujo cuasi estacionario [475]: Vea *flujo estacionario*.

flujo de Hagen-Poiseuille: Vea *flujo de Poiseuille*.

flujo de Poiseuille [316, 332]: *Flujo laminar totalmente desarrollado* en una tubería o ducto. También se llama *flujo Hagen-Poiseuille*. Las relaciones de modelo matemático para flujo de Poiseuille que relacionan la razón de flujo y/o el perfil de velocidad con la caída de presión a lo largo de la tubería/ducto, la viscosidad del fluido y la geometría en ocasiones se les refiere como *Ley de Poiseuille* (aunque estrictamente no es una "ley" de la mecánica). El perfil de velocidad de todos los flujos de Poiseuille es parabólico, y la razón de caída de presión axial es constante.

flujo de Stokes [478]: Vea *flujo plástico*.

flujo en transición [11, 323]: Flujo de fluido *vorticial* inestable a un número de Reynolds mayor que un valor crítico que es grande en comparación con 1, pero no es lo suficientemente grande como para que el flujo alcance un régimen de *flujo turbulento*. Los flujos en transición con frecuencia oscilan aleatoriamente entre regímenes *laminar* y turbulento.

flujo estacionario [11, 190]: Flujo en el que todas las variables de fluido (velocidad, presión, densidad, temperatura, etcétera) en todos los puntos fijos del flujo son constantes en el tiempo (pero, que por lo general varían de un lugar a otro). Por lo tanto, en flujos estacionarios, todas las derivadas parciales en el tiempo son cero. Los flujos que no son precisamente estacionarios, sino que cambian suficientemente lento en el tiempo para despreciar los términos de derivada con respecto al tiempo con error relativamente pequeño se llaman *cuasi-estacionarios*.

flujo forzado [11]: Flujo que resulta de una fuerza aplicada externamente. Los ejemplos incluyen flujo líquido a través de tubos accionados por una bomba y flujo de aire accionado por ventilador para enfriar componentes de computadora. En contraste, los *flujos naturales*, que resultan de fuerzas de flotabilidad internas accionadas por variaciones de temperatura (es decir: densidad) dentro de un fluido en la presencia de un campo gravitacional. Los ejemplos incluyen chorros que ascienden y descienden alrededor de un cuerpo humano o en la atmósfera debido a las fuerzas de flotabilidad.

flujo incompresible [10, 191, 406, 563]: Un flujo de fluido donde las variaciones en la densidad son suficientemente pequeñas para ser despreciables. Por lo general, los flujos son incompresibles o porque el fluido es incompresible (líquidos) o porque el número de Mach es bajo (aproximadamente < 0.3).

flujo irrotacional (región de flujo irrotacional) [144, 148, 325, 485, 579]: Una región de un flujo con *vorticidad* despreciable (es decir: rotación de *partícula de fluido*). También se llama *flujo potencial*. Una región irrotacional de flujo *también* es *invíscida*.

flujo laminar [11, 323]: Estado estable bien ordenado de flujo de fluido en el que todos los pares de *partículas de fluido* adyacentes se mueven a lo largo unas de otras formando láminas. Un flujo que no es laminar es *turbulento* o en *transición* hacia la turbulencia, lo que ocurre a un *número de Reynolds* mayor que el crítico.

flujo natural [11]: Contraste con *flujo forzado*.

flujo no-estacionario [11]: Flujo en el que al menos una variable en un punto fijo en el flujo cambia con el tiempo. Por ende, en los flujos no-estacionarios, una derivada parcial con respecto al tiempo es distinta de cero para al menos un punto en el flujo.

flujo planar [419, 490]: Flujo *bidimensional* con dos componentes de velocidad distintas de cero en coordenadas cartesianas que varían sólo en las dos direcciones de coordenadas del flujo. Por lo tanto, todas las derivadas parciales perpendiculares al plano del flujo son cero. Vea también *flujo axisimétrico* y *dimensionalidad*.

flujo plástico [313, 476, 574]: Flujo de fluido en el que las fuerzas de fricción dominan las aceleraciones de fluido hasta el punto en que el flujo se puede modelar de manera adecuada cuando el término de aceleración en la segunda ley de Newton se establece en cero. Estos flujos se caracterizan por números de Reynolds que son pequeños comparados con 1 ($\text{Re} \ll 1$). Puesto que el número de Reynolds usualmente se puede escribir como velocidad característica multiplicada por longitud característica y dividida entre viscosidad cinemática (VL/ν), con frecuencia los flujos plásticos son flujos que se mueven lentamente alrededor de objetos muy pequeños (por ejemplo, sedimentación de partículas de polvo en el aire o movimiento de espermatozoides en el agua), o con fluidos muy viscosos (por ejemplo, glaciares y flujos de brea). También se llama flujo de Stokes.

flujo potencial [485]: Sinónimo de *flujo irrotacional*. Ésta es una región de un flujo con *vorticidad* despreciable (es decir, rotación de *partícula de fluido*). En estas regiones existe una *función potencial* de velocidad (de ahí el nombre).

flujo rotacional [144, 146]: Sinónimo de *flujo vorticial*, este término describe un campo de flujo, o una región de un campo de flujo, con niveles significativos de *vorticidad*.

flujo sin fricción [191]: En ocasiones los tratamientos matemáticos de los flujos de fluidos usan conservación de cantidad de movimiento y ecuaciones de energía sin los términos de fricción. Estos tratamientos matemáticos "suponen" que el flujo "no tiene fricción", lo que implica que no hay *fuerza viscosa* (en la *segunda Ley de Newton*) y tampoco *disipación viscosa* (en la *primera ley de la termodinámica*). Sin embargo, ningún flujo de fluido real de interés ingenieril puede existir sin fuerzas viscosas, disipación y/o pérdidas de carga en regiones de importancia práctica. El ingeniero siempre deberá identificar las regiones de flujo donde se concentren los efectos de fricción. Cuando se desarrollen modelos para predicción, el ingeniero deberá considerar el papel de estas regiones viscosas en la predicción de variables de interés y deberá estimar los niveles de error en tratamientos simplificados de las regiones viscosas. En los flujos de *número de Reynolds* alto, las regiones de fricción incluyen capas límite, *estelas*, *chorros*, *capas de corte* y regiones de flujo que rodean *vórtices*.

flujo turbulento [11, 323]: Estado desordenado e inestable de flujo de fluido *vorticial* que es inherentemente *no-estacionario* y que contiene remolinos de un amplio rango de tamaños (o escalas). Los flujos turbulentos siempre son a *números de Reynolds* por arriba de un valor crítico que es grande en relación con 1. El proceso de mezclado se aumenta enormemente, los esfuerzos de corte a lo largo de superficie son mucho mayores y la pérdida de carga aumenta considerablemente en los flujos

turbulentos, en comparación con los correspondientes *flujos laminares*.

flujo viscoso (regiones de flujo viscoso) [9]: Regiones de un flujo de fluido donde las *fuerzas viscosas* son significativas en relación con otras fuerzas (usualmente, fuerza de presión) sobre *partículas de fluido* en esta región del flujo, y por tanto no se puede despreciarlas en la *segunda Ley de Newton* del movimiento (compare con regiones de *flujo invíscido*).

flujo vorticial: Sinónimo de *flujo rotacional*, este término describe un campo de flujo, o una región de un campo de flujo, con niveles significativos de *vorticidad*.

fricción/ de fricción: Vea *fluido newtoniano*, *viscosidad* y *fuerza viscosa*.

fuerza de arrastre [46, 566]: Fuerza sobre un objeto que se opone al movimiento del objeto. En un marco de referencia que se mueve con el objeto, ésta es la fuerza sobre el objeto en la dirección del flujo. Existen múltiples componentes de la fuerza de arrastre:

fuerza de corte: Vea *esfuerzo*, *esfuerzo de corte*.

fuerza de flotabilidad (boyante) [89]: Fuerza ascendente neta de presión hidrostática que actúa sobre un objeto sumergido, o parcialmente sumergido, en un fluido.

fuerza de presión: Como se aplica a la segunda Ley de Newton, ésta es la fuerza que actúa sobre una *partícula de fluido* que surge de gradientes espaciales de presión dentro del flujo. Vea también *esfuerzo*, *esfuerzo de presión*.

fuerza de sustentación [566]: Fuerza aerodinámica neta sobre un objeto perpendicular al movimiento del objeto.

fuerza viscosa (o de **fricción**): Como se aplica a la segunda ley de Newton, ésta es la fuerza que actúa sobre una *partícula de fluido* y que surge de gradientes espaciales en esfuerzos viscosos (o de fricción) dentro del flujo. La fuerza viscosa sobre una superficie es el esfuerzo viscoso integrado sobre la superficie. Vea también *esfuerzo*, *esfuerzo viscoso*.

función de corriente [309, 412]: Las dos componentes de velocidad en un flujo *bidimensional* estacionario de fluido incompresible se pueden definir en términos de una sola función bidimensional ψ, que automáticamente satisface la ley de conservación de masa (ecuación de continuidad), y reduce la solución del campo de velocidad de dos componentes a la solución de esta sola función de corriente. Esto se hace cuando se escriben las dos componentes de velocidad como derivadas espaciales de la función de corriente. Una maravillosa propiedad de la función de corriente es que los (*iso*)*contornos* de la constante ψ definen *líneas de corriente* en el flujo.

función potencial [485]: Si una región de flujo tiene *vorticidad* (giro de *partícula de fluido*) cero, el vector de velocidad en dicha región se puede escribir como el gradiente de una función escalar llamada función potencial de velocidad, o simplemente la función potencial. En la práctica, con frecuencia se usan las funciones potenciales para modelar regiones de flujo donde los niveles de vorticidad son pequeños, pero no necesariamente cero.

gas ideal [38]: Un gas a densidad suficientemente baja y/o temperatura suficientemente alta para el cual *a*) densidad, presión y temperatura se relacionan por la ecuación de estado de gas ideal, $P = \rho RT$, y *b*) la energía interna específica y la entalpía son funciones sólo de la temperatura.

giro: Vea *razón de rotación* y *vorticidad*.

gráfica de contorno [138]: También llamada *gráfica de isocontorno*, es una forma de graficar datos como líneas del valor de variable constante en un *campo* de flujo. Por ejemplo, las *líneas de corriente* se pueden identificar como líneas de *función de corriente* constante en caso de flujos estacionarios *bidimensionales* de fluido incompresible.

gráfica de isocontorno: Vea *gráfica de contorno*.

gráfica de perfil [137]: Representación gráfica de la variación espacial de una propiedad de fluido (temperatura, presión, razón de deformación, etcétera) a través de una región de un flujo de fluido. Una gráfica de perfil define variaciones de propiedad en parte de un *campo* (por ejemplo, un perfil de temperatura puede definir la variación de temperatura a lo largo de una línea dentro del campo temperatura).

gravedad específica [37]: Densidad de fluido a la que se quitan las dimensiones por medio de la densidad del agua líquida a 4°C y presión atmosférica (1 g/cm^3 o 1 000 kg/m^3). Por lo tanto, la gravedad específica, SG = ρ/ρ_{agua}.

hidráulica [1]: La *hidrodinámica* de flujo de líquido y vapor en tuberías, ductos y canales abiertos. Los ejemplos incluyen sistemas de distribución de agua y sistemas de ventilación.

hidrodinámica [2]: El estudio y análisis de líquidos por medio de las leyes de conservación macroscópicas de la física (vea *mecánica/dinámica de fluidos*). A veces el término se aplica a flujos de vapor y gas *incompresibles*, pero cuando el fluido es aire, por lo general se usa el término *aerodinámica*.

hidrodinámicamente totalmente desarrollado [325]: Vea *totalmente desarrollado*.

hipersónico [10]: A un orden de magnitud o aún más por arriba de la velocidad del sonido (número de Mach $\gg$ 1).

homogeneidad dimensional [273]: Requisito de que los términos sumados deben tener las mismas *dimensiones* (por ejemplo, ρV^2, presión P y esfuerzo de corte τ_{xy} son dimensionalmente homogéneas, mientras que *potencia*, entalpía específica h y $P\dot{m}$ no lo son. La homogeneidad dimensional es la base del *análisis dimensional*.

inercia/inercial: El término de aceleración en la segunda Ley de Newton, o los efectos relacionados con este término. Por lo tanto, un flujo con mayor inercia requiere mayor desaceleración para llevarse al reposo.

inestable [93]: Vea *estabilidad*. Cuando se desplaza ligeramente, la partícula u objeto continuará el movimiento alejándose de su posición original.

ley de Poiseuille [330]: Vea *flujo de Poiseuille*.

leyes de conservación [172]: Principios fundamentales sobre los que se basan todos los análisis de ingeniería, de acuerdo con los cuales las propiedades materiales de masa, cantidad de movimiento, energía y entropía pueden cambiar solamente en equilibrio con otras propiedades físicas que involucran fuerza, trabajo y *transferencia de calor*. Estas leyes son predictivas cuando se escriben en forma matemática y se combinan de manera adecuada con condiciones de frontera, condiciones iniciales y relaciones constitutivas.

línea de energía [195]: Línea que describe la suma de la *carga de presión*, la *carga de velocidad* y la *carga de elevación*. Vea *carga*.

línea de corriente [129, 413, 493, 565]: Curva que en todas partes es tangente al vector de velocidad de un *campo* de velocidad de fluido en un instante fijo del tiempo. Por lo tanto, las líneas de corriente indican la dirección del movimiento del fluido en cada punto. En un *flujo estacionario*, las líneas de corriente son constantes en el tiempo y las *partículas de fluido* se mueven a lo largo de las líneas de corriente. En un *flujo no-estacionario* las líneas de corriente cambian con el tiempo y las partículas de fluido no se mueven a lo largo de líneas de corriente. Contraste con *línea de trayectoria*.

línea de energía [193]: Vea línea de gradiente

línea de gradiente [194]: Líneas de suma de *carga*.

línea de gradiente hidráulico [193]: Vea línea de gradiente.

línea de gradiente hidráulico o linea de alturas piezométricas [195]: Línea que describe la suma de la *carga de presión* y la *carga de elevación*. Vea *carga*.

línea de trayectoria [130, 182]: Curva que traza la trayectoria de una *partícula de fluido* conforme viaja a través de un flujo durante un periodo de tiempo. De manera matemática, es la curva a través de los puntos trazados por el *vector de posición material* $[x_{\text{partícula}}(t), y_{\text{partícula}}(t), z_{\text{partícula}}(t)]$ durante un periodo de tiempo definido. Por lo tanto, las líneas de trayectoria se forman a lo largo del tiempo, y cada partícula de fluido tiene su propia línea de trayectoria. En un flujo estacionario, las partículas de fluido se mueven a lo largo de líneas de corriente, de modo que las líneas de trayectoria y las líneas de corriente coinciden. Sin embargo, en un flujo no-estacionario, las líneas de trayectoria y las líneas de corriente por lo general son muy diferentes. Contraste con *línea de corriente*.

línea de traza [132]: Se usa en visualización de flujos de fluido, y se trata de una curva que se extiende en el tiempo por medio de la liberación de un marcador (tinta o humo) desde un punto fijo en el flujo. Contraste con la *línea de trayectoria* y la *línea de corriente*. En un flujo estacionario coinciden las líneas de corriente, las *líneas de trayectoria* y las *líneas de traza*. Sin embargo, en un flujo no-estacionario, estos conjunto de curvas son diferentes unas de otras.

línea fluida [134]: Se usa para visualizar flujos de fluido, y se trata de una curva definida en algún instante del tiempo por medio de la liberación de un marcador desde una línea en el flujo en algún instante anterior en el tiempo. La línea fluida, que con frecuencia se utiliza para aproximar un *perfil de velocidad* de un flujo que se estudia en laboratorio, es muy diferente de las *líneas de traza*, las *líneas de trayectoria* y las *líneas de corriente*.

longitud característica de mezclado [337]: Vea *modelos de turbulencia*.

longitud de entrada [327]: Región de entrada de un flujo en tubería o ducto donde crecen las capas límites a lo largo de las paredes de tubería con la distancia axial x del ducto hacia la línea central, de modo que las derivadas axiales son distintas de cero. Para la región *totalmente desarrollada*, la *longitud de entrada hidrodinámica* implica crecimiento de una capa límite de velocidad, y la *longitud de entrada térmica* implica crecimiento de una capa límite de temperatura.

longitud de entrada hidrodinámica [325]: Vea *longitud de entrada*.

manómetro [71]: Dispositivo que mide presión con base en principios de presión hidrostática en líquidos.

masa de control [14]: Vea *sistema*.

mecánica [2]: Estudio y análisis de la materia a través de las leyes de conservación macroscópicas de la física (masa, cantidad de movimiento, energía, segunda ley).

mecánica/dinámica de fluidos [2]: El estudio y análisis de los fluidos a través de las leyes de conservación macroscópicos de la física, es decir: conservación de masa, cantidad de movimiento (*segunda Ley de Newton*) y energía (primera ley de la termodinámica), y la segunda ley de la termodinámica.

media: Sinónimo de *promedio*.

medidas del espesor de la capa límite**:** En el análisis del flujo de fluido se usan diferentes medidas del espesor de una capa límite como función de la distancia corriente abajo. Estas medidas son:

modelos de turbulencia [337]: Relaciones de modelo constitutivas entre *esfuerzos de Reynolds* y el campo de velocidad media en flujos turbulentos. Estas relaciones de modelo son necesarias para resolver la ecuación de velocidad media. Una forma de modelo simple que se usa de manera extensa para los esfuerzos de Reynolds es escribirlos como la relación newtoniana para esfuerzos viscosos, al considerarlos proporcionales a la razón de deformación media, con una *viscosidad turbulenta* o *viscosidad de turbulencia* como el coeficiente de proporcionalidad. Sin embargo, a diferencia de los fluidos newtonianos, la viscosidad de turbulencia es una fuerte función del flujo mismo, y las diferentes formas en las que la viscosidad de turbulencia se modela en función de otras variables de campo de flujo a calcularse constituyen diferentes modelos de viscosidad turbulenta. Un enfoque tradicional para modelar la viscosidad turbulenta es en términos de una *longitud característica de mezclado*, que se hace proporcional a una longitud característica establecida para el flujo.

módulo volumétrico de elasticidad [42, 55]: Sinónimo de *coeficiente de compresibilidad*.

módulo volumétrico de elasticidad [42]: Vea *compresibilidad*.

neutralmente estable [92]: vea *estabilidad*. Cuando se desplaza ligeramente, la partícula u objeto permanecerá en su posición desplazada.

normalización [272]: Una *eliminación de dimensiones* particular donde el *parámetro de escalamiento* se elige de modo que la variable adimensional logre un valor máximo de orden de 1 (por decir, entre aproximadamente 0.5 y 2). La normalización es más restrictiva (y más difícil de lograr de manera adecuada) que la eliminación de dimensiones. Por ejemplo, $P/(\rho V^2)$ discutida en *eliminación de dimensiones* también es presión normalizada sobre una pelota de beisbol que vuela (donde el número de Reynolds $\text{Re} \gg 1$), pero es simplemente eliminación de dimensiones de la presión superficial sobre una pequeña cuenta de vidrio que se mueve lentamente a través de miel (donde $\text{Re} \ll 1$).

número de Froude [274]: Una estimación de orden de magnitud de la razón del término inercial en la ley de movimiento de Newton al término de fuerza de gravedad. El número de Froude es un importante grupo adimensional en flujos con superficie libre, como en general es el caso en canales, ríos, flujos de superficie, etcétera.

número de Mach [10]: Razón *adimensional* de la velocidad característica del flujo a la velocidad del sonido. El número de Mach caracteriza el nivel de *compresibilidad* en respuesta a variaciones de presión en el flujo.

número de Reynolds [11, 279, 324]: Una estimación del orden de magnitud de la razón de los siguientes dos términos en la segunda Ley de movimiento de Newton sobre una región del flujo: el término *inercial* (o de aceleración) sobre el término de fuerzas viscosas. La mayoría, mas no todos, los números de Reynolds se pueden escribir como una velocidad característica apropiada V multiplicada por una longitud característica L consistente con la velocidad V, y dividida entre la viscosidad cinemática ν del fluido: $\text{Re} = VL/\nu$. Posiblemente el número de Reynolds es el parámetro de *similitud* adimensional más importante en el análisis de flujo de fluido pues proporciona una estimación burda de la importancia de la fuerza de fricción en el flujo global.

parámetro de escalamiento [273]: Una sola variable, o una combinación de variables, que se elige para eliminar las dimensiones de una variable de interés. Vea también *eliminación de dimensiones* y *normalización*.

partícula material [124]: Partícula, o elemento, *diferencial* que siempre contiene los mismos átomos y moléculas. Por lo tanto, una partícula material tiene masa fija dm. En un flujo de fluido, esto es lo mismo que una *partícula de fluido*.

partícula/elemento de fluido [124]: Una partícula, o elemento, *diferencial*, incrustado en un flujo de fluido que contiene siempre los mismos átomos y moléculas. Por ende, una partícula de fluido tiene masa fija δm y se mueve con el flujo con velocidad de flujo local $\vec{V}$, aceleración $\vec{a}_{\text{partícula}} = D\vec{V}/Dt$ y trayectoria ($x_{\text{partícula}}(t)$, $y_{\text{partícula}}(t)$, $t_{\text{partícula}}(t)$). Vea también *derivada material*, *partícula material*, *vector de posición material* y *línea de trayectoria*.

pérdida de carga [330]: Término en la forma de carga en la ley de *conservación de la energía* (vea *carga*) que contiene pérdidas debidas a fricción y otras irreversibilidades. Sin este término, la ecuación de energía para líneas de corriente se convierte en la *ecuación de Bernoulli* en forma de carga.

pérdida de sustentación [535, 570]: Fenómeno de *separación de flujo* masiva de la superficie de un ala cuando el *ángulo de ataque* supera un valor crítico, y como la consecuencia, pérdida dramática de sustentación y aumento en arrastre. Un avión que pierde sustentación cae rápidamente y debe inclinar su nariz hacia abajo para restablecer el flujo de capa límite apegado al ala y de este modo regenerar la sustentación y reducir el arrastre.

pérdidas [350]: Las *pérdidas de carga* debido a fricción en flujos en tuberías se separan en aquellas pérdidas en las regiones de flujo totalmente desarrollado de una red de tuberías que se llaman las *pérdidas mayores*, más las pérdidas de carga en otras regiones de flujo de la red, que se llaman las *pérdidas menores*. Las regiones de pérdidas menores incluyen *longitudes de entrada*, acoplamientos de tuberías, codos, válvulas, etcétera. No es raro que las pérdidas menores sean mayores que las pérdidas mayores.

pérdidas mayores [347]: Vea *pérdidas*.

pérdidas menores [347]: Vea *pérdidas*.

perfil de velocidad [139]: Variación espacial en una componente o vector de velocidad a través de una región de un flujo de fluido. Por ejemplo, en un flujo en tubería, el perfil de velocidad generalmente define la variación en la velocidad axial con el radio a través de la sección transversal de la tubería, mientras que un perfil de velocidad de *capa límite* por lo general define la variación en la velocidad axial en la dirección normal a la superficie. El perfil de velocidad es parte de un *campo de* velocidad.

perfil de velocidad [139]: Vea *gráficas de perfil*.

periódico: Flujo no-estacionario en el que el flujo oscila en torno a un medio estacionario.

periodo de transición: Periodo dependiente del tiempo de evolución de flujo que conduce a un nuevo periodo de equilibrio que por lo general, mas no necesario, es estacionario. Un ejemplo es el periodo de arranque después de que se enciende un motor de propulsión, lo que conduce a un flujo estacionario (en equilibrio).

peso específico [17, 237]: Peso de un fluido por unidad de volumen; es decir: densidad de fluido por aceleración debida a gravedad (peso específico, $\gamma \equiv \rho g$).

potencia [202]: *Trabajo* por unidad de tiempo; razón de tiempo a la que se realiza trabajo.

presión [3, 66]: Vea *esfuerzo*.

presión absoluta [66]: Vea *esfuerzo*, *esfuerzo de presión*. Contraste con *presión manométrica*.

presión de saturación [39]: Presión a la que la fase de una sustancia simple compresible cambia entre líquida y vapor a temperatura fija.

presión de vapor [39]: Presión por abajo de la cual un fluido, a una temperatura dada, existirá en el estado de vapor. Vea también *cavitación* y *presión de saturación*.

presión dinámica [189, 565]: Cuando la *ecuación de Bernoulli* para el *flujo estacionario de fluido incompresible* y/o la ecuación de *conservación de la energía* a lo largo de una línea de corriente se escriben en formas donde cada término en las ecuaciones tiene las *dimensiones* de fuerza dividida entre área, la presión dinámica es el término de *energía cinética* (por unidad de volumen) (es decir: $\frac{1}{2}\rho V^2$).

presión estática [189]: Otro término para *presión*, que se usa en contexto con la *ecuación de Bernoulli* para distinguirla de la *presión dinámica*.

presión hidrostática [189]: La componente de variación de presión en un flujo de fluido que existiría en el fluido en ausencia de flujo como resultado de fuerza gravitacional. Este término aparece en la ecuación hidrostática y en la *ecuación de Bernoulli*. Vea también *presión dinámica* y *estática*.

presión manométrica [66]: La *presión* (P) relativa a la presión atmosférica (P_{atm}). Esto es: $P_{\text{manométrica}} = P - P_{\text{atm}}$. Vea también *esfuerzo*, *esfuerzo de presión*. En consecuencia, $P_{\text{manométrica}} > 0$ o $P_{\text{manométrica}} < 0$ simplemente es la presión sobre o debajo de la presión atmosférica.

primera ley de la termodinámica [201]: Vea *leyes de conservación*, *conservación de energía*.

principio de conservación de la energía [201]: Ésta es la *primera ley de la termodinámica*, una ley fundamental de la

física que afirma que la razón de cambio en el tiempo de la *energía* total de una masa fija (*sistema*) se equilibra por medio de la razón neta a la que se realiza *trabajo* sobre la masa y se transfiere *energía térmica* a la masa.

Nota: para convertir matemáticamente las derivadas con respecto al tiempo de la masa, la cantidad de movimiento y la energía relacionados con la masa de fluido en un sistema a las de un *volumen de control*, se aplica el *teorema de transporte de Reynolds*.

principio de conservación de masa [175]: Ley fundamental de la física que afirma que un volumen que siempre contiene los mismos átomos y moléculas (*sistema*), siempre debe contener la misma masa. Por ende, la razón de cambio en el tiempo de la masa de un sistema es cero. Esta ley de la física se debe revisar cuando la materia se mueve a velocidades que se aproximan a la velocidad de la luz, de modo que la masa y la energía se pueden intercambiar de acuerdo con las leyes de la relatividad de Einstein.

proceso adiabático [202]: Proceso sin transferencia de calor.

promedio: promedio en área/volumen/tiempo de una propiedad de fluido es la integral de la propiedad sobre un área/volumen/intervalo de tiempo dividida entre el correspondiente valor de área/volumen/intervalo de tiempo. También llamado *media.*

propiedad extensiva [36, 150]: Propiedad de fluido que depende del volumen total o la masa total (por ejemplo, energía interna total). Vea *propiedad intensiva*.

propiedad intensiva [36, 150]: Una propiedad de fluido que es independiente del volumen total o la masa total (es decir: una *propiedad extensiva* por unidad de masa o en ocasiones por unidad de volumen).

punto de estancamiento [190]: Punto en un flujo de fluido donde la velocidad tiende a cero. Por ejemplo, el punto sobre la *línea de corriente* que interseca la nariz de un proyectil en movimiento es un punto de estancamiento.

razón de corte: Gradiente de la velocidad de flujo en la dirección perpendicular a la velocidad. Por ende, si la velocidad u (la componente x) del flujo que fluye en la misma dirección x varía en y, la razón de corte es du/dy. El término se aplica a *flujos de corte*, donde la razón de corte es el doble de la *razón de deformación debida al corte*. Vea también *razón de deformación*.

razón de deformación [139]: Razón a la que se deforma (es decir: cambia de forma) una *partícula de fluido* en una posición y tiempo dados en un flujo de fluido. Para cuantificar por completo todos los posibles cambios en la forma de una partícula de fluido *tridimensional* se requieren seis números. De forma matemática, son las seis componentes independientes de un tensor de razón de deformación simétrico de segundo rango, que por lo general se escribe como una matriz simétrica de 3×3. La deformación es la razón de deformación integrada en el tiempo y describe la deformación de una partícula de fluido después de un periodo de tiempo. Vea *esfuerzo*.

razón de deformación extensional [139]: Componentes de la razón de deformación que describen la elongación o compresión de una *partícula de fluido* en una de las tres direcciones coordenadas. Son los tres elementos diagonales del tensor de razón de deformación. La definición de deformación extensional depende de la elección particular de los ejes coordenados. También se le llama *razón de deformación lineal*.

razón de deformación extensional [139]: Vea *razón de deformación*.

razón de deformación lineal [139, 140]: Sinónimo de *razón de deformación extensional*. Vea *razón de deformación*.

razón de deformación por corte [139, 141]: Componentes de la razón de deformación que describen la deformación de una *partícula de fluido,* en respuesta al corte que cambia el ángulo entre los planos mutuamente perpendiculares correspondientes a los tres ejes coordenados. Se trata de los elementos fuera de la diagonal del tensor de razón de deformación. La definición de la deformación por corte depende de la elección particular de los ejes coordenados.

razón de deformación volumétrica [141]: Razón de cambio de volumen de una *partícula de fluido* por unidad de volumen. También se le llama razón de dilatación volumétrica.

razón de rotación [139]: La velocidad angular, o razón de giro, de una *partícula de fluido* (un vector, con unidades rad/s, dado por 1/2 del rotacional del vector de velocidad). Vea también *vorticidad*.

región de flujo invíscida [9, 327, 481]: Región de un flujo de fluido donde las fuerzas viscosas son suficientemente pequeñas en relación con otras fuerzas (por lo usual, fuerzas de presión) sobre las *partículas de fluido* en esta región del flujo como para ser despreciables en la *segunda Ley de Newton* del movimiento hasta un buen nivel de aproximación (compare con *flujo viscoso*). Vea también *flujo sin fricción*. Una región invíscida de flujo no necesariamente es *irrotacional*.

reología [427]: El estudio y representación matemática de la deformación de diferentes fluidos en respuesta a fuerzas de superficie, o *esfuerzo*. Las relaciones matemáticas entre esfuerzo y razón de deformación se llaman *ecuaciones constitutivas*. La relación newtoniana entre *esfuerzo* y *razón de deformación* es el ejemplo más simple de una ecuación constitutiva reológica. Vea también *fluido newtoniano* y *no-newtoniano*.

segunda Ley de Newton [230]: Vea *conservación de cantidad de movimiento*.

separación de flujo [6, 569]: Fenómeno donde una *capa límite* adyacente a una superficie sólida se fuerce a dejar la superficie, o “separarse” de ella, debido a fuerza de presión “adversa” (es decir: presión creciente) en la dirección del flujo. La separación del flujo ocurre en regiones de gran curvatura de superficie, por ejemplo, en la parte trasera de un automóvil y otros cuerpos romos.

similitud [277, 522]: Principio que permite relacionar cuantitativamente un flujo con otro cuando se satisfacen ciertas condiciones. La *similitud geométrica*, por ejemplo, debe ser verdadera antes de poder esperar la *similitud cinemática* o *dinámica*. La relación cuantitativa que relaciona un flujo con otro se desarrolla con una combinación de análisis dimensional y datos (por lo general experimentales, pero, también numéricos o teóricos).

similitud cinemática [277]: Si dos objetos son *geométricamente similares*, entonces, si las razones de todas las componentes de velocidad entre un punto en el flujo que

rodea un objeto, y el mismo punto escalado de manera adecuada en el flujo que rodea al otro objeto, son iguales en todos los pares de puntos correspondientes, el flujo es *cinemáticamente similar*.

similitud cinemática [279]: Vea *similitud*.

similitud dinámica [278]: Si dos objetos son *geométrica* y *cinemáticamente similares*, entonces, si las razones de todas las fuerzas (presión, esfuerzo viscoso, fuerza de gravedad, etcétera) entre un punto en el flujo que rodea un objeto, y el mismo punto escalado de manera adecuada en el flujo que rodea al otro objeto, son iguales en todos los pares de puntos correspondientes, el flujo es *dinámicamente similar*.

similitud dinámica [278]: Vea *similitud*.

similitud geométrica [277]: Dos objetos de diferentes tamaños son geométricamente similares si tienen la misma forma geométrica (por ejemplo, si todas las dimensiones de uno son un múltiplo constante de las correspondientes dimensiones del otro).

similitud geométrica: Vea *similitud*.

sistema [14, 148]: De manera usual, cuando se emplea la palabra *sistema* por sí misma, se implica *sistema cerrado*, en contraste con un *volumen de control* o *sistema abierto*.

sistema abierto [14, 149]: Igual que *volumen de control*.

sistema abierto [14]: Volumen especificado para análisis donde el flujo atraviesa al menos una parte de la superficie del volumen. También se le llama *volumen de control*.

sistema cerrado [14, 148]: Vea *sistema*.

sistema cerrado [14]: Volumen que se especifica para análisis que siempre encierra las mismas *partículas de fluido*. Por lo tanto, ningún flujo atraviesa parte alguna de la superficie del volumen y un sistema cerrado se debe mover con el flujo. Note que el análisis de la Ley de Newton de las partículas sólidas por lo general es un análisis de *sistema cerrado*, que en ocasiones se le conoce como cuerpo libre. También se le llama *masa de control*.

sistema inglés [15]: Vea *unidades*.

sistema SI [15]: Vea *unidades*.

sólido: Material que, cuando se corta, se deforma a una posición estática fija (luego de que se detiene la deformación) o se fractura. Vea también *fluido*.

sonda de Pitot estática [190, 365]: Dispositivo que se usa para medir la velocidad del fluido a través de la aplicación de la ecuación de Bernoulli, con medición simultánea de *presiones estática* y *estancamiento*. También se le llama sonda Pitot-Darcy o tubo de Prandtl.

sónico [10]: A la velocidad del sonido (*número de Mach* = 1).

subcapa inercial [340]: Una parte enormemente turbulenta de una capa límite turbulenta, cerca de la pared justo afuera de la *subcapa viscosa* y la *capa de amortiguamiento*, donde los *esfuerzos turbulentos* son grandes en comparación con los *esfuerzos viscosos*.

subcapa viscosa [340, 534, 580]: Parte de una capa límite turbulenta adyacente a la superficie sólida que contiene el mayor *esfuerzo viscoso*. El gradiente de velocidad en esta capa adyacente a la superficie sólida es excepcionalmente elevado. Vea también *capa inercial* y *capa de amortiguamiento*.

subsónico [10]: Por abajo de la velocidad del sonido (*número de Mach* < 1).

supersónico [10]: Por arriba de la velocidad del sonido (*número de Mach* > 1).

técnica de fotografía por sombras [135]: Técnica experimental para visualizar flujos con base en la refracción de la luz proveniente de densidad variable de fluido. El nivel de iluminación en una imagen de fotografía por sombras responde a la segunda derivada espacial de la densidad.

técnica de schlieren [135]: Técnica experimental para visualizar flujos con base en la refracción de la luz a partir de la densidad variable del fluido. El nivel de iluminación en una imagen schlieren responde a la primera derivada espacial de la densidad.

temperatura de saturación [39]: Temperatura a la que la fase de una sustancia simple compresible cambia entre líquida y vapor a presión fija.

tensión superficial [51]: Fuerza por unidad de longitud en una interfase líquido-vapor o líquido-líquido que resulta del desequilibrio en las fuerzas de atracción entre las moléculas dentro del líquido y las moléculas en la interfase.

tensor de esfuerzo [233, 421]: Vea *esfuerzo*.

tensor de esfuerzo deviatórico [427]: Otro término para *tensor de esfuerzo viscoso*. Vea *esfuerzo*.

tensor de esfuerzo viscoso [427]: Vea *esfuerzo*. También se llama *tensor de esfuerzo desviatorio*.

teorema de transporte de Reynolds [149]: Relación matemática entre la razón de cambio en el tiempo de una propiedad de fluido en un *sistema* (volumen de masa fija que se mueve con el flujo) y la razón de cambio en el tiempo de una propiedad de fluido en un *volumen de control* (volumen, por lo usual fijo en el espacio, con masa de fluido que se mueve a través de su superficie). Esta expresión de volumen finito está cercanamente relacionada con la *derivada material* (con respecto al *tiempo*) de una propiedad de fluido unida a una *partícula de fluido* en movimiento. Vea también *leyes de conservación*.

teorema Pi de Buckingham [282]: Teorema matemático que se usa en *análisis dimensional,* con el que se predice el número de grupos adimensionales que deben estar funcionalmente relacionados a partir de un conjunto de parámetros dimensionales que se piensa están funcionalmente relacionados.

totalmente desarrollado [294, 325, 440]: Usado por sí mismo, el término generalmente se entiende para implicar una región de flujo hidrodinámica totalmente desarrollada, donde el campo de velocidad es constante a lo largo de una dirección específica en el flujo. En la región totalmente desarrollada de flujo en tubería o ducto, el campo de velocidad es constante en la dirección axial, x (es decir: es independiente de x), de modo que las derivadas de velocidad con respecto a x son cero en la región totalmente desarrollada. También existe el concepto de "térmicamente totalmente desarrollado" para el campo de temperatura; sin embargo, a diferencia de las regiones hidrodinámicamente totalmente desarrolladas, donde tanto la magnitud como la forma del perfil velocidad son constantes en

x, en las regiones térmicamente totalmente desarrolladas sólo la forma del perfil de temperatura es constante en x. Vea también *longitud de entrada*.

trabajo [202]: Vea *energía*.

trabajo de flujo [205]: El término de trabajo en la *primera ley de la termodinámica* que se aplica a flujo de fluido asociado con fuerzas de presión sobre el flujo. Vea *energía*, *energía de flujo*.

trabajo de presión: Vea *trabajo de flujo*.

trayectoria: Vea *línea de trayectoria*.

tridimensional [563]: Vea *dimensionalidad*.

tubo de corriente [130]: Un haz de líneas de corriente. De manera usual, un tubo de corriente se visualiza como una superficie formada por un número infinito de líneas de corriente que inician en el flujo a lo largo de un circuito circular y tienden a formar una superficie con forma de tubo en alguna región del flujo.

unidades [15, 270]: Sistema específico para cuantificar numéricamente las dimensiones de una cantidad física. Los sistemas de unidades más comunes son el SI (kg, N, m, s), el sistema inglés (lbm, lbf, ft, s), BGS (slug, lb, ft, s) y cgs (g, dina, cm, s). Vea también *dimensiones*.

unidimensional [12]: Vea *dimensionalidad*.

vector de posición material [124]: Vector [$x_{\text{partícula}}(t)$, $y_{\text{partícula}}(t)$, $z_{\text{partícula}}(t)$] que define la posición de una *partícula material* como función del tiempo. Por lo tanto, el vector de posición material en un flujo de fluido define la trayectoria de una *partícula de fluido* en el tiempo.

velocidad: Vector que cuantifica la razón de cambio en la posición y la dirección de movimiento de una partícula material.

velocimetría de imagen de partícula (PIV, por sus siglas en inglés) [131, 380]: Técnica para medir una componente de velocidad local en un flujo con base en el rastreo del movimiento de pequeñas partículas en el flujo durante un corto tiempo con el uso de láseres pulsátiles. A diferencia de la *anemometría de hilo caliente* y de *película caliente*, y al igual que la velocimetría Doppler láser, no hay interferencia en el flujo.

velocímetro Doppler láser (LDV) [378]: También se llama Anemometría Doppler láser (LDA). Técnica para medir una componente de velocidad local en un flujo con base en el efecto Doppler de desplazamiento hacia el rojo asociado con el paso de partículas pequeñas en el flujo a través del pequeño volumen de blanco formado por el cruce de dos haces de láser. A diferencia de la *anemometría de hilo caliente* y de *película caliente*, y al igual que la *velocimetría de imagen de partícula*, no existe interferencia con el flujo.

viscosidad [46, 580]: Vea *fluido newtoniano*. La viscosidad es una propiedad de un fluido que cuantifica la razón de esfuerzo de corte a la razón de deformación de una *partícula de fluido* (por tanto, la viscosidad tiene las dimensiones de esfuerzo dividido sobre razón de deformación, o $Ft/L^2 = m/Lt$). Cualitativamente, la viscosidad cuantifica el nivel por medio del cual un fluido particular resiste la deformación cuando se le sujeta al esfuerzo de corte (resistencia debida a *fricción*). La viscosidad es una propiedad de un fluido que se puede medir experimentalmente y depende de la temperatura. Para fluidos newtonianos, la viscosidad es independiente de la razón de esfuerzo aplicado y de la razón de deformación. La naturaleza viscosa de los *fluidos no-newtonianos* es más difícil de cuantificar, en parte porque la viscosidad varía con la razón de deformación. Los términos *viscosidad absoluta*, *viscosidad dinámica* y *viscosidad* son sinónimos. Vea también *viscosidad cinemática*.

viscosidad absoluta [47]: Vea *viscosidad*.

viscosidad cinemática [48]: *Viscosidad* dinámica (absoluta) de fluido dividida entre densidad.

viscosidad dinámica [47]: Vea *viscosidad*.

viscosidad turbulenta [337]: Vea *modelos de turbulencia*.

viscosidad turbulenta [337]: Vea *modelos de turbulencia*.

volumen de control [14, 122, 148]: Volumen que se especifica para análisis donde el flujo entra y/o sale a través de cierta porción de la superficie que limita el volumen. También se llama *sistema abierto* (vea *sistema*).

volumen/área/longitud diferencial: Un pequeño volumen δV, área δA o longitud δx en el límite del volumen/área/longitud que se encoge a un punto. Por lo general, en este punto se producen derivadas (note que d a veces se escribe como Δ o d.)

vórtice de punta [134]: *Vórtice* que se forma en cada punta del ala de un avión como un subproducto de la sustentación. Sinónimo de *vórtice de arrastre*. Vea también *arrastre inducido*.

vórtice de salida [595]: Vea *vórtice de punta*.

Vórtice o remolino: Estructura local en un flujo de fluido que se caracteriza por una concentración de vorticidad (es decir: giro o rotación de *partícula de fluido*) en un núcleo tubular con líneas de corriente circulares alrededor del eje del núcleo. Los tornados, huracanes y vórtices en los drenajes de las bañeras son ejemplos comunes de vórtices. El flujo turbulento está lleno de pequeños vórtices de diversos tamaños, intensidades y orientaciones.

vorticidad [144]: El doble de la velocidad angular, o razón de giro, de una *partícula de fluido* (un vector, con unidades rad/s, dado por el rotacional del vector de velocidad). Vea también *razón de rotación*.

Índice

A

B

C

D

E

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

R

T

U

V

W

Z

Nomenclatura

a — Constante de Manning m$^{1/3}$/s; altura desde el fondo del canal hasta el borde inferior de la compuerta de desagüe, m
$\vec{a}$, a — Aceleración y su magnitud, m/s^2
A, A_c — Área, m^2; área de sección transversal, m^2
Ar — Número de Arquímedes
AR — Razón de las dimensiones geométricas (*aspect ratio*)
b — Lo ancho u otra distancia, m; propiedad intensiva en el análisis del TTR; ancho del álabe de turbomáquina, m
bhp — Potencia al freno, hp o kW
B — Punto de aplicación de fuerza de flotabilidad (centro de flotabilidad); propiedad extensiva en el análisis del TTR
Bi — Número de Biot
Bo — Número de Bond
c — Calor específico de la sustancia incompresible, kJ/kg · K; velocidad del sonido, m/s; velocidad de la luz en el vacío, m/s; longitud de cuerda del perfil aerodinámico, m
c_0 — Velocidad de onda, m/s
c_p — Calor específico a presión constante, kJ/kg · K
c_v — Calor específico a volumen constante, kJ/kg · K
C — Cantidad de luz como la magnitud primaria
C — Constante de Bernoulli, m^2/s^2 o m/t^2 · L, dependiendo de la forma de la ecuación de Bernoulli; coeficiente de Chezy, m$^{1/2}$/s; la longitud de la circunferencia, m
Ca — Número de cavitación
C_D, $C_{D,x}$ — Coeficiente de arrastre; coeficiente de arrastre local
C_d — Coeficiente de descarga
C_f, $C_{f,x}$ — Factor de fricción de Fanning o coeficiente de fricción superficial; coeficiente de fricción superficial local
C_H — Coeficiente de carga hidrostática
C_L, $C_{L,x}$ — Coeficiente de sustentación; coeficiente de sustentación local
C_{NPSH} — Coeficiente de carga de aspiración neta positiva (NPSH, *net positive suction head*)
CP — Punto de aplicación de fuerza de presión (centro de presión)
C_p — Coeficiente de presión
C_P — Coeficiente de potencia
C_Q — Coeficiente de capacidad
CS — Superficie de control
CV — Volumen de control
C_{wd} — Coeficiente de descarga de vertedero
D o d — Diámetro, m (por lo común d se usa para un diámetro más pequeño que D)
D_{AB} — Coeficiente de difusión de especie, m^2/s
D_h — Diámetro hidráulico, m
D_p — Diámetro de partícula, m
e — Energía total específica, kJ/kg
$\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ — Vector unitario en la dirección r y θ, respectivamente
E — Voltaje, V
E, $\dot{E}$ — Energía total, kJ; y razón de cambio de energía total, kJ/s
Ec — Número de Eckert
EGL — Línea de energía o de alturas totales, m
E_s — Energía específica de flujos en canal abierto, m
Eu — Número de Euler
f — Frecuencia, ciclos/s; variable dependiente en la teoría de Blasius de capa límite
f, f_x — Factor de fricción de Darcy; y factor de fricción de Darcy local
$\vec{F}$, F — Fuerza y su magnitud, N
F_B — Magnitud de la fuerza de flotación, N
F_D — Magnitud de la fuerza de arrastre, N
F_f — Magnitud de la fuerza de arrastre debida a la fricción, N
F_L — Magnitud de la fuerza de sustentación, N
Fo — Número de Fourier
Fr — Número de Froude
F_T — Magnitud de la fuerza de tensión, N
$\vec{g}$, g — Aceleración gravitacional y su magnitud, m/s
$\dot{g}$ — Razón de generación de calor por unidad de volumen, W/m^3
G — Punto de aplicación de fuerza de gravedad (centro de gravedad)
GM — Altura metacéntrica, m
Gr — Número de Grashof
h — Entalpía específica, kJ/kg; altura, m; carga hidrostática, m; coeficiente de transferencia de calor por convección, W/m^2 · K
h_{fg} — Calor latente de vaporización, kJ/kg
h_L — Pérdidas de carga hidrostática, m
H — Factor de forma de la capa límite; altura, m; carga hidrostática neta de una bomba o turbina, m; energía total de un líquido de flujo en canal abierto, expresada como carga hidrostática, m; carga hidrostática de vertedero, m
$\vec{H}$, H — Momento de la cantidad de movimiento y su magnitud, N · m · s
LGH — Línea de gradiente hidráulico o línea de alturas piezométricas, m
H_{total} — Carga total que actúa en una turbina, m
i — Índice de intervalos en una malla de DFC (por lo común en la dirección x)
$\vec{i}$ — Vector unitario en la dirección x
I — Corriente eléctrica como la magnitud primaria
I — Momento de inercia, N · m · s^2; corriente, A; intensidad de turbulencia
I_{xx} — Segundo momento de inercia, m^4
j — Reducción en el teorema Pi de Buckingham; índice de intervalos en la malla de DFC (por lo común en la dirección y)

$\vec{j}$	Vector unitario en la dirección *y*
Ja	Número de Jakob
k	Razón de calores específicos; número esperado de parámetros adimensionales Π en el teorema Pi de Buckingham; conductividad térmica, W/m · K; energía cinética de turbulencia por unidad de masa, m^2/s^2; índice de intervalos en una malla de DFC (por lo común en la dirección *z*)
$\vec{k}$	Vector unitario en la dirección *z*
ke	Energía cinética específica, kJ/kg
K	Intensidad de doblete, m^3/s
EC	Energía cinética, kJ
K_L	Coeficiente de pérdidas menores
Kn	Número de Knudsen
ℓ	Longitud o distancia, m; longitud característica de turbulencia, m
L	Longitud como la magnitud primaria, m
L	Longitud o distancia, m
Le	Número de Lewis
L_c	Longitud de la cuerda de un perfil aerodinámico; longitud característica, m
L_h	Longitud de entrada de capa límite hidrodinámica, m
L_w	Longitud de vertedero, m
m	Masa como la magnitud primaria
$m, \dot{m}$	Masa, kg; y flujo másico o razón de transferencia de masa, kg/s
M	Masa molar, kg/kmol
$\vec{M}, M$	Momento de fuerza y su magnitud, N · m
Ma	Número de Mach
n	Número de parámetros en el teorema Pi de Buckingham; coeficiente de Manning
$n, \dot{n}$	Número de rotaciones; y razón de rotación, rpm
$\vec{n}$	Vector normal unitario
N	La cantidad de sustancia como la magnitud primaria
N	Número de moles, mol o kmol; número de álabes en una turbomáquina
N_P	Número de potencia
NPSH	Carga de aspiración neta positiva (NPSH, *net positive suction head*), m
N_{Sp}	Velocidad específica de la bomba
N_{St}	Velocidad específica de la turbina
Nu	Número de Nusselt
p	Perímetro mojado, m
ep	Energía potencial específica, kJ/kg
P, P'	Presión y presión modificada, N/m^2 o Pa
PE	Energía potencial, kJ
Pe	Número de Peclet
P_{man}	Presión manométrica, N/m^2 o Pa
P_m	Presión mecánica, N/m^2 o Pa
Pr	Número de Prandtl
P_{sat} o P_v	Presión de saturación o presión de vapor, kPa
P_{vac}	Presión de vacío, N/m^2 o Pa
P_w	Altura de vertedero, m
q	Transferencia de calor por unidad de masa, kJ/kg
$\dot{q}$	Flujo de calor por unidad de área (razón de transferencia de calor por unidad de área), W/m^2
$Q, \dot{Q}$	Transferencia de calor total, kJ; y razón de transferencia de calor, W o kW
Q_{EAS}	Sesgo equiángulo en una malla de DFC
$\vec{r}, r$	Vector de brazo de palanca y su magnitud, m; coordenada radial, m; radio, m
R	Constante de los gases, kJ/kg · K; radio, m; resistencia eléctrica, Ω
Ra	Número de Rayleigh
Re	Número de Reynolds
R_h	Radio hidráulico, m
Ri	Número de Richardson
R_u	Constante universal de los gases, kJ/kmol · K
s	Distancia a lo largo del plano de una placa sumergida, m; distancia a lo largo de una superficie o línea de corriente, m; entropía específica, kJ/kg · K; distancia entre las franjas en LDV, m; espaciamiento de álabes de turbomáquina, m
S_0	Pendiente del fondo de un canal en caso del flujo en un canal abierto
Sc	Número de Schmidt
S_c	Pendiente crítica del fondo de un canal en caso del flujo en un canal abierto
S_f	Pendiente de fricción del fondo de un canal en caso del flujo en un canal abierto
DR	Densidad relativa que equivale a gravedad específica relativa (SG, *specific gravity*, por sus siglas en inglés)
Sh	Número de Sherwood
PE	Propiedad en el punto de estancamiento
St	Número de Stanton; número de Strouhal
Stk	Número de Stokes
t	Tiempo como la magnitud primaria
t	Tiempo, s
T	Temperatura como la magnitud primaria
T	Temperatura, °C o K
$\vec{T}$, T	Par de torsión (torque) y su magnitud, N · m
u	Energía interna específica, kJ/kg; componente de velocidad en coordenadas cartesianas en la dirección *x*, m/s
u_*	Velocidad de fricción en capa límite turbulenta, m/s
u_r	Componente de velocidad en coordenadas cilíndricas en la dirección *r*, m/s
u_θ	Componente de velocidad en coordenadas cilíndricas en la dirección θ, m/s
u_z	Componente de velocidad en coordenadas cilíndricas en la dirección *z*, m/s
U	Energía interna, kJ; componente *x* de la velocidad fuera de la capa límite (paralela a la superficie sólida), m/s
v	Componente de velocidad en coordenadas cartesianas en la dirección *y*, m/s
v	Volumen específico, m^3/kg
$V, \dot{V}$	Volumen, m^3; y flujo volumétrico, m^3/s
$\vec{V}, V$	Velocidad y su magnitud (rapidez), m/s; velocidad promedio, m/s
V_0	Velocidad de flujo uniforme en caso del flujo en canal abierto, m/s
w	Trabajo por unidad de masa, kJ/kg; componente de velocidad en coordenadas cartesianas en la dirección *z*, m/s; lo ancho, m
W	Peso, N; lo ancho, m
$W, \dot{W}$	Trabajo, kJ; y trabajo por unidad de tiempo (potencia), W o kW
We	Número de Weber
x	Coordenada cartesiana (por lo común a la derecha), m
$\vec{x}$	Vector de posición, m

y Coordenada cartesiana (por lo común hacia arriba o perpendicular hacia la página), m; profundidad de líquido en flujo en canal abierto, m

y_n Profundidad normal de flujo en canal abierto, m

z Coordenada cartesiana (por lo regular hacia arriba), m

Letras griegas

α Ángulo; ángulo de ataque; factor de corrección de energía cinética; difusividad térmica, m^2/s; coeficiente de compresibilidad isotérmica, kPa^{-1} o atm^{-1}

$\vec{\alpha}, \alpha$ Aceleración angular y su magnitud, s^{-2}

β Coeficiente de expansión volumétrica, K^{-1}; factor de corrección de flujo de cantidad de movimiento; ángulo; relación de diámetros en flujómetros de obstrucción; ángulo de onda de choque oblicua; ángulo de álabe de turbomáquina

δ Espesor de capa límite, m; distancia entre líneas de corriente, m; ángulo; cambio pequeño en una cantidad

δ^* Espesor de desplazamiento de capa límite, m

ε Rugosidad de superficie promedio, m; razón de disipación de turbulencia, m^2/s^3

ε_{ij} Tensor de razón de deformación, s^{-1}

Φ Función de disipación, $kg/m \cdot s^3$

ϕ Ángulo; función de potencial de velocidad, m^2/s

γ_s Peso específico, N/m^3

Γ Circulación o intensidad de torbellino, m^2/s

η Eficiencia; variable independiente en la teoría de Blasius de la capa límite

κ Módulo volumétrico de compresibilidad, kPa o atm; constante en la ley logarítmica de capa límite turbulenta

λ Longitud de trayectoria libre media, m; longitud de onda, m; segundo coeficiente de viscosidad, $kg/m \cdot s$

μ Viscosidad (dinámica o absoluta), $kg/m \cdot s$; ángulo de Mach

ν Viscosidad cinemática m^2/s

ν(Ma) Función de Prandtl-Meyer para ondas de expansión, grados o rad

Π Parámetro adimensional en el análisis dimensional

θ Ángulo o coordenada angular; espesor de capa límite de cantidad de movimiento, m; ángulo de inclinación de un álabe de turbomáquina; ángulo de cambio de dirección o de deflexión de onda de choque oblicua

ρ Densidad, kg/m^3

σ Esfuerzo normal, N/m^2

σ_{ij} Tensor de esfuerzo, N/m^2

σ_s Tensión superficial, N/m

τ Esfuerzo cortante, N/m^2

τ_{ij} Tensor de esfuerzo viscoso (conocido también como tensor de esfuerzo cortante), N/m^2

$\tau_{ij,\ \text{turbulento}}$ Tensor de esfuerzo específico de Reynolds, m^2/s^2

$\vec{\omega}, \omega$ Vector de velocidad angular y su magnitud, rad/s; frecuencia angular, rad/s

ψ Función de corriente, m^2/s

$\vec{\zeta}, \zeta$ Vector de vorticidad y su magnitud, s^{-1}

Subíndices

∞ Propiedad del campo lejano

0 Propiedad de estancamiento; propiedad en el origen o en un punto de referencia

abs Absoluta

atm Atmosférica

prom Promedio

b Propiedad de la parte posterior o a la salida de una tobera, por ejemplo, contrapresión (*back pressure*) P_b

C Que actúa en el centroide

c Que pertenece a una sección transversal (*cross-section*)

cr Propiedad crítica

LC Que pertenece a la línea central

SC Que pertenece a la superficie de control

VC Que pertenece a un volumen de control

e Propiedad en una salida (*exit*); porción extraída

eff Propiedad efectiva

f Propiedad de un fluido, por lo común de un líquido

H Que actúa horizontalmente

lam Propiedad de un flujo laminar

L Porción perdida por irreversibilidades

m Propiedad de un modelo

máx Valor máximo

mec Propiedad mecánica

mín Valor mínimo

n Componente normal

P Que actúa en el centro de presión

p Propiedad de un prototipo; propiedad de una partícula; propiedad de un émbolo (piston)

R Resultante

r Relativo (marco de referencia móvil)

rec Propiedad rectangular

rl Propiedad del borde delantero del rotor (*rotor leading edge*)

rt Propiedad del borde posterior del rotor (*rotor trailing edge*)

S Que actúa en una superficie

s Propiedad de un sólido

sat Propiedad de saturación; propiedad de un satélite

sl Propiedad del borde delantero del estator (*stator leading edge*)

st Propiedad del borde posterior del estator (*stator trailing edge*)

sub Porción sumergida

sys Que pertenece a un sistema

t Componente tangencial

tri Propiedad triangular

turb Propiedad de un flujo turbulento

u Porción útil

V Que actúa verticalmente

v Propiedad de un vapor

vac Vacío

w Propiedad en la pared (superficie sólida)

Superíndices

¯ (barra) Cantidad promediada

˙ (punto) Cantidad por unidad de tiempo; derivada con respecto al tiempo

′ (prima) Cantidad de fluctuación; derivada de una variable; variable modificada

* Propiedad adimensional; propiedad sónica

\+ Variables adimensionales en las ecuaciones para perfil de velocidad de capa límite turbulenta sobre la placa plana

→ (flecha) Cantidad vectorial

Factores de conversión

MAGNITUD	SISTEMA MÉTRICO	SISTEMA MÉTRICO INGLÉS
Aceleración	1 m/s^2 = 100 cm/s^2	1 m/s^2 = 3.2808 ft/s^2 1 ft/s^2 = 0.3048* m/s^2
Área	1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10^6 mm^2 = 10^{-6} km^2	1 m^2 = 1550 in^2 = 10.764 ft^2 1 ft^2 = 144 in^2 = 0.09290304* m^2
Densidad	1 g/cm^3 = 1 kg/L = 1000 kg/m^3	1 g/cm^3 = 62.428 lbm/ft^3 = 0.036127 lbm/in^3 1 lbm/in^3 = 1728 lbm/ft^3 1 kg/m^3 = 0.062428 lbm/ft^3
Energía, calor, trabajo y energía específica	1 kJ = 1000 J = 1000 N · m = 1 kPa · m^3 1 kJ/kg = 1000 m^2/s^2 1 kWh = 3600 kJ	1 kJ = 0.94782 Btu 1 Btu = 1.055056 kJ = 5.40395 psia · ft^3 = 778.169 lbf · ft 1 Btu/lbm = 25,037 ft^2/s^2 = 2.326* kJ/kg 1 kWh = 3412.14 Btu
Fuerza	1 N = 1 kg · m/s^2 = 10^5 dinas 1 kgf = 9.80665 N	1 N = 0.22481 lbf 1 lbf = 32.174 lbm · ft/s^2 = 4.44822 N 1 lbf = 1 slug · ft/s^2
Longitud	1 m = 100 cm = 1000 mm = 10^6 μm 1 km = 1000 m	1 m = 39.370 in = 3.2808 ft = 1.0926 yd 1 ft = 12 in = 0.3048* m 1 milla = 5280 ft = 1.6093 km 1 in = 2.54* cm
Masa	1 kg = 1000 g 1 tonelada = 1000 kg	1 kg = 2.2046226 lbm 1 lbm = 0.45359237* kg 1 onza = 28.3495 g 1 slug = 32.174 lbm = 14.5939 kg 1 tonelada corta = 2000 lbm = 907.1847 kg
Potencia	1 W = 1 J/s 1 kW = 1000 W = 1 kJ/s 1 hp‡ = 745.7 W	1 kW = 3412.14 Btu/h = 1.341 hp = 737.56 lbf · ft/s 1 hp = 550 lbf · ft/s = 0.7068 Btu/s = 42.41 Btu/min = 2544.5 Btu/h = 0.74570 kW 1 Btu/h = 1.055056 kJ/h
Presión o esfuerzo, y presión expresada como carga hidrostática	1 Pa = 1 N/m^2 1 kPa = 10^3 Pa = 10^{-3} MPa 1 atm = 101.325 kPa = 1.01325 bar = 760 mm Hg a 0°C = 1.03323 kgf/cm^2 1 mm Hg = 0.1333 kPa	1 Pa = 1.4504 × 10^{-4} psi = 0.020886 lbf/ft^2 1 psi = 144 lbf/ft^2 = 6.894757 kPa 1 atm = 14.696 psi = 29.92 pulgadas Hg a 30°F 1 pulgada Hg = 13.60 pulgadas H_2O = 3.387 kPa
Calor específico	1 kJ/kg · °C = 1 kJ/kg · K = 1 J/g · °C	1 Btu/lbm · °F = 4.1868 kJ/kg · °C 1 Btu/lbmol · R = 4.1868 kJ/kmol · K 1 kJ/kg · °C = 0.23885 Btu/lbm · °F = 0.23885 Btu/lbm · R
Volumen específico	1 m^3/kg = 1000 L/kg = 1000 cm^3/g	1 m^3/kg = 16.02 ft^3/lbm 1 ft^3/lbm = 0.062428 m^3/kg
Temperatura	T(K) = T(°C) + 273.15 ΔT(K) = ΔT(°C)	T(R) = T(°F) + 459.67 = 1.8T(K) T(°F) = 1.8 T(°C) + 32 ΔT(°F) = ΔT(R) = 1.8* ΔT(K)
Velocidad	1 m/s = 3.60 km/h	1 m/s = 3.2808 ft/s = 2.237 mi/h 1 mi/h = 1.46667 ft/s 1 mi/h = 1.6093 km/h
Viscosidad, dinámica	1 kg/m · s = 1 N · s/m^2 = 1 Pa · s = 10 poise	1 kg/m · s = 2419.1 lbm/ft · h = 0.020886 lbf · s/ft^2 = 0.67197 lbm/ft · s

* Factor de conversión exacto entre unidades métricas e inglesas.

‡Potencia mecánica. La potencia eléctrica se toma exactamente como 746 W.